

Estimação e Selecção de Caos Determinístico em Séries Temporais Financeiras

Pedro Fortes Ferreira

Dissertação para a obtenção do grau de Doutor em Gestão

Especialização em Métodos Quantitativos

Orientador: Diana Elisabeta Aldea Mendes
Prof. Associada, Departamento de Métodos Quantitativos,
ISCTE - IUL

Julho de 2013

Resumo

Procuramos a existência de dinâmicas não-lineares determinísticas (caos provável) nas séries financeiras discretas univariadas observadas, isto é, na *commodity* das licenças de carbono (*EUETSYR2 INDEX*), subjacente ao *European Union Emission Trading Scheme* (*EU ETS*) para mitigação do CO_2, nas *commodities* energéticas provenientes dos principais combustíveis fósseis (petróleo bruto (*USCRWTIC INDEX*), gás natural (*NG1 COMB comdty*), carvão (*API21 MON MCCL INDEX*), e nas sucessões cronológicas de cotações das acções de *utilities* das principais construtoras de eólicas europeias (*Acciona* (*ANA SM EQUITY*), *Gamesa* (*GAM SM EQUITY*), *Nordex* (*NDX1 GR EQUITY*), *Repower* (*RPW GR EQUITY*), *Siemens* (*SIE GR EQUITY*), *Vestas* (*VWSDC EQUITY*)), sabendo da ocorrência de relações não-lineares (não-determinísticas) entre os preços das licenças de carbono e os seus factores fundamentais, tais como, os preços das *commodities* energéticas, factores de risco macroeconómicos e climáticos (Lutz *et al.* (2013) [317]). Parece-nos assim fazer todo o sentido detectar a ocorrência de caos determinístico nos sinais observados, devido ao aumento persistente dos preços dos combustíveis fósseis (com volatilidade acentuada), ao crescimento global da economia, ao aumento da procura das *commodities* energéticas nos países em desenvolvimento, e às restrições adicionais na oferta de combustíveis fósseis, devido aos atrasos de tempo nos investimentos com capacidade produtiva. Isto é, por um lado, as restrições da oferta dos combustíveis energéticos são fundamentais nos estudos aprofundados sobre as moções caóticas determinísticas nas *commodities* (de imediato) e noutros activos, em geral, e, em particular, nas séries financeiras das *commodities* observadas. Por outro lado, as organizações industriais dos mercados das *commodities* energéticas e das *utilities* das principais construtoras de eólicas europeias são essencialmente oligopolísticas, aumentando o interesse na detecção do caos determinístico nos sinais observados.

Os resultados da análise exploratória nas séries temporais de rendibilidades das *commodities* e das *utilities* estudadas permitem-nos concluir que estas são não-Gaussianas, apresentam distribuições leptocúrticas, com medidas de assimetria próximos de zero, e distribui-

ções não-*iid*, devido à existência de agrupamentos de alta volatilidade (*volatility clustering*). Mais ainda, os resultados do teste ADF paramétrico de Dickey e Fuller (1979) [130] e do teste PP não-paramétrico de Phillips e Perron (1988) [409], ao nível de significância de 5%, são contra a hipótese da eficiência dos mercados (HME) nas séries temporais de rendibilidades de preços dos activos. Por outro lado, os resultados dos testes estatísticos (estatística F, e estatística LM) de efeitos ARCH de Engle (1982) [151] nos resíduos dos modelos nas séries temporais de rendibilidades das *commodities* (excepto, para as licenças de carbono e carvão) e das *utilities* observadas, rejeitam a hipótese nula de ausência de efeitos ARCH, pelo que os processos subjacentes apresentam um ruído colorido (isto é, um ruído dependente do estado).

Agora, o método misto proposto neste trabalho, subjacente às técnicas de mergulho não-uniforme (Judd e Mees (1995) [261] e Judd e Mees (1998) [263]) e à estimação dos pontos de saturação fractal D (Takens (1985) [491]) para dimensões sucessivas de mergulho, permitiu minorar os erros de predição não-lineares ($EPNL \leq 20\%$), com base nos modelos de constante local (Small e Tse (2004) [474]) ajustados às séries temporais de preços do *carvão*, da *Acciona*, da *Gamesa* e da *Repower*, pelo que obtivemos dimensões óptimas de mergulho ($5 \leq d_e < 10$), que facultam a ocorrência de moções não-lineares complexas: caos e ruído aditivo em dimensões altas. Por outro lado, os valores estimados das dimensões de correlação ($D_2 \in [0.11, 0.14]$) nas escalas maiores ε, nestas séries, com base no método de aproximação à contagem de caixas, sugerem uma vez mais a existência de moções não-lineares determinísticas, aproximando-se dos valores calculados por Iseri *et al.* (2008) [250] ($D_2 \in [0.14, 0.16]$) na região de escala.

Na procura da evidência de divergência exponencial entre trajectórias próximas nos estados iniciais, procedeu-se ao cálculo do expoente de Lyapunov maximal, λ_1, nas séries temporais de preços das *commodities* e das *utilities* observadas, com base no algoritmo proposto por Sato *et al.* (1987) [439] e Kurths e Herzel (1987) [289]. Assim, os valores dos λ_1 calculados ($\lambda_1 \in [0.006, 0.079]$), para os parâmetros de mergulho estimados previamente ($d_e^{max} \leq 31$, $T(I(T)) \leq 13$) e para horizontes temporais curtos ($t_h = 5$), aproximam-se parcialmente dos resultados calculados por Rosenstein *et al.* (1993)[425] nas simulações experimentais no sistema hiper-caótico de Rössler (1979) [426] ($\lambda_1 \in [0.048, 0.112]$), com algum ruído aditivo, reforçando a existência provável de caos.

Por fim, o teste de Brock *et al.* (1996) [71] (teste BDS) para o integral de correlação, aplicado à única sucessão cronológica de rendibilidades seleccionada (*Acciona*), de acordo com o método misto apresentado, mostra a dependência em série e a provável detecção

de caos determinístico. Por outro lado, a rejeição sistemática das hipóteses nulas dos testes (H_0 - ruído branco, H_1 - ruído filtrado linearmente, H_2 - transformação não-linear monótona de ruído filtrado linearmente), para um nível de significância das estatísticas dos testes de 2%, subjacentes aos sub-rogados lineares *standard* de realização constrangida de Theiler *et al.* (1992) [497] (algoritmos 0, 1, e 2), para a dimensão de correlação D_2 (algoritmo de Sedgewick (1988) [450]) e para o expoente de Lyapunov maximal λ_1 (algoritmo proposto por Sato *et al.* (1987) [439] e Kurths e Herzel (1987) [289]), para cada amostra extraída (11) da série temporal de rendibilidades da *Acciona* ($N = 2372$), com escalas temporais distintas, sugere um reforço acrescido da não-linearidade e da provável complexidade, no sentido do caos determinístico de alta dimensão.

No entanto, os resultados obtidos nas amostras e na sucessão cronológica de rendibilidades da *Acciona* não nos indicam a existência "pura" de regimes complexos no sentido do caos. Torna-se assim possível que a sucessão cronológica de rendibilidades da *Acciona* corresponda a uma transformação não-monótona, ou não-Gaussiana, ou apresente um ruído dependente do estado (ruído colorido), ou em alternativa, seja muito provavelmente um processo misto que resulte de vários processos (caos, não-linear determinístico, correlações lineares, ruído branco aditivo, ruído colorido).

Palavras-chave

Commodities Energéticas, *Commodity* das Licenças de Carbono, *Utilities* das Principais Contrutoras de Eólicas, Aquecimento Global, Protocolo de Kyoto, União Europeia (UE), Esquema de Transação de Emissões (ETE), Mercados Financeiros, Séries Financeiras, Passeios Aleatórios, Estruturas Oligopolísticas, Não-Linearidade, Não-Gaussianidade, Não-Monotonicidade, Caos, Processos Complexos, Ruído Branco, Ruído Filtrado Linearmente, Transformação Não-Linear Monótona de Ruído Filtrado Linearmente, Ruído Colorido, Processos Mistos, Dimensão de Correlação, Expoente Máximo de Lyapunov, Dimensão Alta, Sub-rogados.

Classificação JEL

C01, C02, C15, C18, C22, C51, C52, C53, C58, C63, C65, G13, G14, L13, O13, O14,

O44, Q41, Q42, Q43, Q47, Q54, Q55, Q58

Abstract

The main purpose of this thesis consist in an elaborate search for the existence of deterministic non-linear dynamics (probable chaos) in the considered univariate discrete financial series, i.e., the commodity of carbon allowances (*EUETSYR2 INDEX*), underlying the European Union Emission Trading Scheme (EU ETS) for mitigati- on of CO_2, the energy commodities from major fossil fuels (crude oil (*USCRWTIC INDEX*), natural gas (*NG1 comdty COMB*), coal (*MON API21 MCCL INDEX*)), and the time series of utilities stock prices of the major European wind-turbine builders (*Acciona* (*ANA SM EQUITY*), *Gamesa* (*GAM SM EQUITY*), *Nordex* (*NDX1 GR EQUITY*), *Repower* (*RPW GR EQUITY*), *Siemens* (*SIE GR EQUITY*), *Vestas* (*VWSDC EQUITY*)), having acknowledged the occurrence of nonlinear relationships (non-deterministic) between the prices of carbon allowances and their fundamentals, such as the prices of energy commodities, macroeconomic risk factors and climate (Lutz *et al.* (2013) [317]). Thus, it seems to make sense to try to detect the occurrence of deterministic chaos in the observed signals due to the persistent increase in fossil fuel prices (with sharp volatility), the overall growth of the economy, the increasing demand of energy commodities in developing countries, and the additional constraints on supply of fossil fuels, due to time delays in productive capacity investments. Namely, at one hand, the constraints on supply of energy fuels are fundamental for depth studies in deterministic chaotic motions of commodities (immediately) and other assets in general and, in particular, the financial series of commodities observed. On the other hand, the industrial organizations of the energy commodities and utilities markets for the leading wind-turbine builders in Europe are essentially oligopolistic, which increases the interest in the estimation of deterministic chaos in the observed signals.

The results of the exploratory analysis of the log-returns time series of the commodities and utilities studied allows us to conclude that these are non-Gaussian, show leptokurtic distributions, with measures of asymmetry close to zero, and non-*iid* distributions due to the existence of clusters of high volatility (volatility clustering). Moreover, the results of

the Dickey and Fuller (1979) [130] parametric ADF test and the Phillips and Perron (1988) [409] non-parametric PP test at a significance level of 5%, are against the hypothesis of market efficiency (HME) in the time series of asset prices returns studied. On the other hand, the results of the statistical tests (F statistics, and LM statistics) of Engle's ARCH effects (1982) [151] on the residuals of the models in the return time series of commodities (except, carbon allowances and coal) and utilities reject the null hypothesis of no-ARCH effects, so the underlying processes exhibit a colored noise (quasi, a state dependent noise).

Now, the mixed method proposed, underlying the non-uniform embedding method (Judd e Mees (1995) [261] e Judd e Mees (1998) [263]) and the estimation of fractal D saturation points (Takens (1985) [491]) for successive embedding dimensions, allowed the minimization of nonlinear errors prediction ($EPNL \leq 20\%$), based on models of local constant (Small and Tse (2004) [474]) adjusted to the time series of prices of **coal**, *Acciona*, *Gamesa* and *Repower*, in which we have obtained optimal embedding dimensions ($5 \leq d_e < 10$), providing the occurrence of complex nonlinear motions: chaos and additive noise in high dimensions. Moreover, the estimated values of correlation dimensions ($D_2 \in [0.11, 0.14]$) on larger scales ε, for those time series, based on the box counting approximation method, which are quite close to the values estimated by Iseri *et al.* (2008) [250] ($D_2 \in [0.14, 0.16]$) in the scale region, suggest once again evidences of deterministic motions.

Searching for evidence of exponential divergence between nearby trajectories in the early stages, the maximal Lyapunov exponent, λ_1, was calculated for the time series of prices of commodities and utilities observed, based on the algorithm proposed by Sato *et al.* (1987) [439] e Kurths e Herzel (1987) [289]. Thus, the estimated values of λ_1 ($\lambda_1 \in [0.006, 0.079]$), for the embedding parameters previously obtained ($d_e^{max} \leq 31$, $T(I(T)) \leq 13$) and for short time horizons ($t_h = 5$), are partially near to the results calculated by Rosenstein *et al.* (1993) [425] in experimental simulations within the hyper-chaotic system of Rössler (1979) [426] ($\lambda_1 \in [0.048, 0.112]$) with some additive noise, which reinforces the probability of chaos.

Finally, the Brock *et al.* (1996) [71] test (BDS test) for the integral correlation applied to the sole chronological succession of the returns selected (*Acciona´s returns*) according to the mixed method presented, show the dependence in the series and the probable detection of deterministic chaos. On the other hand, the systematic rejection of the null hypotheses of the tests (H_0 - white noise, H_1 - linearly filtered noise, H_2 - monotonic non-linear transformation of linearly filtered noise), for the significance level of

2%, underlying standard linear surrogates of constrained realization of Theiler *et al.* (1992) [497] (algorithms 0, 1, and 2) for the correlation dimension D_2 (Sedgewick's algorithm (1988) [450]) and for the maximal Lyapunov exponent λ_1 (algorithm proposed by Sato *et al.* (1987) [439] and Kurths e Herzel (1987) [289]), for each extracted sample (11) of the time series of *Acciona´s* returns ($N = 2372$), with distinct time scales, suggests further insight to the nonlinearity and to the probable complexity, in the sense of deterministic chaos on high dimension.

However, the results obtained in samples and in *Acciona´s* returns do not indicate the existence of "pure" complex nonlinear dynamics (chaos). Therefore, it is possible that *Acciona´s* returns corresponds to a non-monotonic transformation, or non-Gaussian, or shows state-dependent noise (colored noise), or alternatively, is likely that it corresponds to a mix of various processes (chaos, nonlinear deterministic, linear correlations, additive white noise, colored noise).

Key-words

Energetic Commodities, Carbon Allowances Commodity, Eolic Main-Building Utilities, Global Warming, Kyoto Protocol, European Union (EU), Emissions Trading Scheme (ETS), Financial Markets, Financial Series, Random Walks, Oligopolistic Structures, Non-Linearity, Non-Gaussianity, Non-Monotonicity, Chaos, Complex Process, White Noise, Linearly Filtered Noise, Monotonic Non-Linear Transformation of Linearly Filtered Noise, Colored Noise, Mix of Processes, Correlation Dimension, Maximal Lyapunov Exponent, High Dimension, Surrogates.

JEL Classification

C01, C02, C15, C18, C22, C51, C52, C53, C58, C63, C65, G13, G14, L13, O13, O14, O44, Q41, Q42, Q43, Q47, Q54, Q55, Q58

Agradecimentos

Gostaria de agradecer à Professora Doutora Diana Aldea Mendes, pela sua disponibilidade permanente, amizade, apoio evidenciado, ensinamentos, capacidade elevada de trabalho, e conhecimento científico na elaboração da dissertação.

Assim, também o meu reconhecimento:

Aos Professores Doutor Rui Menezes e Manuel Alberto Ferreira, do ISCTE-IUL, pelos seus ensinamentos, conhecimento científico e sugestões na área das séries temporais financeiras.

Ao Professor Doutor Luís Catela Nunes da Universidade Nova de Lisboa (UNL) e à Professora Doutora Helena Bacelar Nicolau da Faculdade de Psicologia da Universidade de Lisboa (FPUL), pela minha recomendação ao Programa Doutoral em Gestão no ISCTE-IUL, conhecimento científico, ensinamentos e incentivo à realização deste trabalho.

Ao Professor Doutor Michael Small da Universidade Politécnica de Hong Kong, pelo apoio prestado, conhecimento científico, disponibilidade de meios, e incentivo à concretização do trabalho.

Ao Mestre Dr. Osvaldo Caldeira do ISCAL, pelo conhecimento científico, estímulo e troca de impressões durante a realização da dissertação.

Ao ISCTE-IUL, em particular ao Departamento de Métodos Quantitativos e à Biblioteca pelas condições de trabalho disponibilizadas durante a realização do trabalho.

Para os meus colegas e amigos - Ana Lúcia Thompson, César Morgado Leitão, Ema Vieira Marques, José António Santos, Leonor Bacelar Nicolau e Rita Marques da Silva, pelo apoio, disponibilidade de meios e contribuição permanente ao longo destes anos.

A minha mãe, à minha irmã, aos meus sogros e, em particular ao meu pai e ao meu tio João de Matos Louro.

Finalmente, quero agradecer à minha mulher e aos meus filhos, sem os quais nada disto seria possível.

Para *Afonso, João Pedro, Margarida e Teresa*

Conteúdo

Introdução **1**

1 Dados de *Input*, Estatísticas Descritivas e Análise da Estacionariedade Fraca das Séries Temporais Financeiras **17**

1.1 Introdução 17

1.2 Estatísticas Descritivas 20

1.2.1 O Teste de Normalidade de Jarque e Bera (JB) 25

1.3 Análise da Estacionariedade Fraca em Séries Temporais Financeiras 25

1.3.1 Processo Estacionário em Tendência ou Processo Estacionário às Primeiras Diferenças: A Abordagem Teórica 25

1.3.2 Teste de Estacionariedade com Base no Correlograma 33

1.3.3 Testes de Raízes Unitárias 35

1.3.4 Teste de Kwiatkowski, Phillips, Schmidt, e Shin (KPSS) 61

1.4 Análise Descritiva e Estacionariedade Fraca das Séries Financeiras: *Commodities* e *Utilities* 64

1.4.1 Introdução à Metodologia Empregue 64

1.4.2 Dados de *Input* 66

1.4.3 Análise da Evolução das cotações das *Commodities-Products* 68

1.4.4 Análise da Evolução das cotações das Acções das *Utilities-Eolic Industry Manufacturing* da Europa 74

1.4.5 Análise Exploratória das Rendibilidades das *Commodities-Pro- ducts* e das *Utilities-Eolic Industry Manufacturing* da Europa 77

1.4.6 Análise de Estacionariedade Fraca: Testes ADF de Dickey e Fuller e PP de Phillips e Perron nas Séries Financeiras: *Commodities* e *Utilities* 86

1.4.7 Detecção da Heterocedasticidade nas Rendibilidades Financeiras . . 93

2 Sistemas Não-Lineares Complexos **97**

2.1 Introdução aos Sistemas Não-Lineares Complexos 97

2.2 Conceitos Base de Caos 101

2.3 Sistemas Dinâmicos Determinísticos e Caos 106

2.4 Reconstrução do Atractor a partir de uma Série Tempo- ral Escalar 114

2.4.1 Teorema de Mergulho de Mañé e Takens 115

2.4.2 Prescrições de selecção do Atraso de Tempo 119

2.4.3 Determinação da Dimensão de Mergulho 122

2.4.4 Medidas Dinâmicas e Invariantes Topológicas nas Séries Temporais Complexas 133

2.5 Averiguação de Não-Linearidade e de Determinismo nas Séries Financeiras Observadas 145

2.6 Modelos Complexos: Comentários e Resultados 148

2.6.1 Atrasos de Tempo: Função de Autocorrelação Amostral 148

2.6.2 Atrasos de Tempo: Informação Mútua 152

2.6.3 Erros de Predição Não-Lineares e Índices 153
2.6.4 Dimensões Fractais: Método de Máxima Verosimilhança de Takens . 159
2.6.5 Estimativas das Dimensões de Correlação: Método de Aproximação à Contagem de Caixas 165
2.6.6 Estimativas dos Expoentes Máximos de Lyapunov em Termos dos Erros de Predição 169

3 Sub-Rogados de Conjuntos de Dados 175

3.1 Introdução aos Métodos dos Sub-Rogados 175
3.2 Conceitos e Definições dos Métodos dos Sub-Rogados 176
3.3 Testes de Não-Linearidade 179
3.3.1 Métodos dos Sub-Rogados de Processos Lineares 179
3.3.2 Algoritmos de Construção dos Sub-Rogados Lineares Aleatórios e *Pivotalness* das Características Físicas de Caos 184
3.3.3 Algoritmos: *Iterative Amplitude Adjusted Fourier Transform* (*IAAFT*), *Corrected Amplitude Adjusted Fourier Transform* (*CAAFT*), e o Teste do Bi-Espectro de Hinich 196
3.3.4 Teste Não Paramétrico de Independência: Teste de BDS 207
3.3.5 Sub-rogados Não-Lineares 209
3.4 Procura da Não-Linearidade e do Caos nas Séries Tempo- rais de Rendibilidades216
3.4.1 Introdução à Metodologia Empregue 216
3.4.2 Testes de Não-linearidade e de Procura de Determinismo: Rendibilidades da Acciona 224

4 Conclusões Finais e Projectos Futuros **233**

Bibliografia **249**

Anexos **293**

Anexo I: Estatísticas Descritivas das Sucessões Cronológicas de Cotações das Commodities e das Utilities **293**

Anexo II: Testes ADF em Nível e às Primeiras Diferenças nas Sucessões Cronológicas de Preços Logaritmizados das Commodities **297**

Anexo III: Testes ADF em Nível e às Primeiras Diferenças nas Sucessões Cronológicas de Preços Logaritmizados das Utilities **300**

Anexo IV: Testes PP de Phillips e Perron em Nível e às Primeiras Diferenças nas Sucessões Cronológicas de Preços Logaritmizados das Commodities **304**

Anexo V: Testes PP de Phillips e Perron em Nível e às Primeiras Diferenças nas Sucessões Cronológicas de Preços Logaritmizados das Utilities **307**

Anexo VI: Testes ARCH-LM nas Sucessões Cronológicas de Rendibilidades das Commodities **311**

Anexo VII: Testes ARCH-LM nas Sucessões Cronológicas de Rendibilidades das Utilities **314**

Anexo VIII: Testes de Não-Linearidade (algoritmos: 0, 1 e 2) para a Dimensão de Correlação, com base no Método de Aproximação à Caixa

de Contagem, Aplicados às Amostras da Série Temporal de Rendibilidades da Acciona **317**

Anexo IX: Testes de Não-Linearidade (algoritmos: 0, 1 e 2) para o Expoente Máximo de Lyapunov Aplicados às Amostras da Série Temporal de Rendibilidades da Acciona **323**

Introdução

.

Toda a ciência se define em função do seu Objecto e do seu Método de Investigação. A teoria do caos afirma-se, pelo seu próprio Objecto de Investigação (séries temporais escalares), e o seu próprio Método (por exemplo, o expoente de Hurst permite distinguir uma série temporal aleatória de uma série temporal não aleatória, mesmo quando a série temporal é não-Gaussiana (Peters (1991) [404])), apoiando-se nas diversas áreas da ciência a destacar: matemática, física, estatística e econometria. Deste modo, passamos a apresentar diversos exemplos destas vertentes científicas, no sentido lato.

A vertente matemática do caos é usualmente conhecida pela sua sensibilidade às condições iniciais nos processos não-lineares determinísticos, em que pelo menos um dos expoentes de Lyapunov deve ser positivo. As áreas física/estatística do caos permitem a estimação das características invariantes (integral de correlação, dimensão de correlação, expoente máximal de Lyapunov, entre outras) que tipificam as moções caóticas, podendo não existir informação sobre o nível de significância estatística destas invariantes dinâmicas. No entanto, estas áreas da ciência permitem ainda uma nova averiguação/confirmação (incluindo o nível de significância estatística das invariantes estimadas) sobre a existência de moções não-lineares determinísticas (caos verosímil), através da realização de subrogados

de dados artificiais, que postulam sobre a não-linearidade e o determinismo nas séries temporais escalares observadas.

A vertente econométrica do caos compreende, por exemplo, a realização prévia dos testes de raiz unitária, tais como os testes ADF desenvolvidos por Dickey e Fuller (1979) [130] e os testes PP propostos por Phillips e Perron (1988) [409], para averiguar se as séries temporais observadas apresentam uma tendência estocástica ao longo do tempo (passeio aleatório), ou se, pelo contrário apresentam uma tendência determinística, com flutuações estacionárias ao longo desta (Serletis e Gogas (1999) [454]). Noutro exemplo, isto é, nas vertentes física/econométrica do caos, o teste econométrico e não-paramétrico de Brock *et al.* (1996) [71], designado pelo teste BDS, testa a dependência em série e a estrutura não-linear de uma série temporal, e tem como base o integral de correlação. Com efeito, o teste é frequentemente utilizado no diagnóstico de presença de não-linearidade nos resíduos dos modelos ARMA (e semelhantes) ajustados às sequências de dados originais (filtro linear), que implique alguma dependência não-linear na série temporal original. Podemos ainda estender o conceito do teste BDS à provável existência de caos determinístico *vs* processos de ruído branco (ou *iid*), em que não é suposto que os mercados sejam eficientes na avaliação da nova informação (hipótese de eficiência dos mercados[1] (HME)).

O caos aponta para uma riqueza assinalável a partir de três condições simples: sensibilidade às condições iniciais, não-linearidade determinística, e recorrência (sem repetição exacta das mesmas trajectórias ou órbitas no espaço de fase). Estas condições permitem

[1] Um mercado é considerado eficiente quando a informação nova é rapidamente reflectida nos preços, ou seja, os preços dos activos financeiros permitem uma melhor alocação dos recursos/investimentos. Por exemplo, um mercado é considerado eficiente na sua forma fraca, quando os preços reflectem toda a informação contida no registo dos preços históricos.

Por outro lado, um mercado é eficiente na sua forma forte, caso os preços reflictam não só a informação pública, mas também a informação que pode ser obtida, inclusive as informações privilegiadas (Fama (1970) [166]).

o caos matemático: comportamento que parece ser aleatório, mas não o é. O caos leva-nos ao campo da predição (na amostra), ou da previsão (fora da amostra), sem o conhecimento das equações não-lineares determinísticas subjacentes ao sistema observado, revelando questões por resolver nas diversas ciências: clima, física, dinâmica populacional em biologia, economia, mercados financeiros, entre outras. O caos, amplamente aceite nas matemáticas e noutras ciências origina propágulos dentro das diversas ciências aplicadas. As ciências aplicadas são conduzidas pelo desejo de compreender e de predizer a realidade[2] (Smith (2007) [476]).

Por conseguinte, procedemos na averiguação da não-linearidade determinística frequentemente negligenciada nas séries temporais de preços e de rendibilidades observadas diariamente nos mercados bolsistas.

As séries financeiras seleccionadas foram extraídas a partir da base de dados do sistema *Bloomberg* (Abril de 2009), em períodos distintos de observação[3] (entre o dia 3 de Janeiro de 2000 e o dia 4 de Fevereiro de 2009, inclusive), e em termos dos preços de fecho diários (dias úteis), sem valores omissos e/ou *outliers* severos, comparativamente a outros contractos apresentados no sistema. Deste modo, por um lado, foram escolhidas algumas

[2] Por exemplo, May (1976) [338] estudou um sistema dinâmico determinístico relativo ao crescimento populacional de algumas espécies de insectos. O modelo ajustado é expresso pelo mapa logístico discreto unidimensional, isto é:

$$Y_{n+1} = \lambda Y_n(1 - Y_n), n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

em que $0 < \lambda < 4$ é um parâmetro real, a variável tempo é expressa por $n \in \mathbb{Z}$, e a variável Y apresenta valores no intervalo $0 < Y < 1$. O comportamento do sistema dinâmico sofre alterações substanciais e surpreendentes, para diversos valores de λ. Por exemplo, quando $\lambda = 3.8284...$, obtém-se uma órbita periódica de período 3, e para valores superiores, tal que $3.8284... < \lambda < 4$, surgem novos ciclos com períodos inteiros e um número infinito de órbitas aperiódicas assintóticas, em que ((Li e Yorke (1975) [306], citado por May (1976) [338]) demonstraram na sua prova original que o período três implica o caos.

[3] Isto é, com um mínimo total de observações (922) na série temporal de cotações das *licenças de carbono* e máximos totais de observações nas sucessões cronológicas de cotações do *petróleo bruto* (2372), da *Acciona* (2373), da *Siemens* (2373), e da *Vestas* (2373).

séries temporais de preços, tais como a *commodity* das licenças de carbono e as *commodities* das fontes energéticas provenientes dos principais combustíveis fósseis. Ou seja, foram seleccionadas as seguintes séries temporais de preços das *commodities*: preços *spot* das licenças de carbono (*EUETS- YR2 INDEX*) do *European Union Emission Trading Scheme* (*EU ETS*), preços *spot* do petróleo bruto (*USCRWTIC INDEX*), preços dos futuros do gás natural (*NG1 COMB comdty*), e preços dos futuros do carvão (*API21 MON MCCL INDEX*). Por outro lado, escolheram-se as sucessões cronológicas de cotações das acções de *utilities* das principais construtoras de eólicas europeias: *Acciona* (*ANA SM EQUITY*), *Gamesa* (*GAM SM EQUITY*), *Nordex* (*NDX1 GR EQUITY*), *Repower* (*RPW GR EQUITY*), *Siemens* (*SIE GR EQUITY*), e *Vestas* (*VWSDC EQUITY*).

A escolha destas séries financeiras univariadas discretas resulta da problemática e da controvérsia[4] sobre o aquecimento global provocada pela emissão dos principais gases de efeito estufa (tais como o dióxido de carbono (CO_2), o óxido nitroso[5] (N_2O), o metano[6] (CH_4), e os clorofluorocarbonetos (CFC)[7]) para a atmosfera nas últimas décadas. Por exemplo, a libertação de CO_2, com base na acção antropogénica, corresponde ao gás principal de efeito estufa, contribuindo em cerca de 60% do total de gases de efeito estufa à escala global (Goodstein (2008) [202]). Com efeito, o autor refere que a principal emissão de CO_2 de origem antropogénica provém da produção de energia eléctrica nas centrais termoeléctricas, resultante da queima do carvão e doutros combustíveis fósseis,

[4] Por exemplo, as actividades vulcânicas e solares estão entre os factores que mais influenciam as variações climáticas (Mokhov *et al.* ((2006) [357], citado por Bezruchko e Smirnov (2010) [48]).

[5] A emissão de óxido nitroso (N_2O), através da acção antropogénica, ocorre por meio da aplicação de fertilizantes naturais e artificiais na agricultura.

[6] A libertação de metano (CH_4), com base na acção antropogénica, resulta principalmente das seguintes actividades: produção animal, produção do petróleo, queima do petróleo, produção de gás natural (mineração de bolsas de gás natural), e transporte.

[7] A emissão de clorofluorocarbonetos (CFC) através da acção antropogénica, provem de aplicações industriais (por exemplo, o ar condicionado, e a refrigeração, entre outras).

da produção industrial (derivados do petróleo, derivados do carvão, materiais ferrosos, cimento, cerâmicas, e outros produtos industriais) localizada nas nações industrializadas, e do transporte a gasolina.

Foi assim constituída, pela primeira vez na história da humanidade, uma "dinâmica" forte contra o aumento de gases de efeito estufa na atmosfera e outras fontes de poluição (*United Nations* (2007) [509]), através da realização da Conferên- cia das Nações Unidas sobre o Meio Ambiente e o Desenvolvimento (conhecida pela "Cimeira da Terra"), no Rio de Janeiro (1992), em que os países industrializados assinaram um compromisso para tentar estabilizar as emissões de gases de efeito estufa para os níveis de 1990 por volta do ano 2000. No entanto, este compromisso não foi concretizado, em parte, devido às políticas de resistência dos EUA (ver BBC (2006) [43]). Donde, perante a falha deste acordo voluntário os países industrializados assinaram o Protocolo de Kyoto sobre o aquecimento global (1997) subjacente à *United Nations Framework Convention on Climate Change* (*UNFCCC*), em que foi exigido aos países participantes a redução das suas emissões de gases de efeito de estufa em cerca de 5% abaixo dos níveis de 1990, durante o período de compromisso de 2008 a 2012 (Fletcher (2005) [179]).

No Protocolo, convencionou-se que os países industrializados deviam assumir o encargo pioneiro de desenvolvimento das tecnologias de produção de energia renovável (por exemplo, a eólica e a solar), para que os países não-industrializados beneficiassem destas tecnologias no futuro, inclusive os maiores emissores de CO_2 para a atmosfera, tais como a Índia e a China (ver relatório do *Global Wind Energy Council* e *Greenpeace International* (2012) [198]). Com efeito, o Protocolo de Kyoto foi ratificado em Fevereiro de 2005 por 141 países, entrando em vigor a 16 de Fevereiro de 2005, em que trinta e cinco países industrializados

(estados membros da União Europeia (UE), Rússia, Japão, Canadá, e outros), excepto os EUA, foram juridicamente vinculados a cumprir as metas quantitativas de redução ou limitação das emissões de gases de efeito de estufa (Fletcher (2005) [179] e Goodstein (2008) [202]).

Neste contexto, a União Europeia (UE) antecipou-se, através da implementação de um mecanismo de *trading* efectivo das licenças de carbono (*European Unit Allowances* (*EUA*)), para a mitigação da emissão de dióxido de carbono (CO_2) na atmosfera. Isto é, por meio da implementação do *European Union Emissions Trading Scheme* (*EU ETS*), subjacente ao Protocolo de Kyoto (1997), com início na Fase I (de 1 de Janeiro de 2005 a 31 de Dezembro de 2007), seguindo-se a Fase II (de 1 de Janeiro de 2008 a 31 de Dezembro de 2011) e assim sucessivamente. Deste modo, o *EU ETS* estabeleceu um tecto (*plafond*) inicial de licenças de carbono, para que cada estado membro da UE desenvolvesse um plano de redução de emissões de CO_2 (*European Comission* (2003) [159]). Isto é, por um lado, o mecanismo de *trading* das licenças de carbono, durante a Fase I, foi inicialmente dirigido às grandes empresas industriais (termoeléctricas, e principais emitentes de CO_2) dos estados membros da UE, como uma política de incentivo concreto ao aumento da quota de produção de energia renovável, e, por outro lado, como uma política direccionada ao consumo de combustíveis mais "limpos" (tal como, por exemplo, a substituição do petróleo bruto pelo gás natural), alastrando-se a outros sectores/actividades da economia na UE durante a Fase II. De facto, na Fase II, a implementação do *European Union Emissions Trading Scheme (EU ETS)* das licenças de carbono levou aos ganhos de eficiência (lucros) nas eléctricas da UE, com base no *trading* inter-anual das licenças de carbono (*European Unit Allowances* (*EUA*)) subjacente às *Emission Reduction Unit*s (*ERU*), sob os *Joint*

Implementation (*JI*)[8]. Por outro lado, o *EU ETS* facultou o recurso à importação de créditos de Kyoto, por parte dos diversos estados da UE aos países fora do espaço europeu, tais como, os *Certified Emission Reduction* (*CER*), sob o *Kyoto Protocole´s Clean Development Mechanism*[9] (*CDM*).

De facto, o *European Union Emissions Trading Scheme (EU ETS)* permite efectivamente que os países emergentes possam vender de novo os créditos de Kyoto (convertíveis em licenças de carbono) aos estados membros da UE. Ou seja, por um lado, para assegurar melhores condições de competição entre as eléctricas na Europa, e por outro lado, para recapitalizar as empresas produtoras de energia não-renovável localizadas fora da UE, para que estas últimas procedam às reconversões tecnológicas necessárias, no sentido da produção de energia renovável (biomassa e resíduos, hidroeléctrica, eólica, geotérmica, solar, e outras).

Concomitantemente, importa agora apresentar os principais *drivers* de sucesso das *utilities* de energias renováveis no mercado europeu (inclusive, as *utilities* das principais construtoras de eólicas europeias[10]), durante o período observado (de 2000 a 2008), que conduziram ao investimento nestes activos financeiros (relatório do *Barclays Capital* (2009)

[8] Os *Joint Implementation (JI) Credits* facultam a implementação de projectos de redução das emissões de CO_2, por parte dos países desenvolvidos noutros países desenvolvidos (Klepper e Peterson (2005) [277]).

[9] Isto é, o *Clean Development Mechanism* (*CDM*) permite que os países desenvolvidos ganhem créditos de Kyoto para realizarem investimentos "limpos" nos países emergentes. Com efeito, o *CDM* funciona como um protótipo de transferência de tecnologia em grande escala, entre os países desenvolvidos e os países emergentes (Goodstein (2008) [202]).

[10] De acordo com o relatório do *Eurobserv'er* (2008) [156], durante o ano de 2007, a oferta e a quota de mercado das *utilities* das principais construtoras de turbinas eólicas europeias ao nível mundial são expressas por: *Acciona* (873 MW; 3,9%), *Gamesa* (3047 MW; 13,7%), *Nordex* (676 MW; 3,0%), *Siemens* (1397 MW; 6,3%), *Vestas* (4503 MW; 20,3%), e *Enercon* (2769 MW; 12,5%). No entanto, a *Enercon* não está cotada em Bolsa. Por outro lado, a oferta e a quota de mercado da *Repower* está incluída na rúbrica - *Outras construtoras de turbinas eólicas* (2076 MW; 9,3%).

Nos países fora da União Europeia, a oferta e a quota de mercado das *utilities* das principais construtoras de turbinas eólicas ao nível mundial são representadas por: *GE Energy* (3283 MW; 14,8%), *Suzlon* (2082 MW; 9,4%), *Goldwind* (830 MW; 3,7%), e a *Sinovel* (671 MW; 3,0%).

[28] e relatório do *Energy Watch Group* (2008) [150]): aumento persistente dos preços dos combustíveis fósseis (com volatilidade acentuada); crescimento global da economia; procura elevada de combustíveis fósseis; política ambiental, através do recurso ao *European Union Emissions Trading Scheme* (*EU ETS*) das licenças de carbono; entre outros[11]. Em particular, subjacente ao Protocolo de Kyoto (1997) e à directiva 2001/77 do Parlamento Europeu e do Conselho da União Europeia (2001), [158] para o aumento da quota de produção de energia renovável[12], constatou-se um acréscimo elevado na capacidade de produção de energia eólica na União Europeia (de 13 GW para 57 GW), durante o período de 2000 a 2007, em que a oferta de 57 GW de energia eólica representou mais do que 5% da capacidade total de geração de energia na Europa (EWEA (2009) [160]).

Agora, uma das razões mais importantes no interesse do comportamento caótico é o de que este pode explicar as flutuações não-esperadas e as "rupturas" na economia e nos mercados financeiros (tal como sucedeu nas séries temporais das *commodities* e das *utilities* observadas), que parecem ser aleatórias, devido à sua irregularidade. Por exemplo, nos modelos ARMA(p, q) estacionários de Box *et al.* (1994) [64], a economia apresenta um equilíbrio estável, que está permanentemente ameaçado por choques externos (tal como os *crashes* financeiros com repercussões económicas severas, os ataques terroristas, os escândalos corporativos, as greves, as guerras, o clima, entre outros factores). No entanto, nos modelos de crescimento caótico, a economia segue um comportamento dinâmico gerado autonomamente, que é sustentável no tempo (Hsieh (1991) [245], de acordo com o modelo

[11] Por exemplo, a concessão de créditos para compensar os aumentos previstos das tarifas de electricidade; a aplicação de taxas mínimas (por KWh produzido), pagas pelas termoeléctricas às empresas de produção de energia eólica (forma de financiamento); e os custos competitivos de produção de energia eólica, devido à utilização das novas tecnologias.

[12] Na directiva 2001/77 do Parlamento Europeu e do Conselho da União Europeia (2001) [158] foi proposta uma meta indicativa global de 12% de consumo interno de energia renovável, relativamente ao consumo interno bruto de energia, para o ano de 2010.

caótico gerado pelo mapa quadrático proposto por Baumol e Benhabib (1989) [42]). Ou seja, nestes modelos caóticos *vs* modelos econométricos, a turbulência e as perturbações, no sentido do caos, são geradas endogenamente.

Por hipótese, se o caos existe (ou existe pelo menos um atractor estranho) nalguma das séries financeiras observadas, a previsão com acuidade torna-se possível, pelo menos no curto prazo, existindo um grande interesse por parte da comunidade académica e financeira na modelação não-linear determinística, desde o final da década de 80. Nesse sentido, diversos autores detectaram o caos em séries temporais económicas e financeiras. Por exemplo, Scheinkman e LeBaron (1989) [441] estudaram as rendibilidades semanais no *Center for Research in Security Prices* da Universidade de Chicago (CRSP), tendo encontrado uma forte evidência de não-linearidade e alguma evidência de caos nos sinais observados. Alguns resultados similares foram alcançados por Frank e Stengos (1989) [184], com base em estimativas das dimensões de correlação (entre seis e sete) nas taxas de rendibilidade (diárias, semanais e bi-semanais) das sucessões cronológicas do ouro e da prata, tendo os autores encontrado uma estrutura não capturada nos modelos ARCH. Em Serletis e Gogas (1997) foi detectada a não-linearidade e caos determinístico em duas séries temporais mensais de taxas de câmbio do mercado negro (*black market*) do Leste Europeu (*Russian ruble/U.S. dollar* e *East German mark/U.S. dollar*), com base no estimador do expoente de Lyapunov proposto por Nychka *et al.* (1992) [380].

Um pouco mais tarde, Barnet e Serletis (2000) [34] constataram que apesar da controvérsia provocada sobre a não-linearidade e o caos nas séries temporais macroeconómicas (ver Brock e Sayers (1988) [73], Frank e Stengos (1988) [183], e Frank *et al.* (1988) [182]), Barnett e Chen (1988) [32] e DeCoster e Mitchell (1991, 1994) [122], [121] encontraram o

caos (no lado da procura) em agregados monetários da U.S. *Divisia* (isto é, sob a forma de índices). Por exemplo, posteriormente ao ano de 2000, o caos foi detectado no índice diário agregado BVL 30 da Bolsa de Valores de Lisboa, apresentando uma dimensão fractal baixa (2.1858) (Mendes e Isfan (2003) [352]), nos índices diários agregados da Bolsa de Valores de Shangai e da Bolsa de Valores de Shenzen, expressos em termos das respectivas rendibilidades (filtrados), com dimensões fractais diminutas ($[1.153, 1.6257]$, $[2.6690, 3.2720]$) (Chu (2003) [105]), e no índice diário agregado das acções da Bolsa de Valores de Istambul, com baixas dimensões de correlação ($[0.14, 0.16]$) (Iseri *et al.* (2008) [250]).

Procuramos, deste modo, a existência da não-linearidade determinística camuflada nas séries financeiras univariadas discretas observadas, sabendo da existência de relações não-lineares entre os preços das licenças de carbono e os seus fundamentais, tais como, os preços das *commodities* energéticas, factores de risco macroeconómicos e climáticos (Lutz *et al.* (2013) [317]). Por exemplo, os autores identificaram regimes de volatilidade alta e baixa, com base num *Markov regime-switching model* (*MRS*) (ver Hamilton (1989) [220], Gray (1996) [212], e Klaassen (2002) [276]), em que ambos os regimes de volatilidade apresentaram um impacto forte dos fundamentais nas licenças de carbono. Por outro lado, o processo de volatilidade foi predominante durante a recessão de 2008 a 2009, ou seja, no período em que as emissões das licenças de carbono, decorrentes dos sistemas de *cap-and-trade* anuais, caíram abruptamente. Ou seja, durante o período em análise (2000 - 2009) a economia global foi alvo de choques/tensões elevados, que decorreram principalmente dos ataques terroristas (Setembro de 2001), do aumento substancial da volatilidade dos preços das *commodities* energéticas, dos escândalos corporativos, e, mais

recentemente, da crise do *subprime* (Setembro de 2007). Em particular, após o *crash* financeiro de 2007, o choque energético levou às primeiras preocupações sobre uma potencial estagflação na economia global a curto e médio prazo.

De facto, as causas da crise energética devem-se, por um lado, ao aumento da procura de energia por parte dos países emergentes e, por outro lado, às restrições da oferta de combustíveis fósseis, devido aos atrasos de tempo nos investimentos com capacidade produtiva (Kyrtsou *et al.* (2009) [293]). Isto é, as restrições da oferta dos combustíveis energéticos são fundamentais nos estudos aprofundados sobre os regimes caóticos determinísticos nas *commodities* (de imediato) e noutros activos, em geral, e, em particular, nas séries financeiras das *commodities* observadas[13]. Neste sentido, a Organização dos Países Exportadores de Petróleo (OPEP) tem vindo a opor-se ao aumento da sua produção, para baixar os preços, porque esta organização manifesta preocupações quanto aos decréscimos sazonais de consumo de petróleo bruto e à oferta de petróleo bruto por parte das fontes não-OPEP (ver Kyrtsou *et al.* (2009) [293] e *U.S. Energy Information Administration* (2013) [149]). Por outro lado, as organizações industriais dos mercados das *commodities* energéticas e das *utilities* das principais construtoras de eólicas europeias são essencialmente oligopolísticas. Logo, de acordo com o exposto, parece-nos fazer todo o sentido averiguar a existência de não-linearidade e de caos determinístico nos sinais observados.

No Capítulo 1, as séries financeiras observadas são objecto de estudo na vertente descritiva, em termos da análise de evolução das cotações e da análise exploratória das

[13] Por exemplo, no final da década de 90, Serletis e Gogas (1999) [454] mostraram que as restrições de capacidade distorceram os mercados de gás natural nos EUA, com impactos severos na produção de gás natural (*natural gas* (*NG*)) e nos líquidos extraídos a partir dos fluxos mistos de gás natural (*natural gas liquids* (*NGL*)). Isto é, o desenvolvimento dos mercados *spot* de gás natural e de instalações de armazenamento provocaram alterações nos mercados do propano, condicionando, por sua vez, o enriquecimento de fluxos pobres de gás natural e o processamento de líquidos de gás natural (*natural gas liquids* (*NGL*)).

rendibilidades (inclusive as distribuições estatísticas, com base no teste de normalidade de Jarque e Bera (1987) [251]), e na vertente da estacionariedade fraca das mesmas. Assim, em primeiro lugar, procedemos na análise de evolução das cotações nas séries temporais das *commodities* e das *utilities*, com base nas taxas de rendibilidade (*simple net returns*), e suas relações com os factores fundamentais (condicionalismos energéticos, *crashes* financeiros, e outros). Em segundo lugar, procedemos na análise exploratória dos sinais, tendo em conta as semelhanças com os processos não-lineares estocásticos (tais como os processos heterocedásticos autoregressivos) ou com os processos não-lineares complexos (caos e ruído adicional), em dimensões altas de mergulho. Em terceiro lugar, pretendemos averiguar se as sucessões cronológicas são processos de passeio aleatório, ou, em alternativa, apresentam flutuações estacionárias em torno de uma tendência determinística, com recurso à utilização de dois testes de raiz unitária, ou seja, ao teste ADF paramétrico de Dickey e Fuller (1979) [130], e ao teste PP não-paramétrico de Phillips e Perron (1988) [409]. Em quarto lugar, testamos a presença de efeitos ARCH de Engle (1982) [151] nos resíduos dos modelos nas séries temporais de alterações de preços observadas *vs* a ausência de efeitos ARCH nos resíduos dos modelos nas mesmas, para detectar a presença de ruído colorido (tais como os processos ARCH, GARCH, EGARCH, e familiares).

No Capítulo 2, as séries temporais escalares de cotações das *commodities* e das *utilities* observadas são objecto de estudo na perspectiva da teoria do caos. Pretendemos assim averiguar se existe alguma evidência de existência de atractores caóticos (atractores estranhos) reconstruídos nos espaços de fases, a partir das sequências de dados originais, de acordo com o teorema de mergulho de Mañé (1981) [332] e Takens (1981) [490]. Ademais, o teorema de mergulho (ou teorema geométrico) tem vindo a ser estendido

aos sistemas dinâmicos estocásticos (estocásticos forçados) ou aos processos complexos (caos determinístico e ruído adicional, em dimensões altas de mergulho), que possam ser definidos como sistemas determinísticos conduzidos por processos de ruído *iid* Gaussianos (*variates*). Com efeito, o método de reconstrução do atractor no espaço de fase permite que os elementos de uma sucessão cronológica observada possam ser utilizados para deduzir as características invariantes (dimensão de correlação D_2, expoente de Lyapunov maximal λ_1, entre outras invariantes) de um sistema dinâmico determinístico multidimensional. Por conseguinte, em primeiro lugar, procedemos às estimativas dos valores de atraso de tempo T (*embedding lags*) nas séries temporais de preços das *commodities* e das *utilities* observadas, quando as autocorrelações amostrais se anulam (isto é, $\rho(T) \leq 0 \Longrightarrow \tau = T$) (ver Small (2005) [462], Shelhamer (2007) [457], Feng e Tse (2008) [173]), para detectar algumas evidências de processos não-lineares determinísticos[14] (tal como os decaimentos exponenciais das autocorrelações amostrais ao longo dos primeiros *lags* de tempo), ou de processos estocásticos (*iid*, ou lineares, ou não-lineares), com dimensão não-finita.

Em segundo lugar, estimamos os atrasos de tempo, T, em cada série temporal observada, com base no primeiro mínimo local da informação mútua $I(T)$ (proposta por Fraser e Swiney (1986) [188]), para averiguar a existência de algumas quantidades não-lineares determinísticas, características das moções caóticas.

Em terceiro lugar, procedemos à realização de um método misto, subjacente às técnicas de mergulho não-uniforme (ver Judd e Mees (1995) [261] e Judd e Mees (1998) [263]), para a determinação da dimensão óptima de mergulho ($d_e < 10$) nas séries temporais de preços dos activos observados, no sentido da acuidade de predição nos modelos não-lineares

[14] Por exemplo, a autocorrelação amostral permite distinguir os regimes periódicos dos regimes irregulares e aperiódicos (caos possível) (Henry *et al.* (2001) [235]).

complexos, isto é, por meio de uma aproximação ao critério do comprimento de descrição mínimo de Rissanen (1989) [421]. Assim, numa primeira etapa, estimamos os erros de predição não-lineares (EPNL) locais, subjacentes à classe do modelo de constante local proposto por Small e Tse (2004) [474], para dimensões sucessivas de mergulho (com um valor unitário inicial), até à dimensão máxima de mergulho, d_e^{max}, em que ocorra um valor mínimo local do EPNL. Numa segunda etapa, estimamos os pontos de saturação fractal D, com base no estimador de máxima verosimilhança de D, proposto por Takens (1985) [491], para dimensões crescentes de mergulho, a partir de $d_e = 1$. No final, procedemos à selecção óptima das séries temporais de preços dos produtos financeiros observados, com base no método proposto. Ou seja, para um índice dos EPNL $\leq 20\%$, e para um dado valor de saturação da dimensão fractal ajustada (tal que o inteiro de $[D+1] \leq 9$), em que é muito provável que o sistema não-linear determinístico seja caótico (com algum ruído), para dimensões baixas de mergulho ($d_e < 5$), ou seja extremamente complexo (caos e ruído adicional) para dimensões altas de mergulho ($5 \leq d_e < 10$).

Em quarto lugar, estimamos em particular as dimensões de correlação, D_2, em escalas maiores ε, nas séries temporais de preços dos activos seleccionados (**carvão**, *Acciona*, *Gamesa*, e *Repower*), através de um método de aproximação à contagem de caixas, para dimensões crescentes de mergulho, a partir de $d_e = 1$ até dimensões máximas de mergulho d_e^{max} (onde os EPNL apresentam valores mínimos locais).

Por último, procuramos a evidência de divergência exponencial entre trajectórias próximas nos estados iniciais, por meio da estimação do expoente de Lyapunov maximal, λ_1, nas séries temporais de preços das *commodities* e das *utilities* observadas, para os parâmetros de mergulho estimados previamente ($d_e^{max} \leq 31$, $T(I(T)) \leq 13$) e para

horizontes temporais curtos ($t_h = 5$).

No Capítulo 3, procedemos na averiguação da não-linearidade e do caos nas sucessões cronológicas de preços seleccionadas no Capítulo 2 (ou seja, nas séries temporais de preços, que apresentam uma dimensão óptima de mergulho ($d_e < 10$): **carvão**, *Acciona*, *Gamesa*, e *Repower*). Isto é, o processo de averiguação da não-linearidade determinística, ocorre em duas etapas. Na primeira etapa, dá-se início ao pré-processamento destas séries temporais, ou seja, as séries temporais são convertidas em séries temporais de alterações de preços (*log-returns*), seguindo-se a selecção das mesmas, com recurso ao método misto proposto no Capítulo 2, para a determinação da dimensão óptima de mergulho.

Na segunda etapa, implementamos os testes de não-linearidade e de caos determinístico para a única sucessão cronológica seleccionada (rendibilidades da *Acciona*, para $d_e \leq 9$), com base no teste estatístico de não-linearidade de Brock *et al.* (1996) [71] (teste BDS) para o integral de correlação, e através da construção dos sub-rogados *standard* lineares de realizações constrangidas, com base na utilização dos algoritmos (0, 1, ou 2) de Theiler *et al.* (1992) [497], para a dimensão de correlação D_2 e para o expoente máximo de Lyapunov λ_1. Como é sabido, o teste estatístico não-paramétrico proposto por Brock *et al.* (1996) [71] (teste BDS) teve a sua origem em pesquisas sobre os regimes não-lineares e sobre a teoria do caos, e foi construído para detectar a possível presença de caos determinístico nas séries temporais. No presente caso, o teste BDS para a hipótese nula verifica se a amostra da série temporal de alterações de preços (*log-returns*) da *Acciona* provém de um processo de geração de dados *iid*, ou se, pelo contrário, a série temporal apresenta dependência nos seus termos, que possa ser baseada nos diversos processos: dependência linear, não-estacionariedade, caos determinístico, ou estocástico não-linear

(modelos ARCH, GARCH, EGARCH, e afins). Por outro lado, o método dos sub-rogados estocásticos lineares de realizações constrangidas e aleatórias foi proposto inicialmente por Theiler *et al.* (1992)[497], com base nos algoritmos 0, 1 ou 2, e é amplamente utilizado na procura da não-linearidade e do caos determinístico em séries temporais discretas e estacionárias, no sentido estatístico. De facto, a rejeição sistemática das hipóteses nulas dos testes (H_0 - ruído independente e identicamente distribuído, H_1 - ruído filtrado linearmente, H_2 - transformação não-linear monótona de ruído filtrado linearmente) contribui para o reforço da detecção da não-linearidade e do caos determinístico no sinal observado. Por conseguinte, no presente estudo, são aplicados os sub-rogados *standard* lineares de realizações constrangidas (algoritmos 0, 1, ou 2), para a dimensão de correlação D_2, e para o expoente de Lyapunov maximal λ_1, para cada amostra extraída da série temporal de rendibilidades da *Acciona*, com escalas temporais distintas.

Capítulo 1

Dados de *Input*, Estatísticas Descritivas e Análise da Estacionariedade Fraca das Séries Temporais Financeiras

1.1 Introdução

O Capítulo que se apresenta pretende explorar e analisar os dados de *input* que dizem respeito às séries financeiras dos activos em estudo, com o objectivo de interpretar as alterações nos preços e as suas causas prováveis. Por conseguinte, as séries financeiras seleccionadas dos mercados financeiros (*commodities products*: licenças de carbono, petróleo bruto, gás natural e carvão, e *utilities-industry eolic manufacturing* da Europa: *Acciona*, *Gamesa*, *Nordex*, *Repower*, *Siemens* e *Vestas*) serão objecto de estudo, na componente descritiva, em termos da análise de evolução das cotações e da análise exploratória das alterações das cotações dos activos (inclusive as distribuições estatísticas das rendibilidades (*log-returns*), com base no teste de hipótese de normalidade de Jarque e Bera (1987) [251]), e na componente da estacionariedade fraca[1].

[1] Os testes estatísticos de fraca estacionariedade em séries temporais dos mercados financeiros são bastante importantes, sobretudo, ao nível da aplicação de modelos estocásticos lineares, tal como os modelos

A análise dos resultados para cada produto financeiro em apreço nas componentes apresentadas pode dar-nos alguma informação sobre a natureza da série temporal observada. Isto é, por exemplo, se esta pode ser descrita por um processo de passeio aleatório, favorável à hipótese dos mercados eficientes (HME), ou se, pelo contrário, apresenta alguma característica de dinâmica determinística de longo prazo que contribua para a rejeição da HME, em que toda a informação relevante não está completamente reflectida na cotação do activo transaccionado.

Por conseguinte, utilizam-se os testes *Augmented Dickey-Fuller* (ADF) desenvolvidos por Dickey e Fuller (1979) [130] e os testes PP (ou A(DF)) propostos por Phillips e Perron (1988) [409], para averiguar se as séries temporais de preços (na escala logarítmica) e de rendibilidades dos produtos financeiros seleccionados são expressas em termos de funcionais de um processo de Wiener (processo Gaussinano contínuo no tempo, com incrementos *iid* e aleatórios (favorável à HME)), ou não (contra HME). Deste modo, os testes ADF de Dickey-Fuller e PP de Phillips-Perron utilizados apresentam resultados "consistentes", em nível e às primeiras diferenças, devido às elevadas dimensões das amostras das sucessões cronológicas ($N \geq 922$), o que reforça a adequabilidade dos testes utilizados, apesar da existência de alguns problemas de dimensão[2] e/ou de falta de potência[3] nos mesmos (explicitados no presente Capítulo), para além da sua provável falibilidade caso existam quebras de estrutura nas séries temporais observadas. Por exemplo, as séries financeiras dos activos observados incluem os dados observados do ano de 2008 (*crash* bolsista), com possíveis quebras de estrutura.

ARMA (Autoregressive Moving Average Models), desenvolvidos por Box *et al.* (1994) [64].

[2] Designa-se por dimensão ou nível do teste a probabilidade de cometer o erro de 1ª espécie, isto é, $\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira})$.

[3] Designa-se por potência do teste a probabilidade de não cometer o erro de 2ª espécie, isto é, $\beta = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é falsa})$.

Aplicaram-se ainda os testes de efeitos ARCH (*Autoregressive Conditional Heterocedastic*) de Engle (1982) [151] nas séries temporais de rendibilidades (*log-returns*) dos produtos financeiros observados, que postulam sobre a presença de heterocedasticidade condicional autoregressiva nos resíduos dos modelos, pelo que servem de teste à estacionariedade fraca das mesmas.

Refira-se agora que em torno do ano de 2000, foram desenvolvidos diversos estudos empíricos por alguns grupos de físicos, tais como Bouchaud e Potters (2000) [63], Mantegna e Stanley (2000) [334], e Stanley *et al.* (2001) [481], em várias séries de rendibilidades de produtos financeiros, permitindo concluir que as alterações dos preços observadas pudessem ser descritas por processos não-lineares determinísticos dependentes do tempo. Isto é, muitas séries temporais dos mercados bolsistas, com dimensões amostrais elevadas (milhares de observações), são melhor caracterizadas por factos empíricos estilizados, tais como: a) caudas pesadas (*fat tails* ou *heavy tails*[4]) não-Gaussianas b) elevada volatilidade (*high volatility*), c) volatilidade em cluster[5] (*clustered volatility*), e d) leis de potência cúbica (*cubic law*), com o parâmetro de escala característico maior do que três, tal como encontrado por Guillaume *et al.* (1997) [216] nas alterações de preços das principais moedas, em intervalos de tempo curtos, isto é, 3.44 ± 0.3 ($\Delta n = 10\,\mathrm{min}$). Neste contexto, os resultados empíricos destes grupos de físicos colocaram em evidência a aparência nas alterações de preços aleatórias das séries temporais dos mercados bolsistas, pelo que estas séries temporais talvez sejam melhor caracterizadas por processos dependentes do tempo,

[4] Isto é, as séries financeiras apresentam distribuições leptocúrticas, com valores da curtose superiores a 3 (excesso de curtose).

[5] A volatilidade em *cluster* é por natureza dependente do tempo, implicando flutuações de preços não *iid*, onde os retornos absolutos (isto é, os ganhos ou perdas produzidos por um investimento durante um dado período temporal) ou as variâncias das séries temporais apresentam alterações ao longo do período temporal (Sinha *et al.* (2011) [460]).

onde a não-linearidade, o determinismo, e o caos possam preponderar.

Por outro lado, os resultados físicos/estatísticos e econométricos nas séries financeiras observadas apresentados nos Capítulos 2-3, permitem-nos concluir que por princípio não se rejeita a ocorrência de não-linearidade determinística, devido à existência de atractores estranhos (*strange attractors*) com algum ruído, para além da presença de não-linearidade estocástica possível, tal como ocorre nos processos de heterocedasticidade condicional autoregressivos (modelos ARCH, GARCH, EGARCH, e familiares).

Note-se ainda que a abordagem teórica e os resultados obtidos sobre a autocorrelação das séries temporais são apenas apresentados no Capítulo 2, pois o primeiro zero da função de autocorrelação[6] é um dos critérios da escolha do atraso de tempo (τ) de acordo com o teorema de mergulho de Mañe [332] e Takens (1981) [490].

1.2 Estatísticas Descritivas

A estatística descritiva (inclusive a análise exploratória de dados) tem como objectivo principal a análise, a representação e a redução dos dados. A análise exploratória, no sentido lato, em séries temporais univariadas dos mercados financeiros compreende, entre outras análises, os cálculos das medidas de tendência central (isto é, a mediana e a média), os cálculos das estatísticas de dispersão dos dados (a título de exemplo, o desvio padrão, a amplitude inter-quartil, a amplitude do intervalo de variação e o coeficiente de variação), as estimativas das medidas de assimetria (*skewness*) e do grau de achatamento dos dados (*kurtosis*), o teste de normalidade da amostra (por exemplo, o teste de Jarque e Bera (1987) [251]), a representação gráfica (gráfico de linhas) dos valores observados, e a exposição

[6] O primeiro zero da função de autocorrelação é no entanto uma estatística linear, ou seja, pode-se considerar como puramente prescritivo na determinação de τ, não reflectindo as relações não-lineares para os diversos *lags* de uma série temporal.

gráfica da distribuição de frequências dos mesmos, obtida por meio de um diagrama de áreas (histograma), constituído por uma sucessão de rectângulos adjacentes.

Estatísticas de Tendência Central: a Mediana e a Média

Em dados quantitativos a mediana é apresentada pelo valor da variável abaixo do qual observamos 50% de observações, inclusivé. Isto é, a mediana corresponde ao quantil de ordem p (C_p)[7], para $p = 0.5$, e é, em geral, apresentado por $C_{0.5}$.

Por sua vez, a média de uma série temporal é apresentada pela seguinte expressão:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{n=1}^{N} y_n}{N} \tag{1.1}$$

em que N corresponde ao número total de observações, e $y_n, n = 1, ..., N$ corresponde à sucessão cronológica dos valores observados.

Note-se ainda que as séries temporais que apresentam a média e a mediana muito próximas poderão indicar que não existem valores extremos (*outliers* moderados e/ou severos), a enviesar o valor da média do sinal.

Estatísticas de Dispersão das Séries Temporais

Em séries temporais, o desvio padrão amostral é apresentado pela expressão:

$$S = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(y_n - \bar{y})^2} \tag{1.2}$$

em que S corresponde à raiz quadrada da variância (S^2), e a variância S^2 é a média dos quadrados dos desvios em relação à média.

O desvio padrão da amostra, ao contrário da variância (que apresenta valores médios de quadrados) pode ser comparado directamente com a média da amostra, constituindo

[7] Em termos aproximados, o quantil de ordem p, $C(p)$, para $0 < p < 1$, é o valor da colecção (variável observada) que apresenta pN observações inferiores e $(1-p)N$ observações superiores, onde N é a dimensão da amostra.

uma medida de dispersão absoluta.

O coeficiente de variação, CV, é uma medida de dispersão relativa muito utilizada, onde este mede o grau de concentração dos valores observados em torno da média da amostra, em valor percentual:

$$CV = \frac{S}{\bar{y}} * 100 \tag{1.3}$$

em que o CV é independente da unidade em que se exprime a série temporal, permitindo a comparação entre duas ou mais distribuições de séries temporais.

Medidas de Assimetria e de "Achatamento" das Séries Temporais

A *skewness* é uma medida da assimetria da distribuição da série temporal em torno da sua média, e é calculada pela equação:

$$S_{kw} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{y_n - \bar{y}}{S}\right)^3 \tag{1.4}$$

onde S corresponde à estimativa do desvio padrão da série temporal observada.

O valor da *skewness* pode ainda ser calculado em função dos momentos de ordem m (u_m, para $m = 2$ e $m = 3$) da série temporal, y_n, para $n = 1, ..., N$, em relação à média, através da seguinte expressão:

$$S_{kw} = \frac{E[(y_n - \bar{y})^3]}{\left(\sqrt{E[(y_n - \bar{y})^2]}\right)^3} = \frac{u_3}{\left(\sqrt{u_2}\right)^3} \tag{1.5}$$

em que uma distribuição simétrica apresenta um coeficiente de assimetria nulo ($S_{kw} = 0$) e uma distribuição assimétrica negativa apresenta uma aba esquerda longa abaixo da mediana ($S_{kw} < 0$). No caso contrário, a distribuição é enviesada à direita ($S_{kw} > 0$).

O coeficiente de excesso, ou curtose (*kurtosis*), é uma medida de dispersão que caracteriza o "achatamento" da curva da função de distribuição da série temporal, e é calculado

pela equação:

$$K = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{y_n - \bar{y}}{S}\right)^4 \tag{1.6}$$

onde S corresponde à estimativa do desvio padrão da série temporal observada.

O valor da curtose é ainda calculado através do quociente de duas funções de momentos de ordem m (u_m, para $m = 2$ e $m = 4$) da série temporal, y_n, para $n = 1, ..., N$, em relação à média, e é expresso pela equação:

$$K = \frac{E[(y_n - \bar{y})^4]}{(E[(y_n - \bar{y})^2])^2} = \frac{u_4}{u_2^2} \tag{1.7}$$

em que a curtose de uma distribuição normal é igual a 3, pelo que a sua distribuição é designada por mesocúrtica.

É sabido que, frequentemente, as séries temporais dos mercados financeiros apresentam padrões não-lineares e irregulares, e são, em geral, caracterizadas por excessos de curtose ($K > 3$). Isto é, as suas distribuições são leptocúrticas, ou seja, são mais altas (afuniladas) e concentradas em relação a uma distribuição normal, e apresentam caudas pesadas, com valores que se afastam da média por vários múltiplos do desvio padrão.

No caso contrário, as séries financeiras com um valor de $K < 3$ apresentam distribuições platicúrticas, com uma zona central mais "achatada" e com caudas mais "finas" em relação a uma distribuição normal. Por conseguinte, as distribuições platicúrticas ou as formas fracas de assimetria raramente aparecem nas séries financeiras (Franke *et al.* (2008) [186]).

1.2.1 O Teste de Normalidade de Jarque e Bera (JB)

O teste de Jarque e Bera (1987) [251] é um teste estatístico assintótico (amostras grandes) de máxima verosimilhança, com base no multiplicador de Lagrange, sob a suposição da

normalidade dos dados de uma série temporal observada (H_0) *vs* a não normalidade dos dados respectivos (H_1), em que o teste estatístico clássico (JB) mede a diferença da assimetria (*skewness*) e do achatamento (*kurtosis*), entre a distribuição desconhecida nos dados observados e a distribuição normal padrão.

Assim, a estatística do teste de Jarque e Bera (JB) é apresentada pela expressão:

$$JB = N\left(\frac{S_{kw}^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24}\right) \tag{1.8}$$

em que N é o valor da dimensão da amostra, S_{kw} é a *skewness* e K é o valor da *kurtosis*. Ademais, o teste JB é um teste frequentemente utilizado para verificar se os resíduos estimados de uma regressão linear ajustada aos dados observados, pelo método dos mínimos quadrados ordinários (*Ordinary Least Squares* (*OLS*)), obedecem a uma distribuição normal[8] $N(0, \sigma^2)$. Isto é, a normalidade nos resíduos permite obter estimadores OLS não enviesados, com variância mínima (*minimum variance unbiased* (*MVU*)).

A estatística do teste (JB) apresenta uma distribuição assintótica à χ^2 com 2 graus de liberdade, sob a hipótese nula de existência de uma distribuição simétrica e mesocúrtica na série temporal observada. Por conseguinte, a rejeição da hipótese nula (H_0) leva-nos à rejeição da hipótese de normalidade nos resíduos estimados, mas não nos dá a distribuição alternativa. Contudo, a não rejeição de H_0 não implica necessariamente que a distribuição nos resíduos estimados siga uma normal. Significa apenas que não rejeitamos a hipótese nula de existência de uma distribuição simétrica ($S_{kw} = 0$), com uma *kurtosis* (K) igual a 3 (Baltagi (2011) [24]).

[8] Por exemplo, Kunst (2011) [288] refere que o teste de JB é um teste adequado para testar a normalidade dos erros nos modelos lineares de médias móveis autoregressivos ARMA(p, q), podendo, no entanto, ocorrer erros não-Gaussianos num modelo especificado como correcto.

1.3 Análise da Estacionariedade Fraca em Séries Temporais Financeiras

Uma série temporal estocástica, $y_n, n = 1, ..., N$, diz-se fracamente estacionária até à segunda ordem (estacionária no sentido lato) ou estacionária em covariância, se apresenta média e variância constantes ao longo do período temporal e se o valor da covariância entre dois períodos de tempo depende apenas da distância ou do *lag* entre os dois períodos $(n, n+k)$, para todo o inteiro k, e é independente do tempo n, isto é:

- $E(y_n) = \mu$,
- $Var(y_n) = E[(y_n - \mu)]^2 = \sigma^2 < \infty$, e
- $\gamma_k = E[(y_n - \mu)(y_{n+k} - \mu)]$

onde μ e σ^2 correspondem à média e à variância da série temporal y_n, respectivamente, e γ_k é a covariância no desfasamento k, isto é, a covariância (ou função autocovariância) entre os valores de y_n e y_{n+k}. Por outro lado, para $k = 0$, a covariância é expressa por γ_0, o que significa que γ_0 é igual à variância do sinal σ^2.

Isto é, se uma série temporal for fracamente estacionária até à segunda ordem, a sua média, a sua variância, e a sua covariância, para os diversos *lags* de tempo, permanecem constantes e são independentes do período temporal observado.

1.3.1 Processo Estacionário em Tendência ou Processo Estacionário às Primeiras Diferenças: A Abordagem Teórica

Desde a década de 80 têm sido apresentados diversos trabalhos econométricos para escolher as classes de modelos que melhor caracterizam as séries longas de dados agregados.

Destacam-se, assim o trabalho clássico de Nelson e Plosser (1982) [371], o trabalho de Campbell e Mankiw (1987) [80] e o de Stock e Watson (1988) [486], que serviram de base à investigação sobre os processos de geração dos dados agregados históricos nos EUA, durante o século XX. Na sua investigação os autores realizaram diversos ensaios experimentais acerca do comportamento dos sinais observados para encontrar a resposta à questão que se colocava na altura, isto é, se as séries longas analisadas apresentavam flutuações estacionárias em torno de uma tendência determinística, ou se, pelo contrário, os sinais não apresentavam uma certa tendência para regressar a um "caminho" determinístico, pelo que estes eram caracterizados por processos estacionários em diferenças.

Explicitam-se agora as duas classes de modelos propostos por Nelson e Plosser (1982) [371], que melhor caracterizam as séries (temporais) longas dos EUA pré-processadas em logaritmos naturais.

Como é sabido, estas classes de modelos são claramente não estacionárias, o que significa que a sua média ou a sua variância dependem da escala temporal ($n = 1, ..., N$), podendo ser geradas por um processo estacionário em tendência (*trend-stationary process* (*TSP*)) ou por um processo estacionário às primeiras diferenças (*difference-stationary process* (*DSP*)):

$$y_n = \beta_0 + \beta_1 n + e_n \tag{1.9}$$

$$\Delta y_n = y_n - y_{n-1} = \beta_0 + e_n \tag{1.10}$$

em que os termos dos erros e_n, para cada classe de modelos, apresentam estacionariedade em covariância, de média nula $E(e_n) = 0, \forall n$ e variância constante $var(e_n) = \sigma_e^2, \forall n$.

O primeiro modelo (Equação (1.9)) proposto pelo autor [371] corresponde a um *TSP*,

expresso como uma função determinística no tempo (no qual a sua média não é constante ao longo do tempo: $E[y_n] = \beta_0 + \beta_1 n$) acrescida de flutuações estacionárias dos erros em torno da linha de tendência, que seguem a representação de um processo ARMA estacionário e invertível. Torna-se assim explícito que, a variância deste modelo é constante ao longo do tempo, isto é, $var(y_n) = \sigma^2$, e para horizontes temporais longos a única informação sobre y_n está contida na função de tendência determinística.

O segundo modelo definido na Equação (1.10) pertence à classe dos processos ARMA estacionários e invertíveis às primeiras diferenças, ou para ordens superiores (isto é, equivale aos *DSP*). Assim, a estacionariedade de um passeio aleatório[9] (*DSP*) com deriva, é induzida às primeiras diferenças[10], em que a sua média (β_0) apresenta um desempenho semelhante a β_1 no modelo *TSP*, quando ambos os parâmetros causam uma tendência crescente em y_n ao longo do período temporal. Por outro lado, se $\beta_0 = 0$, o passeio aleatório definido na Equação (1.11) é especificado por um passeio aleatório sem tendência ou por um passeio aleatório com deriva nula.

Como foi comprovado, os valores de y_n acumulados, com inicio em y_0 a partir da Equação (1.10) (isto é, do modelo *DSP*) são expressos pela equação (Nelson e Kang (1984)

[9] A título de exemplo, o modelo AR(1) não estacionário, para $\rho = 1$, é um passeio aleatório com deriva:

$$y_n = y_{n-1} + \beta_0 + e_n, \quad n = 1, 2, ..., N \tag{1.11}$$

onde e_n corresponde aos erros do modelo, que apresentam um processo de ruído branco Gaussiano estacionário $e_n \sim NID(0, \sigma^2)$, as variáveis y_n e y_{n-1} são I(1), e o valor inicial, y_0, é independente de e_n para qualquer $n \geq 1$.

[10] As primeiras diferenças de um passeio aleatório com deriva são expressas pela equação:

$$y_n - y_{n-1} = (\rho - 1)y_{n-1} + \beta_0 + e_n \tag{1.12}$$

em que $n = 1, ..., N$, e $\rho = 1$. Isto é, esta equação é igual à Equação (1.10).

[370]):

$$y_n = \alpha + \beta_1 n + \sum_{j=1}^{n} e_j \tag{1.13}$$

que apresenta a mesma forma do modelo linear (Equação (1.9)), mas é essencialmente diferente. Deste modo, y_n é expresso em função de um ponto de referência histórico no passado $\alpha = y_0$ (onde α é o termo constante), β_1 é o coeficiente da tendência, e a perturbação é não estacionária, porque a variância e as autocovariâncias dependem do tempo n. No presente caso, a variância da perturbação corresponde a $n\sigma^2$, pelo que esta aumenta ao longo do tempo.

A estratégia adoptada por Nelson e Plosser (1982) [371] na escolha da classe dos modelos (*DSP* ou *TSP*) que melhor caracteriza as séries longas dos EUA no século XX baseou-se no teste de raiz unitária de Dickey-Fuller (1979) [130], apresentado através da equação:

$$y_n = \beta_0 + \rho y_{n-1} + \beta_1 n + e_n \tag{1.14}$$

onde a série temporal observada pertence a um processo estacionário às primeiras diferenças (*DSP*) se $\rho = 1$, $\beta_1 = 0$ (hipótese nula), ou corresponde a um processo estacionário em tendência (*TSP*) (hipótese alternativa) se $|\rho| < 1$.

Os autores puderam assim concluir que as séries longas dos EUA, isto é, as séries temporais do PNB (Produto Nacional Bruto), despesa, investimento, preços de consumo, preços de *stocks*, taxas de juro, emprego, e taxa de desemprego, expressas sob a forma de médias anuais, para o período de 1860-1909 a 1970, eram melhor caracterizadas por um *DSP*, isto é, por um processo de passeio aleatório, estacionário às primeiras diferenças, estocástico e irregular, do que por um *TSP*, com flutuações estacionárias de curto prazo em

torno de uma função de tendência determinística no longo prazo. Com efeito, os autores concluíram que os modelos macroeconómicos baseados nas perturbações monetárias, como uma fonte de flutuações (estacionárias) transitórias puras, talvez nunca tenham tido sucesso na explicação das amplas variações nos *outputs* das séries temporais apresentadas, e essa variação estocástica elevada, devido aos factores reais (tais como a acumulação de capital, o crescimento populacional, as alterações tecnológicas, entre outros), constitui um elemento essencial nos modelos de flutuações económicas, no domínio da teoria do crescimento económico.

Um pouco mais tarde, Campbell e Mankiw (1987) [80], e Stock e Watson (1988) [486] confirmaram os resultados de Nelson e Plosser (1982) [371], para as séries longas de dados macroeconómicos dos EUA, no período após a 2ª Guerra Mundial até aos anos oitenta, onde os modelos de passeio aleatório com deriva (*random walk models with drift*) providenciaram boas aproximações às séries históricas. Por exemplo, no artigo de Stock e Watson (1988) [486] foram abordadas as diversas perspectivas (estatísticas e económicas) sobre esta problemática, em que as séries temporais analisadas (PNB, consumo e investimento) pareceram apresentar tendências estocásticas[11] (conhecidas pelos processos de passeio aleatório com deriva) no longo prazo, existindo ainda uma relação entre as alterações na tendência estocástica e as flutuações nos ciclos de negócios no curto prazo, permitindo avaliar as políticas de crescimento no curto prazo e as implicações das políticas de estabilização no longo prazo. No entanto, o tema é controverso, tal como iremos ver mais adiante com base nos trabalhos de Perron (1989) [400], Zivot e Andrews (1992) [537], e de Perron (1993) [401].

[11] Isto é, as tendências estocásticas apresentam desvios relativamente à média da tendência linear determinística, devido a uma certa quantidade aleatória não-previsível.

Vários exemplos de processos de raiz unitária (*unit root process*) compreendem as sucessões cronológicas dos mercados bolsistas, tais como: *futures contracts* (Samuelson (1965)[435]), *stock prices* (Samuelson (1973)[436]), *spot and forward exchange rates* (Meese e Singleton (1983)[348]), *foreign exchange futures market* (Doukas e Rahman (1987)[136]), *energy futures prices (commodities)* (Chinn e Coibion (2009)[102]), *Iran stock market (ISM)* (Oskooe *et al.* (2010)[385]), entre outras.

Recentemente, Maddala e Lahiri (2009)[324] realçaram as implicações económicas decorrentes das classes de modelos escolhidos, *TSP* ou *DSP*. Isto é, por exemplo, se o PNB, a preços correntes, de um País, corresponde a um processo estacionário em diferenças (tal como apresentado na Equação (1.10)), as flutuações do PNB são explicadas por choques (perturbações) persistentes da economia real, e não provavelmente por choques monetários temporários, o que contraria de certa forma a teoria dos ciclos de negócios, que se baseia em flutuações temporárias em torno de uma linha de tendência no longo prazo, e caracteriza os modelos *TSP*. No caso contrário, se $|\rho| < 1$ num modelo AR(1) estacionário[12], o efeito dos choques na produção agregada declina ao longo do tempo.

Agora, em termos estatísticos, existem dois tipos de problemas. O primeiro baseia-se nos métodos utilizados para a remoção da tendência numa série temporal não-estacionária. Isto é, com base numa regressão linear do sinal y_n no tempo n, pelo método *OLS*, onde os resíduos estimados são agora estacionários[13], ou então, às primeiras diferenças. Como

[12] Um modelo AR(1) é estacionário em covariância ou simplesmente estacionário, quando se verifica a condição: $|\rho| < 1$. Todavia, se $|\rho| > 1$, nenhum dos *detrending methods* (isto é, de regressão linear para o modelo *TSP*, ou às primeiras diferenças para o modelo *DSP*) pode induzir estacionariedade, por essa razão o processo é conhecido como explosivo.

[13] Note-se que os resíduos estimados de um modelo *TSP* (Equação (1.9)) equivalem à série temporal sem tendência (*detrended time series*): $\hat{e}_n^d = y_n - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 n)$. Ou seja, os resíduos estimados são estacionários e apresentam variância, autocovariâncias, e covariâncias bem definidas com as restantes variáveis *detrended* (Nelson e Kang (1984) [370]).

é sabido, as autocorrelações espúrias podem ocorrer sempre que se remove a tendência determinística, com base numa regressão linear, em nível, na variável tempo n, quando de facto a série temporal é estacionária em diferenças (*DS time series*), ou então, se a sucessão cronológica estacionária em tendência (*TS time series*) é diferenciada, à custa da introdução de uma estrutura MA(1) nos erros.

O segundo tipo de problemas compreende a estimativa do parâmetro autoregressivo (ρ) no modelo AR(1) de raiz unitária (isto é, sob a hipótese nula: $\rho = 1$), com base no método *OLS*, em que o parâmetro ρ estimado apresenta uma distribuição não-*standard* e é enviesado para zero (Maddala e Lahiri (2009)[324]). Donde, os testes t e F não apresentam uma distribuição Gaussiana, sob a suposição de presença de raiz unitária no modelo autoregressivo.

Quanto ao primeiro problema estatístico importa referir as principais conclusões dos experimentos laboratoriais de Nelson e Kang (1984) [370] decorrentes do aparecimento de correlações espúrias, através da utilização de um modelo de regressão linear no tempo n (modelo do tipo *TSP*), quando, na realidade, a série temporal não é estacionária em função do tempo, porque corresponde a um processo de passeio aleatório:

- A regressão de um passeio aleatório sem deriva (ou sem "tendência") na variável tempo n, pelo método *OLS* (*Ordinary Least Squares*), apresenta valores de R^2 de cerca de 0.443, para qualquer dimensão da amostra se, de facto, a variável Y não apresenta relação com a variável tempo;

- Para os passeios aleatórios com deriva, o valor de R^2 (coeficiente de determinação) é mais elevado e aumenta com a dimensão da amostra, apresentando no limite o valor 1, para quaisquer valores de β_0;

- Os resíduos da regressão (do passeio aleatório) no tempo apresentam apenas uma variância média de cerca de 14% da variância estocástica verdadeira da série original. Isto é, os resíduos da regressão no tempo são erroneamente interpretados como uma série temporal sem tendência (*detrended time series*), por essa razão a sua variância subestima bastante a variância actual da série temporal.

- Os valores médios das autocorrelações amostrais dos resíduos da regressão (do passeio aleatório) na variável tempo dependem da dimensão da amostra, isto é, por exemplo, cerca de $(1 - 10/N)$ para o *lag* 1 (onde N é a dimensão da amostra), pelo que estes são puramente "artificiais".

- O teste estatístico t convencional, que testa a significância do coeficiente da regressão linear (do passeio aleatório) no tempo n, pelo método *OLS*, não é válido. Isto é, estes testes tendem a rejeitar a hipótese nula de não dependência na variável tempo em 87% dos casos, nas amostras de dimensão 100 e para um nível de significância de 5%, quando, de facto, não existe dependência no tempo (ver Equação (1.10)).

- A regressão de um passeio aleatório noutro passeio aleatório, com a variável tempo (variável independente) incluída na tendência, está extremamente condicionada a um fenómeno de regressão espúria. Isto é, os testes t convencionais tendem a indicar uma relação de dependência entre as variáveis de passeio aleatório (variável dependente e variável independente) na ausência de relação funcional entre estas.

Em particular, Plosser e Schwert (1978) [411] concluíram que para as regressões realizadas em níveis**,** quando, de facto, os dados económicos são estacionários às primeiras diferenças (DSP), os resíduos das regressões (*detrended time series*) apresentam variâncias

que aumentam ao longo do tempo, isto é, são não-estacionários (heterocedásticos), porque estão correlacionados com Δy_n (variável dependente estocástica). Com efeito, anteriormente Granger e Newbold ((1974) [207], citado por Plosser e Schwert (1978) [411]), referiram que, em regra, as regressões estimadas entre variáveis não-estacionárias, em níveis, apresentam resíduos com autocorrelações elevadas ($\hat{\rho} \approx 1$), em que os valores da estatística de Durbin-Watson são próximos de zero[14].

1.3.2 Teste de Estacionariedade com Base no Correlograma

Um teste simples de estacionariedade baseia-se na função de autocorrelação (FAC) para o desfasamento temporal k, isto é:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \tag{1.15}$$

onde γ_k é a covariância para o *lag* k (inteiro) e γ_0 é a variância (σ^2), a partir de uma série temporal estocástica y_n, para $n = 1, ..., N$. Por exemplo, se o desfasamento temporal é nulo ($k = 0$) a função de autocorrelação torna-se unitária ($\rho_0 = 1$). Para $|\rho_k| \leq 1, \forall n$, ρ_k varia entre -1 e 1, $\rho_k = \rho_{-k}$, $\forall n$, isto é, a FAC é uma função par porque os pares (y_n, y_{n+k}) e (y_n, y_{n-k}) apresentam o mesmo *lag* temporal, e a representação gráfica de ρ_k contra os k *lags* dá-nos o correlograma da população. Em particular, a função de autocorrelação amostral para o *lag* k ($\hat{\rho}_k$) é apresentada pelo quociente entre a covariância amostral ($\hat{\gamma}_k$) no desfasamento k e a variância amostral ($\hat{\gamma}_0 = \hat{\sigma}^2$). A representação gráfica de $\hat{\rho}_k$ contra k *lags* de tempo dá-nos o correlograma amostral.

A título de exemplo, para a série longa do PIB trimestral em valor dos EUA, com tendência positiva durante o período pós-Guerra até à decada de 80, quantas vezes será

[14] Por exemplo, se y_n e x_n são I(1), em regra o resíduo e_n da regressão $y_n = \beta x_n + e_n$ é também I(1), para $n = 1, ..., N$, porque é uma combinação linear de processos I(1): $e_n = y_n - \beta x_n$.

necessário diferenciar a série temporal para que esta seja estacionária? Uma das formas de averiguar a estacionariedade consiste na análise da função de autocorrelação amostral. Isto é, *a função de autocorrelação de uma série temporal estacionária cai bruscamente para zero à medida que os k lags aumentam. Todavia, nos processos integrados não ocorre este comportamento (Griffiths et al. (1993) [215]).*

Por exemplo, quando um processo estocástico é puramente aleatório (tal como um processo de ruído branco[15] estacionário em covariância e Gaussiano), a FAC amostral estimada para qualquer *lag* de tempo k maior do que zero é zero. Por exemplo, Bartlett (1946) [37] mostrou que para uma série temporal puramente aleatória (tal como um processo de ruído *iid* aleatório e Gaussiano) a função de autocorrelação amostral apresenta uma distribuição aproximada à normal com média zero e variância $\frac{1}{N}$, isto é, $\rho_k \overset{aprox.}{\cap} N(0, \frac{1}{N})$, em que N corresponde à dimensão da amostra[16].

Teste de Box e Pierce

Box e Pierce (1970) [65] desenvolveram o teste Q para testar a hipótese nula conjunta de que todas as funções de autocorrelação (FAC) são iguais a zero (H_0: $\rho_k = 0$ para $k = 1, 2, ..., m$ *lags*).

A estatística Q proposta pelos autores, sob H_0 e para amostras grandes, apresenta uma distribuição assintótica à distribuição de Qui-Quadrado com m graus de liberdade, e

[15] Um processo de ruído branco é, em regra, caracterizado por apresentar: a) distribuição normal e independentemente distribuída (NID) em torno da média zero, b) variância constante (σ^2), c) função de autocorrelação (FAC) amostral nula para diversos *lags* temporais, para $k \neq 0$ (DeLurgio (1998) [125]). Estas propriedades aplicam-se aos resíduos dos modelos lineares, em que o processo de ruído branco apresenta uma distribuição normal e independentemente distribuída, de média nula e variância constante: $e_n \sim NID(0, \sigma_e^2)$.

[16] A título de exemplo, se $N = 100$, obtém-se uma variância de $\frac{1}{100}$, ou um desvio padrão de $\frac{1}{\sqrt{100}} = 0.1$. Assim, de acordo com as propriedades da distribuição normal *standard*, o intervalo de confiança a 95%, para qualquer FAC amostral nula será igual a (0 ± 0.196).

é definida por:

$$Q = N\sum_{k=1}^{m}\hat{\rho}_k^2 \overset{a}{\sim} \chi_m^2 \tag{1.16}$$

em que N é a dimensão da amostra, $\hat{\rho}_k$ corresponde à função de autocorrelação (FAC) amostral estimada da série temporal, e m é o *lag* escolhido para a realização do teste.

Testa-se assim a hipótese nula (H_0) de que todos os valores de ρ_k são conjuntamente iguais a zero (tal como um processo de ruído branco estacionário) *vs* a hipótese alternativa (H_1) de que existe pelo menos um ρ_k diferente de zero, para $k = 1, ..., m$[17].

Teste de Ljung-Box

Ljung e Box (1978) [308] sugeriram a modificação do teste de Box e Pierce (1970) [65], para superar os problemas de alguma falta de potência da estatística Q em amostras pequenas. Com efeito, a estatística Q_{LB} de Ljung e Box (1978) [308] apresenta uma melhor *performance* nestas amostras, e é apresentada pela equação:

$$Q_{LB} = N(N+2)\sum_{k=1}^{m}\hat{\rho}_k^2(N-k)^{-1} \tag{1.17}$$

onde N é a dimensão da amostra e m é definido pelo número de *lags* seleccionados. Assim, sob a hipótese nula de existência de um processo de ruído branco estacionário (H_0: $\rho_k = 0$ para $k = 1, 2, ..., m$ *lags*) o teste estatístico Q_{LB} converge assimptoticamente para uma χ_m^2.

1.3.3 Testes de Raízes Unitárias

Os testes de raízes unitárias tornaram-se muito populares na área da estatística e da econometria nos últimos 30 anos. Pesquisas de relevo sobre os processos de raiz unitária,

[17] Na práctica, se a estatística de Box e Pierce (1970) [65] $Q > \chi^2_{(1-\alpha)}$, em que $\chi^2_{(1-\alpha)}$ é o quantil crítico a $100(1-\alpha)\%$ de confiança, rejeita-se a hipótese nula de que todas as FAC amostrais estimadas são nulas, pelo que não existe um processo de ruído branco, para o nível de significância escolhido α.

raiz quase-unitária, não-estacionariedade, quase não-estacionariedade, processos integrados ou processos quase-integrados têm sido palco de atenção por parte da comunidade científica afecta às áreas de matemática, estatística e econometria. É sabido que White (1958) [522] mostrou que a estimativa do coeficiente autoregressivo, pelo método OLS, em modelos AR(1), sob a hipótese nula de presença de raiz unitária, converge em distribuição para um funcional de um integral estocástico de um processo de Wiener padrão (Chan (2009) [93]). Tornou-se, assim claro que o modelo AR(1) passou a assumir um papel importante nos testes de raízes unitárias, para verificar se uma série temporal observada é ou não um passeio aleatório.

Iniciemos, então, a abordagem aos testes de raízes unitárias, através da apresentação de um processo AR(1) estacionário em nível (tendência constante):

$$y_n = \rho y_{n-1} + e_n, \quad |\rho| < 1 \tag{1.18}$$

em que $n = 1, ..., N$ corresponde ao período temporal das observações, ρ é o coeficiente da variável endógena (dependente) para um *lag* (isto é, ρ é conhecido pelo parâmetro autoregressivo de primeira ordem), e os termos dos erros $e_n, n = 1, ..., N$, apresentam uma distribuição normal e identicamente distribuída, de média zero e variância constante $e_n \sim WN(0, \sigma_e^2)$, ou seja, são caracterizados por um processo de ruído branco Gaussiano (ruído *iid* Gaussiano).

Agora, se $\rho = 1$ na Equação (1.18) a série temporal estocástica $y_n, n = 1, ..., N$ apresenta uma raiz unitária, pelo que é classificada como um processo de passeio aleatório (puro) sem deriva, e é por consequência não-estacionária em nível.

Como é sabido, a estimativa do parâmetro autoregressivo na Equação (1.18), pelo método *OLS*, apresenta uma estimativa enviesada para zero, quando $\rho = 1$, ou para

$|\rho| < 1$ e próximo da unidade[18].

De facto, os resultados da inferência clássica não se aplicam na presença de raiz unitária. Por esta razão, Dickey (1976) [128], e Fuller (1976) [189] procederam nas estimativas dos valores críticos das estatísticas dos testes de Dickey-Fuller, sob a hipótese nula ($\rho = 1$), com recurso às simulações de Monte-Carlo[19]. Um pouco mais tarde, Dickey-Fuller (1979) [130] estimaram as formas das distribuições limite das estatísticas de raiz unitária $\hat{\rho}$, $\hat{\tau}$, e $\hat{Z}$, para $|\rho| = 1$, como um rácio de somas de variáveis independentes e identicamente distribuídas (*iid*), e aleatórias.

Para percepcionar adequadamente os testes de raiz unitária desenvolvidos por Fuller (1976) [189] e Dickey-Fuller (1979) [130], inicia-se a análise de forma simples, para escolher entre um modelo característico de um *trend-stationary process* (*TSP*) apresentado por

$$y_n = \gamma_0 + \gamma_1 n + e_n,\ n = 1, ..., N \tag{1.19}$$

e o modelo característico de um *difference-stationary process* (*DSP*), expresso por

$$y_n = a_0 + y_{n-1} + \mu_n,\ n = 1, ..., N \tag{1.20}$$

em que e_n e μ_n são processos estacionários.

De acordo com a exposição de Bhargava ((1986) [49], citado por Davidson e Mackinnon

[18] Evans e Savin (1981, 1984) [164], [165] mostraram que a distribuição do parâmetro autoregressivo ρ é enviesada à esquerda, com recurso aos métodos de simulação de Monte-Carlo, em modelos AR(1) para $\rho = 1$ (H_0), sem e com deriva. De forma análoga, Nelson e Plosser (1982) [371], simularam processos de passeio aleatório, sem e com deriva, pelo método referido, sob H_0 ($\rho = 1$), onde os valores de $\hat{\rho} \approx 0.895$ ficaram aquém do círculo unitário.

[19] O método de Monte-Carlo como processo inferencial visa a estimativa do valor crítico da estatística do teste T, com base na amostragem aleatória repetida múltiplas vezes, M, a partir de um processo gerador da hipótese nula (por exemplo, o passeio aleatório). Ou seja, calculam-se os valores das estatísticas do teste $t_1, ..., t_M$, para cada experimento M, e utilizam-se estes valores para estimar a distribuição da estatística do teste, T, quando a hipótese nula é verdadeira ($H_0 : \rho = 1$).

(1993) [120]) os dois modelos apresentados podem ser combinados num modelo único:

$$y_n = \gamma_0 + \gamma_1 n + \mu_n \tag{1.21}$$
$$\mu_n = \rho\mu_{n-1} + e_n$$

ou na equação equivalente,

$$y_n = \gamma_0 + \gamma_1 n + \rho[y_{n-1} - \gamma_0 - \gamma_1(n-1)] + e_n \tag{1.22}$$

onde e_n segue um processo estacionário.

Caso $\rho = 1$, $y_n, n = 1, ..., N$, é estacionário às primeiras diferenças. No caso alternativo, $|\rho| < 1$, $y_n, n = 1, ..., N$ é estacionário em tendência. A equação (1.22) pode ainda ser apresentada na forma reduzida:

$$y_n = \beta_0 + \beta_1 n + \rho y_{n-1} + e_n \tag{1.23}$$

e, é equivalente à expressão,

$$\Delta y_n = \beta_0 + \beta_1 n + (\rho - 1) y_{n-1} + e_n \tag{1.24}$$

com recurso à subtracção de y_{n-1} de ambos os lados da Equação (1.23), em que $\beta_0 \equiv \gamma_0(1-\rho) + \gamma_1\rho$, $\beta_1 \equiv \gamma_1(1-\rho)$, e e_n é um processo de ruído branco estacionário. Quando $\rho = 1$, $\beta_1 \equiv 0$, em que o teste de hipóteses conjunto é agora definido convencionalmente por H_0: $\rho = 1$, *vs* a hipótese alternativa H_1: $\rho < 1$.

Por um lado, a não rejeição da hipótese nula (passeio aleatório com deriva) implica que a série temporal seja integrada de ordem 1, isto é, $y_n \sim I(1)$, o que significa que a hipótese dos mercados eficientes (HME) não é rejeitada[20], em que as variações dos

[20] No final da década de 70, Kantor (1979) [267] realçou o papel importante da hipótese do passeio aleatório nas teorias das expectativas racionais, onde os investidores utilizam a nova informação (preços das acções) de forma eficiente.

preços relativos dos activos são ajustadas de forma apropriada aos dividendos esperados a pagar, tornando-se quase indistinguíveis de um processo de ruído branco (Samuelson (1973) [436]). A não rejeição de um passeio aleatório encontra-se associada ao processo de Wiener ou à moção Browniana, em que as variações dos preços futuros dos activos financeiros são aleatórias e, consequentemente, não previsíveis.

Pelo contrário, ao não se rejeitar a hipótese alternativa H_1: $|\rho| < 1$, o processo torna-se estacionário em torno de uma tendência determinística (TSP) ao longo do tempo. Logo, $y_n \sim I(0)$ tende a regressar à sua situação de equilíbrio, ou seja, à sua média: $E(y_n) = \beta_0 + \beta_1 n$.

Testes de Dickey-Fuller *(DF tests)*

Na presente secção iremos abordar os testes de raiz unitária que são amplamente utilizados em econometria. Os testes foram desenvolvidos por Dickey (1976) [128], Fuller (1976) [189], e mais tarde por Dickey e Fuller (1979) [130], sendo, em geral, conhecidos pelos testes de Dickey-Fuller ou pelos testes DF. Os testes DF são, por conseguinte, baseados em regressões lineares pelo método OLS, em que as perturbações e_n apresentam um ruído branco estacionário. Por exemplo, testa-se a hipótese nula sobre a presença de raiz unitária numa das classes de equações abaixo apresentadas, que seja característica de um processo não-estacionário em nível (ou em tendência):

$$H_0 : \rho = 1 \iff y_n \sim I(1)$$

vs a hipótese alternativa de estacionariedade em nível,

$$H_1 : \rho < 1 \iff y_n \sim I(0)$$

em que o teste é unilateral esquerdo. Isto é, a região crítica de rejeição encontra-se definida na aba esquerda da distribuição da estatística do teste.

A primeira estatística de Dikey-Fuller (DF) é usualmente conhecida como a estatística τ (tau)[21], e foi inicialmente tabulada por Fuller (1976) [189], para $\rho = 1$, sob a suposição de erros ortogonais, com recurso aos métodos de simulação de Monte Carlo[22].

É sabido que a distribuição da estatística τ de Dickey-Fuller, sob H_0: $\rho = 1$, pelo método *OLS*, não é simétrica, a sua mediana e moda são menores do que zero, e apresenta um número mais elevado de valores negativos em relação à distribuição *t-Student*. Donde, a estatística DF(τ) não apresenta uma distribuição *t-Student*, ou uma distribuição normal (nem sequer assintoticamente), porque a estacionariedade é uma condição requerida na derivação das distribuições estandardizadas. Todavia, as distribuições limites (ou assintóticas) das estatísticas τ de DF aproximam-se da distribuição normal estandardizada $N(0, 1)$, e estão deslocadas para a esquerda em cerca de 0.3 (Mills e Markellos (2008) [354]).

São agora apresentadas as três classes de regressões lineares usualmente empregues nos

[21] Por exemplo, a estatística do teste de Dickey-Fuller (DF) pode ser calculada a partir da Equação (1.24) parametrizada na equação que se apresenta:

$$\Delta y_n = \beta_0 + \beta_1 n + \gamma y_{n-1} + e_n \tag{1.25}$$

em que n é a variável tempo, e $\gamma = \rho - 1$.

Pretende-se assim, testar a hipótese nula: H_0: $\gamma = 0 \iff y_n \sim I(1)$ (processo não estacionário em nível) *vs* a hipótese alternativa H_1: $\gamma < 0 \iff y_n \sim I(0)$ (processo estacionário em nível), com recurso à estatística τ_{ct}:

$$\tau_{ct} = \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\sigma}_{\hat{\rho}}} \tag{1.26}$$

onde $\hat{\gamma} = \hat{\rho} - 1$ é estimado na Equação (1.25), pelo método *OLS*, $\hat{\sigma}_{\hat{\rho}}$ é o erro padrão usual de $\hat{\rho}$, e τ_{ct} é a estatística DF estimada referente à equação de regressão (1.25), com constante e com tendência (*constant and trend*).

[22] Os valores críticos estimados de τ_{nc} (*no constant*), τ_c (*constant*) e τ_{ct} (*constant and trend*), para os diferentes níveis de significância α, e para as respectivas dimensões amostrais N, encontram-se tabulados em Fuller (1976) [189], ou na 2ª edição de Fuller (1996) [190]: *Table 10.A.2, Empirical Cumulative Distribution of* $\hat{\tau}$ *for* $\rho = 1$.

testes DF. A regressão apresentada na Equação (1.24) é a mais complexa, porque inclui a constante e a tendência como variáveis regressoras (ou exógenas). As restantes regressões são apresentadas pelas equações:

$$\Delta y_n = (\rho - 1) y_{n-1} + e_n \tag{1.27}$$

e

$$\Delta y_n = \beta_0 + (\rho - 1) y_{n-1} + e_n \tag{1.28}$$

em que a regressão (1.27) não apresenta constante e tendência, e a regressão (1.28), com constante, pode fazer sentido em termos económicos na presença de raiz unitária (H_0: $\rho - 1 = 0$), e e_n é a componente de ruído branco estacionário.

A segunda estatística de Dickey-Fuller (DF) é conhecida pela estatística Z, e foi estimada por Fuller (1976) [189], por métodos de simulação de Monte-Carlo, para $\rho = 1$ (H_0), sob a suposição de erros não autocorrelacionados[23]. Por conseguinte, a estatística Z é expressa pela equação:

$$Z = N(\hat{\rho} - 1) \tag{1.29}$$

onde N é a dimensão da amostra, e $\hat{\rho} - 1$ pode ser estimado por *OLS* na equação de regressão escolhida. Mais ainda, sob a hipótese nula ($\rho = 1$) as distribuições limites (ou assintóticas) das estatísticas Z não apresentam uma distribuição normal estandardizada $N(0, 1)$. Isto é, as distribuições assintóticas das estatísticas Z são assimétricas negativas (ou enviesadas à esquerda), onde as suas médias, medianas, e modas são menores do que zero.

[23] Os valores críticos estimados de Z_{nc} (*no constant*), Z_c (*constant*), e Z_{ct} (*constant and trend*), para os diversos níveis de significância α, e para as respectivas dimensões amostrais N, encontram-se tabulados em Fuller (1976), ou na 2ª edição de Fuller (1996) [190]: *Table 10.A.1. Empirical Cumulative Distribution of* $n(\hat{\rho} - 1)$ *for* $\rho = 1$.

No início da década de 90, Mackinnon (1991) [319] construiu um método alternativo de estimação dos valores críticos finitos e assintóticos das estatísticas DF (τ_{nc}, τ_c, τ_{ct}) e das estatísticas de cointegração de Engle e Granger (1987) [153], sob a suposição de presença de raiz unitária, com recurso às estimativas das regressões de superfícies de resposta, pelo método de Monte Carlo. Posteriormente, Davidson e Mackinnon (1993) [120] estimaram os valores críticos assintóticos[24] das estatísticas τ_{nc}, τ_c, τ_{ct}, e Z_{nc}, Z_c, e Z_{ct} de Dickey-Fuller, sob a hipótese nula de presença de raiz unitária, por métodos numéricos análogos aos de Mackinnon (1991)[319].

Teste Estatístico	1%	2.5%	5%	10%	97.5%
τ_{nc}	-2.56	-2.23	-1.94	-1.62	1.62
τ_c	-3.43	-3.12	-2.86	-2.57	0.24
τ_{ct}	-3.96	-3.66	-3.41	-3.13	-0.66
Z_{nc}	-13.7	-10.4	-8.0	-5.7	1.6
Z_c	-20.6	-16.9	-14.1	-11.2	0.4
Z_{ct}	-29.4	-25.1	-21.7	-18.2	-1.8

Tabela 1.1: Valores críticos assintóticos dos testes DF (Davidson e Mackinnon (1993) [120]).

Os resultados apresentados na Tabela (1.1), permitem-nos concluir que os valores críticos assintóticos das estatísticas dos testes τ e Z de Dickey-Fuller, em módulo, aumentam em função da complexidade dos modelos (nc, c, ct), para valores fixos do nível de significância α (excepto para $\alpha = 0.975$). Por outro lado, estes resultados estão próximos dos valores críticos tabulados por Fuller (1996) [190], sob a hipótese nula (H_0: $\rho = 1$), constatando-se que os valores críticos das estatísticas dos testes τ e Z de DF, em módulo, aumentam

[24] As estimativas dos valores críticos assimptóticos das estatísticas dos testes de raiz unitária, com base nos métodos numéricos apresentados, não exigem a suposição de normalidade ou homocedasticidade nos termos dos erros.

consoante o acréscimo de variáveis regressoras nas equações e o acréscimo da dimensão das amostras N, para valores fixos de α.

Recentemente, Mackinnon (2010) [322] estimou com bastante acuidade a forma funcional de cada regressão de superfície de resposta dos testes DF (τ_{nc}, τ_c, τ_{ct}) de raiz unitária, extensíveis aos testes de cointegração de Engle e Granger (1987) [153], sob a suposição de heterocedasticidade condicional nos resíduos, que permita obter o valor crítico estimado do teste DF, ou do teste de EG, para cada dimensão amostral da série temporal N, isto é:

$$C_k(p, N_k) = \beta_\infty + \beta_1 N_k^{-1} + \beta_2 N_k^{-2} + e_k \tag{1.30}$$

onde p é o nível do teste (dimensão do teste[25]) estimado, em termos percentuais, para a experimentação k (para, $k = 1, ..., M$ experimentações) e para a dimensão amostral N_k, β_∞, β_1, e β_2 são os três parâmetros a estimar, e e_k é a perturbação aleatória para a experimentação k. Isto é, as formas funcionais das regressões de superfície de resposta dos testes DF e dos testes de cointegração de Engle e Granger (1987) [153], aplicadas aos resíduos estimados das regressões de cointegração (sem constante, com constante, e com constante e tendência), foram estimadas através de simulações de Monte-Carlo[26], para gerar dados de acordo com os processos de passeio aleatório, onde as perturbações aleatórias foram geradas por processos de ruído branco Gaussiano. Em particular, o autor recorreu ao método dos Mínimos Quadrados Generalizados Exequíveis (*Estimated Generalized Least Squares* (*EGLS*)), devido à provável existência de heterocedasticidade condicional nos resíduos da regressão estimada, para estimar os valores críticos finitos

[25] A dimensão do teste é usualmente conhecida pelo nível de significância do teste α.

[26] As simulações de Monte Carlo foram realizadas para diversos níveis de significância ($\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$), com 500 réplicas por cada dimensão amostral, num total de 30 dimensões amostrais distintas, o que perfaz um total de 15.000 observações para cada regressão de superfície de resposta. O método proposto pelo autor admite um máximo de 6 séries a cointegrar ($N^* = 2, 3, 4, 5, 6$). Donde, para $N^* = 1$, o teste de cointegração reduz-se ao teste DF de raiz unitária.

e assintóticos dos parâmetros β_1, β_2, e β_∞, na regressão (1.30). A estimativa de β_∞ proporciona o valor crítico assintótico do teste DF e do teste de EG para o nível do teste escolhido p, porque quando $N \longrightarrow \infty$, N^{-1} e N^{-2} tendem para zero. Por outro lado, os parâmetros β_1, e β_2, determinam a forma da superfície de resposta para valores finitos de N.

Na prática, calcula-se o valor crítico preciso para cada teste DF (τ_{nc}, τ_c, τ_{ct}), de acordo com a dimensão do teste p e com a dimensão da amostra (N) da série temporal observada, através da utilização dos valores críticos estimados dos coeficientes de regressão (β_∞, β_1, e β_2), que estão tabulados em Mackinnon (2010) [322].

Finalmente, em Dickey e Fuller (1981)[131] foram apresentados os percentis das distribuições empíricas (finitas e assintóticas) dos testes usuais F de rácio de verosimilhança (especificados pelos testes conjuntos de raiz unitária[27] Φ_1, Φ_2, Φ_3), por meio de simulações de Monte Carlo, para as hipóteses nulas conjuntas apresentadas, consoante o grau de complexidade das regressões, a dimensão amostral das experimentações, e o nível de significância atribuído.

Distribuições Limites dos Testes de Dickey-Fuller como Funcionais de Processos de Wiener

Inicia-se agora uma abordagem sobre as **propriedades assintóticas do teste de Dickey-Fuller**, expresso como **funcionais de processos de Wiener**, e cujo resultado matemático é conhecido pelo **teorema do limite central funcional (TLCF)**.

O teorema do limite central funcional foi desenvolvido inicialmente por Donsker (1951) [134], para os processos integrados, I(1), de passeio aleatório, sob suposições restrictas

[27] Isto é, os testes conjuntos de raiz unitária estão definidos para as seguintes hipóteses: $H_0 : (\alpha, \rho) = (0, 1)$, para $y_n = \alpha + \rho y_{n-1} + e_n$, $H_0 : (\alpha, \beta, \rho) = (0, 0, 1)$, para $y_n = \alpha + \beta n + \rho y_{n-1} + e_n$, $H_0 : (\alpha, \beta, \rho) = (\alpha, 0, 1)$, para $y_n = \alpha + \beta n + \rho y_{n-1} + e_n$.

dos erros, $e_n \sim IN(0, \sigma^2)$, tendo sido generalizado mais tarde por McLeish (1975) [344] e Herrndorf (1984) [237], para os processos de erros distribuídos heterogeneamente e fracamente dependentes (inovações menos restritas).

Alguns anos mais tarde, Phillips (1987a, 1987b) [407] [408] generalizou a nova teoria assintótica aos processos integrados (processos unitários ou de raiz unitária) e aos processos quase integrados (processos quase unitários ou de raiz quase unitária), com base na aplicação directa do teorema do limite central funcional de Herrndorf (1984) [237], para as classes de inovações menos restritas, em que os testes DF são expressos em termos de funcionais de um processo de Wiener.

A aproximação de Phillips (1987a) [407], teve início num processo estocástico gerador de dados em tempo discreto, segundo a sequência $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ que satisfaz a Equação (1.11), mas agora sem deriva (β_0), isto é, um modelo AR(1), sem constante, para $\rho = 1$ (ou seja, um processo de passeio aleatório sem deriva, em que as perturbações apresentam um ruído branco Gaussiano, isto é, $e_n \sim NID(0, \sigma^2)$).

Tem-se então a representação do passeio aleatório: $y_n = S_N + y_0$, em que $S_N = \sum_{n=1}^{N} e_n$, com $S_0 = 0$, e y_0 é um estado inicial aleatório cuja distribuição é suposta ser conhecida.

O interesse agora situa-se na distribuição limite ($N \longrightarrow \infty$) das somas parciais estandardizadas das inovações:

$$X_N(r) = \frac{1}{\sqrt{N}\sigma} S_{[Nr]}, \text{ se } \frac{j-1}{N} \leq r \leq \frac{j}{N} \ , \ j = 1, ..., N, \tag{1.31}$$

que é equivalente à equação:

$$X_N(r) = \frac{1}{\sqrt{N}\sigma} S_N, \text{ se } \ r = 1 \tag{1.32}$$

onde $[Nr]$ representa a parte inteira do argumento, $r \in [0,1]$, σ é uma constante positiva, e $X_N(r)$ é uma função (escada) aleatória em r, tal que os percursos amostrais $X_N(r) \in D = D[0,1]$, em que D define o espaço das funções de valores reais em $[0,1]$.

Assim, quando $N \longrightarrow \infty$, a função (escada) aleatória $X_N(r)$ aproxima-se (em distribuição) do processo de passeio aleatório "rapidamente", o que significa que a função $X_N(r)$ se torna cada vez mais densa em $[0,1]$, porque a função escada "desvanece" em intervalos constantes de r extremamente diminutos. Logo, **a distribuição limite das somas parciais estandardizadas dos erros converge fracamente para um processo limite**, conhecido pelo **processo de Wiener,** $W(r)$, isto é:

$$X_N(r) = \frac{1}{\sqrt{N}\sigma} S_{[Nr]} \xrightarrow{w} W(r) \tag{1.33}$$

onde o símbolo "$\xrightarrow{w}$ " significa convergência fraca das medidas de probabilidade associadas para um processo de Wiener, quando $N \longrightarrow \infty$.

Este resultado é, em regra, conhecido pelo teorema do limite central funcional (TLCF), isto é, o TLC num espaço de sequências de funções contínuas aleatórias com valores reais em $[0,1]$, definido numa métrica uniforme:

$$\|f - g\| = \sup_{r \in [0,1]} |f(r) - g(r)|, \forall f, g \in D.$$

O processo de Wiener $W(r)$ é, por conseguinte, um processo aleatório Gaussiano contínuo no tempo, onde $W(r) \sim N(0,r)$, para r fixo, e apresenta incrementos independentes.

Neste contexto, Mills e Markellos (2008) [354], aduziram alguns resultados do teorema do limite central funcional, com base nos desenvolvimentos de Hamilton (1994) [221], Banerjee *et al.* (1993) [25], e Davidson (2006) [119], tais como: $W(1) \sim N(0,1)$, $\sigma W(r) \sim$

$N(0, \sigma^2 r)$, e $[W(r)]^2 / r \sim \chi_1^2$.

Mais ainda, se $g(\cdot)$ é um funcional contínuo em $[0, 1]$, então pelo teorema do mapeamento contínuo $g(X_N(r)) \xrightarrow{w} g(W(r))$.

Definição 1.3.1 *Uma moção Browniana padrão, $W(\cdot)$, é um processo estocástico contínuo no tempo, associando cada instante de tempo $n \in [0, 1]$ com o escalar $W(n)$ tal que: a) $W(0) = 0$; b) Para quaisquer instantes $0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k \leq 1$, as variações $[W(n_2) - W(n_1)], [W(n_3) - W(n_2)], ..., [W(n_k) - W(n_{k-1})]$ são Gaussianas multivariadas independentes com $[W(s) - W(n)] \sim N(0,\ s - n)$; c) Para qualquer realização, $W(n)$ é contínua em n com probabilidade 1 (Hamilton (1994) [221]).*

Em termos de propriedades matemáticas, Maddala e Kim (2004) [323] apresentaram a semelhança entre o passeio aleatório e o processo de Wiener. Com efeito, os autores partiram do principio de que a variação $W(N) - W(0)$ segue um processo de Wiener num período de tempo longo ($N = n\Delta n$), onde ΔW se relaciona com Δn (intervalos temporais curtos) de forma independente, com base na equação que se apresenta:

$$W(N) - W(0) = \sum_{j=1}^{n} e_j \sqrt{\Delta n} \tag{1.34}$$

em que $e_j \sim IN(0, 1)$, e sob a suposição de que $W(0) = 0$, verificam-se as propriedades matemáticas: $E(W(N)) = 0$ e a $Var(W(N)) = n\Delta n = N$.

Agora, partindo do pressuposto de que $e_n \sim IN(0, 1)$, e de que $S_N = \sum_{n=1}^{N} e_n$, S_N torna-se um processo de passeio aleatório com incrementos *iid* ($S_N = S_{n-1} + e_N$), com as mesmas propriedades matemáticas do processo de Wiener, isto é, $E(S_N) = 0$ e $Var(S_N) = N$, porque $\sigma^2 = 1$.

Em termos de aplicações práticas, o processo de Wiener é um processo Gaussiano *iid* de média nula com incrementos independentes, e tem sido utilizado frequentemente para modelar séries cronológicas de preços de activos financeiros[28]. Isto é, por exemplo, para as seguintes séries financeiras: *commodities prices*, *stock prices*, *future contracts*, *foreign exchange futures market*, e outras séries financeiras. Por outro lado, o processo de Wiener é também bastante utilizado nas áreas que se apresentam: economia, física, química, engenharia, biologia, ecologia, e outras.

Para estimar a distribuição limite do teste de Dickey-Fuller (sob a hipótese nula de existência de ruído branco) expressa por funcionais de integrais estocásticos de processos de Wiener, procede-se, a título de exemplo, na estimativa de um processo AR(1) sem constante pelo método *OLS*:

$$y_n = \rho y_{n-1} + e_n \tag{1.35}$$

onde $e_n \sim IN(0, \sigma^2)$, e $y_0 = 0$.

Por outro lado, a estimativa *OLS* do parâmetro ρ num processo AR(1) Gaussiano estacionário, para $|\rho| < 1$, é expressa pela equação:

$$\hat{\rho}_N = \frac{\sum_{n=1}^{N} y_{n-1} y_n}{\sum_{n=1}^{N} y_{n-1}^2} \tag{1.36}$$

e a partir da álgebra *OLS*, obtém-se a seguinte expressão:

$$(\hat{\rho}_N - \rho) = \frac{\sum_{n=1}^{N} y_{n-1} e_n}{\sum_{n=1}^{N} y_{n-1}^2}. \tag{1.37}$$

[28] Em 1920, Norbert Wiener construiu uma estrutura probabilística rigorosa, com base no modelo matemático desenvolvido por Louis Bachelier, sobre os incrementos irregulares dos preços das acções na bolsa de Paris (Wiersema (2010) [524]).

Agora, quando $N \longrightarrow \infty$ e $|\rho| < 1$, verifica-se uma convergência assintótica à distribuição normal (Hamilton (1994) [221]):

$$\sqrt{N}(\hat{\rho}_N - \rho) \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2[\sigma^2/(1-\rho^2)]^{-1}) = N(0, 1-\rho^2) \tag{1.38a}$$

em que $\sigma^2/(1-\rho^2)$ é a variância de um AR(1) estacionário em covariância.

Contudo, se $\rho = 1$, $\sqrt{N}(\hat{\rho}_N - \rho)$ apresenta variância nula. Por conseguinte, para que se obtenha uma distribuição assintótica não degenerada (variância não nula) de $\hat{\rho}_N$, sob a hipótese nula de presença de raiz unitária ($\rho = 1$), torna-se necessário multiplicar N por $(\hat{\rho}_N - 1)$, pelo que a estimativa *OLS* do desvio de $\hat{\rho}_N$ do valor verdadeiro de ρ (tal que: $\rho = 1$), redimensionada por N, é caracterizada pela equação:

$$N(\hat{\rho}_N - 1) = \frac{N^{-1}\sum_{n=1}^{N} y_{n-1}e_n}{N^{-2}\sum_{n=1}^{N} y_{n-1}^2} \tag{1.39}$$

onde Mills e Markellos (2008) [354], entre outros, mostraram que sob a hipótese nula de presença de um passeio aleatório, o numerador da Equação (1.39) apresenta convergência assintótica, isto é:

$$N^{-1}\sum_{n=1}^{N} y_{n-1}e_n \xrightarrow[N\longrightarrow\infty]{L} (1/2)\sigma^2(Y-1) \tag{1.40}$$

em que $Y \sim \chi^2(1)$, e o denominador da Equação (1.39), para $\rho = 1$, converge para um valor finito positivo[29], quando $N \longrightarrow \infty$, ou seja:

$$E\left[N^{-2}\sum_{n=1}^{N} y_{n-1}^2\right] = (\sigma^2/2)(1-1/N) \xrightarrow[N\longrightarrow\infty]{L} \sigma^2/2. \tag{1.42}$$

[29] Uma vez que $E(y_n^2)=n\sigma^2$, isto é, a variância de um AR(1) não estacionário para $\rho = 1$, generaliza-se o cálculo da esperança matemática de $\sum_{n=1}^{N} y_{n-1}^2$ no denominador da Equação (1.39), com base na equação que se apresenta:

$$E\left[\sum_{n=1}^{N} y_{n-1}^2\right] = \sigma^2\sum_{n=1}^{N}(n-1) = \sigma^2\left[\frac{(N-1)N}{2}\right] \tag{1.41}$$

Logo, a estatística $N(\hat{\rho}_N - 1)$ apresentada na Equação (1.39) apresenta uma distribuição assintótica não degenerada, caracterizada por um rácio entre uma variável χ^2 (redimensionada) e uma distribuição não padrão positiva. Assim, Phillips ((1987a) [407], citado por Mills e Markellos (2008) [354]) derivou a distribuição assintótica do denominador da Equação (1.39), sob H_0: $\rho = 1$, para condições mais gerais de dependência temporal e de heterocedasticidade condicional nas inovações, onde esta é caracterizada como um funcional de um integral estocástico de uma moção Browniana padrão, isto é:

$$N^{-2}\sum_{n=1}^{N} y_{n-1}^2 \xrightarrow{w} \sigma^2 \int_0^1 [W(r)]^2 \, dr \tag{1.43}$$

Analogamente, a distribuição assintótica do numerador da Equação (1.39), sob H_0: $\rho = 1$, é também expressa como um funcional de um integral estocástico de um movimento Browniano (padrão), ou seja:

$$N^{-1}\sum_{n=1}^{N} y_{n-1} e_n \xrightarrow{w} (1/2)\sigma^2([W(1)]^2 - 1) \tag{1.44}$$

em que $[W(1)]^2$ é uma variável $\chi^2(1)$ (Hamilton (1994) [221]).

Donde, a estimativa *OLS* de $\hat{\rho}_N$, para $\rho = 1$, é caracterizada em termos dos funcionais de movimentos Brownianos, sob suposições restritas dos erros ($e_n \sim IN(0, \sigma^2)$), isto é:

$$N(\hat{\rho}_N - 1) \xrightarrow{w} \frac{(1/2)([W(1)]^2 - 1)}{\int_0^1 [W(r)]^2 \, dr} \tag{1.45}$$

onde o denominador da expressão deve ser positivo, e $\sigma_e^2 = \sigma^2$.

Uma vez que $[W(1)]^2 \sim \chi^2(1)$, a probabilidade de que a variável $\chi^2(1)$ seja menor do que a unidade é 0.68, e dado que o denominador da Equação (1.45), para $r \in [0, 1]$, é suposto ser positivo, verifica-se que a probabilidade de $(\hat{\rho}_N - 1)$ ser negativa aproxima a 0.68, quando $N \longrightarrow \infty$. Ou seja, em cerca de 68% das amostras geradas por um

passeio aleatório sem deriva (AR(1) não estacionário e sem deriva) a estimativa de ρ_N será menor do que o valor unitário verdadeiro (Hamilton (1994) [221]). Por outro lado, se $[W(1)]^2$ for grande, para um certo conjunto de amostras, constata-se que o denominador da Equação (1.45) é igualmente grande, pelo que a distribuição limite (ou assintótica) de $N(\hat{\rho}_N - 1)$ é enviesada à esquerda (ou assimétrica negativa), confirmando o enviesamento da distribuição limite da estatística Z de Fuller (1976) [189].

Na prática, os valores críticos da estatística $N(\hat{\rho}_N - 1)$ são frequentemente estimados pelo método de Monte Carlo, sob a suposição de inovações Gaussianas, para as diversas dimensões amostrais finitas (N = 25, 50, 100, 250, 500) e dimensões dos testes, e estão tabulados em Fuller (1996) [190]. A título de exemplo, para $N \longrightarrow \infty$, os valores críticos assintóticos das distribuições subjacentes à Equação (1.45), com base num AR(1) não estacionário sem deriva, para $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.1$, são apresentados pelos valores, -13.7, -8.1, -5.7, tendo Phillips (1987a) [407] demonstrado que as distribuições limites da estatística $N(\hat{\rho}_N - 1)$ são invariantes numa classe ampla de inovações não-restritas (isto é, distribuídas heterogeneamente e fracamente dependentes).

Agora, de acordo com Hamilton (1994) [221], e Mills e Markellos (2008) [354], outra estatística popular conhecida, com base num AR(1) não estacionário sem constante, para testar a hipótese nula de que $\rho = 1$ (em que $e_n \sim IN(0, \sigma^2)$) apresenta como base a estatística t *OLS*, isto é:

$$t_N = \frac{(\hat{\rho}_N - 1)}{\hat{\sigma}_{\hat{\rho}_N}} = \frac{(\hat{\rho}_N - 1)}{\left(\frac{S_N^2}{\sum_{n=1}^{N} y_{n-1}^2} \right)^{1/2}} \tag{1.46}$$

onde $\hat{\sigma}_{\hat{\rho}_N}$ é o erro padrão *OLS* usual de $\hat{\rho}_N$ e S_N^2 é um estimador *OLS* consistente da

variância residual σ_e^2 (tal que: $\sigma_e^2 = \sigma^2$), ou seja:

$$S_N^2 = \frac{\sum_{n=1}^{N} (y_n - \hat{\rho}_N y_{n-1})^2}{(N-1)}. \tag{1.47}$$

Contudo, a distribuição da estatística t_N, por *OLS*, não apresenta uma distribuição Gaussiana assintótica, quando o processo verdadeiro é caracterizado por um passeio aleatório, isto é, para $\rho = 1$. Logo, para encontrar uma distribuição limite apropriada da estatística t_N subjacente à Equação (1.46), para $\rho = 1$, Hamilton (1994) [221] apresenta o resultado em termos dos funcionais de processos de Wiener, sob suposições restritas dos erros ($e_n \sim IN(0, \sigma^2)$):

$$t_N \xrightarrow{w} \frac{(1/2)([W(1)]^2 - 1)}{\left(\int_0^1 [W(r)]^2 \, dr \right)^{1/2}} \tag{1.48}$$

onde $\sigma_e^2 = \sigma^2$.

Na prática, os valores críticos da distribuição de t_N são estimados por simulações de Monte Carlo, sob a suposição de inovações Gaussianas e *iid*, para várias dimensões de amostras ($N = 25$, 50, 100, 250, 500) e dimensões dos testes, e estão tabulados em Fuller (1996) [190]. Por exemplo, quando $N \longrightarrow \infty$, os valores críticos assintóticos da estatística t_N, para $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.1$, apresentam os seguintes valores: -2.58, -1.95, -1.62, tendo Phillips (1987a) [407] demonstrado que as distribuições assintóticas da estatística $(\hat{\rho}_N - 1)$ são invariantes numa classe ampla de inovações não-restritas.

Para além deste estudo de caso (sem constante), em Hamilton (1994) [221], Mills e Markellos (2008) [354], são apresentadas outras generalizações para os testes de Dickey-Fuller (com constante, com constante e tendência), expressas como funcionais de integrais estocásticos de processos de Wiener. Ademais, Patterson e Kerry (2011) [397], estenderam

as generalizações dos testes DF aos testes aumentados de Dickey e Fuller (1979) [130] (testes ADF), expressos em termos dos processos estocásticos de Wiener.

Teste de Dickey e Fuller Aumentado

Antes de se passar à explanação do teste da equação Aumentada de Dickey-Fuller (1979) [130] (*Augmented Dickey-Fuller (ADF) test*), é importante frisar que, por um lado, os testes de Dickey e Fuller (DF) são apenas válidos, quando os erros estimados nas Equações (1.24), (1.27), e (1.28) são não autocorrelacionados (ortogonais). Por outro lado, as equações dos testes DF correspondem apenas a pequenas variações do processo AR(1), pelo que podem não descrever adequadamente os padrões de natureza mais complexa das séries temporais. Tornou-se assim necessário recorrer a um modelo AR(p), com $p > 1$, para que a regressão estimada apresente um bom ajustamento aos dados observados. Porém, um bom ajustamento do modelo AR(p) de ordem superior a um, aos dados da série temporal observada, $y_n, n = 1, ..., N$, sugere a existência de autocorrelações nos resíduos estimados na regressão do teste de DF, com base no processo AR(1), pelo que as estatísticas dos testes DF passam a não apresentar distribuições análogas às estimadas por Fuller (1976) [189] e Dickey (1976) [128].

Caso existam autocorrelações não nulas nos termos do erro (e_n) do modelo inicial AR(1), decorrentes da aplicação do teste DF, a estratégia preconizada por Dickey e Fuller (1979)[130] consiste na utilização de um modelo AR(p), com uma ordem suficientemente elevada que permita a existência de um processo de ruído branco nos termos do erro do polinómio autoregressivo, e_n. Por conseguinte, a estatística ADF, conhecida pelo teste da equação aumentada de Dickey e Fuller (1979) [130], testa a existência de raiz unitária em y_{n-1}, através da estimativa, pelo método *OLS*, de Δy_n em y_{n-1}, e nos seus *lags* Δy_{n-i},

para $i = 1, ..., p$. Logo, a equação Aumentada de Dickey-Fuller (ADF) é expressa por:

$$\Delta y_n = \beta_0 + \beta_1 n + \gamma y_{n-1} + \sum_{i=1}^{p} \theta_i \Delta y_{n-i} + e_n \tag{1.49}$$

onde p é escolhido de modo a que os termos do erro do modelo (e_n) sigam um processo de ruído branco, β_0 é a constante, β_1 é o parâmetro da tendência, e o parâmetro γ (tal que: $\gamma = \rho - 1$) em y_{n-1}, proporciona o teste de raiz unitária (H_0: $\gamma = 0$), contra a hipótese alternativa (H_1: $\gamma < 0$).

É sabido que, após a estimativa da equação aumentada (1.49) numa das classes de regressão conhecidas "nc", "c", "ct", podem-se utilizar de novo os testes de raiz unitária τ, Z, e F, em y_{n-1}, com base nos parâmetros de regressão estimados: $\hat{\gamma}$, $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$. Isto é, se os termos do erro do modelo de regressão seguirem um processo de ruído branco, as estatísticas ADF apresentam as mesmas distribuições finitas e assintóticas dos testes de Dickey-Fuller, cujos valores críticos se encontram tabulados em Fuller (1976, 1996)[189], [190], e Dickey e Fuller (1981)[131].

Em síntese, o teste aumentado de Dickey-Fuller (ADF) é usualmente conhecido como um teste de raiz unitária, pelo que, ajustando um modelo AR(p) ao sinal observado, o teste examina, sob a hipótese nula (H_0: $\gamma = 0$), se ocorre um processo autoregressivo integrado de médias móveis ARIMA$(p, 1, 0)$, ou se, pelo contrário, existe um modelo ARIMA $(p + 1, 0, 0)$ estacionário em nível (processo integrado de ordem zero: I(0)).

Agora, dentro dos diversos métodos utilizados para a escolha do parâmetro p, com $p > 1$, no modelo AR(p) estimado, são utilizados, em regra, os seguintes critérios de informação: *Akaike Information Criterion (AIC), e Schwartz Information Criterion (SIC)*[30]. De facto,

[30] A título de exemplo, Hall (1994)[218] mostrou por métodos numéricos que o desempenho do teste ADF é substancialmente melhorado para os critérios de informação propostos por Akaike (1974, 1976) [14], [15], Schwarz (1978) [448], e Hannan e Quinn (1979) [224].

estes critérios de informação permitem a escolha óptima do parâmetro p do modelo autoregressivo a estimar, por métodos de máxima verosimilhança, e após a imposição de uma determinada penalidade no número de parâmetros do modelo.

O princípio geral consiste em escolher uma ordem de desfasamento p, num modelo AR(p), que minimize a função do critério de informação $CI(p)$, com base na equação que se apresenta:

$$CI(p) = N \log \hat{\sigma}^2(p) + p[f(N)] \tag{1.50}$$

onde N é a dimensão da amostra, $\hat{\sigma}^2(p)$ é a variância estimada da regressão[31], $p = 1, ..., p^*$, em que p^* é definido para um *lag* suficientemente elevado, e p é seleccionado quando o critério de informação escolhido é mínimo. A função $p[f(N)]$ é, por conseguinte, interpretada como uma função de penalidade, para ordens crescentes do modelo, em que as diversas funções $f(N)$ possibilitam a escolha de diferentes critérios de informação. Portanto, o critério de informação de Akaike (1974, 1976) [14], [15], é apresentado pela equação:

$$AIC(p) = N \log \hat{\sigma}_p^2 + 2p \tag{1.52}$$

onde $f(N) = 2$.

De modo semelhante, o critério de informação de Schwarz (1978) [448] é expresso por:

$$SIC(p) = N \log \hat{\sigma}_p^2 + p \log N \tag{1.53}$$

[31] A variância estimada do modelo de regressão é apresentada pela equação:

$$\hat{\sigma}_p^2 = \frac{SQR}{(N-p)} \tag{1.51}$$

onde N é a dimensão total dos dados observados (amostra), p é o número de parâmetros estimados no modelo AR(p), e SQR é a soma dos quadrados dos resíduos da regressão.

em que $f(N) = \log N$.

Na prática, procede-se ao cálculo do parâmetro óptimo de desfasamento $\hat{p}$, com base nas estimativas dos valores mínimos dos critérios de informação $AIC(p)$ e/ou $SIC(p)$.

Testes DF e ADF Modificados De acordo com Phillips e Perron (1998) [409], Said e Dickey (1984) [434] mostraram que os testes ADF (paramétricos) de Dickey-Fuller (1979) [130], desenvolvidos inicialmente em termos dos modelos autoregressivos AR(p), permanecem válidos em termos assintóticos para a generalidade dos processos ARIMA($p, 1, q$), nos quais p e q são desconhecidos. Nesta perspectiva, Said e Dickey (1984) [434] mostraram que o teste DF (de raiz unitária) de Dickey-Fuller (1979) [130] pode ser expresso num modelo ARIMA($p, 1, q$), desde que o comprimento do *lag* na componente autoregressiva aumente com a dimensão amostral N, para uma taxa controlada menor do que $N^{1/3}$, isto é, $o(N^{1/3})$.

Por outro lado, Phillips (1987a) [407] e Phillips (1987b) [408] propuseram novas estatísticas (não-paramétricas) DF limite, de raiz unitária, ou de raiz quase unitária, conhecidas pelas estatísticas não-paramétricas Z_t e Z_ρ (retrospectivas às estatísticas paramétricas τ e Z de Dickey-Fuller), nos modelos de regressão sem constante. Desta forma, estas estatísticas foram especificadas em termos dos funcionais de integrais estocásticos de processos de Wiener, sob a suposição de existência de heterocedasticidade condicional nas inovações (perturbações menos restritas), que possam ser extensíveis aos processos ARIMA($p, 1, q$).

Com efeito, Phillips e Perron (1988) [409] generalizaram as estatísticas limite de raiz unitária (não-paramétricas) Z_t e Z_ρ, aos modelos de regressão com constante, e com

constante e tendência, onde os autores obtiveram estimativas consistentes de σ^2 e σ_e^2, extensíveis aos processos ARIMA$(p, 1, q)$, que oferecem vantagens competitivas significativas em relação aos testes ADF de Dickey-Fuller (1979) [130] e de Said e Dickey (1984) [434], o que permite o ajustamento dos testes aos casos reais em economia, sob a suposição de inovações menos restritas.

Problemas de Dimensão e de Potência dos Testes de Raiz Unitária São agora apresentados alguns resultados onde se constataram alguns problemas de dimensão e de potência dos testes de raiz unitária.

Em primeiro lugar, Schwert (1989) [449] mostrou, através de simulações de Monte Carlo que os testes usuais de raiz unitária apresentam problemas de dimensão (sobre-rejeição da hipótese de raiz unitária), quando os processos subjacentes aos modelos ARIMA$(p, 1, q)$ apresentam uma estrutura MA(q), nos quais as distribuições dos testes de raiz unitária tendem a divergir das distribuições tabuladas em Fuller (1976, 1996) [189], [190]. Neste contexto, Maddala e Kim (2004) [323] recomendam um aumento no número de *lags* na estrutura autoregressiva do modelo ADF para compensar os problemas de dimensão dos testes, mas não em demasia para que não se percam muitas observações no modelo de regressão. Por outro lado Schwert ((1989) [449], citado por Maddala e Kim (2004) [323]) sugeriram que os testes PP (ou A(DF)) de Phillips e Perron (1988) [409] apresentam problemas de dimensão na presença de inovações MA negativas.

Em segundo lugar, Dejong *et al.* (1992a) [123] concluíram que os testes de raiz unitária de Phillips e Perron (1988) [409] apresentam distorções significativas na dimensão e apresentam potências muito baixas (< 0.10) *vs* as hipóteses alternativas de existência de

estacionariedade em tendência, existindo no entanto, uma melhoria na potência dos testes ADF usuais ($\simeq 0.33$). Isto é, na prática os testes ADF parecem ser mais úteis.

Em terceiro lugar, Mills e Markellos (2008) [354] alertaram para a provável redução da potência nos testes de raiz unitária nas séries temporais dos mercados financeiros, quando ocorre um elevado número de observações em períodos temporais muito curtos.

Algumas Soluções para os Problemas de Dimensão e Potência dos Testes de Raiz Unitária Agora, para superar alguns problemas de dimensão e potência dos testes de raiz unitária, Elliot *et al.* (1996) [146] propuseram algumas modificações nos testes DF de raiz unitária. Assim de acordo com Maddala e Kim (2004) [323], os autores desenvolveram em primeiro lugar o envelope de potência assintótico para os testes de ponto óptimo, P_T, de raiz unitária numa representação autoregressiva de uma série temporal Gaussiana. Posteriormente, os autores desenvolveram uma família de testes assintóticos de raiz unitária $P_T(0.5)$, cujas funções de potência são tangentes ao envelope de potência limite num determinado ponto. Deste modo, os autores puderam concluir, com base em experimentos de Monte Carlo, que o novo teste modificado *DF-GLS detrending aproach* (do modelo *ADF-GLS*) apresenta uma função de potência limite próxima do teste $P_T(0.5)$, alertando no entanto para possíveis quebras de potência dos testes *DF-GLS*, em pequenas amostras, sob a suposição de existência provável de inovações não-Gaussianas, ou autocorrelacionadas.

Outros testes modificados de raiz unitária foram desenvolvidos por Ng e Perron (1996) [402] (conhecidos pelos testes MZ_t, e MZ_ρ) para corrigir a dimensão dos testes PP de Phillips e Perron (1988) [409] na presença de inovações MA negativas. Mais tarde, Ng

e Perron (2001) [375] propuseram uma nova classe do Critério de Informação, ou seja, o Critério de Informação Modificado (CIM), com um factor de penalidade dependente da dimensão da amostra, para corrigir os problemas de dimensão dos testes de raiz unitária na presença de inovações com uma raiz MA(1) próxima de -1. Isto é, o teste foi desenvolvido com base num Critério de Informação Modificado (CIM), apresentando uma selecção apropriada dos *lags* (p) de truncagem autoregressivos no polinómio autoregressivo, porque os critérios de informação usuais (AIC, BIC) tendem a seleccionar *lags* (p) pequenos sob a condição referida. Assim Ng e Perron (2001) [375] provaram com base em simulações de Monte Carlo que o CIM proposto contribui para a melhoria significativa das dimensões dos testes *DF-GLS detrending aproach* e dos testes de ponto óptimo exequíveis[32] P_T desenvolvidos por Elliot *et al.* (1996) [146], quando os resíduos apresentam autocorrelação negativa.

No entanto, mesmo os testes modificados de raiz unitária apresentam baixa potência na presença de quebra de estrutura nas séries longas de dados macroeconómicos dos EUA, tornando-se enviesados no sentido da não rejeição da hipótese nula de existência de raiz unitária, quando a série observada apresenta flutuações estacionárias em torno de uma tendência linear. Isto é, a quebra de estrutura numa série temporal, devido a um evento exógeno, tal como o *crash* de 1929 (*The Great Crash*), ou o embargo do petróleo no ano de 1973 (*oil price shock*), tende a enviesar os testes usuais de raiz unitária (extensíveis aos testes ADF), ao não se rejeitar a hipótese de um processo de Wiener, contra a hipótese alternativa de existência de um mecanismo "verdadeiro" de flutuações estacionárias em torno de uma tendência determinística linear, com uma quebra de estrutura (choque

[32] Isto é, quando a matriz de variância-covariância não singular (porque admite inversa) das inovações não é conhecida.

exógeno) (Perron (1989) [400], Perron (1993) [401]). Por exemplo, os autores explicitaram que a maioria das séries longas analisadas por Nelson e Plosser (1982) [371] (choque exógeno: *crash* de 1929) e a série trimestral do PNB, a preços correntes, analisadas por Campbell e Mankiw (1987) [80] (choque exógeno: *oil price shock* de 1973), são melhor caracterizadas por flutuações estacionárias em torno de uma função de tendência linear, com uma quebra de estrutura, do que por um processo de raiz unitária, com deriva não nula possível. Isto é, a função de tendência é linear ao longo do período temporal observado, excepto quando ocorre uma alteração brusca no seu intercepto (*crash* de 1929) e/ou declive (*oil price shock* de 1973).

Contudo, o tema voltou a ser controverso. Ou seja, Zivot e Andrews (1992) [537], na linha dos trabalhos de Christiano (1992) [104] e de Banerjee *et al.* (1992) [26], desenvolveram novos testes de raiz unitária (extensíveis aos testes ADF) motivados pela suposição de ocorrência de um ponto endógeno desconhecido (quebra estrutural) dependente dos dados, e pela constatação das semelhanças gráficas (gráficos de linhas) entre os processos de raiz unitária com deriva e os processos estacionários em tendência, com quebra na tendência num ponto temporal desconhecido. Neste contexto, os autores concluíram que, em geral, existe menos evidência contra a hipótese de ocorrência de um processo de raiz unitária com deriva nas séries temporais analisadas por Perron (1989) [400].

Finalmente, Ghysel e Perron (1993) [194] mostraram que as séries temporais ajustadas sazonalmente tendem a reduzir consideravelmente a potência dos testes de raiz unitária, contra a hipótese alternativa de estacionariedade em tendência. Por esta razão, Davidson e Mackinnon ((1993) [120] citado por Baltagi (2011) [24]) não recomendam a dessazonalização das sucessões cronológicas sempre que seja possível.

1.3.4 Teste de Kwiatkowski, Phillips, Schmidt, e Shin (KPSS)

O teste KPSS desenvolvido por Kwiatkowski *et al.* (1992) [290], ao contrário do teste (A)DF, é um teste de hipótese nula de estacionariedade de uma série temporal, em nível ou em tendência (determinística), contra a hipótese alternativa de presença de um passeio aleatório. O teste de hipóteses pode ser, assim, definido da seguinte forma:

$$\mathrm{H}_0\text{: } y_n \text{ é estacionária} \Leftrightarrow y_n \text{ é } I(0) \text{ versus } \mathrm{H}_1\text{: } y_n \text{ é não estacionária} \Leftrightarrow y_n \text{ é } I(1)$$

onde apenas se rejeita a hipótese nula se existir uma forte evidência contra esta. Isto é, o teste tende a apresentar potência baixa *vs* a especificação integrada, de acordo com a teoria clássica dos testes de hipótese. O mesmo sucede para os testes de raiz unitária, onde Dejong *et al.* (1992b) [124] mostraram que as potências dos testes de integração, contra as alternativas possíveis de estacionariedade em tendência, podem ser também bastante baixas.

É sabido que Kwiatkowski *et al.* (1992) [290] partiram do princípio de que uma série temporal, y_n, $n = 1, ..., N$, pode ser expressa na soma de três componentes, isto é, a componente da tendência determinística βn, a componente do passeio aleatório r_n, e a componente do erro estacionário e_n, na regressão que se apresenta:

$$y_n = \beta n + r_n + e_n \tag{1.54}$$

em que n é o tempo, e a componente do passeio aleatório é apresentada pela equação:

$$r_n = r_{n-1} + u_n \tag{1.55}$$

sob as suposições de que $u_n \sim WN(0, \sigma_u^2)$, $e_n \sim I(0)$, em que o valor inicial r_0 é tratado como fixo, isto é, desempenha o papel do intercepto. Agora, a hipótese nula

de estacionariedade em tendência na série temporal observada *vs* a hipótese alternativa de uma especificação integrada é definida através de:

$$\mathrm{H}_0\text{: } \sigma_u^2 = 0 \text{ ou } r_n \text{ é constante } \textit{vs } \mathrm{H}_1\text{: } \sigma_u^2 > 0 \text{ ou } r_n \text{ não é constante}^{33}$$

onde σ_u^2 corresponde à variância do passeio aleatório.

Por conseguinte, para a hipótese nula (H_0: $\sigma_u^2 = 0$), testa-se se a série temporal y_n é um processo estacionário em tendência, com base na Equação (1.54) e na Equação (1.55). Em particular, testa-se se a série temporal y_n é estacionária, sob a hipótese nula conjunta H_0: $\sigma_u^2 = 0$, $\beta = 0$, ou seja, se a sucessão cronológica é estacionária em torno de um nível fixo (intercepto: r_0). Para a hipótese nula de estacionariedade em tendência, os resíduos e_n $(n = 1, ..., N)$ resultam da regressão *OLS* de y_n no intercepto r_0 e na tendência βn, enquanto que para a hipótese nula de estacionariedade num nível fixo, os resíduos e_n decorrem apenas da regressão *OLS* de y_n no intercepto r_0, ou seja, $e_n = y_n - \bar{y}$.

Como é do conhecimento, o teste estatístico KPSS é um teste do Multiplicador de Lagrange (ML), com aba à direita, e é conhecido como um caso especial do modelo de regressão de Nabeya e Tanaka (1988) [366], como um teste sobre a constância do parâmetro na componente do erro do passeio aleatório (H_0: $\sigma_u^2 = 0$ ou r_n constante) contra a hipótese alternativa de um processo de passeio aleatório (H_1), sob a suposição de erros *iid*. Ademais, Kwiatkowski *et al.* ((1992) [290], citado por Maddala e Kim (2004) [323]) construíram o teste KPSS sob a suposição de inovações heterogéneas e não *iid* (suposições menos restritas), com recurso às modificações do teste do ML de Nabeya e Tanaka (1988) [366], tal como em Phillips (1987) [407], Phillips e Perron (1988) [409].

[33] Isto é, sob a hipótese contrária H_1: $\sigma_u^2 > 0$, o processo apresenta raiz unitária.

O teste KPSS[34] é então apresentado pela equação:

$$\eta_j = \frac{N^{-2}\sum_{n=1}^{N} S_n^2}{\hat{S}_N^2(l)} \quad j = 1, 2 \tag{1.56}$$

em que $S_n = \sum_{n=1}^{N} e_n$, é a soma parcial dos resíduos e_n da regressão linear de y_n no intercepto r_0, para $j = 1$, ou da regressão linear de y_n no intercepto r_0 e na tendência βn, para $j = 2$, e $\hat{S}_N^2(l)$ é um estimador consistente da variância da soma dos erros no longo prazo σ^2, em que σ^2 é expressa por:

$$\sigma^2 = \lim_{N \longrightarrow \infty} N^{-1} E\left(\left(\sum_{n=1}^{N} e_n\right)^2\right) = \lim_{N \longrightarrow \infty} N^{-1} E\left(S_N^2\right). \tag{1.57}$$

Portanto, Kwiatkowski *et al.* (1992) [290] utilizaram um estimador consistente da variância da soma dos erros no longo prazo σ^2, sob suposições menos restritas dos erros e_n, isto é:

$$\hat{S}_N^2(l) = N^{-1}\sum_{n=1}^{N} e_n^2 + 2N^{-1}\sum_{s=1}^{l} w(s,l) \sum_{n=s+1}^{N} e_n e_{n-s} \tag{1.58}$$

em que $w(s,l)$ é uma função de ponderação óptima (Kernel) que determina a escolha da janela espectral (janela de Bartlett) tal como preconizado por Newey e West (1987) [373],

$$w(s,l) = 1 - \frac{s}{l+1}, \; s = 1, 2, ..., l \tag{1.59}$$

em que $w(s,l)$ declina se s aumenta, e l é a dimensão da janela espectral (parâmetro de alisamento, especificado pelo *lag* de truncagem), que é atribuída pelo utilizador para que $\hat{S}_N^2(l) \longrightarrow \sigma^2$, quando $N \longrightarrow \infty$.

[34] Kwiatkowski *et al.* (1992) [290] propuseram uma extensão do teste de Nabeya e Tanaka (1988) [366], conhecido pelo *Local Best Invariant (LBI) test*, que inclui uma estandardização diferente do numerador do teste, para que o teste esteja adequado à possível autocorrelação forte nos resíduos na maioria das sucessões cronológicas. Neste contexto, KPSS apresentaram os valores críticos assimptóticos tabulados das distribuições dos testes, com base em métodos de simulação aleatórios.

A título de exemplo, Otero e Smith (2003)[386] calcularam os *lags* de truncagem l, com base nos seus experimentos:

$$l = [12(N/100)^{1/4}] \tag{1.60}$$

em que $[12(N/100)^{1/4}]$ representa a parte inteira do número $12(N/100)^{1/4}$. Por outro lado, para que $\hat{S}_N^2(l)$ seja um estimador consistente de σ^2, é necessário que: $l \longrightarrow \infty$ e $N \longrightarrow \infty$, e a razão $l = o(N^{1/2})$, ou seja, $\lim_{N \longrightarrow \infty} \left(\frac{l}{\sqrt{N}}\right) = 0$.

Finalmente, para $N \longrightarrow \infty$, e sob a hipótese nula (H_0: $\sigma_u^2 = 0$ ou r_n é constante), o teste converge de forma fraca em termos das medidas de probabilidade associadas para:

$$KPSS \xrightarrow{w} \int_0^1 V(r)^2 dr \tag{1.61}$$

onde $V(r)$ é definido por uma *standard Brownian bridge*, $V(r) = W(r) - rW(1)$, $W(1) \sim N(0,1)$, e $W(r)$ é um processo de Wiener.

1.4 Análise Descritiva e Estacionariedade Fraca das Séries Financeiras: *Commodities* e *Utilities*

1.4.1 Introdução à Metodologia Empregue

As séries financeiras escolhidas dos mercados financeiros no presente trabalho abrangem algumas *commodities-energy products* (petróleo bruto, gás natural e carvão), a *commodity* de licenças de carbono, e algumas acções de *utilities-industry eolic manufacturing* (*Acciona*, *Gamesa*, *Nordex*, *Repower*, *Siemens* e *Vestas*), em que estas últimas abrangem as principais construtoras europeias de turbinas eólicas. As séries temporais são agora analisadas em termos descritivos (inclusive as suas distribuições, com base no teste de normalidade de Jarque e Bera (1987) [251]), e em termos da estacionariedade fraca, com recurso ao teste

ADF paramétrico de Dickey e Fuller (1979) [130], ao teste PP não-paramétrico de Phillips e Perron (1988) [409], e ao teste de efeitos ARCH de Engle (1982) [151].

Como é do conhecimento, estas análises são muito úteis na interpretação e na caracterização e/ou classificação dos processos subjacentes aos dados financeiros. Ou seja, em primeiro lugar explicitam-se as principais causas das alterações das cotações das *commodities* e das *utilities*, para os seus períodos de observações. Em segundo lugar procede-se à análise exploratória dos dados, tendo em conta as similitudes com os processos não-lineares estocásticos (tais como os processos heterocedásticos autoregressivos) ou com os processos não-lineares determinísticos (com ruído adicional), em dimensões altas, em que atractores estranhos (*strange attractors*) possam existir. Em terceiro lugar, averigua-se se as séries financeiras são processos de passeio aleatório ou, em alternativa, apresentam flutuações estacionárias em torno de uma tendência determinística, com base nos resultados dos testes de raiz unitária. Em quarto lugar, testa-se a presença de efeitos ARCH nos resíduos dos modelos nas séries de *log-returns* observadas *vs* a ausência de efeitos ARCH nos resíduos dos modelos nas mesmas.

Por último, na prática, opta-se por não se utilizar o teste KPSS de Kwiatkowski *et al.* (1992) [290], que testa a presença da estacionariedade de uma série temporal em torno de uma tendência determinística ao longo do tempo (hipótese nula). Assim, apesar do teste KPSS ser frequentemente utilizado em termos de análise confirmatória, apresenta, no entanto, o mesmo tipo de problemas (quase-baixa potência) do teste ADF de Dickey e Fuller (1979) [130], pelo que ambos os testes podem não rejeitar as respectivas hipóteses nulas, colocando em causa a análise confirmatória.

1.4.2 Dados de *Input*

Os dados utilizados no presente trabalho, correspondentes às cotações das *commodities* e das *utilities* observadas, apresentados em termos dos preços de fecho diários (dias úteis), foram extraídos em Abril de 2009 da base de dados do *Bloomberg*, que constitui um dos sistemas de informação mais abrangentes dos mercados financeiros. Deste modo, por um lado, foram escolhidas algumas séries temporais de preços da *commodity* de licenças de carbono e das *commodities* das fontes energéticas provenientes dos combustíveis fósseis. Isto é, por um lado, foram escolhidas as seguintes sucessões cronológicas de preços das *commodities*: preços *spot* das licenças de carbono (*EUETSYR2 INDEX*) do *European Union Emission Trading Scheme (EU ETS*), preços *spot* do petróleo bruto (*USCRWTIC INDEX*), preços dos futuros do gás natural (*NG1 COMB comdty*), e preços dos futuros do carvão (*API21 MON MCCL INDEX*). Por outro lado, seleccionaram-se as séries temporais de cotações das acções de *utilities* das principais construtoras de eólicas europeias: *Acciona* (*ANA SM EQUITY*), *Gamesa* (*GAM SM EQUITY*), *Nordex* (*NDX1 GR EQUITY*), *Repower* (*RPW GR EQUITY*), *Siemens* (*SIE GR EQUITY*), e *Vestas* (*VWSDC EQUITY*).

No que diz respeito às séries temporais de preços das *commodities*, constata-se que o petróleo bruto (*USCRWTIC INDEX*) e o gás natural (*NG1 COMB comdty*) apresentam 2373 e 2361 observações durante o período de Janeiro de 2000 a Fevereiro de 2009 (data final de recolha de informação), exceptuando as séries temporais das licenças do carbono (*EUETSYR2 INDEX*), com 922 observações, e do carvão (*API21 MON MCCL INDEX*), com 1056 observações, durante períodos distintos de cerca de quatro anos (Tabela 1.2). Apesar destas duas últimas séries financeiras apresentarem menores períodos de observa-

ções (2005 - 2009), estas correspondem aos contractos financeiros que apresentaram os valores mais consistentes, ou seja, sem valores omissos e/ou *outliers* severos, comparativamente a outros contractos apresentados no *Bloomberg*. Em regra, as séries de cotações das acções das *utilities* apresentam um número elevado de observações ($N \geq 2158$), para o período de Janeiro de 2000 a Fevereiro de 2009, à excepção das séries de cotações das acções da *Nordex* ($NDX1\ GR\ EQUITY$) e da *Repower* ($RPW\ GR\ EQUITY$), com 2049 e 1793 observações (ver datas de início de cotação em bolsa (Tabela 1.3)).

Note-se que, de um modo geral, as cotações das *commodities* são apresentados em US *dollars*, e as cotações das *utilities* são apresentadas em Euros, para os respectivos períodos de observação.

Commodities- -Energy Products (Tickers)	*CA (EUETSYR2 INDEX)*	*OIl (USCRWTIC INDEX)*	*NAT. GAS (NG1 COMB comdty)*	*COAL (API21 MON MCCL INDEX)*
Número total de observações	922	2372	2361	1056
Período de observações	26/07/2005 4/02/2009	4/01/2000 4/02/2009	19/01/2000 4/02/2009	19/01/2005 4/02/2009

Tabela 1.2: Períodos de observações nas *commodities*.

UTILITIES--INDUSTRY MANUFACTURING (TICKERS)	ACCIONA (ANA SM EQUITY)	GAMESA (GAM SM EQUITY)	NORDEX (NDX1 GR EQUITY)	REPOWER (RPW GR EQUITY)	SIEMENS (SIE GR EQUITY)	VESTAS (VWSDC EQUITY)
Número total de observações	2373	2158	2049	1793	2373	2373
Período de observações	3/01/2000	30/10/2000	30/03/2001	25/03/2002	3/01/2000	3/01/2000
	4/02/2009	4/02/2009	4/02/2009	4/02/2009	4/02/2009	4/02/2009

Tabela 1.3: Períodos de observações nas *utilities*.

Uma vez que as cotações das licenças de carbono (*EUETSYR2 INDEX*) são transacionadas em Euros e as cotações da *Vestas* (*VWSDC EQUITY*) são negociadas em coroas dinamarquesas (DKK), procedeu-se na reconversão para US *dollars* e Euros, com base nas taxas de câmbio diárias respectivas, isto é, EUR/US *dollars*, e DKK/EUR, para efeito de homogeneidade dos preços dentro de cada um dos agrupamentos dos produtos financeiros definidos: *commodities* ou *utilities*.

1.4.3 Análise da Evolução das cotações das *Commodities-Products*

As séries cronológicas de preços logaritmizados das licenças de emissões de carbono (*EU ETSYR2 INDEX*) e dos combustíveis fósseis (petróleo bruto (*USCRWTIC INDEX*), gás natural (*NG1 COMB comdty*), e carvão (*API21 MON MCCL INDEX*)), cotadas em US *dollars*, são apresentadas na Figura 1.1. Em regra, durante os períodos observados (Tabela 1.2), os mercados financeiros apresentaram taxas de rendibilidade (*simple net returns*[35]) positivas e negativas, que representam os ganhos ou as perdas de capitais por

[35] A taxa de rendibilidade (*simple net return*) de um certo investimento no momento n é usualmente conhecido pelo ganho de capital (*capital gain*), isto é:

parte dos investidores, com alguns períodos de volatilidade acentuada e/ou mais aglutinada (*clusters* de volatilidade). Esta constatação pode ser observada na Tabela 1.4, na qual são apresentadas as taxas de rendibilidade anuais das *commodities*, com base na cotação a 31 de Dezembro do ano anterior.

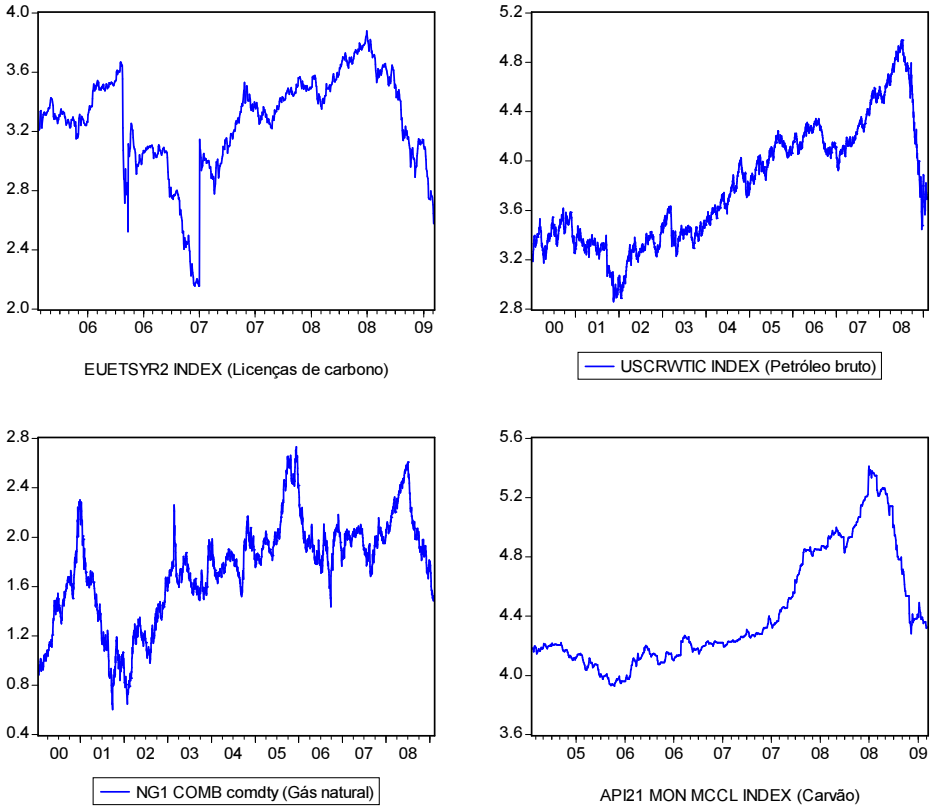


Figura 1.1: Sucessões cronológicas de preços das *commodities* (escala logarítmica).

Em particular, as sucessões cronológicas de preços (na escala não logarítmica) do petróleo (*USCRWTIC INDEX*) e do gás natural (*NG1 COMB comdty*) apresentaram

(1.62) $$R_n = \frac{P_n - P_{n-1}}{P_{n-1}} = \frac{\nabla P_n}{P_{n-1}},\ n = 1, ..., N$$

em que N é o período de observação da série financeira e P_n é o preço do activo financeiro no tempo n.

taxas de rendibilidade (*simple net returns*) negativas no ano de 2001, com índices de -25.97%, e de -73.71% (ver Tabela 1.4), devido em grande parte ao impacto acentuado do 11 de Setembro de 2001 nos mercados bolsistas. No entanto, durante o período de 2002 a 2007 verificaram-se, em geral, altas taxas de rentabilidade nas sucessões cronológicas das cotações do petróleo bruto (*USCRWTIC INDEX*) e do gás natural (*NG1 COMB comdty*), com valores máximos de 57.26% e de 86.34% no ano de 2002. Esta constatação deveu-se essencialmente ao crescimento global da economia e à procura elevada das energias fósseis por parte dos países emergentes (BRIC: Brasil, Rússia, Índia, e China). Por conseguinte, de acordo com Cevick e Sedick (2011) [92], as economias dos mercados emergentes contribuíram em cerca de 69% para o aumento do consumo do petróleo mundial durante o período de 1990 a 2008, onde o consumo do petróleo bruto apenas declinou nos países desenvolvidos pertencentes à OCDE (Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico), durante o período de 2000 a 2009. Mais ainda, durante o período de 2000 a 2009, o consumo de petróleo por parte dos países fora da OCDE aumentou em média cerca de 10.5 *million barrels/day*, enquanto que para os países da OCDE ocorreu um decréscimo médio do consumo em torno de 2 *million barrels/day* (BP (2010), [66]).

Por outro lado as séries temporais de preços do carvão (*API21 MON MCCL INDEX*) e do gás natural (*NG1 COMB comdty*) acompanham, em geral, as tendências e os movimentos das séries temporais de preços do petróleo. No entanto, a série temporal de preços do gás natural (*NG1 COMB comdty*) apresenta volatilidade muito acentuada e variações típicas sazonais, com "picos" nos meses de inverno e quebras nos meses de verão, quando as necessidades de aquecimento são menores, conforme apresentado na Figura 1.1, confirmando as análises de Kyrtsou *et al.* (2009) [293], para o período de 2004 a 2008, em que os

preços do gás natural e do petróleo bruto apresentam uma tendência crescente, mas com movimentos independentes.

Por fim, durante o período compreendido entre o 3° trimestre de 2008 (*crash* bolsista) e o mês de Fevereiro de 2009 (data final de recolha de informação), ocorreram quebras nas cotações das licenças de carbono (*EUETSYR2 INDEX*) e das *commodities energy products* (petróleo bruto (*USCRWTIC INDEX*), gás natural (*NG1 COMB comdty*), e carvão (*API21 MON MCCL INDEX*)), com início nos mercados financeiros em Setembro de 2007, devido à *subprime lending crisis*, alastrando-se de forma gradual à economia global. Constatou-se, assim, uma inversão nas taxas de rendibilidade (negativas expressivas), ou seja, em módulo superiores ou iguais a 24.87%.

	EUETSYR2 INDEX	USCRWTIC INDEX	NG1 COMB comdty	API21 MON MCCL INDEX
2001		-25,97%	-73,71%	
2002		57,26%	86,34%	
2003		4,23%	29,23%	
2004		33,61%	-0,65%	
2005		40,48%	82,55%	
2006	-67,01%	0,02%	-43,88%	28,92%
2007	279,05%	57,25%	18,8%	86,35%
2008	-29,62%	-53,54%	-24,87%	-35,84%

Tabela 1.4: Taxas de rendibilidade anuais das cotações bolsistas das *commodities*.

Como é sabido, a primeira etapa (Fase I: 2005-2007) de implementação do *European Union Emissions Trading Scheme* (*EU ETS*) das licenças de carbono, para a mitigação da emissão de CO_2 para a atmosfera nos países industrializados e nos países emergentes (tal como a China e a Índia), teve início a 1 de Janeiro de 2005 e término a 31 de Dezembro de 2007, seguindo-se a Fase II de *trading* das licenças de carbono, com início a 1 de

Janeiro de 2008 e término a 31 de Dezembro de 2011. A primeira fase foi um período de aprendizagem prática importante para a Fase II, onde a importância desta última coincidiu com o primeiro período do cumprimento do protocolo de Kyoto (1997), perante o qual a União Europeia (UE) e os países emergentes estabeleceram objectivos claros de redução de emissões de gases de efeito estufa.

Em particular, a sucessão cronológica de preços (na escala não-logarítmica) das licenças de carbono (*EUETSYR2 INDEX*) transaccionada nos mercados bolsistas apresentou "rupturas" nos meses de Abril e Setembro do ano de 2006, com valores mínimos de cotações de 17.81 US *dollars/metric tonne* de CO_2 e de 15.81 US *dollars/metric tonne* de CO_2, respectivamente (Figura I.1 do Anexo I). De facto, de acordo com o relatório da Morgan Stanley (2007) [360], a quebra de cotações das licenças de carbono, em Abril de 2006, deveu-se aos rumores de existência de *superavits* de *plafonds* de créditos de emissões de carbono acordados entre os governos dos estados membros da União Europeia (UE) e a Comissão Europeia, com recurso ao *National Allocation Plan* (*NAP*), a conceder às empresas (de cada estado da UE) emitentes de gases de efeito estufa[36]. Por outro lado, o decréscimo significativo das cotações das licenças de carbono em Setembro de 2006 (ver Figura 1.1) teve origem nas quebras acentuadas das cotações do gás natural, durante o 2° e o 3° trimestres do mesmo ano. Como é sabido, existiram diversos factores que influenciaram os preços das licenças de carbono, tais como o crescimento económico da

[36] O programa de *cap-and-trade* mais amplo e activo do mundo de licenças de carbono, especificado pelo *European Emissions Trading Scheme* (*EU ETS*), foi implementado em 11.500 empresas europeias emitentes de gás de efeito estufa (Stavins (2008) [484]).

Assim, durante a primeira fase de implementação do programa (Fase I: Janeiro de 2005 a Dezembro de 2007) foram abrangidas as seguintes empresas: instalações de combustão, refinarias de petróleo mineral, fornos de coque (derivado do carvão), indústria de produção de materiais ferrosos, indústria de produção de cimento, cerâmicas, e de vidro, indústria de produção de polpa, e indústria de produção de papel e de cartão.

União Europeia (desde o início de 2000 até ao 3° trimestre de 2008), os montantes de créditos de carbono (*plafonds*) atribuídos às *utilities* de energia não renovável, os subsídios às energias renováveis (nomeadamente às eólicas), o clima, as alterações de preços entre os combustíveis fósseis (petróleo, gás natural, carvão, e outros), o fecho de instalações de algumas centrais nucleares, entre outros factores.

No entanto, a experiência da Fase I (2005 - 2007) do programa do *EU ETS* para as licenças de carbono não providenciou a informação útil nos valores de *trading* dos créditos de carbono para reduzir os custos das empresas ou a volatilidade dos preços. Isto é, a realização de inventários pobres de emissões de gases de efeito de estufa pelos diferentes estados da União Europeia, a pouca transparência de informação sobre os créditos a ceder às empresas, a não utilização de créditos de projectos de redução de CO_2, a realização de contractos de *trading* exclusivamente anuais, e os atrasos de alargamento do sistema de *trading* a outros países fora do espaço europeu, conduziram à volatilidade acentuada nos preços dos activos das licenças de carbono.

Pelo contrário, a implementação do programa do *European Union Emissions Trading Scheme* (*EU ETS*) das licenças de carbono, durante o período da Fase II (2008 - 2011), apresentou ganhos de eficiência (proveitos financeiros) por parte das eléctricas, com recurso ao *trading* inter-anual das licenças de carbono (*European Unit Allowances* (*EUA*)), subjacente às *Emission Reduction Unit*s (*ERU*), sob os *Joint Implementation* (*JI*)[37]. Por outro lado, o *EU ETS* facultou o recurso à importação de créditos de Kyoto, por parte dos diversos estados da UE aos países fora do espaço europeu, tais como, os *Certified Emission*

[37] Os *Joint Implementation (JI) Credits* facultam a implementação de projectos de redução das emissões de CO_2, por parte dos países desenvolvidos noutros países desenvolvidos (Klepper e Peterson (2005) [277]).

Reduction (*CER*), sob o *Kyoto Protocol´s Clean Development Mechanism*[38] (*CDM*). De facto, o *European Union Emissions Trading Scheme* (*EU ETS*) permite que os países emergentes possam vender de novo os créditos de Kyoto[39] (convertíveis em licenças de carbono) aos estados membros da UE.

Foi assim possível assegurar, por um lado, melhores condições de competição entre as diversas empresas de produção de energia eléctrica na Europa, e por outro lado, recapitalizar as empresas produtoras de energia não-renovável localizadas fora da União Europeia, para que estas últimas procedam às reconversões tecnológicas necessárias, no sentido da produção de energia renovável (biomassa e resíduos, hidroeléctrica, eólica, geotérmica, solar, e outras).

1.4.4 Análise da Evolução das cotações das Acções das *Utilities-Eolic Industry Manufacturing* da Europa

As séries temporais de preços logaritmizados das *utilities* analisadas (*Acciona* (*ANA SM EQUITY*), *Gamesa* (*GAM SM EQUITY*), *Nordex* (*NDX1 GR EQUITY*), *Repower* (*RPW GR EQUITY*), *Siemens* (*SIE GR EQUITY*), e *Vestas* (*VWSDC EQUITY*)), cotadas em Euros, para os diversos períodos de observação especificados na Tabela 1.3, são apresentadas na Figura 1.2. Assim, durante os períodos observados (seis, sete e oito anos), para cada série financeira observada, ocorreram taxas de rendibilidade (*simple net returns*) negativas e positivas, conforme apresentado na Tabela 1.5, com base nas cotações

[38] Isto é, o *Clean Development Mechanism* (*CDM*) permite que os países desenvolvidos ganhem créditos de Kyoto para realizarem investimentos "limpos" nos países emergentes. Com efeito, o *CDM* funciona como um protótipo de transferência de tecnologia em grande escala, entre os países desenvolvidos e os países emergentes (Goodstein (2008) [202]).

[39] Note-se que a 19 de Outubro de 2008, o programa de *Community Independent Transaction Log* da Comissão Europeia (*CITL*) conectou-se ao programa de *International Transaction Log* (*ITL*) das Nações Unidas, perspectivando-se a possibilidade de recurso à importação dos créditos de Kyoto (Chevallier (2010) [101]).

a 31 de Dezembro do ano anterior, e com volatilidade acentuada e/ou presença plausível de *clusters* de volatilidade em certos períodos temporais.

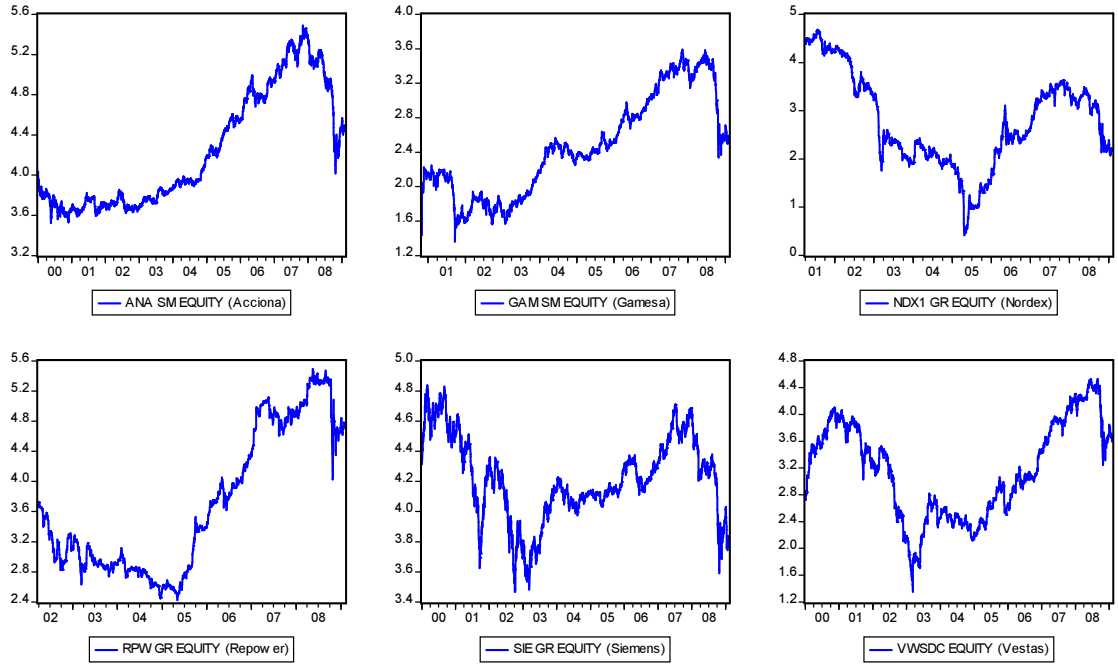


Figura 1.2: Sucessões cronológicas de preços das *Utilities* (escala logarítmica).

Em norma, durante o período de 2001 a 2002, as séries de cotações das *utilities* analisadas apresentaram taxas de rendibilidade negativas (ver Tabela 1.5), devido ao *crash* bolsista posterior ao 11 de Setembro de 2001 e ao grau de incerteza inicial sobre a implementação concreta das políticas da União Europeia para a produção de energia renovável.

No entanto, este "espectro" alterou-se para os períodos intermédios (2005 - 2007), em que as cotações das *utilities* observadas apresentaram taxas fortes de rendibilidade (*simple net returns*), tal como exposto na Tabela 1.5, com um valor máximo de valorização de

175.2%, registado em 2006, para a série temporal da *Nordex* (*NDX1 GR EQUITY*). Por outro lado, constatou-se a existência de um período mais alargado (2003 - 2007), com altas taxas de rendibilidade nas *utilities* de Espanha (*Acciona* (*ANA SM EQUITY*), e *Gamesa* (*GAM SM EQUITY*)), devido ao aumento de consumo energético, que decorreu das políticas de desenvolvimento económico regionais/nacionais em conjugação com o crescimento sustentado de parques eólicos[40] no país vizinho.

	ANA SM EQUITY	GAM SM EQUITY	NDX1 GR EQUITY	RPW GR EQUITY	SIE GR EQUITY	VWSDC EQUITY
2001	5,11%	-39,86%			-19,33%	-46,66%
2002	-4,25%	1.36%	-63,24%		-45,53%	-69,07%
2003	23,81%	67.31%	-73,20%	-19,74%	56,79%	35,76%
2004	34,92%	18,39%	-4,48%	-29,57%	-1,76%	-20,80%
2005	45,08%	20,0%	-21,88%	136,11%	16,06%	51,86%
2006	49,39%	68,69%	175,20%	160,11%	4,35%	130,69%
2007	53,69%	53,38%	129,80%	66,16%	43,57%	131,17%
2008	-58,96%	-60,16%	-68,37%	-14,62%	-51,43%	-44,91%

Tabela 1.5: Taxas de rendibilidade anuais das cotações bolsistas das *utilities*.

Todavia, no ano de 2008 (surgimento do *crash* bolsista, devido à *subprime lending crisis*, com início em Setembro do ano anterior), constataram-se, de novo, valorizações negativas nas cotações das *utilities* observadas, em que as taxas de rendibilidade apresentaram variações, em módulo, entre 14.62% e 68.37%.

[40] Segundo o relatório da *Global Wind Energy Council* (2011) [199], no ano de 2010 as empresas de produção de energia eólica de Espanha geraram 16.6% da energia total consumida.

Finalmente, julga-se importante apresentar os principais *drivers* de sucesso das *utilities* de energias renováveis no mercado europeu, durante o período de 2000 a 2008, de acordo com o relatório do *Barclays Capital* (2009) [28] e o relatório do *Energy Watch Group* (2008) [150], que conduziram ao investimento nestes activos financeiros:

- Aumento significativo dos preços dos combustíveis fósseis (petróleo, gás natural, carvão, e outros), com volatilidade acentuada;
- Crescimento global da economia;
- Procura elevada de combustíveis fósseis;
- Política ambiental, com recurso ao *European Union Emissions Trading Scheme* (*EU ETS*) para as licenças de carbono, a partir do ano de 2005;
- Suporte governamental através de concessão de créditos, para compensar os aumentos previstos das tarifas (taxas) de electricidade;
- Aplicação de taxas mínimas por KWh produzido, pagas pelas empresas eléctricas (de energias não renováveis) aos produtores de energia eólica (isto é, representa uma forma de financiamento às empresas produtoras de energia renovável);
- Custos de produção de energia eólica muito competitivos, com recurso às novas tecnologias.

1.4.5 Análise Exploratória das Rendibilidades das *Commodities-Products* e das *Utilities-Eolic Industry Manufacturing* da Europa

Nas Figuras 1.3-1.4 são apresentadas as séries temporais das *commodities* e das *utilities* expressas em termos das taxas de rendibilidade instantânea, usualmente conhecidas pelos

retornos contínuos[41] em determinados instantes, ou rendibilidades, ou os *log-returns* na literatura Anglo-Saxónica. Com efeito, a análise dos gráficos permite-nos concluir que as flutuações das alterações de preços (*log-returns*) não estão identicamente distribuídas ao longo dos períodos observados, devido à existência de agrupamentos de alta volatilidade (*volatility clustering*), característicos dos processos dependentes do tempo, tal como os processos não-lineares de heterocedasticidade condicional autoregressivos[42] (modelos ARCH, GARCH, EGARCH e afins), com taxas altas de rendibilidade. Por conseguinte, espera-se que as funções de autocorrelação (FAC) das rendibilidades absolutas $|r_\tau(n)|$, ou as FAC de $[r_\tau(n)]^2$ sejam positivas e não-nulas, com decaimento lento para zero, para *lags* (diários)

[41] Em economia, se $P(n)$ é o preço de uma acção ou de uma *commodity* no tempo n, o *log-return* é definido por:

$$r_\tau(n) = \ln P(n+\tau) - \ln P(n) \tag{1.63}$$

onde τ é o intervalo de tempo. Isto é, se sub-dividirmos o intervalo de tempo τ em N sub-intervalos de amplitude (Δn), o *log-return* total $r_\tau(n)$ é por definição a soma dos *log-returns* em cada sub-intervalo (*log-returns* instantâneos) (Sinha *et al.* (2011) [460]).

[42] A título de exemplo, o modelo de heterocedasticidade condicional autoregressivo de primeira ordem ARCH(1) foi proposto por Engle (1982) [151], isto é:

$$\begin{aligned} y_n &= \sigma_n u_n, \qquad u_n \sim IN(0,1) \\ \sigma_n^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 y_{n-1}^2 \end{aligned} \tag{1.64}$$

onde $n = 1, ..., N$, N é a dimensão da amostra da sucessão cronológica, u_n é o termo de perturbação do modelo, e σ_n^2 é a variância condicional do termo do erro (volatilidade do modelo) que depende do valor prévio do erro quadrático.

Mais tarde foi construído um processo generalizado a partir de um ARCH(1), isto é, um modelo GARCH (1,1)), por Bollerslev ((1986) [57], citado por Hsieh (1991) [245]), com base na Equação (1.64), em que a variância condicional passa a depender dos seus *lags* prévios, isto é:

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 y_{n-1}^2 + \xi \sigma_{n-1}^2 \tag{1.65}$$

Finalmente, Nelson ((1988) [369], citado por Hsieh (1991) [245]) construiu o modelo exponencial GARCH (EGARCH) que introduz uma transformação não-linear estática no processo. Ou seja, a variância condicional é agora apresentada por:

$$\log \sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \left[\frac{y_{n-1}}{\sigma_{n-1}} \right] + \xi \log \sigma_{n-1}^2 + \gamma \frac{y_{n-1}}{\sigma_{n-1}} \tag{1.66}$$

crescentes. Por exemplo, Sinha *et al.* (2011) [460] mostraram que as autocorrelações das alterações de preços absolutas diárias da *S&P 500*, analisados no período de 1950 a 2009 (com 15054 *daily closure prices*), apresentaram um decaimento lento para zero ao longo de um período considerável de *lags* no tempo ($\tau = 0, 1, 2, ..., 200$), como uma lei de potência com um expoente entre 0.1 e 0.3.

Ademais, as séries temporais de alterações de preços observadas das *commodities* e das *utilities* apresentam agrupamentos de volatilidade e de rendibilidade em certos períodos temporais, em que os momentos de alta volatilidade (variância grande) e de rendibilidade tendem a ser seguidos por momentos de alta volatilidade e de rendibilidade, e o inverso também se verifica.

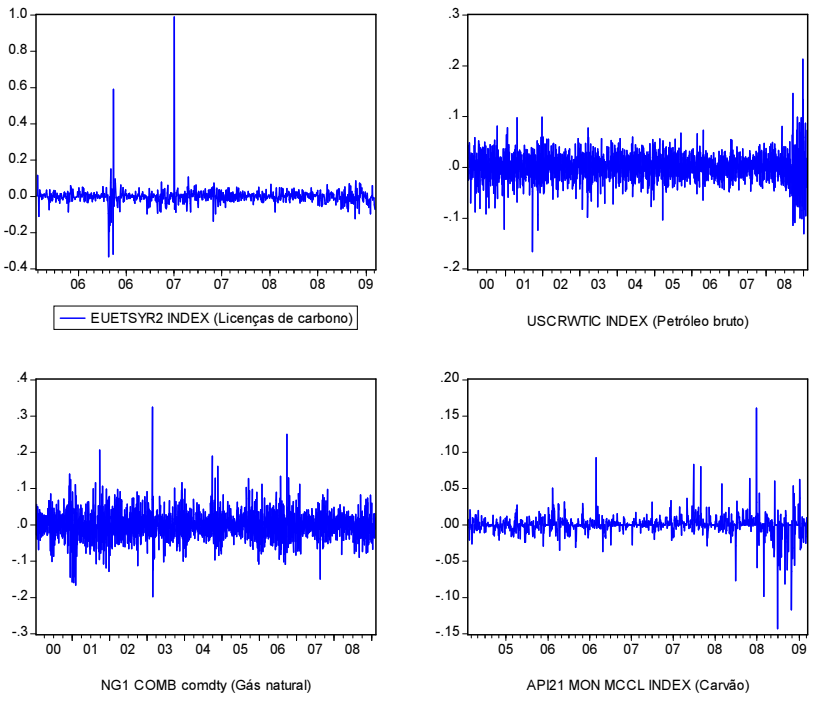


Figura 1.3: Rendibilidades das *commodities*.

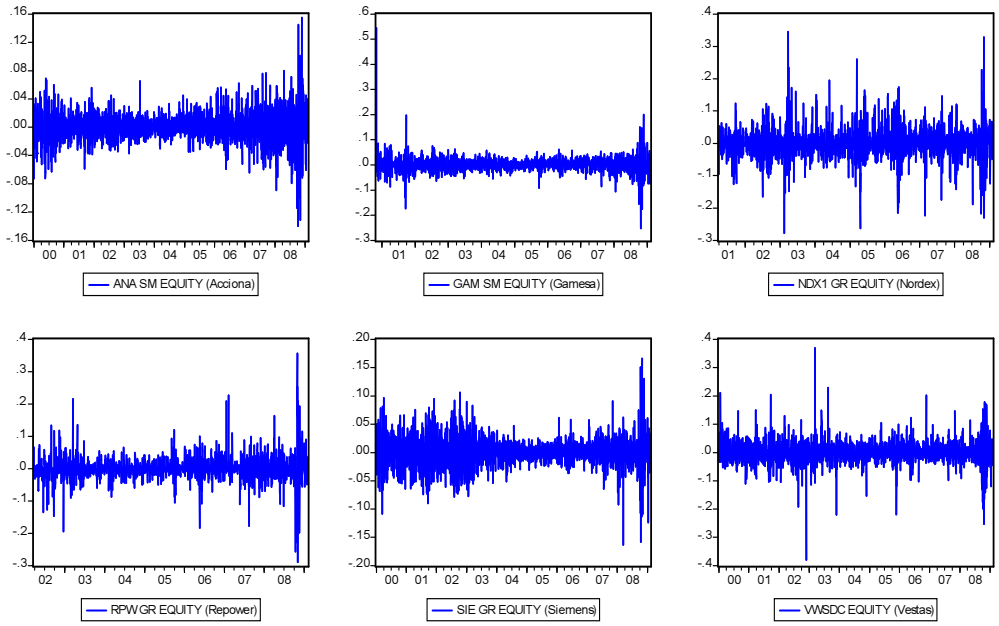


Figura 1.4: Rendibilidades das *utilities*.

Nas Figuras 1.5-1.6 são apresentados os histogramas das distribuições das séries temporais de rendibilidades das *commodities* e das *utilities* observadas, durante os respectivos períodos observacionais $(N-1)$. Os resultados das distribuições em análise demonstram que as sucessões cronológicas de alterações das cotações dos activos observados são leptocúrticas (curtose: $K > 3$), com base nos resultados apresentados na Tabela 1.6. Em particular, as sequências de dados das rendibilidades das *commodities* energéticas apresentam valores altos da curtose ($8.11 \leq K \leq 30.17$), e a série temporal de rendibilidades das licenças de carbono (*EUETSYR2 INDEX*) expressa um valor extremo ($K = 176.99$). Analogamente, os sinais de alterações das cotações das *utilities* apresentam valores grandes da curtose ($7.56 \leq K \leq 76.83$), com um valor bastante elevado ($K = 76.83$) para a *Gamesa* (*GAM SM EQUITY*). Como é sabido, as séries temporais de alterações de preços dos

mercados financeiros são caracterizadas por apresentarem distribuições leptocúrticas, com valores mais próximos do valor médio (valor nulo), e com *outliers* severos (positivos e negativos) mais frequentes, em relação às séries financeiras de variáveis aleatórias com distribuições normais. O que significa que as séries temporais apresentam, em regra, excesso de curtose ($K > 3$), em que as distribuições apresentam mais "massa" em torno do centro e nas caudas, com valores que se afastam do centro da distribuição por vários múltiplos do desvio padrão. Por outro lado, os valores das medidas de assimetria (*skewness*) das rendibilidades das *commodities* e das *utilities*, apresentados na Tabela 1.6, são, em regra, próximos de zero ($|S_{kw}| \leq 0.43$), algumas vezes positivos e outras vezes negativos (característicos de *crashes* nos mercados financeiros), podendo indicar alterações fortes nos preços dos activos (ver Tabelas 1.4-1.5). Por exemplo, a *commodity* das licenças de carbono (*EUETSYR2 INDEX*) é assimétrica à direita ($S_{kw} = 8.83$) e a *utility* referente à *Gamesa* (*GAM SM EQUITY*) é também assimétrica à direita ($S_{kw} = 3.03$). Ou seja, para estes dois últimos produtos financeiros os investidores obtiveram, em norma, proveitos financeiros elevados, em que as as distribuições apresentam abas à direita longas, tal como apresentado nos histogramas (Figuras 1.5-1.6).

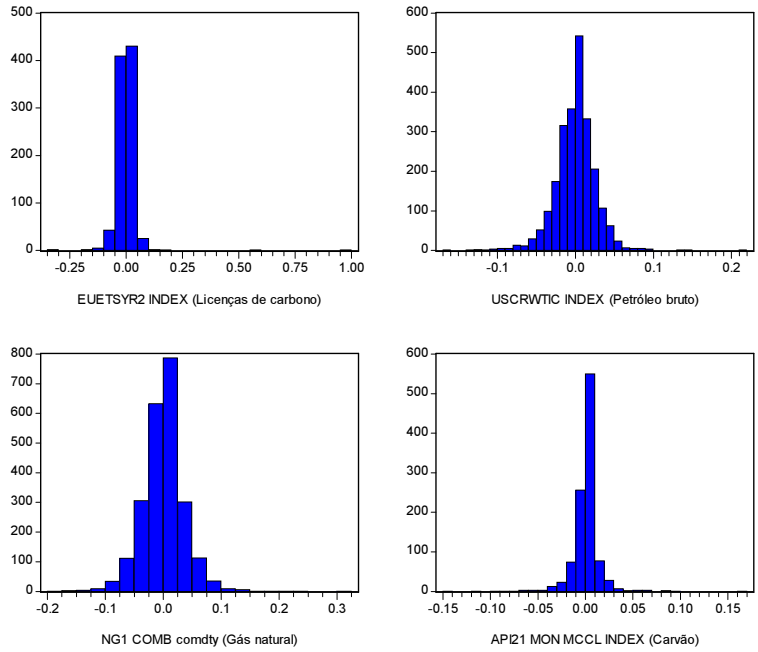


Figura 1.5: Histogramas das rendibilidades das *commodities*.

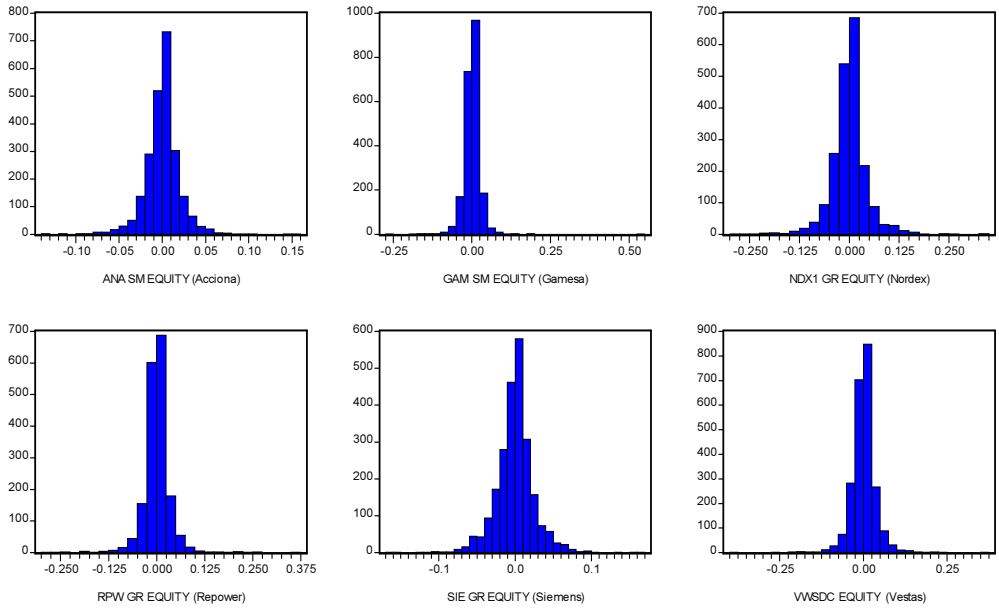


Figura 1.6: Histogramas das rendibilidades das *utilities*.

No caso contrário, a presença de valores estimados da $S_{kw} < 0$, para as *commodities* (petróleo bruto (*USCRWTIC INDEX*) e carvão (*API21 MON MCCL INDEX*)) e para as *utilities* (*Acciona* (*ANA SM EQUITY*), *Siemens* (*SIE GR EQUITY*), e *Vestas* (*VWSDC EQUITY*)) reforça os factos empíricos estilizados, porque, em norma, as séries temporais de rendibilidades dos mercados financeiros tendem a apresentar distribuições assimétricas negativas. Na realidade, a comunidade académica e as comunidades financeiras, durante a década de 90, assumiram o facto estilizado familiar de que as alterações de preços do mercado accionista apresentam assimetrias negativas ($S_{kw} < 0$) e excesso de curtose ($K > 3$) (Kim e White (2004) [274]). Por exemplo, a aplicação de medidas robustas (resistentes aos *outliers*) da *skewness* e da curtose propostas pelos autores, através da estimação de quantis subjacentes às distribuições destas estatísticas (pelo método de Monte Carlo), ao índice *S&P* 500 diário, com 5 085 observações, confirmaram os factos estilizados familiares.

	Média	Mediana	Máximo	Mínimo	Desvio Padrão	Assimetria	Curtose
Commodities							
Licenças de Carbono	-0,00069	-0,00031	0,98789	-0,33259	0,05106	8,82719	176,9893
Petróleo Bruto	0,00019	0,00000	0,21277	-0,16551	0,02585	-0,14404	8,11127
Gás Natural	0,00027	0,00000	0,32408	-0,19800	0,03665	0,43223	8,63543
Carvão	0,00014	0,00000	0,16102	-0,14306	0,01550	-0,22154	30,16912
Utilities							
Acciona	0,00019	0,00000	0,15459	-0,13986	0,02036	-0,15772	9,95501
Gamesa	0,00052	0,00000	0,54454	-0,25227	0,02801	3,03293	76,83302
Nordex	-0,00113	0,00000	0,34484	-0,27721	0,04587	0,23974	10,61315
Repower	0,00059	0,00000	0,356	-0,28886	0,03693	0,31251	20,18804
Siemens	-0,00025	0,00000	0,16602	-0,16349	0,02517	-0,03896	7,55999
Vestas	0,00036	0,00000	0,36872	-0,38077	0,03755	-0,03891	16,95233

Tabela 1.6: Estatísticas descritivas das rendibilidades.

Agora, os resultados dos testes de Jarque e Bera (1987) [251] apresentados na Tabela 1.7, indicam a rejeição da hipótese nula de normalidade nas séries temporais de alterações

de preços dos activos observadas, para um nível de significância inferior a 1% (porque os valores-p[43] são nulos). No entanto, conforme já foi explicitado, a rejeição da hipótese nula do teste de Jarque e Bera (JB) não nos especifica a distribuição alternativa nos dois grupos de produtos financeiros.

Rendibilidades	**Estatística JB**	**Valor-*p***
Commodities		
EUETSYR2 INDEX	1173659,000***	0,000
USCRWTIC INDEX	2589,134***	0,000
NG1 COMB Comdty	3196,361***	0,000
API21 MON MCCL INDEX	32456,960***	0,000
Utilities		
ANA SM EQUITY	4790,619***	0,000
GAM SM EQUITY	493243,900***	0,000
NDX1 GR EQUITY	4965,544***	0,000
RPW GR EQUITY	22087,840***	0,000
SIE GR EQUITY	2055,690***	0,000
VWSDC EQUITY	19240,250***	0,000

*** Rejeição da hipótese nula do teste a um nível de significância inferior a 1%.

Tabela 1.7: Resultados do teste de Jarque e Bera.

Em resumo, de um modo geral, as séries temporais de alterações de preços analisadas apresentam distribuições leptocúrticas, valores nulos nas médias e medianas, períodos de alta volatilidade aglutinada (*volatility clustering*), e distribuições não-Gaussianas, pelo que os resultados apresentados até aqui sugerem, muito provavelmente, a existência de não-linearidade estocástica, característica de processos de heterocedasticidade condicional autoregressivos e/ou a presença de não-linearidade determinística devido à existência de estruturas caóticas com ruído (dinâmico e/ou observacional) adicional, em dimensões altas de mergulho. Em particular, Cont *et al.* ((1997) [111], citado por Cont e Bouchaud (2000) [110]), explicitaram que diversos estudos empíricos sobre as flutuações de preços em

[43] O valor-p, ou nível de significância associado ao valor observado da estatística-teste, é a probabilidade, p_{obs}, de obter este valor ou outro mais desfavorável para a hipótese nula, admitindo que esta hipótese é verdadeira (Murteira *et al.* (2002) [364]).

vários produtos financeiros apresentam caudas "pesadas" que se desviam da distribuição normal, especialmente em escalas temporais intra-diárias (horas, minutos: 10, 15, 20), apresentando excesso de curtose persistente mesmo após a "contabilização" da heterocedasticidade condicional autoregressiva nos dados observados. Os factos empíricos estilizados estão na linha dos trabalhos realizados por diversos grupos de físicos, tais como Bouchaud e Cont (1998) [62], Gopikrishnan *et al.* (2000) [203], Stanley *et al.* (2001) [481], e Gabaix *et al.* (2008) [191], de existência de regularidades "universais" nas séries temporais de rendibilidades complexas dos mercados bolsistas, com milhares de observações diárias e intra-diárias. A título de exemplo, em Cont (2001) [109] encontramos uma súmula dos factos empíricos estilizados descobertos pelos físicos nas séries temporais de alterações de preços dos mercados bolsistas:

- Ausência de auto-correlações lineares;
- Caudas "pesadas";
- Assimetria com Ganhos / Perdas;
- Gaussianidade agregacional em intervalos de tempo crescentes Δt;
- Intermitência: as alterações dos preços dos activos financeiros apresentam, em qualquer escala (Δt), um elevado grau de variabilidade;
- Agrupamentos de volatilidade (dependência não-linear): medidas diferentes de volatilidade apresentam autocorrelações positivas ao longo de vários dias;
- Caudas "pesadas" condicionais: mesmo após a correcção dos agrupamentos de volatilidade nas séries temporais de rentabilidades dos activos observados, através de modelos

GARCH, ou afins, os resíduos das séries financeiras apresentam ainda caudas "pesadas";

- Decaimento lento das autocorrelações das rentabilidades absolutas em função dos *lags* de tempo, como uma lei de potência com um expoente $\alpha \in [0.2, 0.4]$, sugerindo a dependência não-linear no longo prazo ("*clustered volatility*"/ efeitos ARCH de Engle (1982) [151]).

- Efeito de alavanca: a maioria das medidas de volatilidade de um activo financeiro estão correlacionadas de forma negativa com as rentabilidades do activo;

- Correlação volume/volatilidade: o volume de *trading* está correlacionado com todas as medidas de volatilidade;

- Assimetria nas escalas de tempo: medidas de volatilidade "granulada" (Δt grandes) predizem melhor a volatilidade nas escalas "finas" (Δt pequenos).

1.4.6 Análise de Estacionariedade Fraca: Testes ADF de Dickey e Fuller e PP de Phillips e Perron nas Séries Financeiras: *Commodities* e *Utilities*

Para avaliar a natureza da não-estacionariedade (*DSP vs TSP*) nas séries temporais de preços dos activos financeiros, na escala logarítmica, são agora propostos o teste ADF de Dickey e Fuller (1979) [130] e o teste PP de Phillips e Perron (1998) [409] (relativo à estatística DF(τ) de Dickey (1976) [128] e Fuller (1976) [189]), conhecido pelo teste não-paramétrico Z_t, sob a suposição de inovações heterogéneas, ou não *iid*.

Em primeiro lugar, a estatística ADF é geralmente conhecida pelo teste da equação aumentada de Dickey e Fuller (1979) [130], isto é, testa a presença de raiz unitária na variável endógena, para um *lag* de desfasamento, y_{n-1}, com recurso à estimativa do modelo

de regressão linear múltipla (MRLM), pelo método *OLS* de Δy_n em y_{n-1}, e nos seus *lags* de desfasamento, Δy_{n-i}, para $i = 1, ..., p$, em que $y_n, n = 1, ..., N$ corresponde à cotação do produto financeiro na escala logarítmica, durante o seu período observacional.

Em segundo lugar, a aplicação da estatística Z_t de Phillips e Perron (1988) [409] nas séries de preços dos produtos financeiros em análise, consiste num método alternativo assintótico, especificado em termos de funcionais de processos de Wiener, subjacente à teoria da convergência fraca funcional, que "controla" os processos de autocorrelação e de heterocedasticidade condicional autoregressiva nas inovações, por meio de uma aproximação não-paramétrica. Com efeito, Phillips (1987a) [407] e Phillips e Perron (1988) [409] proposeram testes estatísticos não-paramétricos de raiz unitária, com base em estimativas consistentes das variâncias. Isto é, por exemplo, a estatística Z_t de PP baseia-se num estimador de *kernel* (estimador da função densidade de probabilidade, quando $N \longrightarrow \infty$), que na prática da econometria moderna equivale à estimação da matriz de variâncias-covariâncias (média ponderada destas matrizes) por um estimador consistente à heterocedasticidade e à autocorrelação nos erros (isto é, um estimador mais robusto às inovações não-ortogonais, designado na literatura Anglo-Saxónica como um processo *Heterocedasticity-and-autocorrelation consistent* (HAC)), dispensando os *lags* adicionais na variável dependente, tal como nos modelos de regressão ADF (Nunes e Rodrigues (2009) [379]). Isto é, a estatística não-paramétrica Z_t permite avaliar de igual modo a natureza da não-estacionariedade, ou da quase não-estacionariedade, nas séries temporais de preços das *commodities* e das *utilities*, em que a componente determinística do modelo admite a constante, ou a constante e a tendência, e serve de teste para avaliar se as séries temporais apresentam uma tendência estocástica (passeio aleatório), ou se, pelo contrário, apresentam uma tendência

determinística, tal como uma tendência linear ou não-linear (polinomial) no tempo.

Neste contexto, Zivot e Wang (2006) [538] explicitaram o teste de raiz unitária não-paramétrico de Phillips e Perron (1988) [409] da estatística Z_t, com base na equação que se apresenta:

$$\Delta y_n = \beta' D_n + \pi y_{n-1} + e_n, \quad n = 1, ..., N \tag{1.67}$$

em que N é a dimensão da amostra da sucessão cronológica, $\pi = \rho - 1$, D_n representa o vector dos termos determinísticos (em regra, $D_n = 1$ ou $D_n = [1, n]$), e_n é $I(0)$ e é provável que não seja ortogonal. Como é do conhecimento, a estatística Z_t modificada de Phillips e Perron (1988) [409] a partir do teste DF não-paramétrico de Phillips (1987a) [407] e de Phillips (1987b) [408], corrige os processos não-ortogonais nos erros e_n, nos modelos de regressão que incluam D_n, e é expressa por:

$$Z_t = \left(\frac{\hat{\sigma}_e^2}{\hat{\sigma}^2}\right)^{1/2} t_{\pi=0} - \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\sigma}^2 - \hat{\sigma}_e^2}{\hat{\sigma}^2}\right)\left(\frac{NSE(\hat{\pi})}{\hat{\sigma}_e^2}\right) \tag{1.68}$$

em que N é a dimensão da amostra, $\hat{\sigma}^2$ e $\hat{\sigma}_e^2$ constituem estimativas consistentes das variâncias, e $SE(\hat{\pi})$ é o erro padrão usual de $\hat{\pi}$. O termo $\hat{\sigma}^2$ é um estimador consistente da variância da soma dos erros no longo prazo σ^2, isto é:

$$\sigma^2 = \lim_{N \longrightarrow \infty} N^{-1} E\left(\left(\sum_{n=1}^{N} e_n\right)^2\right) = \lim_{N \longrightarrow \infty} E\left(N^{-1} S_N^2\right) \tag{1.69}$$

em que $S_N = \sum_{n=1}^{N} e_n$. Por outro lado, o termo $\hat{\sigma}_e^2$ é um estimador consistente da variância dos erros σ_e^2, ou seja:

$$\sigma_e^2 = \lim_{N \longrightarrow \infty} N^{-1} \sum_{n=1}^{N} E\left(e_n^2\right) \tag{1.70}$$

Agora, de acordo com Phillips (1987a) [407], a estimativa consistente da variância da soma dos erros no longo prazo σ^2 é muito complexa, porque o problema é equivalente à

estimação da matriz de covariância assintótica (*Asymptotic Covariance Matrix* (ACM)) na presença de observações distribuídas heterogeneamente e não *iid.* Donde, sob a condição de momento forte, isto é, (i) $sup_n\ E\left|e_n\right|^{2\beta} < \infty$, para algum $\beta > 2$, (ii) $l \longrightarrow \infty$, quando $N \longrightarrow \infty$, e $\frac{l^4}{N} \longrightarrow 0$) o autor estimou a seguinte equação:

$$\hat{S}_{Nl}^2 = N^{-1}\sum_{n=1}^{N} e_n^2 + 2N^{-1}\sum_{\tau=1}^{l}\sum_{n=\tau+1}^{N} e_n e_{n-\tau} \tag{1.71}$$

em que $\hat{S}_{Nl}^2$ é um estimador consistente da variância da soma dos erros no longo prazo σ^2. Contudo, o estimador $\hat{S}_{Nl}^2$ não está constrangido para ser não-negativo e pode mesmo assumir valores negativos na presença de covariâncias amostrais amplamente negativas. Por conseguinte, Phillips (1987a) [407] construiu um estimador consistente de σ^2 segundo a modificação sugerida por Newey e West (1987) [373] nos estimadores da variância, para assegurar que estes estimadores sejam não-negativos, isto é:

$$\tilde{S}_{Nl}^2 = N^{-1}\sum_{n=1}^{N} e_n^2 + 2N^{-1}\sum_{\tau=1}^{l} w(\tau, l)\sum_{n=\tau+1}^{N} e_n e_{n-\tau} \tag{1.72}$$

em que $w(\tau, l)$ é uma função de ponderação óptima (*kernel*) que determina a escolha da janela espectral (janela de Bartlett), isto é,

$$w(\tau, l) = 1 - \frac{\tau}{l+1},\ \tau = 1, 2, ..., l \tag{1.73}$$

onde $w(\tau, l)$ declina se τ aumenta, e l é a dimensão da janela espectral (*bandwith*), que determina a precisão da estimativa da variância σ^2, quando $N \longrightarrow \infty$.

No presente caso, pretende-se averiguar se as séries temporais de preços observadas, na escala logarítmica, correspondem a um processo de passeio aleatório, em que a hipótese dos mercados eficientes (HME) não é rejeitada, com implicações no ajustamento pleno e instantâneo nos preços dos activos financeiros perante a chegada da nova informação, ou se,

em alternativa, os processos de tendência nos preços implicam um ajustamento lento nos preços como resposta à nova informação. Isto é, em termos económicos, os processos em tendência no tempo podem ocorrer quando a informação é utilizada de forma imperfeita, pelo que os agentes económicos não conseguem interpretar toda a informação de forma rápida e com rigor.

Na prática, para a realização dos testes ADF, utiliza-se o *software* Eviews 4.1, que compreende a estimativa dos *lags* apropriados (p_{max}) na variável dependente autoregressiva (preços dos activos em análise), no lado direito da Equação (1.49) Aumentada de Dickey--Fuller (ADF). Deste modo, escolhe-se o *Schwartz information criterion* (SIC), para o número máximo de *lags* calculados, com base na Equação (1.60) sugerida na investigação[44] de Schwert ((1989) [449], citado por Hayashi (2000) [230]). De forma análoga, para a realização dos testes PP de Phillips-Perron utilizou-se uma aproximação não paramétrica (Newey & West *using Bartlett kernel*), em que os *lags* de truncagem são escolhidos por defeito com base no mesmo *software*, para a estimativa consistente de σ^2.

Por outro lado, para a realização dos testes de raiz unitária utilizou-se o valor crítico de 5%, recomendado por Hamilton (1994) [221] e Hayashi (2000) [230], nas equações de regressão estimadas em nível (com constante) e às primeiras diferenças (sem constante). De facto, adaptou-se a sugestão de Hamilton (1994) [221] aos testes ADF de Dickey-Fuller e aos testes PP de Phillips-Perron, para que os testes apresentem uma descrição plausível das séries temporais sob ambas as hipóteses: nula e alternativa. Isto é, os testes devem ser realizados sob a hipótese nula de um processo estacionário às primeiras diferenças e

[44] Os p_{max} (*lags*) calculados no grupo das *commodities* são: 21 (Licenças de carbono), 26 (Petróleo bruto), 27 (Gás natural), e 22 (Carvão). No grupo das *utilities*, os p_{max} calculados são: 27 (*Acciona*), 26 (*Gamesa*), 26 (*Nordex*), 25 (*Repower*), 27 (*Siemens*), e 27 (*Vestas*).

sob a hipótese alternativa de um processo estacionário em tendência, caso não exista uma pré-especificação teórica sobre a hipótese nula em teste, assumida como verdadeira. Logo, as equações de regressão estimadas em nível (com constante) subjacentes a estes testes de raiz unitária parecem-nos ser as mais adequadas, porque as séries temporais de preços destes produtos financeiros não parecem apresentar uma tendência linear determinística com flutuações estacionárias em torno da tendência, tal como se pode constatar nas Figuras 1.1 - 1.2, ao longo dos seus períodos de observação. Por outro lado, caso as sucessões cronológicas de preços correspondam a processos estacionários em diferenças (hipótese nula dos testes), os processos subjacentes apresentam uma média positiva, favorecendo a inclusão da constante nas regressões dos testes: ADF de Dickey-Fuller e PP de Phillips-Perron.

	Teste ADF			**Teste de Phillips e Perron (PP)**		
	Estatística do teste	Valor crítico do teste (5%)	*Lags* (p)	Estatística do teste	Valor crítico do teste (5%)	*Lags* (l)
Commodities						
Licenças de carbono	-1,88187	-2,86447	0	-1,83261	-2,86447	6
Petróleo bruto	-1,53793	-2,86256	0	-1,49494	-2,86256	31
Gás natural	-2,63407	-2,86256	0	-2,63407	-2,86256	0
Carvão	-0,83974	-2,86407	1	-0,93740	-2,86407	13
Utilities						
Acciona	-0,83781	-2,86256	0	-0,82115	-2,86256	1
Gamesa	-1,82687	-2,86268	0	-1,81913	-2,86268	12
Nordex	-1,75133	-2,86275	0	-1,77902	-2,86275	6
Repower	-0,48400	-2,86295	4	-0,48935	-2,86295	13
Siemens	-2,01104	-2,86256	0	-1,96127	-2,86256	6
Vestas	-1,26866	-2,86256	0	-1,27037	-2,86256	6

Notas: (a) As Estatísticas dos testes incluem a constante determinística. (b) Hipótese nula: a série temporal (preços logaritmizados) apresenta raiz unitária.

Tabela 1.8: Testes de raiz unitária em nível.

	Teste ADF			Teste de Phillips e Perron (PP)		
	Estatística do teste	Valor crítico do teste (5%)	*Lags* (p)	Estatística do teste	Valor crítico do teste (5%)	*Lags* (l)
Commodities						
Licenças de carbono	-31,35611**	-1.94117	0	-31,35959**	-1.94117	7
Petróleo bruto	-49,67235**	-1.94096	0	-49,73519**	-1.94096	30
Gás natural	-49,99454**	-1.94096	0	-49,99659**	-1.94096	2
Carvão	-28,86358**	-1.94112	0	-29,39653**	-1.94112	11
Utilities						
Acciona	-50,68244**	-1.94096	0	-50,68244**	-1.94096	0
Gamesa	-48,76890**	-1.94097	0	-49,42128**	-1.94097	12
Nordex	-43,60574**	-1.94098	0	-43,65753**	-1.94098	5
Repower	-22,91070**	-1,94100	3	-38,14793**	-1,94100	16
Siemens	-47,16336**	-1.94096	0	-47,14286**	-1,94096	3
Vestas	-46,27807**	-1.940957	0	-46,21861**	-1.94096	8

Notas: (a) As Estatísticas dos testes ADF não incluem constante determinística. (b) Hipótese nula: a série temporal de rendibilidades apresenta raiz unitária.
(c) ** representa a rejeição da hipótese nula ao nível de significância de 5%.

Tabela 1.9: Testes de raiz unitária às primeiras diferenças.

Nas Tabelas 1.8 e 1.9 são apresentados os resultados dos testes de raiz unitária, em nível e às primeiras diferenças, nas séries temporais de preços e de rendibilidades (na escala logarítmica) das *commodities* e das *utilities* observadas. Isto é, ao nível de significância de 5%, não se rejeita a hipótese nula de existência de raiz unitária, em nível, para a variável endógena $\ln y_{n-1}$ (preços do activo financeiro, para um *lag*), em que os valores estimados dos testes ADF de Dickey-Fuller e PP de Phillips e Perron, em módulo, são menores do que os valores críticos dos testes obtidos por métodos numéricos.

Pelo contrário, às primeiras diferenças os testes de raiz unitária confirmam a rejeição da hipótese nula de presença de raiz unitária em $\Delta \ln y_{n-1}$ (rendibilidades do produto financeiro, para um *lag*) ao nível de significância de 5%, o que confirma a existência de processos integrados de ordem um, I(1), nas séries temporais de preços observadas, na escala logarítmica, favorecendo a hipótese dos mercados eficientes (HME). Por consequência, estes resultados são, por princípio, contra as suposições "brancas", a *iid*, e HME nas séries temporais de alterações de preços dos activos analisados (*commodities* e *utilities*).

1.4.7 Detecção da Heterocedasticidade nas Rendibilidades Financeiras

Para despistar a presença de processos de heterocedasticidade condional autoregressiva (ARCH *process*) nas séries temporais de alterações de preços (*log-returns*) das *commodities* e das *utilities*, são agora propostos os testes estatísticos de efeitos ARCH de Engle (1982) [151], que postulam sobre a presença de efeitos ARCH nos resíduos dos modelos. Deste modo, Engle ((1982) [151], citado por Zivot (2009) [536]) mostrou que a autocorrelação das rendibilidades quadráticas, a partir dos activos observados, ou a presença de heterocedasticidade condicional nas mesmas, pode ser modelada por um modelo heterocedástico condicional autoregressivo (ARCH) de ordem p, isto é:

$$y_n = E_{n-1}[y_n] + e_n \tag{1.74}$$

$$e_n = z_n \sigma_n \tag{1.75}$$

$$\sigma_n^2 = a_0 + a_1 e_{n-1}^2 + \cdots + a_p e_{n-p}^2 \tag{1.76}$$

em que $E_{n-1}[\cdot]$ é a expectativa condicional na informação acessível no tempo $(n-1)$ e z_n é uma sequência de variáveis aleatórias *iid* de média zero e variância unitária. Em particular, no modelo ARCH básico pressupõe-se que $z_n \sim NID(0,1)$, e as restrições $a_0 > 0$ e $a_i \geq 0$ $(i = 1, ..., p)$ são necessárias para que a variância condicional nos erros (volatilidade do modelo) seja positiva, isto é, $\sigma_n^2 > 0$. Logo, a equação de σ_n^2 pode ser re-apresentada por um processo AR(p) para a variável das inovações e_n^2, isto é:

$$e_n^2 = a_0 + a_1 e_{n-1}^2 + \cdots + a_p e_{n-p}^2 + \nu_n \tag{1.77}$$

em que $\nu_n = e_n^2 - \sigma_n^2$ é uma sequência em diferenças de *martingale*[45] (*martingale difference sequence* (*MDS*)), porque $E_{n-1}[\nu_n] = 0$ e é pressuposto que $E(e_n^2) < \infty$.

Neste contexto Engle ((1982) [151], citado por Baltagi (2011) [24]) mostrou que o teste estatístico F ordinário, pode ser utilizado como um teste (de efeitos ARCH) de significância conjunta de homocedasticidade, isto é, H_0: $a_1 = a_2 = ... = a_p = 0$ *vs* H_1: $a_1 \neq 0$ ou $a_2 \neq 0$ ou ... ou $a_p \neq 0$, com base na regressão OLS dos resíduos quadráticos (e_n^2) nos seus *lags* endógenos ($e_{n-1}^2, ..., e_{n-p}^2$) e na constante ($a_0$), tal como na Equação (1.77) apresentada. Em alternativa, o teste ARCH-LM (ARCH *Lagrangian multiplier*) de efeitos ARCH testa a hipótese nula de ausência do efeito ARCH nos resíduos da Equação (1.77) (isto é, H_0: $a_1 = a_2 = ... = a_p = 0$ *vs* H_1: $a_1 \neq 0$ ou $a_2 \neq 0$ ou ... ou $a_p \neq 0$), em que o teste estatístico é definido por NR^2 (ou seja, resulta do produto do número total de observações N, pelo coeficiente de determinação R^2, e apresenta uma distribuição χ_p^2 sob a hipótese nula).

Em termos práticos, os testes de efeitos ARCH foram realizados, num primeiro passo, com base na regressão OLS das rendibilidades (*log-returns*) dos produtos financeiros (*commodities* e *utilities*) na constante (intercepto), e num segundo passo, através da regressão OLS dos resíduos quadráticos (e_n^2) nos seus *lags* endógenos ($e_{n-1}^2, ..., e_{n-p}^2$) e na constante ($a_0$), em que os valores pré-especificados dos *lags* autoregressivos são de 5, e 10, tal como nos experimentos de Brooks (2005) [76] e de Zivot (2009) [536].

[45] A título de exemplo, suponha-se que Ω_n representa toda a informação disponível na data n, e corresponde a duas sequências de variáveis escalares aleatórias, $\Omega_n = \{Y_n, Y_{n-1}, ..., Y_1, X_n, X_{n-1}, ..., X_1\}$, $n = 1, ..., N$, em que $E[Y_n] = 0$. Agora, se

$$E\ (Y_n \mid \Omega_{n-1}) = 0, \qquad n = 2, 3, ..., N \tag{1.78}$$

então $\{Y_n\}_{n=1}^N$ é uma sequência em diferenças *martingale* (Hamilton (1994) [221]).

	Teste ARCH LM, 5 *lags*		Teste ARCH LM, 10 *lags*	
	Estatística F (*valor-p*)	Estatística LM (*valor-p*)	Estatística F (*valor-p*)	Estatística LM (*valor-p*)
Commodities				
Licenças de carbono	0,24476 (0,942)	1,23020 (0,942)	0,13390 (0,999)	1,35400 (0,999)
Petróleo bruto	38,07401 (0,000)	176,60790 (0,000)	29,11417 (0,000)	260,26070 (0,000)
Gás natural	17,85459 (0,000)	86,22408 (0,000)	9,76227 (0,000)	94,15221 (0,000)
Carvão	1,94695 (0,084)	9,70022 (0,084)	1,80818 (0,055)	17,96010 (0,056)
Utilities				
Acciona	102,08800 (0,000)	420,76850 (0,000)	58,80717 (0,000)	472,60690 (0,000)
Gamesa	55,88006 (0,000)	247,90520 (0,000)	49,61902 (0,000)	404,72770 (0,000)
Nordex	35,76157 (0,000)	164,86290 (0,000)	20,55053 (0,000)	187,60080 (0,000)
Repower	120,25720 (0,000)	451,03660 (0,000)	62,41958 (0,000)	464,39500 (0,000)
Siemens	64,44802 (0,000)	284,26170 (0,000)	43,90804 (0,000)	371,71260 (0,000)
Vestas	12,12859 (0,000)	59,27457 (0,000)	8,99980 (0,000)	87,08541 (0,000)

Nota: (a) Hipótese nula: inexistência de efeitos ARCH na série temporal de rendibilidades até ao *lag* 5, ou até ao *lag* 10.

Tabela 1.10: Testes de efeitos ARCH de Engle (1982) [151].

Os resultados dos testes estatísticos (estatística F, e estatística LM) de efeitos ARCH de Engle (1982) [151] nas séries temporais de alterações de preços das *commodities* (excepto, para as licenças de carbono e carvão) e das *utilities*, rejeitam a hipótese nula de ausência de efeitos ARCH nos resíduos do modelo, ao nível de significância de 5% (Tabela 1.10). Donde, não é suposto que os mercados bolsistas sejam eficientes na avaliação das alterações de preços destes activos financeiros. Isto é, conforme explicitado pelo físico McCauley (2009) [342], o processo ARCH/GARCH é inconsistente com os incrementos não-correlacionados, violando a *iid*, as suposições "brancas", e a hipótese dos mercados eficientes (HME) nas sucessões cronológicas de alterações de preços observadas.

Em resumo, em norma, as séries temporais de alterações de preços (*log-returns*) dos produtos financeiros observados apresentam distribuições leptocúrticas, com incrementos não *iid*, períodos de alta volatilidade aglutinada, e distribuições não-Gaussianas. Logo, os resultados apresentados sugerem a existência provável de não-linearidade estocástica,

característica dos processos de heterocedasticidade condicional autoregressivos, e/ou a presença de não-linearidade determinística devido à existência de estruturas caóticas com ruído dinâmico e/ou observacional adicional, em dimensões altas. Por exemplo, Theiler *et al.* (1992) [497] explicitaram que muitas flutuações erráticas observadas nas séries temporais experimentais são devidas às suas variações dinâmicas. Isto é, estas variações dinâmicas devem-se a um conjunto de várias influências: caos, não-caótico (mas determinístico e não-linear), correlações lineares e ruído, ao nível das dinâmicas e nos "aparelhos" de medição.

Capítulo 2

Sistemas Não-Lineares Complexos

2.1 Introdução aos Sistemas Não-Lineares Complexos

O fenómeno matemático de caos é estudado na física, química, astronomia, meteorologia, geologia, dinâmica de populações, fisiologia, economia, psicologia social, entre outras áreas do conhecimento. Enquanto que, quase não existem (ou não existem) mecanismos causais em comum nestas áreas, o comportamento fenomenológico de caos, isto é, a sensibilidade às pequenas alterações nas condições iniciais e o comportamento imprevisível a partir do estado inicial, surge nos diversos processos não-lineares complexos (caos, com ruído adicional), em diversas dimensões. Tal como explicitado por Baker e Gollub (1996) [23] o caos ocorre em osciladores mecânicos (tais como o pêndulo ou objectos vibratórios), nas rotativas ou nos fluidos aquecidos, nas cavidades de laser, e nalgumas reacções químicas, entre outros processos. A sua característica principal resulta da não repetição dos estados passados numa órbita do sistema dinâmico determinístico em estudo.

Por outro lado, as dinâmicas caóticas, apesar de não serem regulares, seguem as equações determinísticas, tais como os sistemas de equações diferenciais com três ou mais equações, característicos de modelos contínuos no tempo. Mais ainda, os regimes

caóticos podem ser definidos por modelos discretos no tempo, em regra, com uma equação ou duas equações (mapas discretos no tempo). O desenvolvimento da teoria do caos e das técnicas computacionais aplicadas aos sistemas dinâmicos não-lineares determinísticos leva-nos a compreender com maior rigor os sistemas respectivos, facilitando a compreensão de fenómenos que até final do século XIX não eram explicáveis. De facto, o comportamento complexo dos sistemas não-lineares determinísticos e oscilatórios foi observado anteriormente à compreensão e à formulação matemática das dinâmicas de caos. Por exemplo, a possibilidade de existência do comportamento complexo nos sistemas dinâmicos foi descoberto por Poincaré no final do século XIX, devido aos seus esforços infrutíferos para provar a regularidade e a estabilidade das órbitas planetárias. Deste modo, Poincaré mostrou que um sistema constituído por três corpos celestes (Sol, Terra, Lua) regido pela lei de Newton da gravidade[1] pode originar um comportamento dinâmico de complexidade incalculável, de tal modo que não seja possível realizar qualquer previsão. Para Poincaré, uma causa apesar de trivial determina um efeito considerável e não negligenciável nos sistemas dinâmicos, pelo que o autor concluiu que o acaso deveria contrapor-se ao determinismo puro de Laplace.

Mais tarde, Van der Pol e Van der Mark (1927) [511] estudaram o comportamento oscilatório de uma lâmpada de néon decorrente de uma fonte de tensão sinusoidal. Isto é, os autores descobriram que aumentando a capacitância (capacidade eléctrica) num circuito eléctrico podem ocorrer saltos súbitos na frequência de oscilação na lâmpada de néon, ou seja, de s para $s/2$, de $s/2$ para $s/3$, e assim sucessivamente. Donde, as bifurcações[2] e o

[1] Em meados do século XV, Newton resolveu o problema das dinâmicas entre os dois corpos (Terra e Sol), com base na lei da atracção gravitacional entre estes, tendo recorrido às equações diferenciais e as suas leis de moção.

[2] Em regra, a bifurcação é uma ramificação de uma órbita em duas partes, ou uma alteração abrupta na forma qualitativa do atractor, ou uma alteração no sistema de estado estacionário (Williams (2006) [525]).

caos, à luz do conhecimento actual, são a causa dos saltos repentinos das frequências destas oscilações. Nessa altura, foram utilizadas algumas ferramentas matemáticas para ajudar a descrever o comportamento complexo dos sistemas dinâmicos no espaço de fase[3], tais como as trajectórias de Poincaré homoclínicas[4] no plano (atractores homoclínicos), tendo Smale ((1962) [461], citado por Feng e Tse (2008) [173]) provado, em termos matemáticos, que as órbitas homoclínicas são conjuntos limitados caóticos.

Em 1961, Edward Lorenz já tinha estudado um modelo simplificado de convecção térmica, com recurso aos métodos numéricos. Com efeito, foram geradas várias sequências de dados numéricos, em que o meteorologista do MIT (*Massachusetts Institute of Technology*) mostrou que a dependência sensível às condições iniciais é uma das propriedades mais importantes dos sistemas não-lineares determinísticos, tal como o caos. Deste modo, o autor mostrou que para uma alteração do valor de um *input* (numa das variáveis do sistema) de 0.506127 para o valor de 0.506 são gerados efeitos substanciais nos *outputs* do sistema dinâmico não-linear (modelo de convecção atmosférico). Ou seja, as alterações infinitesimais dos estados iniciais podem evoluir para estados completamente diferentes. Até hoje, realizaram-se bastantes investigações sobre o caos. Uma das descobertas mais interessantes das últimas décadas nas áreas de economia e de finanças foi a descoberta de que mesmo os modelos mais simples de equilíbrio dinâmico intertemporal podem originar dinâmicas complexas, tal como a indeterminação, a grande instabilidade dos ciclos, as bifurcações, e os caminhos para o caos (Mendes e Isfan (2003) [352]). Por exemplo, no

[3] O espaço de fase representa um espaço matemático abstracto no qual as coordenadas representam as variáveis necessárias para especificar a fase (ou o estado) do sistema dinâmico no tempo.

[4] Uma órbita homoclínica ocorre na intercepção da variedade estável (órbita) e a variedade instável definida no ponto fixo, ou seja, a trajectória homoclínica une a direcção instável de um ponto fixo sela com a sua direcção estável.

Pelo contrário, uma órbita heteroclínica no plano de fase (*phase-portrait*) é uma trajectória que une dois pontos de sela diferentes por intermédio das variedades instáveis.

volume editado por Anderson *et al.* (1988) [17], de acordo com as linhas de pesquisa para o Instituto de Estudos das Ciências da Complexidade de Santa Fé, foram propostos "caminhos" para que as dinâmicas determinísticas complexas emergissem na economia. Analogamente, no volume editado por Weigend e Gershenfeld (1994) [520], para o mesmo Instituto, foi sugerido um desafio competitivo sobre os métodos e técnicas de previsão em séries temporais não-lineares determinísticas de áreas distintas (física, fisiologia, finanças, entre outras), para bases de dados extensas.

Em geral, nos mercados financeiros, a linha dominante da hipótese dos mercados eficientes (HME), proposta por Fama (1970) [166] pressupõe que a instabilidade dos preços dos activos financeiros resulta de um processo de ruído branco. No entanto, a HME foi fortemente criticada a partir de meados da década de 80. Donde, mesmo os modelos económicos com expectativas racionais e homogéneas, e os mercados bolsistas eficientes em termos informacionais podem gerar dinâmicas deterministicamente caóticas (vejam-se, por exemplo, os trabalhos de Baumol e Benhabib (1989) [42], Lorenz (1989) [313], LeBaron (1994) [301], Saari (1996) [430], Boldrin *et al.* (2001) [56], e Benhabib *et al.* (2004) [44]). Com efeito, no inicio do século XXI foram publicados diversos estudos empíricos por grupos distintos de cientistas, tais como os de Bouchaud e Potters (2000) [63] e Stanley *et al.* (2001) [481], que contrariam HME, pelo que as séries temporais de alterações de preços dos activos observados dificilmente poderiam ser descritas por passeios aleatórios (*random walks*). Estes resultados admitem a existência de dinâmicas caóticas com algum ruído, pelo que é muito provável que ocorram "rupturas" nas séries temporais observadas. Ou seja, estas descontinuidades são sintomáticas de eventos súbitos nos mercados financeiros tais como os *crashes* com fluxos caracteristicamente turbulentos, com evoluções no tempo

muito complexas, no sentido do caos. Com efeito, muitas séries temporais dos mercados financeiros parecem ser melhor caracterizadas por leis de potência, com o parâmetro de escala característico maior ou igual a três.

2.2 Conceitos Base de Caos

Um espaço topológico é uma colecção de objectos conjuntos com uma estrutura matemática especifica. Normalmente, um espaço topológico é uma colecção de pontos (objectos), e a estrutura dota essa colecção de pontos com a mesma coerência, no sentido de descrever os pontos próximos entre si. Um espaço métrico é um conjunto de pontos e uma medida quantitativa prescrita acerca do grau de proximidade dos pares de pontos nesse espaço (Mendelson (1990) [350]). Como objecto matemático, um sistema caótico apresenta uma estrutura rica e complexa, ou seja, o caos proporciona uma explicação adequada das séries temporais não-lineares determinísticas com comportamento irregular. O caos como propriedade das órbitas de um sistema não-linear determinístico é irregular no tempo, somente previsível no curto prazo, e apresenta estrutura no espaço de fase. Um sistema caótico comporta-se irregularmente devido à sua própria estrutura interna e não devido às forças aleatórias que actuam do exterior. Acrescente-se que a aplicação das transformadas de Fourier (contínuas, ou discretas) às séries temporais caóticas experimentais sugere o caos parecido ao ruído[5]. No entanto, contrariamente a este, apresenta estrutura no espaço de fase. Portanto, a estrutura permite a modelação dos dados observados com recurso aos modelos não-lineares determinísticos (tal como os sistemas de equações diferenciais autónomas de 1ª ordem). Uma das conjugações mais interessantes com os modelos

[5] O ruído apresenta dimensão infinita e é composto por sequências de números aleatórios. Por exemplo, o ruído pode ser Gaussiano e *iid*.

não-lineares complexos[6], ou estocásticos, na área das finanças computacionais, deve-se ao desenvolvimento dos algoritmos genéticos (*Genetic Algorithms* (**GAs**)) e à programação genética (*Genetic Programming* (**GP**)), desde a primeira aplicação dos mesmos às séries financeiras (Bauer e Liepins ((1992) [41], citado por Chen (2002) [98])). Um sistema dinâmico determinístico abstracto é um par ($\mathcal{M}$, Φ, T) em que $\mathcal{M}$ é um espaço métrico compacto com a métrica d, Φ é uma aplicação contínua de $\mathcal{M}$ em $\mathcal{M}$ e T é o conjunto do tempo. O espaço Euclidiano $\mathcal{M}$ é o espaço de fase (ou o espaço de estado) e o operador Φ designa-se por lei de evolução no tempo. Isto é, parta-se da suposição de que $\mathbf{v}_n$ caracteriza o estado corrente do sistema, em que $\mathbf{v}_n \in \mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^d$ é um vector estado d-dimensional, $\mathcal{M}$ é o atractor onde as dinâmicas evoluem, e $\Phi : \mathcal{M} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathcal{M}$ é o operador de evolução tal que $\Phi(\mathbf{v}_n, t) = \mathbf{v}_{n+t}$. Logo, o sistema dinâmico descrito por ($\mathcal{M}$, Φ, T) é determinístico se o operador de evolução Φ é determinístico. Agora, se estamos apenas interessados nos sistemas dinâmicos discretos, podemos limitar a análise tal que $n, t \in \mathbb{Z}$, ou $T \in \{\mathbb{Z}\}$ representa o conjunto de tempo. Caso contrário, se estamos focados nos sistemas dinâmicos contínuos, ampliamos a análise para $n, t \in \mathbb{R}$, ou $T \in \{\mathbb{R}\}$. Se o operador de evolução não se altera ao longo do tempo (isto é, se $v_n = v_m$ então $\Phi(v_n, \cdot) = \Phi(v_m, \cdot)$, para $m \neq n$), então o sistema dinâmico é estacionário. Como é do conhecimento, a lei de evolução de Φ no tempo permite determinar o estado presente do sistema em cada momento de tempo $t \in T$, a partir dos seus estados nos momentos prévios. Quando Φ é um homeomorfismo (ou seja, uma aplicação contínua e com inversa contínua) o sistema dinâmico é invertível.

[6] Por exemplo, Determan e Foster ((1999) [126], citado por Steeb (2011) [485]) utilizaram a função logística (mapa unidimensional) expressa por:

$$Y_{n+1} = \lambda Y_n(1 - Y_n), n = 1, ..., N \tag{2.1}$$

tal que para $3,56994... < \lambda < 4$, a solução da Equação (2.1) torna-se caótica. Isto é, os autores recorreram à utilização do mapa logístico como a base de um operador de mutação especial λ.

Se a lei de evolução Φ é um difeomorfismo (i.e., uma aplicação diferenciável e com inversa diferenciável) o sistema dinâmico diz-se regular.

Dois sistemas dinâmicos determinísticos $(\mathcal{M}, f)$ e $(\mathcal{M}^*, g)$ são conjugados topologicamente quando existe um homeomorfismo $\theta : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^*$ que comuta com f e g, ou seja, $\theta \circ f = g \circ \theta$.

Os sistemas dinâmicos discretos são definidos pelas iteradas de um mapa (aplicação) $f : \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{M}$, em que $f^n(v)$ indica a n-ésima iterada (composição) do mapa f em f no ponto $v \in \mathcal{M}$, isto é:

$$f^n(v) = f(f(...f(v))) = \underbrace{(f \circ f \circ ... \circ f)}_{n \text{ vezes}}(v) \tag{2.2}$$

A órbita de um ponto $v \in \mathcal{M}$ é a sequência infinita de iteradas do mapa discreto $f : \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{M}$, caracterizada por:

$$\left\{v, f(v), f^2(v), f^3(v), ...\right\} = \{f^n(v)\}_{n \in \mathbb{N}} \tag{2.3}$$

Agora, se f é invertível a órbita de $v \in \mathcal{M}$ é uma sequência bilateral infinita (i.e., bi-infinita) expressa pela equação:

$$\left\{..., f^{-2}(v), f^{-1}(v), v, f(v), f^2(v), f^3(v), ...\right\} = \{f^n(v)\}_{n \in \mathbb{Z}} \tag{2.4}$$

Neste contexto, uma órbita é periódica se volta à sua posição inicial ao fim de um certo período de tempo, isto é:

$$f^n(v) = f^{n+t}(v) \tag{2.5}$$

em que $n \in T$ e t é o período principal da órbita. Portanto, o conjunto dos pontos que pertence a uma determinada órbita periódica constitui o ciclo. Quando $t = 1$ obtém-se

uma órbita periódica de período 1 ou um ponto fixo. Na prática, determinar os pontos fixos do mapa discreto f significa determinar as soluções reais de uma equação não-linear, isto é:

$$f(v) = v \tag{2.6}$$

Igualmente, determinar os pontos periódicos de período n de f conduz à determinação dos pontos fixos da iterada n de f, isto é $f^n(v) = v$. Logo, a órbita é aperiódica se

$$f^n(v) \neq f^{n'}(v), \forall n \neq n'.$$

O conjunto invariante de pontos originário de uma moção assintótica global é denominado pelo atractor do sistema, podendo ser um ciclo, ou um conjunto limitado não-periódico com estrutura fractal (isto é, um atractor estranho (atractor caótico)), ou conduzir a um ponto fixo.

Agora, a evidência de caos numa série temporal é problematizada de forma sistemática. Ou seja, perante uma série temporal experimental física, como saber se esta provem de um processo caracteristicamente caótico? A resposta a esta questão está sintetizada na sequência de passos apresentada por Haykin e Puthusserypady (1997) [232] e pode ser perfeitamente adaptada às séries financeiras, isto é:

- O processo deve ser não-linear;
- A dimensão (de correlação) do atractor, D_2, deve ser fractal e deve convergir para um valor constante, para dimensões crescentes de mergulho;
- As dinâmicas do sistema responsáveis pela geração do processo devem apresentar sensibilidade às condições iniciais (*sensitivity to initial conditions* (*SIC*)) do processo

não-linear determinístico, pelo que pelo menos um dos expoentes de Lyapunov do processo deve ser positivo. Acrescente-se que o expoente máximo de Lyapunov determina o horizonte de previsão da série temporal;

- A soma de todos os expoentes de Lyapunov do processo deverá ser negativa para que as dinâmicas subjacentes ao processo sejam dissipativas (ou que permitam a existência de um atractor dissipativo);

- A dimensão de Kaplan-Yorke (1979) [271] D_{KY} (um subproduto do espectro de Lyapunov [7]) deve ser próxima (em valor numérico) da dimensão de correlação.

Estão assim reunidas as condições para a existência de um atractor estranho no espaço de fase. Com efeito, as características principais de um atractor estranho com dimensão fraccional (fractal) encontram-se enumeradas em Williams (2006) [525], ou seja:

- O atractor caótico é uma superfície do espaço de fase complexa cuja trajectória é assintótica no tempo e vacila de forma caótica (Grebogi *et al.* (1982) [213]);

- O atractor caótico é um atractor que apresenta extrema sensibilidade às condições iniciais (*sensitivity to initial conditions* (*SIC*)) (Eckmann e Ruelle (1985) [141], Holden e Muhamad (1986) [243]).

[7] A dimensão fraccionária (ou a dimensão de *Kaplan-Yorke*) de um atractor caótico pode ser estimada por um método de interpolação linear simples, isto é:

$$D_{KY} = D + \frac{1}{|\lambda_{D+1}|}\sum_{j=1}^{D}\lambda_j \tag{2.7}$$

em que D (dimensão topológica do atractor) é expressa pelo maior valor de D, tal que a soma dos expoentes de Lyapunov seja positiva: $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_D \geq 0$.

2.3 Sistemas Dinâmicos Determinísticos e Caos

Um sistema dinâmico é um sistema que expressa um estado em cada instante de tempo. O estado é uma variável, ou um conjunto de variáveis, próprio do sistema, que varia ao longo do tempo. Por exemplo, a bolsa de valores de Nova York, ao longo de uma determinada janela de tempo, representa um sistema dinâmico, em que o estado representa um conjunto assinalável de variáveis económicas e financeiras. Em particular, os sistemas dinâmicos estão claramente definidos em Chang e Tong (2001) [94].

Definição 2.3.1 *Um sistema dinâmico determinístico descreve a transição de um estado inicial para estados posteriores, onde a lei de transição (isto é, a dinâmica) é conhecida precisamente e os estados estão isentos de erros (observacionais, arredondamentos, entre outros)*

Definição 2.3.2 *Um sistema dinâmico estocástico pressupõe a existência de estados aleatórios e descreve as probabilidades de transição a partir de um estado inicial para estados mais tardios, onde o ruído dinâmico (conhecido pelo ruído do sistema) predomina.*

Um sistema dinâmico determinístico pode ser expresso através de um mapa de tempo discreto (tal como os mapas iterativos muito utilizados nas simulações de séries financeiras), de dimensão d, quando o tempo $n = 1, ..., N$ é uma variável discreta, isto é:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{y}_n),\ n \in \mathbb{Z},\ \mathbf{y}_n \in \mathbb{R}^d \tag{2.8}$$

ou por um sistema de equações diferenciais de primeira ordem,

$$\dot{\mathbf{y}}_n = \frac{d\mathbf{y}_n}{dn} = \mathbf{G}(\mathbf{y}_n),\ n \in \mathbb{R},\ \mathbf{y}_n \in \mathbb{R}^d \tag{2.9}$$

em que $\mathbf{G}(\mathbf{y}_n)$ é um campo vectorial contínuo, cujo número de graus de liberdade, d, representa o número de equações diferenciais requeridas para descrever a evolução do atractor no espaço de estado (colecção de todos os estados possíveis), $\mathbf{y}$ é o estado em cada instante de tempo $n \in N$, e quando $\mathbf{G}$ não depende explicitamente do tempo, n, o sistema é autónomo. A sequência de pontos discretos,

$$\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \left\{y_0, y_1 = \mathbf{F}(y_0), y_2 = \mathbf{F}(y_1) = \mathbf{F}^2(y_0), ...\right\}, \tag{2.10}$$

ou a sequência de pontos contínuos,

$$\mathbf{y}_n = \{(n, \mathbf{y}_n, \mathbf{y}_0) : n \in I \subset \mathbb{R}\} \tag{2.11}$$

definem as soluções das equações apresentadas e $\mathbf{y}_n$ é a órbita (ou a trajectória) do sistema dinâmico, em que $\mathbf{y}_0$ expressa as condições iniciais que geram as trajectórias.

De forma a determinar os pontos de equilíbrio (pontos fixos) de um sistema dinâmico, torna-se necessário resolver as equações não-lineares respectivas, isto é:

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}_n) = \mathbf{y}_n \tag{2.12}$$

no caso de um mapa discreto, e

$$\mathbf{G}(\mathbf{y}_n) = 0 \tag{2.13}$$

no caso de um sistema de equações diferenciais contínuas e autónomas de 1ª ordem. Portanto, as soluções exactas ou numéricas destas equações definem os pontos de equilíbrio de cada sistema dinâmico discreto, ou contínuo. Com efeito, a estabilidade local de um ponto de equilíbrio, $\mathbf{y}^*$, expressa-se em função dos valores próprios da matriz Jacobiana estimada na vizinhança do seu ponto de equilíbrio (isto é, por exemplo, através da lineariza-

ção ou expansão em série de Taylor de uma aplicação em torno de $\mathbf{y}^*$). Seja $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ uma aplicação em $\mathbb{R}^n$ e seja $\mathbf{y}^* = (y_1^*, ..., y_n^*)$ de $\mathbb{R}^n$. A matriz jacobiana de f em $\mathbf{y}^*$ designa-se por $Df(\mathbf{y}^*)$ e é expressa por:

$$Df(\mathbf{y}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\mathbf{y}^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(\mathbf{y}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(\mathbf{y}^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(\mathbf{y}^*) \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

em que a aplicação f pode ser representada próximo de $\mathbf{y}^*$ pela sua aproximação linear de primeira ordem, isto é,

$$f(\mathbf{y}^* + h) - f(\mathbf{y}^*) \approx Df(\mathbf{y}^*)\, h \tag{2.15}$$

onde h é um vector (de acréscimo) pequeno (ou seja, próximo de zero). Para h pequeno o erro de aproximação é proporcional a $|h|^2$.

Como já foi referido, a estabilidade dos pontos de equilíbrio é determinada pelos valores próprios da matriz jacobiana avaliada no ponto $\mathbf{y}^*$ respectivo. Se o valor absoluto de todos os valores próprios de $Df(\mathbf{y}^*)$ é menor que 1, está definido um *ponto fixo estável* (*ponto de equilíbrio estável* ou um *atractor de ponto único*). Se todos os valores próprios da matriz jacobiana $Df(\mathbf{y}^*)$ apresentam em módulo valores maiores do que 1, trata-se de um *repulsor*. Se pelo menos um dos valores próprios tem o valor absoluto maior que 1 e pelo menos um dos valores próprios tem o valor absoluto menor que 1, tem-se um *ponto sela* que é também um repulsor. Nas três situações apresentadas os pontos fixos são *hiperbólicos*, ou seja, nenhum dos valores próprios tem o modulo igual a 1. Se algum valor próprio de $Df(\mathbf{y}^*)$ é igual a ± 1, o ponto fixo é *não-hiperbólico* e gera uma bifurcação, na qual a estabilidade do ponto fixo (ponto de equílibrio) está em causa. Um ponto fixo diz-se

super-estável (assintoticamente estável) se é *estável* e é *crítico*[8].

Uma aplicação não-linear com um ponto fixo hiperbólico é conjugada topologicamente com uma aplicação linear numa vizinhança do ponto fixo (Teorema de Hartman-Grobman), permitindo estudar os diversos pontos fixos hiperbólicos e o comportamento dinâmico local a partir da aproximação linear para qualquer mapa não-linear proposto.

Em particular, a alteração do volume dos pontos de $\mathbf{y}_n$ para $\mathbf{y}_{n+1}$ está expressa no determinante da matriz Jacobiana de uma aplicação discreta no tempo. Por exemplo, Abarbanel *et al.* (1993) [5] explicitaram a evolução do volume dos pontos com base na equação que se apresenta:

$$DF(\mathbf{y}) = \det\left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}}\right), \tag{2.16}$$

em que o volume do espaço de fase torna-se constante quando o valor do Jacobiano $DF(\mathbf{y})$ é unitário durante a evolução de um sistema dinâmico. Por exemplo, as dinâmicas Hamiltonianas geram um fluxo de pontos no espaço de fase semelhante a um regime de fluido incompressível. Todavia, em geral, o determinante da matriz Jacobiana é menor do que a unidade ($DF(\mathbf{y}) < 1$), pelo que os volumes no espaço de fase apresentam contracções ao longo da evolução dos sistemas. Concretamente, Holden e Muhamad (1986) [243] explicitaram que a contracção contínua do volume no espaço de fase caracteriza o fluxo estável e persistente do sistema dinâmico determinístico, e gera uma estrutura (atractor) com uma dimensão menor do que a dimensão de mergulho d_e. Com efeito, um atractor (subconjunto do espaço de fase) captura os pontos de outras regiões do espaço de fase para a sua bacia. Por outro lado, um ponto do espaço de fase que entra no atractor nunca mais

[8] Nos sistemas dinâmicos, se g é uma função diferenciável em a e se $\nabla g(a) = 0$, então a define-se como um *ponto crítico* (ponto de equílibrio) ou de *estacionariedade* de g.

se "liberta" deste (Farmer (1982) [168]). Como é do conhecimento, a dissipação dinâmica (contracção do volume no espaço de fase) de um atractor potencia claramente a ocorrência de atractores estranhos, quando pelo menos um dos expoentes de Lyapunov é positivo.

O Zoo de Mergulho

Apresentam-se agora dois arquétipos de modelos de sistemas dinâmicos determinísticos, que são muito utilizados nas experimentações das séries temporais complexas. O modelo de Lorenz (1963) [312] é expresso por um sistema autónomo de três equações diferenciais não-lineares de primeira ordem, que caracteriza os fluxos contínuos determinísticos de convecção térmica, isto é:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dn} = \sigma(y - x) \\ \dfrac{dy}{dn} = -xz + rx - y \\ \dfrac{dz}{dn} = xy - bz \end{cases} \tag{2.17}$$

em que x, y, e z são as variáveis reais, n é o tempo, e σ, r, e b são os parâmetros reais positivos de controlo. O autor observou divergência exponencial nas soluções do sistema dinâmico para certos valores dos parâmetros e para condições iniciais próximas. Donde, este fenómeno foi interpretado como a evidência da dificuldade de previsão da evolução da moção de um fluido turbulento, devido à imprecisão no conhecimento das condições iniciais do sistema (variáveis).

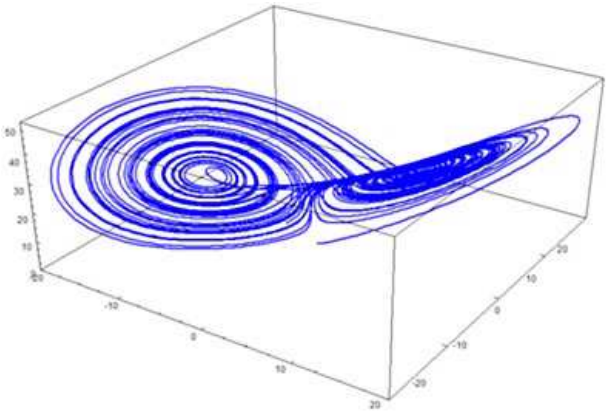


Figura 2.1: Solução do atractor estranho de Lorenz.

Assim, quando os parâmetros do sistema assumem os valores $\sigma = 10$, $r = 28$, e $b = 8/3$, o atractor de Lorenz apresentado na Figura 2.1 (para $\tau_s = 0.005$) torna-se não-periódico e caótico, e a direcção de rotação do atractor estranho muda ocasionalmente. Este atractor, quando projectado no plano bidimensional apresenta uma estrutura geométrica admirável, pelo que a dependência sensível às condições iniciais gera o conhecido "efeito de borboleta".

Noutro exemplo, uma série temporal discreta pode ser gerada por meio de uma aplicação de Poincaré, que gera uma secção transversal (Secção de Poincaré) ao fluxo do sistema de equações diferenciais de Lorenz, ou seja, com base no mapa de Hénon e Pomeau (1976) [234] (conhecido pelo mapa de Hénon), $H_{a,b}$: $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, expresso por:

$$H(x,y)_{a,b} = (1 - ax^2 + by, x) \tag{2.18}$$

ou em termos iterativos caracterizada pelo mapa bidimensional não-invertível, isto é:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + by_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases} \tag{2.19}$$

em que x e y são variáveis reais, n é o tempo, e a, b são parâmetros reais de controlo. O mapa de Hénon (1976) [233] é um sistema dissipativo, ou seja, o Jacobiano do mapa

de Hénon é igual à constante $-b$, dando-se a contracção do volume no espaço de fase quando $|b| < 1$. Para $b = 0$, o conjunto dos pontos no plano estão mapeados no eixo x, apresentando a mesma imagem. Logo, o mapa de Hénon de duas dimensões pode ser transformado num mapa unidimensional não-invertível, em que nenhuma imagem apresenta inversa única, isto é:

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 \tag{2.20}$$

ou analogamente

$$x_{n+1} = C - x_n^2 \ , \tag{2.21}$$

para uma certa alteração na escala. Com efeito, este mapa unidimensional é conhecido pelo *mapa quadrático*, é uma variante do *mapa logístico* (ver Equação (2.1)), e apresenta um comportamento dinâmico muito rico, incluindo o regime caótico.

De acordo com Cvitanović *et al.* (1988) [118], o mapa de Hénon produz soluções regulares (periódicas) e irregulares (caóticas) para diversas escolhas dos parâmetros de controlo a e b. Com efeito, os autores explicitaram que para determinadas alterações nestes parâmetros o atractor expresso no plano simbólico (isto é, com base na representação das suas dinâmicas simbólicas no mapa bidimensional) varia bastante: colapsa nas órbitas periódicas, desenvolve bandas caóticas diminutas, e "explode" nos pontos de crise (pontos em que o atractor colide com a sua bacia de atracção).

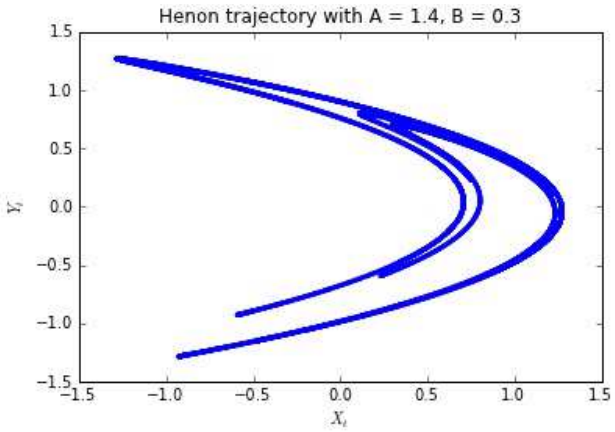


Figura 2.2: Atractor estranho de Hénon para $a = 1.4$ e $b = 0.3$.

Com efeito, Hénon ((1976) [233], citado por Cvitanovic *et al.* (1988) [118]) conjecturou que para $a = 1.4$ e $b = 0.3$, a moção assintótica da aplicação de Hénon é caracterizada por um atractor estranho (ver Figura 2.2), com dependência sensitiva às condições iniciais.

No entanto, Thompson e Stewart (2002) [502] referiram que Newhouse (1979) [374] e Robinson (1983) [423] mostraram por meio de simulações numéricas aplicadas ao mapa de Hénon, para os parâmetros de controlo $a = 1.392$ e $b = 0.3$, que a ocorrência de uma infinidade de órbitas periódicas (com bacias pequenas de atracção) pode provocar a divergência exponencial entre dois pontos próximos iniciais, pertencentes a duas bacias de atracção distintas.

2.4 Reconstrução do Atractor a partir de uma Série Temporal Escalar

A análise das séries temporais supostas não-lineares determinísticas, que possam ser dependentes do tempo, aperiódicas e irregulares, em termos de uma moção caótica de dimensão baixa ($d_e < 5$), ou de uma moção complexa com uma dimensão alta, tal que $d_e < 10$, tem apresentado bastante sucesso desde a década de 80. O cerne da análise de uma série temporal não-linear em termos do determinismo é a reconstrução do espaço de fase a partir dos dados observados. Com efeito, dois grupos distintos de físicos e matemáticos da Universidade da California, Santa Cruz, nomeadamente Ruelle (1979) [428] e Packard *et al.* (1980) [389] introduziram a ideia de utilizar coordenadas de atraso de tempo para reconstruir o espaço de fase a partir de uma série temporal escalar caótica. Esta ideia foi formalmente concretizada com base na fundamentação matemática proposta por Mañé (1981) [332] e Takens (1981) [490], isto é, com base no teorema de mergulho (teorema geométrico), conhecido pelo método do mergulho dos atrasos (em termos das coordenadas) de tempo. O teorema do mergulho tem provado ser muito útil em séries temporais provenientes de sistemas dinâmicos não-lineares determinísticos, sem ruído, e tem vindo a ser alargado aos sistemas dinâmicos estocásticos (estocásticos forçados), ou complexos, que podemos considerar como sistemas determinísticos conduzidos por algum processo estocástico, tal como o ruído.

Mañé e Takens provaram que sob condições bastante gerais (e sem ruído), a dinâmica do sistema subjacente pode ser reconstruída a partir dos dados observados, para que haja uma correspondência um-a-um entre o atractor reconstruído no espaço de fase e as dinâmicas não-lineares determinísticas do sistema original (apesar de desconhecidas).

Estas dinâmicas podem ser restritas às séries temporais escalares, com recurso à utilização de mapas de tempo discretos no espaço de fase. Neste contexto, a selecção do atraso de tempo, T, e da dimensão de mergulho, d_e, não é simples, porque compreende diversos métodos de estimação, e pode ser determinante na acuidade de reconstrução do atractor, no sentido da previsão das séries temporais no curto prazo e das estimativas das respectivas quantidades invariantes.

A concepção chave da reconstrução do atractor num determinado espaço de fase reside no facto de que o passado temporal de uma série temporal inclui informações sobre as variáveis de estado (tais como as variáveis económicas, ou financeiras) não observáveis no sistema original, que possam ser utilizadas para predizer o estado presente do sistema.

2.4.1 Teorema de Mergulho de Mañé e Takens

O método de reconstrução do atractor permite que os elementos de uma série temporal observada possam ser utilizados para deduzir as características invariantes de um sistema dinâmico multidimensional. Uma vez que o espaço de fase do sistema dinâmico, supostamente determinístico, que gera a série temporal não é observável e que a sua dinâmica não é conhecida, então só se conhece uma sequência $\{s_n\}_{n=1}^{N}$ de medidas de uma determinada variável originária do sistema. Se no processo de análise for extraída uma série temporal escalar s_{n^*} em períodos (instantes) de amostragem iguais a τ_s para o momento inicial n_0, então a sequência de dados discretos é expressa por:

$$s_n = s_{n_0+n\tau_s} \tag{2.22}$$

em que $n = 1, ..., N$, e a evolução observada é $s_k \rightarrow s_{k+1}$. Portanto, Abarbanel (1996) [2] diz-nos que a questão principal a solucionar consiste no processo de transição dos dados

escalares observados para o espaço de fase (ou estado multivariado). Isto é, na forma de conversão dos dados observados em componentes vectoriais (coordenadas dos atrasos de tempo), que permita a reconstrução adequada do atractor. A resposta a este problema está no teorema de mergulho de Mañé (1981) [332] e Takens (1981) [490].

Parta-se assim, de um sistema dinâmico determinístico, desconhecido, definido por:

$$\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{x}_{n+1}, \tag{2.23}$$

em que o espaço de fase de $\mathbf{x}_n$ é multidimensional, e o sistema é livre de ruído. O teorema de mergulho diz-nos que no caso de se observar uma única quantidade escalar $h(\cdot)$ duma função vectorial das variáveis dinâmicas $\mathbf{g}(\mathbf{x}_n)$, então a estrutura geométrica das dinâmicas multivariadas pode ser desdobrada (*unfolded*), a partir do conjunto de medições escalares $h(\mathbf{g}(\mathbf{x}_n))$, num novo espaço construído, $\mathbf{y}_n$, com novos vectores cujas componentes consistem em $h(\cdot)$ aplicadas às potências de $\mathbf{g}(\mathbf{x}_n)$. Por consequência, os novos vectores construídos definem a moção não-linear determinística num espaço Euclidiano, isto é (Abarbanel (1996) [2]):

$$\mathbf{y}_n = [h(\mathbf{x}_n), h(\mathbf{g}^{T_1}(\mathbf{x}_n)), h(\mathbf{g}^{T_2}(\mathbf{x}_n)), ..., h(\mathbf{g}^{T_{d_e-1}}(\mathbf{x}_n))], \tag{2.24}$$

em que d_e é a dimensão e T é o conjunto do tempo. Agora, o autor com base em Sauer *et al.* (1991) [440] refere que sob as condições de regularidade aplicadas nas funções $h(\cdot)$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ (que permitem que $h(\cdot)$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ sejam continuamente diferenciáveis de 1ª ordem, isto é, C^1), para d_e suficientemente grande, então a maioria das propriedades do sinal multivariado desconhecido, $\mathbf{x}_n$, oriundas da fonte observada de caos, vão ser reproduzidas sem ambiguidade no novo espaço vectorial $\mathbf{y}_n$ (conjugação topológica). Em particular, mostra-se que a ordem sequencial dos pontos $\mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{y}_{n+1}$ segue a mesma evolução no

tempo, tal como as dinâmicas desconhecidas $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_{n+1}$. Neste contexto, defina-se a função discreta geral $h(\cdot)$ e a variável escalar observada s_n, isto é:

$$h(\mathbf{x}_n) = s_n, \tag{2.25}$$

em que $n = 1, ..., N$.

Agora, para a função vectorial geral de variáveis dinâmicas $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ escolhe-se a operação que transforma um vector inicial $\mathbf{x}$ qualquer, num vector de atraso no tempo múltiplo de τ_s (instante), tal que a potência de ordem T_k de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ é expressa por:

$$\mathbf{g}^{T_k}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{x}_{n+T_k} = \mathbf{x}_{n_0+(n+T_k)\tau_s} \tag{2.26}$$

onde n_0 é o momento inicial. Logo, as novas componentes de $\mathbf{y}_n$, por meio de $h(\cdot)$ (ver Equação (2.24)), são compostas pelos atrasos de tempo da variável escalar observada s_n nos múltiplos momentos de τ_s, isto é:

$$\mathbf{y}_n = [s_n, s_{n+T_1}, s_{n+T_2}, ..., s_{n+T_{d_e-1}}] \tag{2.27}$$

onde d_e é a dimensão de mergulho. Mais ainda, ao se proceder na escolha $T_k = kT$, ou seja, em intervalos de tempo que são múltiplos de um atraso comum T (instante), os novos vectores de dados $\mathbf{y}_n$ são definidos por:

$$\mathbf{y}_n = [s_n, s_{n+T}, s_{n+2T}, ..., s_{n+(d_e-1)T}] \tag{2.28}$$

Portanto, os novos vectores $\mathbf{y}_n$ vão substituir os dados escalares observados s_n por vectores de dados num espaço de fase Euclidiano de dimensão d_e, no qual, as particularidades das invariantes da nova sequência de pontos, $\mathbf{y}_n$, são capturados sem perda de informação face às características do sistema dinâmico original $\mathbf{x}_n$. Por conseguinte, o novo

espaço de atraso de tempo, $\mathbf{y}_n$, está relacionado com o espaço original dos $\mathbf{x}_n$ através de suavizações (transformações diferenciáveis). Isto é, a regularidade é essencial porque permite demonstrar que todas as invariantes dinâmicas (ou simplesmente invariantes) da moção analisada no novo espaço, $\mathbf{y}_n$, são as mesmas caso fossem avaliadas no espaço original $\mathbf{x}_n$. Isto significa que podemos trabalhar no espaço reconstruído, $\mathbf{y}_n$, e obter tanta informação quanta seria possível caso fizéssemos os cálculos directamente no espaço verdadeiro de $\mathbf{x}_n$. Por fim, o autor refere que o teorema de mergulho é geométrico e permite construir o número suficiente de componentes do vector $\mathbf{y}_n$ necessárias para assegurar a vizinhança correcta dos pontos.

A ideia de base para a construção de um novo espaço de estado é, no caso duma órbita, percebida como a projecção num único eixo $h(\cdot)$ ou s_n, podendo ocorrer sobreposições (*overlaps*) na variável s_n, em virtude da projecção do atractor e não das dinâmicas subjacentes. Agora, se conseguirmos desdobrar a órbita, provendo coordenadas vectoriais independentes no espaço multidimensional reconstruído com as observações, s_n, atrasadas no tempo T, podemos desfazer as sobreposições provenientes das projecções do atractor e recuperar órbitas que já não são ambíguas. Mais ainda, o teorema diz-nos que se a moção ocorre num conjunto de dimensão d_A (que pode ser um número fraccionário), então a escolha da dimensão de mergulho d_e, inteira, no espaço de desdobramento tal que $d_e > 2d_A$, é suficiente para desfazer todas as sobreposições das órbitas e transformá-las em não ambíguas. Contudo, em regra, a dimensão mínima de mergulho necessária[9] para destrinçar as órbitas é menor do que a dimensão suficiente sugerida no teorema de reconstrução do atractor e pode ser determinada, por exemplo, pelo método dos vizinhos

[9] Em regra, a dimensão mínima de mergulho $d_{e(min)}$ satisfaz a condição $d_{e(min)} > D_2$, em que D_2 é a dimensão de correlação do atractor.

falsos.

2.4.2 Prescrições de selecção do Atraso de Tempo

A prescrição de alguns métodos para a estimativa do atraso de tempo T (*embedding lag*) e para a estimativa da dimensão de mergulho d_e (*embedding dimension*) é muito importante para reconstruir o atractor no espaço de fase. Assim, para uma série temporal não-finita e sem ruído, a escolha do atraso de tempo, T, é, por princípio, quase-arbitrária. No entanto, para uma série temporal escalar finita a escolha de T determina a qualidade das trajectórias. Por exemplo, para as séries temporais escalares dos mercados financeiros, T deve ser múltiplo do tempo de amostragem τ_s, porque existem apenas dados para estes valores de tempo. Por outro lado, T deve apresentar um valor suficientemente grande, mas não em demasia, porque as coordenadas y_n e y_{n+T} podem tornar-se estatisticamente independentes (Abarbanel (1996) [2])).

Função de Autocorrelação Linear

Um método popular de estimativa do atraso de tempo, T, consiste na utilização da função de autocorrelação linear, a partir da série temporal escalar original y_n, $n = 1, ..., N$, isto é:

$$\rho(T) = \frac{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(y_n - \overline{y})(y_{n+T} - \overline{y})}{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(y_n - \overline{y})^2} \tag{2.29}$$

em que N é o número total de observações, $\overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y_n$ é a média amostral, e T é o menor valor positivo, onde a função de autocorrelação se anula, tal como sugerido por Priestly (1989) [418] e por Abarbanel (1993) [5], entre outros autores. Isto é, $\rho(T) \leq 0 \Longrightarrow \tau = T$, tal que as coordenadas y_n e y_{n+T} se tornem linearmente independentes.

Analogamente, Tsonis *et al.* (1994) [506] propuseram a escolha do atraso de tempo, T, nos sistemas dinâmicos complexos, para que não exista correlação temporal (*decorrelation time*[10]) entre as coordenadas de atraso de tempo no espaço de fase, isto é, os autores propuseram a escolha de T, quando $\rho(T) = 0$. No entanto, Small (2005) [462] diz-nos que a escolha do atraso de tempo T, tal que $\rho(T) \leq 0$, é meramente prescritiva. Por exemplo, o autor sugere a escolha de T como um quarto do período para as séries temporais quase-ciclícas (caóticas), ou cíclicas (determinísticas mas não caóticas). Finalmente, Abarbanel (1996) [2] refere que a escolha de T, quando $\rho(T) \leq 0$, equivale à escolha linear óptima em termos da predição, pelo método dos mínimos quadrados ordinários, da coordenada y_{n+T}, a partir da informação da coordenada y_n. Portanto, o autor não recomenda a estimativa do atraso de tempo nos sistemas caóticos, com recurso à função de autocorrelação linear, porque não é suficientemente claro se a função de autocorrelação linear captura adequadamente as correlações não-lineares entre os diversos pontos numa série temporal escalar. Esta suposição é corroborada por Sprott (2003) [480], devido à natureza linear da função de autocorrelação, não representando assim as correlações não-lineares entre as coordenadas de atraso de tempo no espaço de fase.

Primeiro Mínimo Local da Informação Mútua

Para capturar as correlações não-lineares numa série temporal escalar de natureza mais determinística não há agora qualquer restrição em escolher o atraso de tempo, T, com base na estimativa da informação mútua. Isto é, Fraser e Swinney (1986) [188], Fraser (1989) [187], e Pineda e Sommerer (1993) [410], sugeriram que o melhor valor de atraso de

[10] Por exemplo, Tsonis e Elsner ((1988) [505], citado por Tsonis *et al.* (1994) [506]) propuseram a escolha dos atrasos de tempo, T, nos sistemas complexos, quando a função de autocorrelação caia abaixo de um certo valor ($\frac{1}{e}$, 0.5, ou 0.1).

tempo é o menor valor, onde a informação mútua, $I(T)$, apresenta um mínimo local entre coordenadas sucessivas de atraso de tempo no atractor. A informação mútua baseia-se no critério de informação mútua (*mutual information criterion* (*MIC*)), isto é, representa a quantidade de informação sobre y_n com base na observação de y_{n+T}. Agora, no contexto de uma série temporal escalar, a informação mútua[11], $I(T)$, pode ser expressa por:

$$I(T) = \sum_{n=1}^{N} P(y_n, y_{n+T}) \log_2 \frac{P(y_n, y_{n+T})}{P(y_n)P(y_{n+T})} \tag{2.30}$$

em que $P(y_n, y_{n+T})$ é a probabilidade de observar y_n e y_{n+T}, e $P(y_n)$ é a probabilidade de observar y_n. Por exemplo, se y_n é completamente independente de y_{n+T}, verifica-se que a informação mútua entre as medições se anula ($I(T) = 0$).

Na prática, sugere-se a escolha do atraso de tempo, com recurso ao primeiro mínimo local da informação mútua, para que as coordenadas y_n e y_{n+T} sejam suficientemente independentes uma da outra (e sejam úteis na reconstrução topológica do atractor), mas não tão independentes ao ponto de não existir qualquer correlação entre estas. Agora, se o *gap* entre as coordenadas for muito grande (T demasiado grande), isto é, por exemplo, na presença de caos e de ruído adicional, as dinâmicas caóticas/estocásticas tornam y_n e y_{n+T} desconectadas ou estatisticamente independentes, pelo que os objectos geométricos (atractores) mais simples parecem apresentar estruturas na forma de nuvens extensas.

Pelo contrário, se o atraso de tempo T for muito pequeno, cada coordenada é sensivelmente a mesma. Logo, as trajectórias do atractor reconstruído são compactadas ao longo da linha de identidade, isto é, a redundância definida por Casdagli *et al.* (1991) [88], porque todos os pontos das coordenadas estão acumulados em torno da bisectriz do espaço de mergulho (Casdagli *et al.* (1991) [88], citado em Kantz e Schreiber (2005)[269]). Por

[11] A unidade mais comum de medição da informação é o *bit*, quando o logaritmo está na base 2.

conseguinte, Kantz e Schreiber (2005) [269] referiram que o primeiro mínimo da informação mútua, $I(T)$, define o valor do atraso de tempo suficiente, onde y_{n+T} acrescenta a máxima informação ao conhecimento que dispomos sobre y_n, permitindo a redundância mínima, isto é, o atractor topológico não é compacto.

2.4.3 Determinação da Dimensão de Mergulho

O objectivo do teorema de mergulho de Mañé (1981) [332] e Takens (1981) [490] é o de prover um espaço Euclidiano, $\mathbb{R}^{d_e}$, suficientemente grande, tal que, as órbitas do atractor possam ser desdobradas sem margem para dúvidas. Em regra, se $d_e < 5$ (dimensão baixa de mergulho), o sistema é não-linear determinístico e é provavelmente caótico. Se $5 \leq d_e < 10$ (dimensão alta de mergulho), o sistema torna-se extremamente complexo e é muito provável que esteja contaminada com ruído adicional. Quando $d_e \geq 10$ (isto é, para uma dimensão muito alta de mergulho), o sistema deixa de ser determinístico, porque é muito provável que este esteja contaminado com uma percentagem muito elevada de ruído. Por exemplo, no limite, o sistema pode corresponder a um processo de ruído branco Gaussiano, cuja dimensão é não-finita (sistema dinâmico estocástico).

Para a determinação da dimensão necessária de mergulho foram desenvolvidas diversas técnicas, uma vez que o teorema geométrico de reconstrução do atractor determina apenas uma dimensão suficiente no espaço de fase.

Barreira de Dimensão de Mergulho: Método dos Vizinhos Próximos Falsos

O método dos vizinhos próximos falsos[12] proposto por Kennel *et al.* (1992) [272]

[12] O método dos vizinhos falsos sugere a estimativa da dimensão de mergulho de acordo com o teorema de mergulho de Takens (1981) [490], mas não é incompatível com a estimativa da dimensão mínima de mergulho. Por exemplo, Kennel *et al.* (1992) [272] provaram que para dimensões de mergulho superiores à dimensão mínima de mergulho, as propriedades geométricas do atractor (invariantes topológicas) tornam-se independentes da dimensão de mergulho d_e.

pretende a determinação da dimensão de mergulho global apropriada ou o número adequado de coordenadas vectoriais, que permita destrinçar as órbitas sobrepostas decorrentes da reconstrução do atractor num espaço de mergulho de dimensão mais baixo, relativamente ao espaço de fase original (isto é, onde ocorrem as dinâmicas verdadeiras do sistema). Os autores referem que o método dos vizinhos falsos permite identificar o número de vizinhos próximos falsos, onde os pontos próximos ao longo da órbita do atractor parecem ser vizinhos verdadeiros num espaço de mergulho mais baixo, mas afastam-se rapidamente numa dimensão de mergulho superior. De facto, quando o número de vizinhos falsos cai para zero, devido ao aumento da dimensão de mergulho, as órbitas do atractor são destrinçadas no espaço fase, permitindo determinar a barreira da dimensão de mergulho apropriada para a reconstrução do atractor. Por conseguinte, inicia-se o mergulho da série temporal numa dimensão de mergulho unitária ($d_e = 1$), adicionando-se sucessivamente uma unidade de mergulho até ao valor em que as trajectórias não pareçam interceptar-se mais, pelo que os vizinhos falsos são eliminados (Abarbanel *et al.* (1993) [5]).

Na prática, suponha-se um mapa de mergulho tal como apresentado na Equação (2.28), em que o vector $\mathbf{y}_n$ representa as coordenadas do sistema dinâmico determinístico. Neste contexto, Kennel *et al.* (1992) [272] definiu os r vizinhos próximos de $\mathbf{y}_n$ por $\mathbf{y}_n^r$, para $n = 1, ..., N$, cujo quadrado da distância Euclidiana entre o ponto $\mathbf{y}_n$ e o seu vizinho próximo $\mathbf{y}_n^r$ é expresso por:

$$R_{d_e}^2(n,r) = \sum_{s=0}^{d_e-1} [y_{n+sT} - y_{n+sT}^r]^2 \tag{2.31}$$

onde a distância Euclidiana, $R_{d_e}(n,r)$, é baixa, quando N é grande ($N \longrightarrow \infty$). Isto é, conforme referido por Abarbanel *et al.* (1993) [5], a distância Euclidiana, $R_{d_e}(n,r)$, entre o ponto $\mathbf{y}_n$ e o ponto $\mathbf{y}_n^r$, para série escalar observada $\{y_n\}_{n=1}^N$, é sensivelmente de ordem

$\left(\frac{1}{\sqrt[d_e]{N}}\right)$.

De acordo com o exposto, para um mergulho de atraso temporal da série temporal em $\mathbb{R}^{d_e+1}$ (ou seja, para o acréscimo de uma unidade adicional na dimensão de mergulho: $d_e \longrightarrow d_{e+1}$) acresce uma nova coordenada vectorial no atractor, isto é, y_{n+d_eT}, pelo que a nova distância (quadrado da distância Euclidiana) entre $\mathbf{y}_n$ e o seu vizinho próximo $\mathbf{y}_n^r$ é apresentada por:

$$R^2_{d_e+1}(n,r) = R^2_{d_e}(n,r) + [y_{n+d_eT} - y^r_{n+d_eT}]^2 \tag{2.32}$$

Assim, se a nova distância Euclidiana, $R_{d_{e+1}}(n,r)$, entre os pontos vizinhos $\mathbf{y}_n$ e $\mathbf{y}_n^r$ é grande, então é muito provável que os pontos sejam vizinhos próximos falsos, devido à projecção inadequada do atractor, subjacente ao sistema dinâmico original, numa dimensão de mergulho mais baixa d_e. Com efeito, ao aumentarmos a dimensão de mergulho, com base numa unidade adicional de mergulho, os pontos $\mathbf{y}_n$ e $\mathbf{y}_n^r$ afastam-se de forma não-suave (rapidamente). Isto é, Kennel *et al.* (1992) [272] baseou-se no acréscimo da distância Euclidiana entre pontos vizinhos no atractor, quando $d_e \longrightarrow d_{e+1}$, como um critério natural de classificação de um vizinho falso, no qual se verifique a condição que se apresenta:

$$\left[\frac{R^2_{d_e+1}(n,r) - R^2_{d_e}(n,r)}{R^2_{d_e}(n,r)}\right]^{1/2} = \frac{\left|y_{n+d_eT} - y^r_{n+d_eT}\right|}{R_{d_e}(n,r)} > R_{tol} \tag{2.33}$$

em que R_{tol} (R *threshold*) constitui um determinado limite positivo[13] (no seu artigo, quando $R_{tol} \geq 10$ os vizinhos falsos são perfeitamente identificados), que depende da distribuição espacial de $\mathbf{y}_n$.

[13] A título de exemplo, Abarbanel (1996) [2] propõe $R_{tol} = 15$, para identificar os vizinhos falsos, numa ampla variedade de sistemas complexos. Em termos similares, Small (2005) [462] sugere $R_{tol} \in [10, 30]$, em que $R_{tol} = 15$, representa um bom ponto de partida para a identificação dos vizinhos falsos.

Em regra, se R_{tol} é muito baixo, constata-se que os vizinhos próximos verdadeiros da órbita do atractor são contados como falsos. Pelo contrário, quando R_{tol} é muito alto verifica-se que alguns vizinhos próximos falsos não são identificados.

Portanto, a escolha da barreira de mergulho apropriada corresponde ao valor mínimo da dimensão de mergulho, d_e, na qual a proporção de todos os pontos da órbita do sistema é inferior ao limite R_{tol} estipulado. Isto é, a dimensão da barreira de mergulho corresponde ao valor de mergulho no qual o número de vizinhos falsos cai para zero e o número de vizinhos próximos verdadeiros permanece constante. Espera-se assim que a proporção de pontos que satisfaça o critério dos vizinhos falsos (Equação (2.33)) decresça à medida que as órbitas são desdobradas em dimensões de mergulho mais altas[14].

Janela da Dimensão de Mergulho: Mergulho Não-Uniforme

Faz-se agora referência às técnicas de mergulho não-uniforme (global, ou local) propostos por Judd e Mees (1998) [263], com base no artigo seminal de Judd e Mees (1995) [261], para que seja possível escolher o "melhor" modelo. Ou seja, procura-se o modelo que apresente a melhor acuidade preditiva, no sentido da reconstrução "verdadeira" da evolução dinâmica não-linear do atractor Φ, num dado espaço de mergulho, a partir dos dados escalares originais. Neste contexto, Judd e Mees (1998) [263] propuseram a modelação dos dados, com base nos modelos pseudo-lineares, que incluem as funções lineares, tal como um modelo autoregressivo[15], ou as combinações lineares de funções

[14] No entanto, quando um sinal escalar apresenta um comportamento complexo e está contaminado com uma percentagem elevada de ruído, a dimensão de mergulho tende a ser muito alta, ou não-finita, pelo que é muito provável que a percentagem de vizinhos falsos não caia para zero para os diversos níveis de mergulho. Isto é, no limite estamos perante um processo estocástico, onde é necessário um espaço de dimensão infinita para destrinçar as órbitas do atractor. Por exemplo, Abarbanel (1996) [2] explicita que a determinação da barreira de mergulho numa série temporal caótica, através da aplicação do critério dos vizinhos falsos, degrada-se em função do ruído adicionado ao sistema, pelo que este critério não é apropriado nos sistemas dinâmicos meramente estocásticos.

[15] Por exemplo, o mergulho não-uniforme de um modelo linear autoregressivo *standard* em $\mathbb{R}^{d_w}$ é expresso por:

$$y_n = a_0 + a_{l_1} y_{n-l_1} + \cdots + a_{ld_e} y_{n-l_{d_e}} + e_n \tag{2.34}$$

em que $(l_1, ..., l_{d_e})$ é o vector de atraso, $l_{d_e} \leq d_w$ é o *lag* máximo de mergulho, d_w é a janela de mergulho deslizante na série temporal observada, e $e_n \sim IN(0, \sigma^2)$.

não-lineares (tal como os polinómios globais, as funções ortogonais, as funções de base radial, e as redes neuronais multicamadas, com uma camada intermédia), expressos num dado espaço de mergulho não-uniforme $\mathbb{R}^{d_w}$. Ou seja, a modelação dos dados escalares originais, com recurso aos modelos pseudo-lineares, permite a realização de mergulhos não-uniformes globais, ou locais, onde as janelas de mergulho variável, d_w, variam em função do estado do sistema complexo, com algum ruído aditivo.

Em particular, o processo de modelação dos dados originais, subjacente ao mergulho não-uniforme (global, ou local), permite a escolha de modelos, com recurso a uma aproximação ao critério do comprimento de descrição[16] mínimo (*minimum description lenght* (*MDL*)) de Rissanen ((1989) [421], citado por Judd e Mees (1995) [261]). Isto é, o critério do comprimento de descrição mínimo representa a compressão da precisão finita dos dados permitida pelos modelos (Small (2005) [462]). Na sua génese, o comprimento de descrição representa, essencialmente, o número de *bits* de informação requerido para descrever a série temporal original. Ou seja, o número de *bits* necessários para transmitir o modelo mais o número de *bits* para transmitir os erros do modelo. Donde, em termos aproximados, o comprimento de descrição dos dados escalares observados para um determinado modelo ajustado, corresponde ao produto de duas componentes, (número de dados) e (logaritmo do erro de predição quadrático médio), acrescido de uma terceira componente (penalidade/número de parâmetros).

O erro de predição do modelo diminui em função do número de parâmetros adicionados ao modelo, agravando-se, no entanto, o comprimento de descrição, nestas condições. Mais

[16] O comprimento de descrição (*description lenght* (*DL*)) corresponde a uma generalização do critério de informação de Akaike (1974) [14], *AIC(p)*, e do critério de informação de Schwarz (1978) [448], *SIC(p)*, aos modelos complexos. Por exemplo, o *SIC(p)* apresenta uma distribuição assimptótica ao comprimento de descrição de um modelo linear (Judd e Mees (1997) [262]).

ainda, o critério do *MDL*, com base nos modelos pseudo-lineares apresenta vantagens, tal como os modelos de regressão lineares, quando os processos de ruído dos modelos são Gaussianos e *iid*, e são gerados de modo aleatório (*variates*), permitindo a selecção óptima dos modelos, com a melhor acuidade preditiva (Judd e Mees (1995) [261]). Com efeito, os autores **minimizaram** os **erros de predição** dos **modelos pseudo-lineares**, com recurso aos **métodos de máxima verosimilhança**, que se **reduzem** aos **métodos OLS**, na **presença destas variates**. Logo, caso um modelo linear (que por definição pertence aos modelos pseudo-lineares) apresente o menor critério de *MDL* entre os diversos modelos pseudo-lineares propostos (que incluam os modelos não-lineares), então o modelo linear é preferido, porque se evitam ajustamentos complexos.

Por outro lado, os modelos não-lineares (que pertençam às classes dos modelos pseudo--lineares), tais como os modelos de função de base radial[17] (forma esférica) propostos por Powel (1992) [415], permitem a modelação precisa dos dados observados, através de uma gama extensa de formas funcionais (*basis functions*). Ademais, as generalizações dos modelos de base radial, tal como os modelos de base cilíndrica (forma cilíndrica), explicitados por Small e Judd (1998) [466], são representadas por modelos complexos, no sentido da permissão do mergulho variável, pelo que podem capturar melhor as dinâmicas dos sistemas, comparativamente ao método standard de mergulho uniforme e aos modelos de base radial (Judd et al. (2001) [265]).

Concretamente, a estratégia do mergulho não-uniforme local pretende a optimização do

[17] Apresenta-se agora uma breve descrição sobre o **modelo de função de base radial** apresentado por Small e Judd (1998b) [466]. Isto é, parta-se de uma série temporal discreta $y_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, ..., N$, mergulhada em $\mathbb{R}^{d_e}$, de acordo com o teorema de mergulho de Takens (1981) [490], na qual se pretende construir o melhor modelo, isto é:

$$y_{n+1} = f(\mathbf{y}_n) + \varepsilon_n \tag{2.35}$$

em que $f : \mathbb{R}^{d_e} \longrightarrow \mathbb{R}$, ε_n é o erro de predição do modelo (que pode ser modelado como um ruído branco Gaussiano aditivo, isto é, $\varepsilon_n \sim IN(0, \sigma^2)$), e $\mathbf{y}_n$ representa os vectores multivariados no espaço de mergulho d_e, isto é:

$$\mathbf{y}_n = (y_{n-\tau}, y_{n-2\tau}, ..., y_{n-d_e\tau}) \tag{2.36}$$

onde d_e é a dimensão de mergulho e τ é o atraso de tempo.

Assim, o modelo de função de base radial (*radial basis function* (RBF)) é expresso por:

$$f(\mathbf{y}_n) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_{n-l_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_{j+k+1} \phi \left(\frac{\|(\mathbf{y}_n - c_j)\|}{r_j} \right) \tag{2.37}$$

em que λ_i, $\lambda_j \in \mathbb{R}$ são os pesos, os *lags* l_i são inteiros definidos pela condição, $1 \leq l_i < l_{i+1} \leq d_e\tau$, $\phi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ são as funções de base de ordem j (por exemplo, as funções de base Gaussiana: e^{-s^2}, ou as *thin plate splines* $s^2 logs$, entre outras), $c_j \in \mathbb{R}^{d_e}$ são os centros (ou pontos) arbitrários da função de base ϕ de ordem j, e r_j são os raios (para $r_j > 0$).

Em síntese, o modelo de função de base radial apresentado pelo autor, corresponde a uma técnica computacional complexa de modelação não-linear, que utiliza o critério do comprimento de descrição mínimo de Rissanen (1989) [421], tal como proposto por Judd e Mees (1995) [261], no sentido da selecção dos parâmetros óptimos do modelo: λ_i, λ_j, c_j, e r_j.

mergulho com base num critério aproximado ao *MDL* de Rissanen (1989) [421], e é muito utilizada nos modelos complexos, tal como os modelos de base cilíndrica. Por exemplo, as funções de base (basis functions) de um modelo de base cilíndrica[18] estão apenas presentes em algumas coordenadas arbitrárias do espaço de mergulho não-uniforme $\mathbb{R}^{d_w}$. Por conseguinte, as funções de projecções ortogonais apresentadas na Equação (2.38), tal que $P_j : \mathbb{R}^{d_w} \longrightarrow \mathbb{R}^{d_{w_j}}$, permitem a realização de mergulhos não-uniformes locais no espaço de mergulho irregular. Ou seja, estas funções facultam a existência de diversas dimensões de mergulho em diferentes espaços locais do atractor (subconjuntos arbitrários), o que constitui uma vantagem significativa em termos da modelação dos sistemas não-lineares complexos (por exemplo, o atractor de Lorenz apresenta duas dimensões nas "asas" e três dimensões no centro, isto é, na separatriz). Ademais, as funções de base são, em regra, decrescentes (tal como as funções de base Gaussiana, e^{-s^2}, ou as *thin plate splines*, $s^2 logs$, entre outras, excepto as funções de base cúbica s^3), pelo que o modelo de base cilíndrica proporciona a localização do mergulho na vizinhança dos seus centros c_i (ver Equação (2.38)).

Agora, na linha dos trabalhos desenvolvidos por Rissanen (1989) [421] e por Judd e Mees (1995) [261], Small e Tse (2004) [474] propuseram uma nova forma de determinação

[18] O **modelo de base cilíndrica** proposto por Small e Judd (1998b) [466], é extensível ao espaço de mergulho irregular R^{d_w}, onde d_w é o lag máximo de mergulho ($d_w = d_e\tau$). Isto é, o modelo de base cilíndrica é expresso através da generalização da forma funcional do modelo de base radial (ver Equação (2.37)), isto é:

$$f(\mathbf{y}_n) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_{n-l_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_{j+k+1} \phi \left(\frac{\| P_j(\mathbf{y}_n - c_j) \|}{r_j} \right) \tag{2.38}$$

em que os parâmetros λ_i, λ_j, c_j, r_j devem ser escolhidos para ser não-nulos, de acordo com o critério do comprimento de descrição mínimo de Rissanen (1989) [421] (**problema de selecção do modelo**), e $P_j : \mathbb{R}^{d_w} \longrightarrow \mathbb{R}^{d_{w_j}}$, para $d_{w_j} < d_w$, são as funções das projecções ortogonais a partir de $\mathbb{R}^{d_w}$ sobre os subconjuntos arbitrários de coordenadas em $\mathbb{R}^{d_{w_j}}$.

do comprimento de descrição (*description lenght* (*DL*)) dos dados escalares originais. Isto é, os autores mostraram que o comprimento de descrição, $DL(\cdot)$, de uma série temporal escalar, $\{y_n\}_{n=1}^{N}$, com base num determinado modelo, aproxima-se a:

$$DL\left(\{y_n\}\right) \approx \frac{d}{2}\ln\left[\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}(y_i-\bar{y})^2\right]+\frac{N-d}{2}\ln\left[\frac{1}{N-d}\sum_{i=d+1}^{N}e_i^2\right]+ \tag{2.39}$$

$$+\frac{N}{2}(1+\ln 2\pi)+d+DL(d)+DL(\bar{y})+DL(P)$$

em que $d=max_i\left\{l_i\right\}=l_{d_e}\leq d_w$, $\bar{y}$ é a média dos dados originais, e_i^2 é o erro de predição do modelo, e $DL(P)$ é o comprimento de descrição dos parâmetros do modelo. Por outro lado, o comprimento de descrição do inteiro d é expresso por:

$$DL(d)=[\ln d]+[\ln[\ln d]+\cdots \tag{2.40}$$

onde o último termo na expansão é zero (Rissanen (1989) [421]). Isto é, conforme explicitado por Small e Tse (2004) [474], o comprimento de descrição de d ($DL(d)$) apresenta uma variação muito lenta comparativamente ao termo d. Mais ainda, os termos $\frac{N}{2}(1+\ln 2\pi)$ e $DL(\bar{y})$ são independentes da estratégia de mergulho, pelo que a estratégia de mergulho óptimo compreende a minimização de

$$\frac{d}{2}\ln\left[\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}(y_i-\bar{y})^2\right]+d+DL(d)+\frac{N-d}{2}\ln\left[\frac{1}{N-d}\sum_{i=d+1}^{N}e_i^2\right]+DL(P) \tag{2.41}$$

onde, os três primeiros termos são calculados directamente.

Para simplificar os cálculos na determinação de $DL(\cdot)$, os autores propuseram a utilização de uma classe de modelos de constante local[19] similar ao algoritmo dos sub-rogados

[19] Refira-se, no entanto, que as técnicas de modelação local não descrevem a evolução dos regimes complexos Φ.

pseudo-periódicos (SPP)[20] proposto por Small *et al.* (2001) [475]. Com efeito, os autores apresentaram algumas razões concretas para a escolha dos modelos de constante local[21] no atractor. Isto é, por um lado, os modelos são simples, o que significa que os erros estimados nestes modelos apresentam um bom comportamento num dado subespaço de mergulho resultante das projecções do atractor reconstruído no espaço de fase (subjacente ao teorema geométrico de mergulho). Por outro lado, o comprimento de descrição dos parâmetros do modelo é nulo ($DL(P) = 0$), porque esta classe de modelos não apresenta parâmetros explícitos (contrariamente aos modelos de base radial, modelos de redes neuronais, entre outros modelos complexos), excepto os parâmetros da estratégia de mergulho para que o mergulho seja óptimo.

Portanto, a minimização da Equação (2.41), com base no modelo de constante local proposto por Small e Tse (2004) [474] requer apenas a minimização do termo do erro de predição não-linear (EPNL) do modelo:

$$\frac{N-d}{2} \ln \left[\frac{1}{N-d} \sum_{i=d+1}^{N} e_i^2 \right], \tag{2.44}$$

porque este termo domina na Equação (2.41), ou seja, no limite $N \longrightarrow \infty$, pelo que

[20] Isto é, os sub-rogados não-lineares pseudo-periódicos (SPP) "seguem" aproximadamente o mesmo espaço vectorial da primeira coordenada escalar do atractor e estão contaminados com ruído dinâmico, ou seja, por um ruído *iid* normal e aleatório (passeio aleatório) na vizinhança da primeira coordenada do atractor.

[21] Os modelos de constante local no atractor correspondem à generalização de um mapa de mergulho usual $\mathbf{F}(\mathbf{y}_n)$ subjacente ao teorema geométrico de reconstrução do atractor, isto é:

$$\mathbf{y}_n \xrightarrow{\hat{\mathbf{F}}} (a_1 y_n, a_2 y_{n-1}, a_3 y_{n-3}, ..., a_d y_{n-d-1}) \tag{2.42}$$

em que n é o tempo, e o "melhor" mergulho visa a estimativa de $a = [a_1, a_2, a_3, ..., a_d]$ para $a_n \in \{0, 1\}$. O novo mapa generalizado $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{y}_n)$ é um subespaço do espaço fase, devido à projecção do mapa de mergulho $\mathbf{F}(\mathbf{y}_n)$ em a, isto é:

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{y}_n) = \Pr oj_a \mathbf{F}(\mathbf{y}_n) \tag{2.43}$$

em que o mergulho é agora definido em $a \in \{0, 1\}$. Pretende-se, deste modo, a escolha dos melhores parâmetros (a, d), onde a é uma sequência de d valores independentes (zeros ou uns), tal que $DL(a) = d$ e $DL(d)$ é calculado com base na Equação (2.40).

$N >> d$. Em particular, o erro de predição não-linear do modelo de constante local é expresso por:

$$\frac{1}{N-d}\sum_{i=d+1}^{N} e_i^2 \tag{2.45}$$

e é calculado pelo método de interpolação "*drop-one-out*", isto é:

$$e_{i+1} = y_{i+1} - y_{j+1} \tag{2.46}$$

em que $j \in \{1, 2, ..., N\} \setminus \{i\}$ é tal que $\|y_i - y_j\|$ é minimizada. Isto é, equivale à diferença entre o sucessor do ponto (sucessor de $y_i : y_{i+1}$) e o sucessor do seu vizinho mais próximo (y_{j+1}). Logo, a minimização do termo do erro de predição do modelo implica a minimização do comprimento de descrição da série escalar original $DL(\cdot)$ (ver Equação (2.39)).

Resumindo, o mergulho é optimizado quando a janela de mergulho óptima, d_w, equivale ao valor de d que minimiza $DL(\cdot)$, em que $d_w(d_w := d)$ depende do comprimento da série escalar observada e da quantidade de ruído adicional. Por outro lado, a utilização dos modelos de constante local no atractor pretende evitar os vizinhos falsos, no sentido da exclusão dos pontos que são maus preditores. Isto é, a janela de mergulho óptima, d_w, visa os vizinhos não-falsos (verdadeiros) como os melhores preditores a encontrar e tende a apresentar uma dimensão de mergulho menor, comparativamente ao método dos vizinhos próximos falsos (desdobramento topológico), onde os dados estão dispersos numa dimensão de mergulho suficiente.

2.4.4 Medidas Dinâmicas e Invariantes Topológicas nas Séries Temporais Complexas

Pretende-se agora explicitar os agrupamentos mais comuns das invariantes dinâmicas que caracterizam os prováveis sistemas não-lineares determinísticos. Por exemplo, o determinismo numa série temporal pode ser equacionado como a capacidade de predizer o futuro a partir das observações no passado, com base no erro de predição de curto prazo. Noutro exemplo característico, o expoente máximo de Lyapunov ou a taxa média de divergência das trajectórias próximas nos estados iniciais representam medidas invariantes que nos permitem distinguir com clareza um regime não-periódico (aperiódico) instável (caos possível) de um regime periódico estável (ciclo). Com efeito, apenas as **dinâmicas caóticas**, com algum ruído aditivo, são intrinsecamente **não-lineares**, **determinísticas**, **limitadas** e **aperiódicas**. É neste contexto que os físicos e matemáticos têm vindo a focar o seu interesse propondo diversos métodos de estimação das características físicas invariantes, que possam indicar a existência de moções caóticas subjacentes às séries temporais complexas.

Dimensão de Correlação

Um dos testes mais conhecidos sobre o caos compreende a estimação da dimensão de correlação do atractor d_c, a partir de uma série temporal escalar observada $y_n, n = 1, ..., N$. Como é do conhecimento, o algoritmo seminal proposto por Grassberger e Procaccia (1983) [211] compreende as estimativas do integral de correlação, onde a lei de potência é utilizada para estimar a dimensão de correlação de uma série temporal (dimensão do atractor d_A, para dimensões altas de mergulho). De facto, a dimensão de correlação é uma medida muito útil acerca da complexidade de um sistema, pelo que os sistemas dinâmicos

determinísticos tendem a apresentar menores dimensões de correlação, em relação aos sistemas dinâmicos estocásticos.

Estimativa da Dimensão de Correlação: Método Convencional

O método convencional apresentado por Schouten *et al.* (1994) [444], a partir do trabalho desenvolvido por Grassberger e Procaccia (1983) [211], visa a estimativa da dimensão de correlação do atractor d_c, a partir de uma série temporal supostamente caótica. Parta-se assim da equação do integral de correlação, com base na soma de correlação, $C(\varepsilon, d_e)$, quando $N \longrightarrow \infty$, isto é:

$$C(\varepsilon, d_e) = \frac{2}{N'(N'-1)} \sum_{i=1}^{N'} \sum_{j=1; i \neq j}^{N'} \Theta(\varepsilon - \|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\|), \tag{2.47}$$

para

$$N' = N + (d_e - 1)\tau, \tag{2.48}$$

em que $\|\cdot\|$ representa uma norma Euclidiana particular para o par de vectores ($\mathbf{y}_i$, $\mathbf{y}_j$) em $\mathbb{R}^{d_e \tau}$. Isto é, $\Theta(z)$ é a função escada, ou seja, $\Theta(z) = 0$, se $z \leq 0$, e $\Theta(z) = 1$, quando $z > 0$, pelo que a soma na Equação (2.47) conta apenas os pares de pontos ($\mathbf{y}_i$, $\mathbf{y}_j$) cuja distância é menor do que ε, tal que a distância normalizada entre os pares de pontos $\mathbf{y}_i = \left\{y_i, y_{i+1}, ..., y_{i+(d_e-1)\tau}\right\}$ e $\mathbf{y}_j = \left\{y_j, y_{j+1}, ..., y_{j+(d_e-1)\tau}\right\}$ no espaço de fase, é maximizada, isto é:

$$d(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j) := \max_{0 \leq s \leq d_e - 1} \|y_{i+s} - y_{j+s}\| = \max_{0 \leq s \leq d_e - 1} |y_{i+s} - y_{j+s}| \tag{2.49}$$

Agora, quando ε é muito pequeno, constata-se que $\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j > \varepsilon$, para todos os pares de pontos no atractor, pelo que $\Theta(z) = 0$, $C(\varepsilon, d_e) = 0$. Pelo contrário, $C(\varepsilon, d_e) = 1$. Em geral, um valor de ε não muito pequeno, ou muito grande, é válido para $0 \leq C(\varepsilon, d_e) \leq 1$.

Neste contexto, Cowper (2000) [113], com base no artigo de Schouten *et al.* (1994) [444], apresentou os passos necessários para obter uma estimativa da dimensão de correlação, a partir do integral de correlação, pelo método convencional, isto é:

1. Escolha de um valor de partida, por exemplo, 1, para d_e nos vectores $\mathbf{y}_i$ e $\mathbf{y}_j$.

2. Cálculo do integral de correlação, $C(\varepsilon, d_e)$, para todos os pares de amostras de pontos N, com base na Equação (2.47), quando $N \longrightarrow \infty$.

3. Estimativa da dimensão de correlação com recurso à equação apresentada:

$$d_c = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{\log_{10}(C(\varepsilon, d_e))}{\log_{10}(\varepsilon)} \tag{2.50}$$

em que esta é válida para valores diminutos de ε (isto é, na região de escala). Por conseguinte, a lei de potência na região de escala é expressa por:

$$C(\varepsilon, d_e) \simeq \varepsilon^{d_c} \tag{2.51}$$

onde d_c é a dimensão de correlação. Ou seja, a dimensão de correlação, d_c, é estimada na região de escala com recurso ao ajustamento de uma linha recta, pelo método dos mínimos quadrados, de $\log_{10}(C(\varepsilon, d_e))$ *vs* $\log_{10}(\varepsilon)$. Acrescente-se que a região de escala está incluída no intervalo $[0, \varepsilon_0]$, em que ε_0 corresponde à distância máxima de escala. Por outro lado, a região de saturação corresponde à região $\varepsilon > \varepsilon_0$, em que a lei de potência apresentada na Equação (2.51) não é exequível, ou seja, $C(\varepsilon, d_e) \longrightarrow 1$, logo $d_c \longrightarrow 0$.

4. Repetição dos passos **2** e **3** para sucessivas dimensões de mergulho, d_e, e estimativa da dimensão de correlação, d_c, para cada dimensão de mergulho d_e.

5. A partir dos resultados obtidos no passo **4**, traça-se d_c *vs* d_e, com base num gráfico de linhas. Agora, quando as estimativas de d_c convergem para dimensões crescentes de mergulho, d_e, o valor de convergência de d_c define a estimativa da dimensão (de correlação)

do atractor d_A, subjacente ao sistema não-linear determinístico, responsável pela geração da série temporal escalar original.

Na prática, presume-se a existência de um atractor, quando se observa um *plateau* (aplanamento das linhas) entre os pontos relativos às variáveis $\log_{10} C(\varepsilon, d_e)$ e $\log_{10}(\varepsilon)$, na região de escala. Tal como referido por Blanco *et al.* (1997) [54], o *plateau* prova a existência de uma região de escala auto-similar para um determinado valor de d_e e a convergência dos declives decorrentes dos ajustamentos lineares entre estas últimas variáveis, para dimensões de mergulho crescentes, sugere a reconstrução de um atractor único topológico.

Estimativa da Dimensão de Correlação: Um Método de Máxima Verosimilhança

A aproximação convencional para a estimativa da dimensão de correlação não contempla a presença de ruído aditivo (ruído observacional e/ou dinâmico) na série temporal observada. Ou seja, o ruído induz um aumento nas distâncias entre os pontos $(\mathbf{y}_i,\ \mathbf{y}_j)$ no atractor (ver Equação (2.47)), pelo que a lei de potência deixa de assegurar uma boa representação nas correlações entre os pontos (isto é, o gráfico *log-log* não apresenta partes lineares em toda a escala).

No entanto, Schouten *et al.* (1994) [444], propuseram a estimativa da dimensão de correlação, d_c, com base num estimador de máxima verosimilhança, quando o atractor está contaminado com algum ruído aditivo (mas estritamente limitado em amplitude). Daí, a necessidade da utilização de uma distância de escala máxima entre os pontos no atractor corrompido pelo ruído. Isto é, o estimador de máxima verosimilhança permite a normalização das distâncias entre os pontos, tal como apresentado na Equação (2.49).

Na prática, os autores supuseram a existência de uma trajectória que satisfaz as dinâmicas verdadeiras do sistema caótico original, e que está suficientemente próxima da trajectória original (quantificável em termos da dimensão de correlação), mas que está agora corrompida pelo ruído aditivo. Por fim, tal como no método convencional, ajusta-se um gráfico linear de $\log_{10}(C(\varepsilon, d_e))$ *vs* $\log_{10}(\varepsilon)$, com base no método de máxima verosimilhança, proposto pelos autores para estimar a dimensão de correlação[22] d_c.

Estimativa da Dimensão de Correlação de uma Série Temporal: Aproximação ao Método de Contagem de Caixas

A dimensão topológica de um atractor descreve a forma geométrica através da qual o atractor se distribui no espaço de fase. A dimensão topológica[23] é expressa como o quociente entre o volume V e o parâmetro de comprimento característico L, isto é:

$$D_T = \frac{\ln V}{\ln L} \tag{2.52}$$

A forma mais simples de medir a dimensão de um conjunto a partir desta definição, consiste em medir a capacidade de Kolgomorov (ou a dimensão de contagem de caixas[24] (*box-counting*)). Com efeito, para calcular a dimensão de contagem de caixas D, torna-se necessário proceder na partição do espaço de fase com base num dado comprimento característico ε, seguindo-se a estimativa da dimensão D, através do seguinte limite:

$$D = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{\ln(M(\varepsilon))}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \tag{2.53}$$

[22] O método de máxima verosimilhança proposto por Schouten *et al.* (1994) [444] para a estimativa da dimensão de correlação, d_c, apresenta vantagem, comparativamente ao método convencional, porque é apenas necessário um valor alto da dimensão de mergulho (em norma, os autores recomendam $d_e \geq 50$).

[23] Recorde-se que a dimensão topológica, D_T, é um inteiro entre 0 e N.

[24] Para proceder à estimativa da dimensão de contagem de caixas, um conjunto é preenchido com células de pequena dimensão (quadrados para conjuntos mergulhados em duas dimensões, cubos para conjuntos mergulhados em três dimensões, e hipercubos para conjuntos mergulhados em dimensões superiores a três) de tamanho ε.

em que $M(\varepsilon)$ é o número de células de tamanho ε que contêm os pontos do atractor $\{\mathbf{y}_i\}_{i=1}^{N}$. Por exemplo, na geometria Euclidiana, para N pontos isolados, $M(\varepsilon) = N$ e $D = 0$, para uma linha recta de comprimento L, $M(\varepsilon) = \frac{L}{\varepsilon}$ e $D = 1$, para uma região plana de área A, $M(\varepsilon) = \frac{A}{\varepsilon^2}$ e $D = 2$. Na prática não é possível obter o limite de ε, pelo que a dimensão D é estimada com base no declive da linha recta definida pela função $\ln(M(\varepsilon))$ *vs* a escala $\ln(\frac{1}{\varepsilon})$. Donde, a dimensão em estudo pode ser uma dimensão fractal D, isto é, um valor inteiro, ou fraccionário entre 0 e N, em que as dimensões satisfazem a desigualdade $D \geq D_T$. Note-se ainda que para todas as figuras Euclidianas a dimensão topológica e a dimensão fractal coincidem: $D_T = D$.

Analogamente, Hentschel e Procaccia ((1983) [236], citado por Henry et al. (2001)[235]) definiram o espectro de dimensão (ou a hierarquia de dimensões fractais generalizadas), isto é:

$$D_q = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^q}{\ln \varepsilon}, \quad q = 0, 1, 2, ... \tag{2.54}$$

em que

$$p_i = \frac{N_i}{N}, \tag{2.55}$$

é a probabilidade de encontrar um ponto do conjunto na célula i, onde N é o número total de pontos no conjunto e N_i é o número de pontos do conjunto na célula i. Por outro lado, o espectro de dimensão proporciona um conjunto de medidas de dimensão fractal com correlações de ordem mais elevada, quando q aumenta. Por exemplo, para $q = 3, 4, ..., n$, $n \in \mathbb{N}$, obtêm-se dimensões generalizadas, que estão conectadas com os integrais de correlação de triplos, de quádruplos, e de n-tuplos (n-vectores dimensionais) de pontos no atractor. Mais ainda, Hentschel e Procaccia (1983) [236] provaram matematicamente

que $D_q > D_{q^*}$ para qualquer $q^* > q$, e $D_q = D_{q^*}$ se o fractal é homogéneo (fractal aleatório[25]). Quando $q = 0$ na Equação (2.54), D_q é a dimensão de contagem de caixas, denominada por D_0. Para $q = 1$, obtém-se a dimensão de informação, isto é:

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i \ln p_i}{\ln \varepsilon}, \tag{2.56}$$

que está relacionada com a quantidade de informação necessária para reconstruir o atractor com a precisão ε. Quando $q = 2$, estima-se a dimensão (de correlação) do atractor D_2, ou seja:

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{\ln(C(\varepsilon))}{\ln(\varepsilon)}, \tag{2.57}$$

em que

$$C(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^2 \tag{2.58}$$

é a soma de correlação. No limite, para $N \longrightarrow \infty$, $C(\varepsilon)$ é a probabilidade de dois pontos do conjunto estarem na mesma célula.

Recentemente, Iseri *et al.* (2008)[250] propuseram a estimativa da dimensão de correlação através da medição do comprimento de uma curva "suavizada" (aproximação poligonal) no espaço de fase em $\mathbb{R}^{d_e \tau}$, isto é, a dimensão de correlação D_2 é definida por:

$$D_2 = \left| \frac{\log_{10}(C(\varepsilon, d_e))}{\log_{10}(\varepsilon)} \right| = \left| \frac{\ln(C(\varepsilon, d_e))}{\ln(\varepsilon)} \right| \tag{2.59}$$

em que $C(\varepsilon, d_e)$ é a soma de correlação. Neste contexto, a dimensão de mergulho d_e é sucessivamente aumentada até ao valor de saturação de mergulho d_{e_c}, ou seja, quando $d_e > d_{e_c}$, D_2 permanece constante e é expressa por:

$$D_2(d_{e_c}) = D_2(d_{e_c} + 1) = D_2(d_{e_c} + 2)... \tag{2.60}$$

[25] Um fractal é aleatório (não-fraccional em dimensão) quando o volume da estrutura (massa) do conjunto no espaço de fase é distribuído uniformemente para cada dimensão de mergulho.

em que $D_2 = D_2(d_{e_c})$. Ou seja, $D_2(d_{e_c})$ corresponde à estimativa da dimensão fractal do atractor. Se d_{e_c} não existe, $D_2(d_{e_c}) \to \infty$, logo não existe um atractor estranho. No caso contrário, se $D_2(d_{e_c})$ existe e é fraccionário, a série temporal observada enquadra-se nos processos não-lineares determinísticos (sistemas dinâmicos caóticos possíveis[26]). Quando a dimensão de correlação, D_2, apresenta um valor muito grande, torna-se muito difícil estimar esta invariante[27].

Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov pertencem à classe das invariantes dinâmicas que estão associadas com a evolução das trajectórias no espaço de fase. Um expoente de Lyapunov finito e positivo espelha uma série temporal não-linear determinística e muito provavelmente um sistema instável (caótico[28]). Pelo contrário, um expoente de Lyapunov infinito descreve uma série temporal estocástica. Se nenhum dos expoentes de Lyapunov é, em regra, nulo, é provável que o sistema observado possa ser definido por uma série temporal escalar. Se os expoentes de Lyapunov são todos nulos ou negativos, as trajectórias não divergem, pelo que estamos perante um sistema estável (não-caótico). A ocorrência de expoentes de Lyapunov positivos sugere a ocorrência de caos no sistema, e se a soma de todos os

[26] Por exemplo, Iseri *et al.* (2008) [250] calcularam a dimensão de correlação, D_2, do índice diário agregado das acções da Bolsa de Valores de Istambul, na escala logarítmica, para o período de Julho de 1987 a Janeiro de 2006 ($N = 4606$). Com efeito, os autores estimaram por métodos computacionais o declive ($D_2 \in [0.14, 0.16]$) de cada linha recta, através da Equação (2.59) para as sucessivas dimensões de mergulho, pelo método de regressão linear simples. Ou seja, a dimensão do atractor tornou-se gradualmente constante quando $D_2(d_{e_c}) = 0.15$, para valores crescentes de d_e até ao valor máximo da dimensão de mergulho ($d_{e_c} = 100$). Logo, os autores admitiram a existência de atractores estranhos, porque o valor calculado de $D_2(d_{e_c})$ é um valor fraccional pequeno.

[27] **A menos que existam pelo menos $10^{\left(\frac{D_2}{2}\right)}$ pontos para calcular a dimensão de correlação com acuidade.**

[28] No entanto, Poon *et al.* (2010) [414] mostraram que em experimentações de séries temporais "reais"com dimensões reduzidas, corrompidas pelo ruído observacional, ou perturbadas de forma não-autónoma (tal como um sistema não-linear, não-caótico, conduzido por *inputs* determinísticos (caos determinístico não-autónomo) ou por *inputs* estocásticos), a estimativa de um expoente de Lyapunov positivo, por si só, não é uma prova suficiente para o caos.

expoentes é negativa, as dinâmicas do sistema observado são dissipativas, pelo que se assegura a existência de um atractor estranho limitado. O expoente máximo de Lyapunov é inversamente proporcional ao horizonte de previsão de uma série temporal caótica. Ou seja, as séries temporais caóticas não são previsíveis no longo prazo.

O método seminal de estimação do expoente de Lyapunov maximal deve-se ao matemático russo Osedelec (1968) [388], em que é utilizado o conceito da distância Euclidiana para medir a taxa de divergência entre trajectórias a partir do estado inicial ($n = 0$). Suponha-se assim um mapa de tempo discreto (notação vectorial) $\vec{F} : Y \subset \mathbb{R}^{d_e} \longrightarrow Y$, que define um sistema complexo, em que a trajectória de referência $\vec{y}_0(n)$ atravessa $\vec{y}_0(0)$ no tempo inicial $n = 0$ e analogamente outra trajectória $\vec{y}_1(n)$ atravessa $\vec{y}_1(0)$ no tempo $n = 0$. Osedelec ((1968) [388], citado por Henry *et al.* (2001)[235]) propôs, deste modo, o cálculo do expoente máximo de Lyapunov, $\lambda(\vec{y}_0)$, expresso em função da trajectória de referência $\vec{y}_0$, isto é:

$$\lambda(\vec{y}_0) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \lim_{\|\Delta\vec{y}(0)\| \longrightarrow 0} \frac{1}{n} \ln \frac{\|\Delta\vec{y}(n)\|}{\|\Delta\vec{y}(0)\|} \tag{2.61}$$

em que $\|\Delta\vec{y}(0)\|$ é a distância Euclidiana entre as trajectórias próximas $\vec{y}_0(0)$ e $\vec{y}_1(0)$ no tempo inicial $n = 0$ e $\|\Delta\vec{y}(n)\|$ é a distância Euclidiana entre as trajectórias $\vec{y}_0(n)$ e $\vec{y}_1(n)$ no tempo posterior n. Logo, se existe um expoente de Lyapunov positivo, verifica-se dependência sensível às condições iniciais, isto é:

$$\|\Delta\vec{y}(n)\| \approx \|\Delta\vec{y}(0)\| \, e^{\lambda n} \tag{2.62}$$

em que um λ positivo descreve a taxa assintótica de separação entre trajectórias próximas iniciais, e o sistema dinâmico complexo em $\mathbb{R}^{d_e}$ está conectado com d_e expoentes de

Lyapunov, isto é:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{d_e}, \tag{2.63}$$

onde λ_1 é o expoente de Lyapunov máximo.

Em séries temporais existem dois tipos de métodos para calcular os expoentes de Lyapunov. No primeiro tipo de métodos estão incluídos os algoritmos de estimação da matriz Jacobiana (vejam-se os trabalhos de Eckmann e Ruelle (1985) [141], Wolfe *et al.* (1985) [527], Sano e Sawada (1985) [437], Eckmann *et al.* (1986) [140]), que permitem calcular o espectro inteiro de Lyapunov. No entanto, estes métodos são muito sensíveis ao ruído, pelo que não são recomendados quando o ruído é grande. No segundo tipo de métodos, estão incluídos os algoritmos do expoente máximo de Lyapunov tal como proposto por Rosenstein *et al.* ((1993)[425], citado por Mendes e Isfan (2003)[352]). Por conseguinte, para o cálculo do expoente de Lyapunov maximal prossegue-se na apresentação do método proposto por estes últimos autores. Isto é, mesmo que um sistema dinâmico determinístico apresente d_e expoentes de Lyapunov (ver Equação (2.63)), na maioria das aplicações é suficiente calcular λ_1. Suponha-se agora uma série temporal medida no tempo discreto, a partir de um tempo inicial i_0, com um intervalo de tempo uniforme Δt (período de amostragem). Deste modo, y_i é o conjunto de N medições $y(i_0 + i\Delta t), i = 1, 2, ..., N$. Por conseguinte, para a reconstrução das dinâmicas do atractor, utiliza-se o método dos atrasos de tempo, pelo que a trajectória reconstruída, $\mathbf{Y}$, pode ser expressa por uma matriz, em que cada linha é um vector do espaço de fase,

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, ..., \mathbf{Y}_{N^*})^T, \tag{2.64}$$

e $\mathbf{Y}_i$ é o estado do sistema no tempo discreto i. Ou seja, para uma sequência de dados

discretos, $\{y_1, y_2, ..., y_N\}$, cada $\mathbf{Y}_i$ é expresso por:

$$\mathbf{Y}_i = (y_i, y_{i+T}, ..., y_{i+(d_e-1)T}) \tag{2.65}$$

em que T é o atraso de tempo e d_e é a dimensão de mergulho. Por conseguinte, $\mathbf{Y}$ é uma matriz de dimensão $(N^* \times d_e)$, e as constantes d_e, N^*, T, e N estão relacionadas na equação apresentada:

$$N^* = N - (d_e - 1)T \tag{2.66}$$

em que d_e é usualmente estimada de acordo com o teorema de Takens, ou seja, $d_e > 2d_A$ (em que $d_A = D_2$ é a dimensão (de correlação) do atractor e d_e é dimensão de mergulho suficiente para destrinçar as órbitas do atractor no espaço de fase[29]). Posteriormente à reconstrução do atractor no espaço de fase para um valor apropriado da dimensão de mergulho, d_e, o algoritmo numérico localiza o vizinho mais próximo de cada ponto na trajectória (órbita) do atractor reconstruído. Ou seja, o vizinho mais próximo, $\mathbf{Y}_{\hat{j}}$, é localizado no ponto que minimiza a distância Euclidiana ao ponto de referência, $\mathbf{Y}_j$, isto é:

$$d_j(0) = \min_{\mathbf{Y}_{\hat{j}}} \|\mathbf{Y}_j - \mathbf{Y}_{\hat{j}}\| \tag{2.67}$$

em que $d_j(0)$ é a distância Euclidiana inicial (no instante inicial i_0) do ponto j de referência na trajectória ao seu vizinho mais próximo.

Com efeito, a aproximação de Rosenstein *et al.* (1993)[425] baseia-se no trabalho desenvolvido por Sato *et al.* (1987) [439], em que a estimativa de λ_1 é expressa por:

$$\lambda_1(i) = \frac{1}{i\Delta t} \frac{1}{(N^* - i)} \sum_{j=1}^{N^*-i} \ln \frac{d_j(i)}{d_j(0)}, \tag{2.68}$$

[29] O algoritmo proposto pelos autores apresenta ainda bons resultados, quando a dimensão de mergulho se encontra abaixo da dimensão definida no critério de Takens.

onde Δt é o período de amostragem da série temporal e $d_j(i)$ é a distância entre os j pares de vizinhos próximos após i passos de tempo discretos, isto é, $i\Delta t$ (expressa, por exemplo, em segundos).

Suponha-se agora que o expoente máximo de Lyapunov λ_1 é estimado aproximadamente como a taxa média de separação dos j pares de vizinhos mais próximos após i passos de tempo discretos $i\Delta t$, isto é:

$$d_j(i) \approx C_j e^{\lambda_1(i\Delta t)}, \tag{2.69}$$

em que C_j é a separação inicial. Procedendo-se à transformação logarítmica nos dois lados da Equação (2.69), obtém-se a equação:

$$\ln d_j(i) \approx \ln C_j + \lambda_1(i\Delta t), \tag{2.70}$$

onde a Equação (2.70) expressa um conjunto de linhas paralelas aproximadamente (para $j = 1, ..., N^*$), e cada linha apresenta sensivelmente um declive proporcional a λ_1. Na prática, o expoente máximo de Lyapunov, λ_1, é facilmente estimado com acuidade, por meio de um ajustamento linear de mínimos quadrados ordinários à linha "média" (igualmente proporcional a λ_1), isto é:

$$x(i) = \frac{1}{\Delta t} \langle \ln d_j(i) \rangle , \tag{2.71}$$

em que $\langle \cdot \rangle$ representa a média para todos os valores de j. Portanto, este processo de ponderação (valor médio estimado de separação entre os j pares de pontos vizinhos no atractor, após i passos de tempo discretos ($i\Delta t$)) é a chave de cálculo dos valores de λ_1, com acuidade, para as séries temporais escalares curtas e com ruído.

Erros de Predição Não-Lineares / Expoentes de Lyapunov

Suponha-se que uma série temporal $\{y_n\}_{n=1}^{N}$ escalar possa ser modelada por um modelo de constante local no atractor. Neste contexto, os melhores pontos preditores são os pontos vizinhos mais próximos, pelo que a "melhor" predição de um modelo de constante local do ponto y_{n+1} é o seu vizinho y_{m+1}, tal que $\|y_n - y_m\|$ é mínima. Assim, o **erro** de **predição não-linear local** no **passo** de **tempo** t pode ser expresso por (Small (2005) [462]):

$$E(t) = \sqrt{\left(\frac{1}{N-t}\right)\sum_{n=1}^{N-t}(y_{n+t} - y_{m_n+t})^2} \tag{2.72}$$

onde $m_n = \arg \min_{\substack{1 \leq m_n \leq N-t \\ m_n \neq n}} \|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_{m_n}\|$. Ou seja, $\mathbf{y}_{m_n}$ é o vizinho mais próximo de $\mathbf{y}_n$ e $(y_{n+t} - y_{m_n+t})$ mede a separação entre os pontos vizinhos no passo t. Para estimar $E(t)$ com acuidade, o sistema dinâmico determinístico deve ser estacionário, a série temporal observada deve ser "limpa" de erros observacionais, e o valor de N deve ser suficientemente grande. Em norma, os expoentes de Lyapunov e os erros de predição não-lineares locais são medidas de invariantes distintas, mas quando são estimadas a partir de séries temporais de dados escalares são indistinguíveis (Small (2005) [462]).

2.5 Averiguação de Não-Linearidade e de Determinismo nas Séries Financeiras Observadas

A principal dificuldade que surge no estudo das séries temporais dos mercados financeiros provenientes de observações empíricas, resulta do facto de toda a informação disponível ser representada por sequências de dados discretos, sem qualquer referência às equações lineares/não-lineares determinísticas/estocásticas originais. Esta dificuldade foi parcialmente superada devido à ideia original de Ruelle (1979) [428], no final da década de 70, de utilizar coordenadas de atraso de tempo para reconstruir o espaço de fase a partir dos dados

originais. Tal como referido, Takens (1981) [490] provou com base no teorema proposto, que a variável observada e qualquer conjunto com d_{e-1} variáveis construídas a partir da sequência de dados escalares originais, $y_n, n = 1, ..., N$, constituem as coordenadas de atraso de tempo adequadas no espaço de fase. Nesta secção, pretendemos averiguar se existe alguma evidência de existência de atractores estranhos nas séries temporais de preços das *commodities* (licenças de carbono, petróleo bruto, gás natural, e carvão) e das *utilities* (*Acciona*, *Gamesa*, *Nordex*, *Repower*, *Siemens* e *Vestas*), na escala não-logarítmica. Na procura de não-linearidade e de determinismo, para cada série financeira observada, propomos agora um novo método misto de determinação da dimensão de mergulho, com uma certa acuidade. O método proposto resulta de dois métodos distintos para a estimativa da dimensão óptima de mergulho, que permita minimizar os erros de predição não-lineares do modelo de constante local ajustado ao sinal observado, em cada passo iterativo (Small e Tse (2004) [474]). Ou seja, numa primeira etapa, estimam-se os erros de predição não-lineares (EPNL) locais, com base na Equação (2.45), para dimensões sucessivas de mergulho com início em $d_e = 1$, até à dimensão máxima de mergulho d_e^{max}, onde se obtém um valor mínimo local do EPNL. Seguidamente, constrói-se o índice dos EPNL, subjacente a cada modelo de constante local ajustado ao sinal, com base na dimensão máxima de mergulho estimada d_e^{max}. Numa segunda etapa, estimam-se as dimensões fractais D (pontos de

saturação fractal), com recurso ao estimador de máxima verosimilhança[30] de D, proposto por Takens (1985) [491] (em que $D := D_2$), para dimensões sucessivas de mergulho. Por fim, procede-se na selecção óptima das séries temporais observadas (para $d_e < 10$), com recurso ao método misto proposto. Ou seja, para um índice dos EPNL $\leq 20\%$, e para um dado valor de saturação da dimensão fractal, tal que o inteiro de $D+1 \leq 9$, em que é muito provável que o sistema não-linear determinístico seja caótico (com ruído reduzido) para $d_e < 5$, ou seja extremamente complexo (caótico com ruído adicional) para $5 \leq d_e < 10$.

Agora, para estimar o valor do atraso de tempo T (isto é, para uma autocorrelação amostral[31] nula, ou para o primeiro mínimo local da informação mútua), o índice dos erros de predição não-lineares (EPNL) para d_e^{max}, os valores das dimensões fractais D para dimensões crescentes de mergulho, o valor da dimensão mínima de mergulho ajustada (tal que $d_e^{\min} > D + 1$, no mínimo), e outros valores, tais como a dimensão de correlação D_2

[30] De acordo com Theiler ((1988) [494], citado por Kantz e Schreiber (2005) [269]) e com Theiler (1990) [495], o estimador de máxima verosimilhança da dimensão fractal $D(\varepsilon_0)$ (tal que: $D(\varepsilon_0) = D_2 = D$) proposto por Takens (1985) [491], é expresso por:

$$D(\varepsilon_0) = \frac{C(\varepsilon_0, d_e)}{\int_0^{\varepsilon_0} [C(\varepsilon_0, d_e)/\varepsilon] d\varepsilon} \tag{2.73}$$

onde ε_0 é o limite superior da escala. Para a estimativa da soma de correlação devem ser excluídos os pares de pontos próximos, isto é:

$$C(\varepsilon_0, d_e) = \frac{2}{(N - n_{\min})(N - n_{\min} - 1)} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1+i+n_{\min}}^{N} \Theta(\varepsilon - \|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\|), \tag{2.74}$$

em que $n_{\min}$, t_{min} e Δt estão relacionadas com base na equação que se apresenta:

$$t_{min} = n_{\min} \Delta t, \tag{2.75}$$

onde Δt é o tempo de amostragem da série temporal escalar e $n_{\min}$ é o número mínimo de passos de tempo discretos para que a soma de correlação expressa na Equação (2.74) possa ser estimada após a decorrência de um tempo mínimo de correlação (t_{min}) entre os pares de pontos.

[31] O conceito de autocorrelação amostral definido por Small (2005)[462] é idêntico à função de autocorrelação linear.

(método de aproximação à contagem de caixas), ou o expoente máximo de Lyapunov λ_1 (estimativa do erro de predição), para cada série temporal de preços dos activos observados, utilizaram-se as aplicações informáticas de Small (2005) [462] (disponíveis em Small (2006) [463]) e o pacote TSTOOL 1.2, para o *software* MATLAB (R2009a).

2.6 Modelos Complexos: Comentários e Resultados

2.6.1 Atrasos de Tempo: Função de Autocorrelação Amostral

As estimativas dos valores de atrasos de tempo T (*embedding lags*) nas séries temporais de preços das *commodities* e das *utilities* observadas, quando as funções de autocorrelações lineares se anulam (ou seja, $\rho(T) \leq 0 \Longrightarrow \tau = T$), podem não ser adequadas nas escolhas de T, porque, em princípio, não reflectem as correlações não-lineares entre as coordenadas vectoriais. No entanto, os métodos de estimação dos atrasos de tempo, com base na função de autocorrelação linear são ainda bastante utilizadas por alguns autores (nomeadamente, Small (2005) [462], Shelhamer (2007) [457], Feng e Tse (2008) [173], entre outros). Por outro lado, Henry *et al.* (2001) [235] referem que a função de autocorrelação linear funciona como uma ferramenta de diagnóstico para distinguir as moções periódicas das moções irregulares e aperiódicas (caos possível). Por exemplo, estes últimos autores analisaram o comportamento da função de autocorrelação linear para discriminar os atractores periódicos do atractor caótico (irregular e aperiódico), para valores distintos dos parâmetros do oscilador de Duffing-Van der Pol, com base numa discretização em intervalos regulares de tempo ($\Delta t = 0.1$).

Agora, para estimar os atrasos de tempo de cada série temporal de preços das *commodities* e das *utilities* observadas, escolhemos o menor valor positivo de T, em que o valor da

autocorrelação amostral se anula. Com efeito, através da observação das autocorrelações amostrais ao longo do tempo (Figuras 2.3-2.7), podemos concluir que os valores estimados dos atrasos de tempo, T, são maiores do que o escalar 150 ($\rho(T) \leq 0 \Longrightarrow \tau = T \geq 150$), revelando algumas evidências de processos determinísticos com perturbações estocásticas (tal como o ruído branco ou o ruído colorido), ou de processos puramente estocásticos (tal como, os processo de ruído branco Gaussiano, os processos ARIMA(p, d, q), os processos ARCH(p) e similares, entre outros processos), com dimensão não-finita.

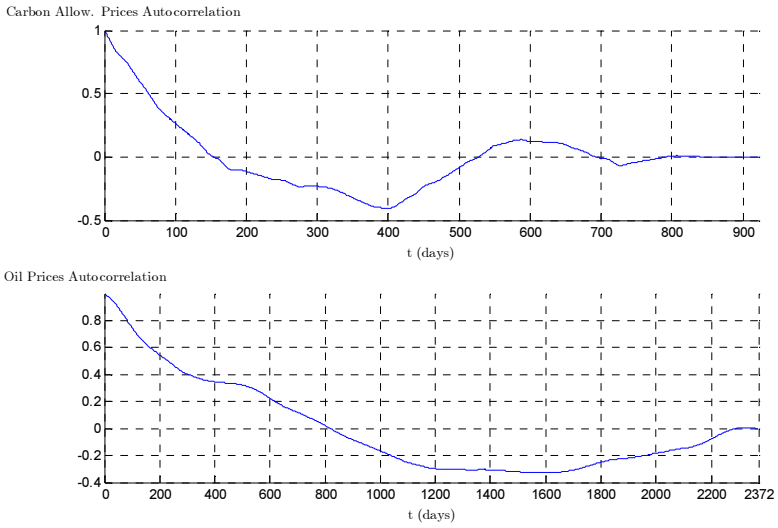


Figura 2.3: Autocorrelações amostrais (licenças de carbono e petróleo bruto).

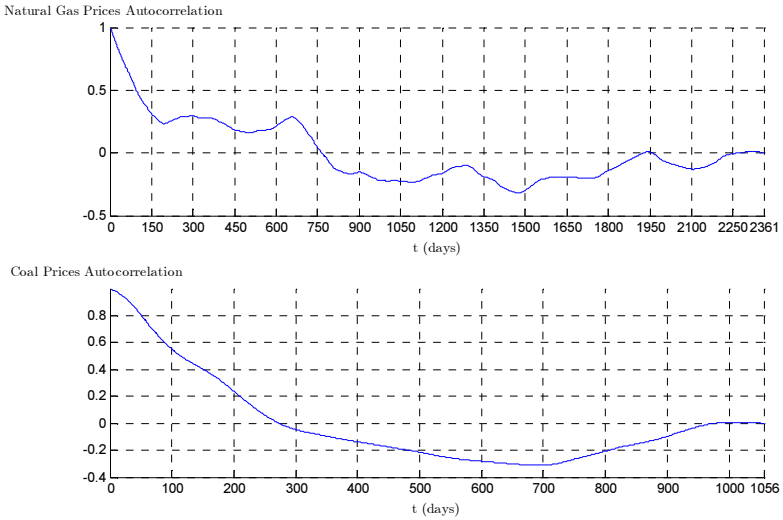


Figura 2.4: Autocorrelações amostrais (gás natural e carvão).

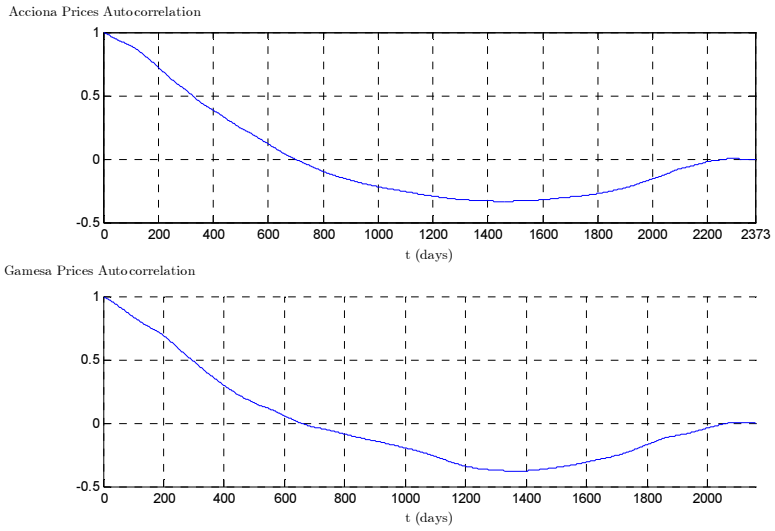


Figura 2.5: Autocorrelações amostrais (*Acciona* e *Gamesa*).

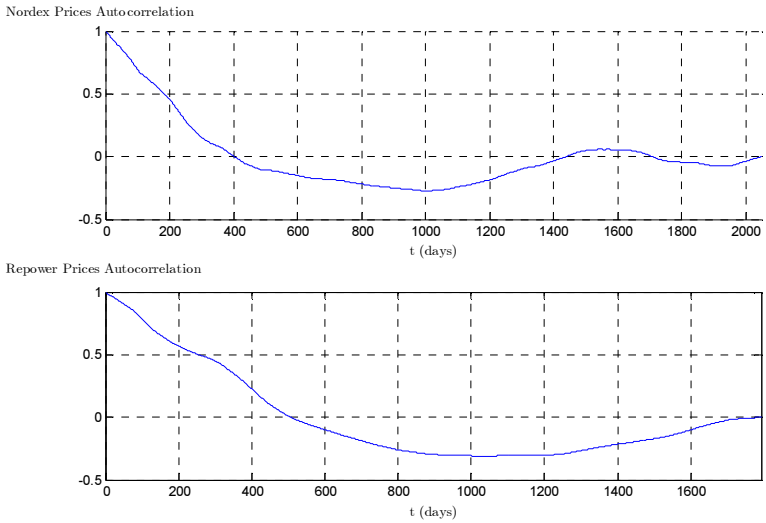


Figura 2.6: Autocorrelações amostrais (*Nordex* e *Repower*).

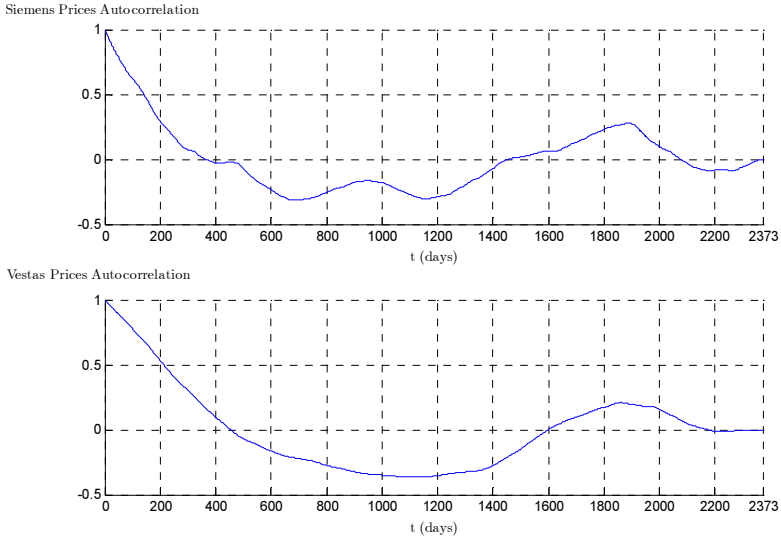


Figura 2.7: Autocorrelações amostrais (*Siemens* e *Vestas*).

Em particular, os valores estimados dos atrasos de tempo T, quando $\rho(T) \leq 0$, nas sucessões cronológicas de preços das *commodities* observadas são: ≈ 150 (licenças de

carbono), ≈ 800 (petróleo bruto), ≈ 750 (gás natural), ≈ 280 (carvão). Igualmente, os valores estimados de T, quando $\rho(T) \leq 0$, nas sequências de preços das *utilities* são: ≈ 700 (*Acciona*), ≈ 650 (*Gamesa*), ≈ 400 (*Nordex*), ≈ 500 (*Repower*), ≈ 370 (*Siemens*), ≈ 450 (*Vestas*).

Pelo contrário, os decaimentos exponenciais das autocorrelações amostrais para *lags* de tempo crescentes no intervalo $T \in [0, 170]$ sugerem a existência de sistemas caóticos determinísticos. Ademais, os comportamentos das autocorrelações amostrais ao longo do tempo indicam a presença de moções aperiódicas, onde o caos possa existir.

2.6.2 Atrasos de Tempo: Informação Mútua

O alvo da construção de um vector de mergulho $\mathbf{y}_n$, a partir de uma sequência discreta de dados, é o de assegurar coordenadas de atraso de tempo suficientemente independentes no espaço d_e dimensional, que substituam as coordenadas desconhecidas subjacentes ao sistema dinâmico observado (Abarbanel e Parlitz (2006) [6]). São assim estimados os atrasos de tempo, T, para cada série temporal de preços dos activos financeiros observados (*commodities* e *utilities*), com recurso ao primeiro mínimo local da informação mútua $I(T)$.

Como é sabido, o critério da informação mútua $I(T)$ foi proposto inicialmente por Fraser e Swinney (1986) [188], representando, neste caso, a quantidade de informação sobre o preço do activo y_n com base na observação do preço do activo y_{n+T}. Com efeito, pretende-se que as coordenadas sejam suficientemente independentes, mas não completamente desconectadas, em termos estatísticos. Portanto, o primeiro mínimo local da informação mútua, $I(T)$, sugere-nos quando duas medições não-lineares (y_n, y_{n+T}) são relativamente independentes, proporcionando uma boa estimativa de T para a reconstrução do atractor no espaço de mergulho de dimensão d_e.

I(T)	Licenças de carbono	Petróleo bruto	Gás natural	Carvão	Acciona	Gamesa	Nordex	Repower	Siemens	Vestas
T	10	11	11	5	10	13	6	9	10	9

Nota: Primeiro mínimo local da Informação Mútua: T.

Tabela 2.1: Estimativas dos atrasos de tempo nas séries financeiras.

Na prática, os valores estimados dos atrasos de tempo (ver Tabela 2.1), com base nos primeiros mínimos locais da $I(T)$, apresentam valores diminutos (isto é, $\tau = T \leq 13$). Donde, as correlações curtas entre as coordenadas sucessivas dos atraso de tempo podem ser interpretadas como o resultado de certas quantidades não-lineares determinísticas características dos sistemas caóticos (por exemplo, $\hat{T} = 18$ no sistema caótico de Lorenz, quando os parâmetros do sistema assumem os valores $\sigma = 10$, $r = 28$, e $b = 8/3$, Celluci *et al.* (2004) [90]).

2.6.3 Erros de Predição Não-Lineares e Índices

Para uma boa compreensão das dinâmicas de evolução dos sistemas financeiros observados, calculamos numa primeira etapa os erros de predição não-lineares (*non-linear prediction errors* (*NLPE*)), subjacentes aos modelos de constante local no atractor, propostos por Small e Tse (2004) [474] (mergulho não-uniforme). Com efeito, estes modelos permitem-nos obter as "melhores" predições das sequências de dados escalares, para dimensões crescentes de mergulho, tal que o comprimento de descrição das séries temporais (Equação (2.39)) seja minimizado nestes modelos. Na prática, calculamos os erros de predição não-lineares (EPNL) de modo iterativo, para cada série temporal observada, ou seja, passo a passo ($d_e = d_e + 1$), com início em $d_e = 1$ até à dimensão máxima de mergulho $d_e^{\max}$ (onde o EPNL estimado atinge um valor mínimo), para os atrasos de tempo T, fixos, estimados

com base no primeiro mínimo local da informação mútua $I(T)$ (ver Tabela 2.1).

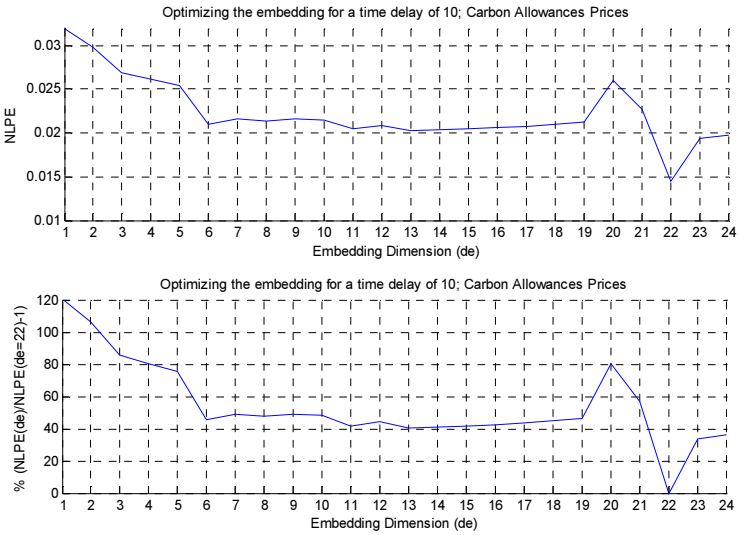


Figura 2.8: *NLPE* e índice (licenças de carbono).

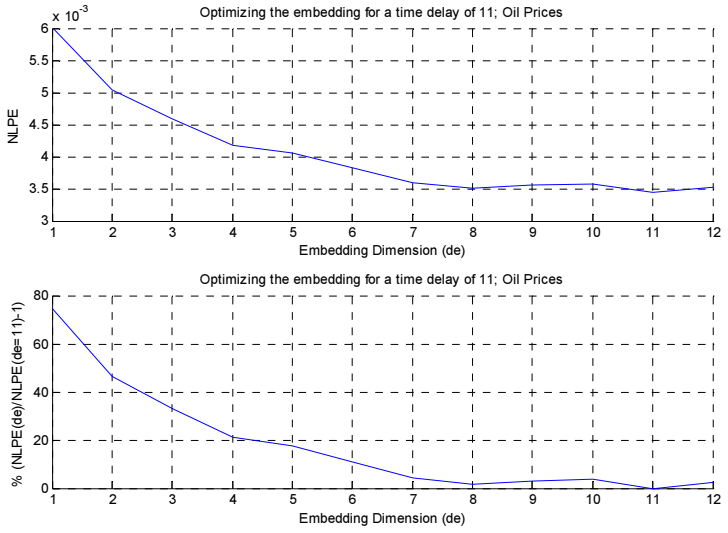


Figura 2.9: *NLPE* e índice (petróleo bruto).

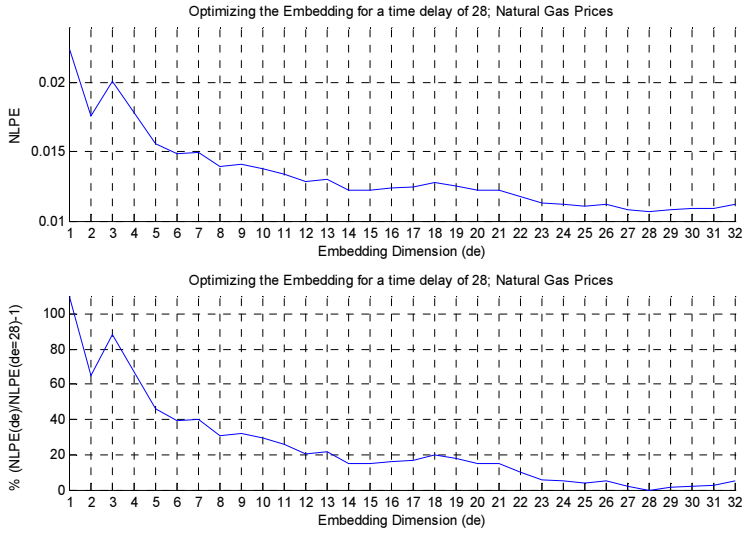


Figura 2.10: *NLPE* e índice (gás natural).

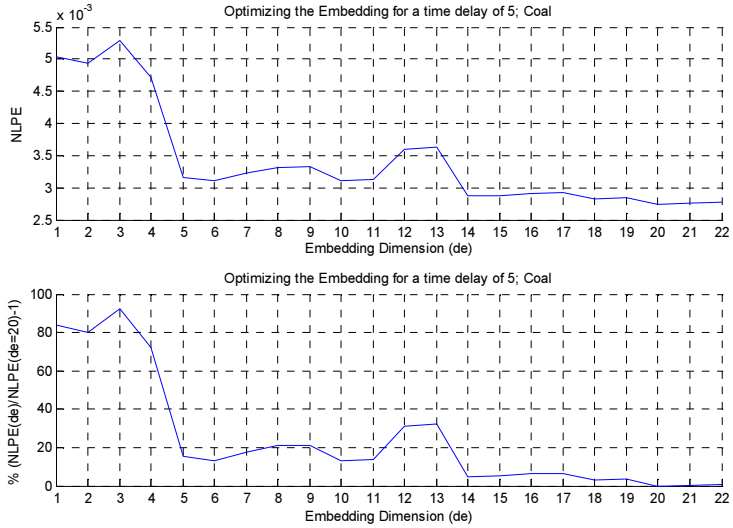


Figura 2.11: *NLPE* e índice (carvão).

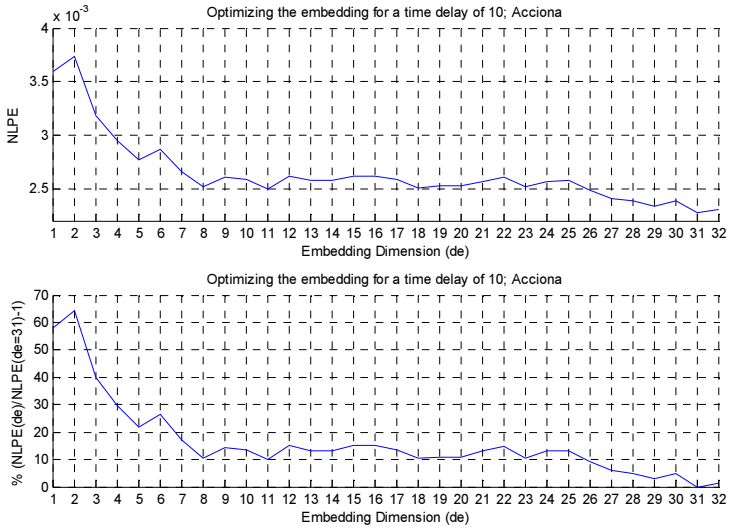


Figura 2.12: *NLPE* e índice (*Acciona*).

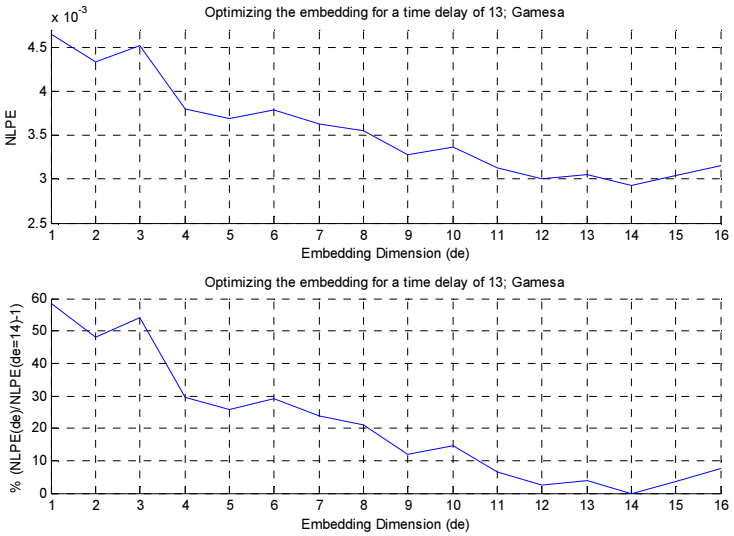


Figura 2.13: *NLPE* e índice (*Gamesa*).

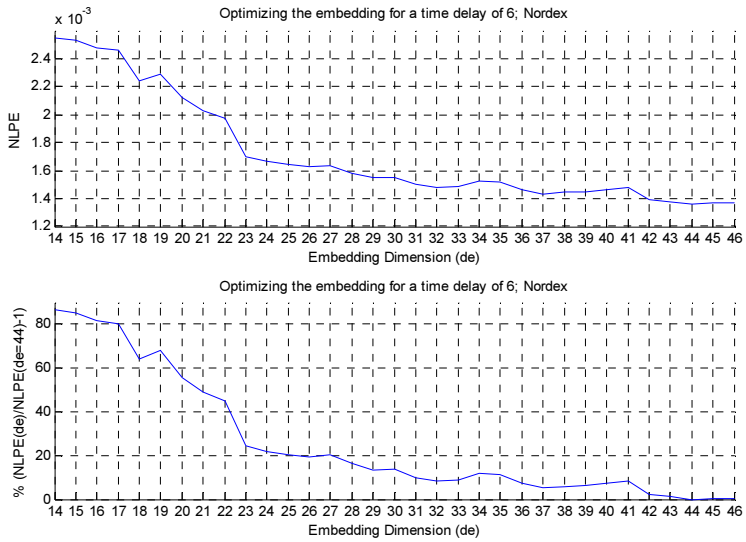


Figura 2.14: *NLPE* e índice (*Nordex*).

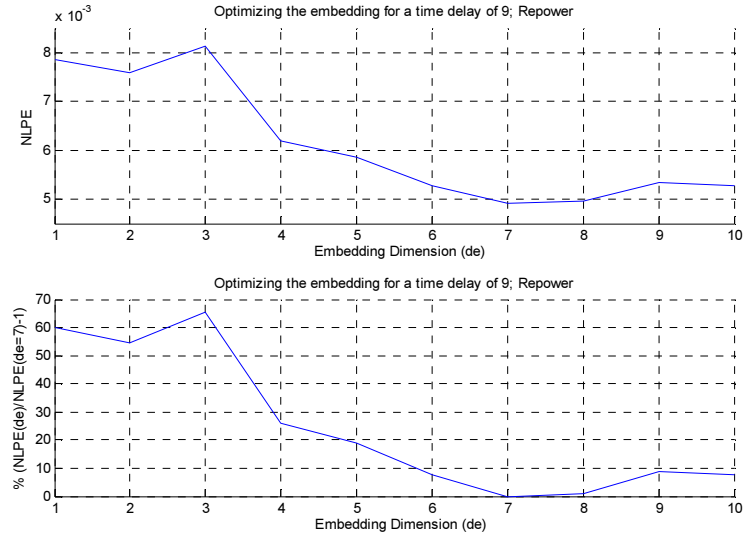


Figura 2.15: *NLPE* e índice (*Repower*).

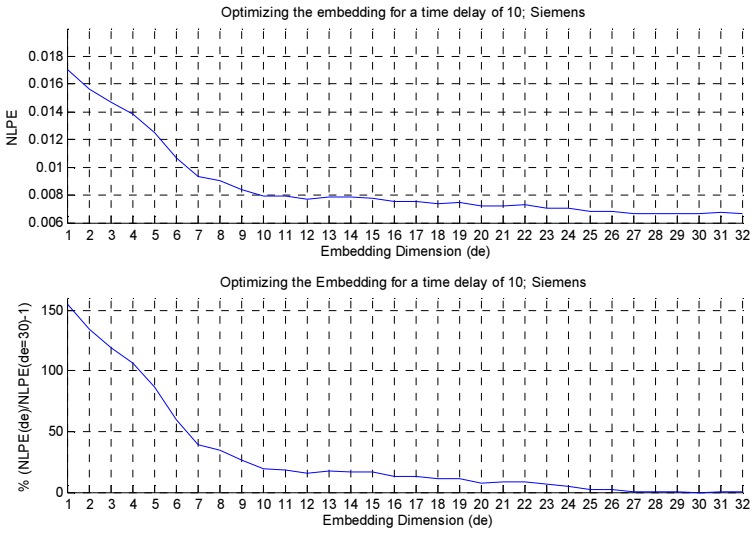


Figura 2.16: *NLPE* e índice (*Siemens*).

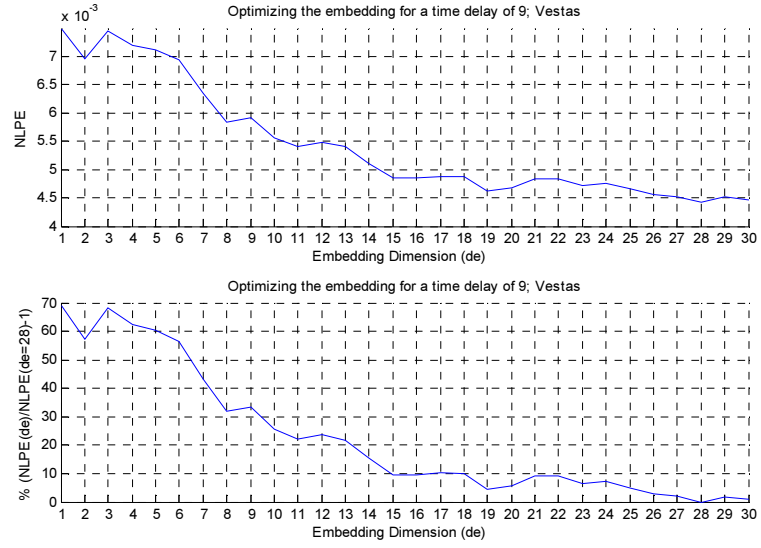


Figura 2.17: *NLPE* e índice (*Vestas*).

Os resultados das estimativas dos erros de predição não-lineares (*non-linear prediction*

errors (*NLPE*)) e dos índices respectivos, nas séries temporais de preços das *commodities* e das *utilities* observadas, para dimensões máximas de mergulho d_e^{max} (critério de minimização dos *NLPE*) encontram-se apresentados nas Figuras 2.8-2.17. Por conseguinte, no agrupa- mento das séries temporais de preços das *commodities*, as dimensões máximas de mergulho e os respectivos EPNL mínimos estimados são: $d_e^{\max} = 22$, $EPNL^{\min} = 0.01448$ (licenças de carbono); $d_e^{\max} = 11$, $EPNL^{\min} = 0.00345$ (petróleo bruto); $d_e^{\max} = 28$, $EPNL^{\min} = 0.01065$ (gás natural); $d_e^{\max} = 20$, $EPNL^{\min} = 0.00274$ (carvão). Analogamente, para as sucessões cronológicas de preços das *utilities*, as dimensões máximas de mergulho e os EPNL mínimos calculados são: $d_e^{\max} = 31$, $EPNL^{\min} = 0.00227$ (*Acciona*); $d_e^{\max} = 14$, $EPNL^{\min} = 0.00293$ (*Gamesa*); $d_e^{\max} = 44$, $EPNL^{\min} = 0.00136$ (*Nordex*); $d_e^{\max} = 7$, $EPNL^{\min} = 0.00491$ (*Repower*); $d_e^{\max} = 30$, $EPNL^{\min} = 0.00668$ (*Siemens*); $d_e^{\max} = 28$, $EPNL^{\min} = 0.00443$ (*Vestas*).

2.6.4 Dimensões Fractais: Método de Máxima Verosimilhança de Takens

Para a concretização da segunda etapa do método proposto, procedemos à estimação das dimensões fractais D ($D := D(\varepsilon_0)$), com recurso ao estimador de máxima verosimilhança de Takens (1985) [491] (ver Equação (2.73)), para dimensões crescentes de mergulho, a partir de $d_e = 1$ até aos valores de mergulho onde ocorram pontos prováveis de saturação fractal.

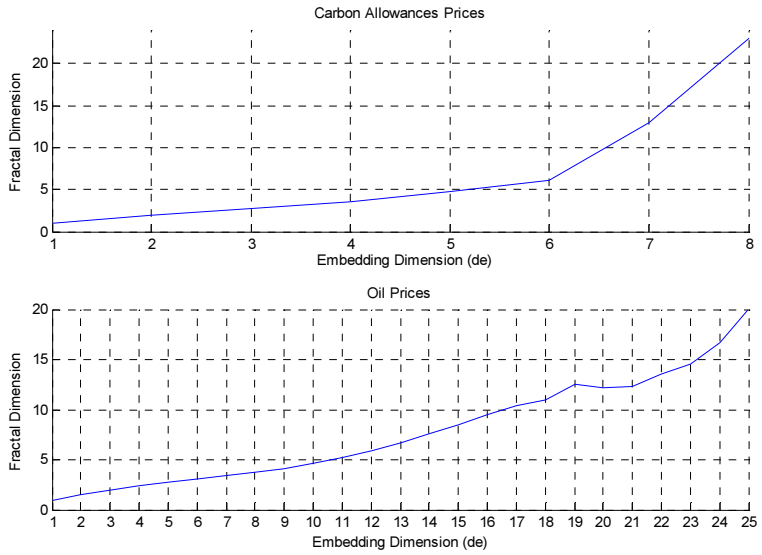


Figura 2.18: Dimensões fractais (licenças de carbono e petróleo bruto).

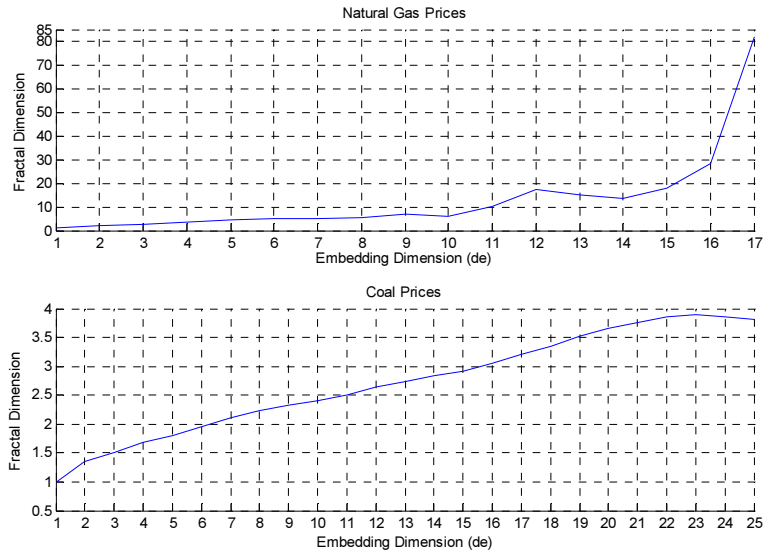


Figura 2.19: Dimensões fractais (gás natural e carvão).

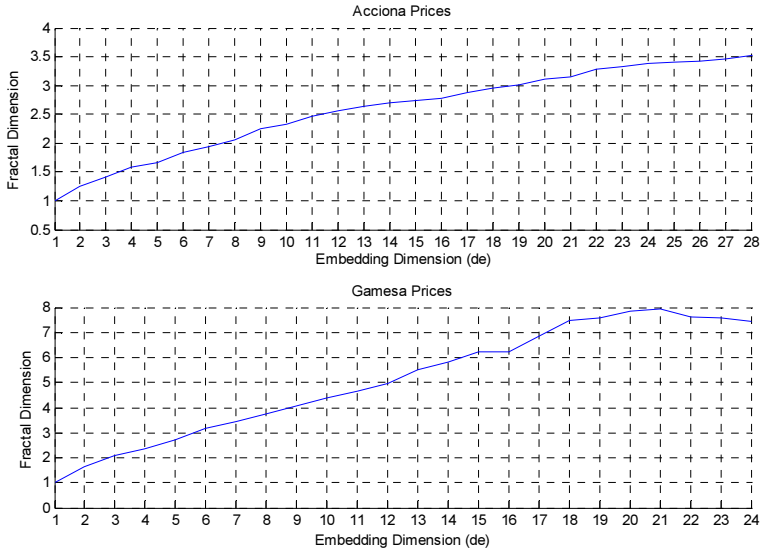


Figura 2.20: Dimensões fractais (*Acciona* e *Gamesa*).

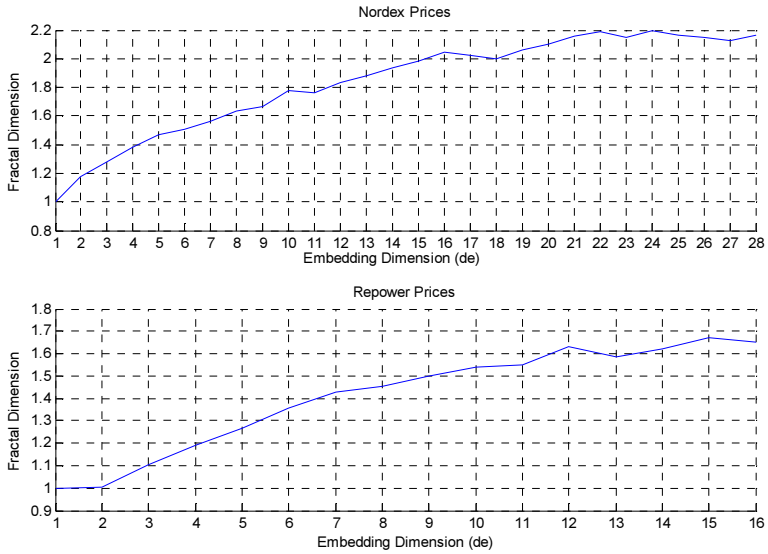


Figura 2.21: Dimensões fractais (*Nordex* e *Repower*).

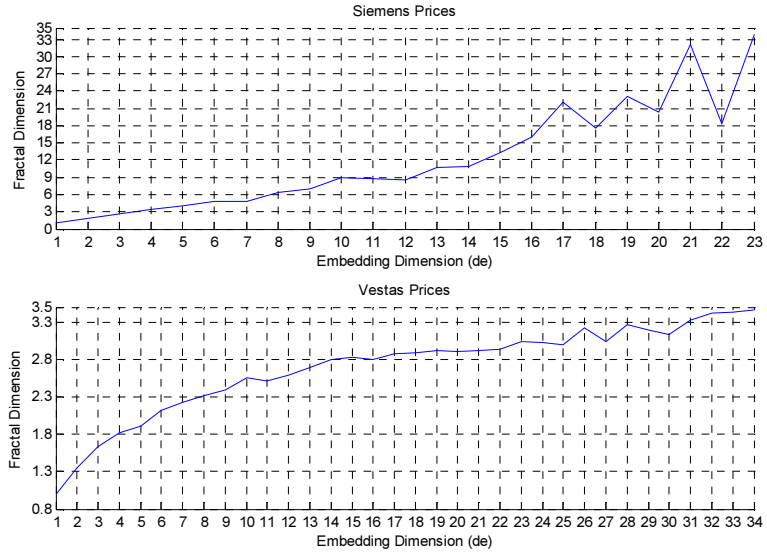


Figura 2.22: Dimensões fractais (*Siemens* e *Vestas*).

Estimativas	Licenças de carbono	Petróleo bruto	Gás natural	Carvão	Acciona	Gamesa	Nordex	Repower	Siemens	Vestas
$D(\varepsilon_0)$	+∞	12,2	5,2	3,8	3,4	7,8	2,2	1,6	8,8	2,8
$d_e\,(min.)$	+∞	14	7	5	5	9	4	3	10	4
$T\ (I(T))$	10	11	11	5	10	13	6	9	10	9

Nota: O Petróleo bruto e a Siemens apresentam dimensões altas de mergulho.

Tabela 2.2: Dimensões fractais e dimensões mínimas ajustadas de mergulho.

Os resultados das estimativas das dimensões fractais D ($D := D(\varepsilon_0)$), para as sucessivas dimensões de mergulho, estão apresentados nas Figuras 2.18-2.22. Estes resultados estão sumarizados na Tabela 2.2, juntamente com as estimativas das dimensões mínimas ajustadas de mergulho d_e^{min} (valores inteiros de $(D+1)$, no mínimo), e as respectivas estimativas dos atrasos de tempo T, com base nos primeiros mínimos locais da informação mútua $I(T)$.

Através da observação da Figura 2.18, podemos concluir que as dimensões fractais

calculadas para a série financeira de **licenças de carbono** não apresentam pontos de saturação fractal, pelo que esta série temporal não pode ser caracterizada por um processo caótico. Similarmente, as séries temporais de preços do **petróleo bruto** e da *Siemens* apresentam dimensões de mergulho elevadas ($d_e^{min} \geq 10$), pelo que os processos são estocásticos. Isto é, nestas séries temporais, a percentagem de vizinhos falsos entre os r vizinhos próximos de $\mathbf{y}_n$, expressos por $\mathbf{y}_n^r$, para $n = 1, ..., N$, não tenderá para zero, porque o espaço necessário para destrinçar as órbitas do objecto (atractor) requer agora um espaço de dimensão infinita.

Os valores estimados das dimensões fractais D, para uma dimensão de mergulho óptima ($d_e^{min} < 10$), para as séries temporais de preços das *commodities-energy products*, são: **gás natural** ($D \approx 5.2$) e **carvão** ($D \approx 3.8$). Analogamente, os valores estimados das dimensões fractais (ou as dimensões de correlação), para o critério $d_e^{min} < 10$, nas séries temporais de preços das *utilities-industriy eolic manufacturing* são: *Acciona* ($D \approx 3.4$), *Gamesa* ($D \approx 7.8$), *Nordex* ($D \approx 2.2$), *Repower* ($D \approx 1.6$), e *Vestas* ($D \approx 2.8$).

Em particular, a série financeira do **gás natural** para um valor alto da dimensão de mergulho ($d_e^{\min} = 7$, isto é, o inteiro de 5.2 (D) $+1 + 1$) apresenta um índice dos erros de predição não-lineares (*NLPE - index*) de cerca de 40% (Fig. 2.10). Analogamente, as séries financeiras da *Nordex* e da *Vestas***,** para uma dimensão de mergulho baixa (quatro), apresentam um índice dos EPNL superior a 80% (Figura 2.14) e um índice dos EPNL de cerca de 60% (Figura 2.17). Ou seja, as séries temporais de preços dos activos do **gás natural,** da *Nordex* e da *Vestas* apresentam uma penalização considerável em termos da acuidade de predição dos modelos de constante local a ajustar (critério de minimização do comprimento de descrição dos sinais $DL(\cdot)$).

No agrupamento das *commodities*, apenas a série temporal do **carvão** apresenta uma dimensão de mergulho óptima ($d_e^{\min} = 5$, isto é, o inteiro de 3.8 $(D) + 1$), para $T = 5$, com uma boa acuidade de predição em termos do modelo de constante local a ajustar, isto é, para um índice dos EPNL inferior a 20% (Figura 2.11).

Similarmente, no agrupamento das *utilities*, escolhemos como sistemas dinâmicos não-lineares complexos ($d_e^{min} < 10$), com uma boa acuidade de predição, as séries temporais de preços da *Acciona*, da *Gamesa*, e da *Repower*. Ou seja, a série temporal da *Acciona* apresenta uma dimensão de mergulho óptima ($d_e^{\min} = 5$, isto é, o inteiro de 3.4 $(D)+1+1$), para $T = 10$, com um índice estimado dos EPNL de cerca de 20% (Figura 2.12). A série temporal da *Gamesa* apresenta uma dimensão de mergulho óptima, extremamente complexa ($d_e^{min} = 9$, ou seja, o inteiro de 7.8 $(D) + 1$), para $T = 13$, em que o índice dos EPNL é inferior a 15% (Figura 2.13). Por fim, a série temporal da *Repower* expressa uma dimensão de mergulho óptima ($d_e = 5$, inteiro de 1.6 $(D) + 1 + 2$), para $T = 9$, com um índice dos EPNL inferior a 20% (Figura 2.15).

Em síntese, as dimensões fractais estimadas nas séries financeiras analisadas, com recurso ao estimador de máxima verosimilhança de Takens (1985) [491], apresentam valores fraccionais. Em particular, as séries temporais de preços dos activos do **carvão**, da *Acciona*, da *Gamesa*, e da *Repower* apresentam dimensões óptimas de mergulho ($d_e < 10$), para índices estimados dos erros de predição não-lineares (EPNL) inferiores ou próximos do valor de 20%, podendo ocorrer perfeitamente dinâmicas não-lineares complexas (caracterizadas por apresentarem dinâmicas caóticas com ruído aditivo observacional e/ou dinâmico).

2.6.5 Estimativas das Dimensões de Correlação: Método de Aproximação à Contagem de Caixas

Apesar do método proposto na subsecção anterior permitir estimar dimensões óptimas de mergulho ($d_e < 10$), no sentido da acuidade de predição dos sinais observados, não nos permite estimar dimensões fractais D (ou dimensões de correlação D_2) em função das escalas ε. Procedemos assim nas estimativas das dimensões de correlação D_2, para as diversas escalas ε, nas séries financeiras observadas, de acordo com o método de aproximação à contagem de caixas (Equação (2.57)), para dimensões crescentes de mergulho, a partir de $d_e = 1$ até dimensões máximas de mergulho d_e^{max} (onde os EPNL apresentam valores mínimos locais).

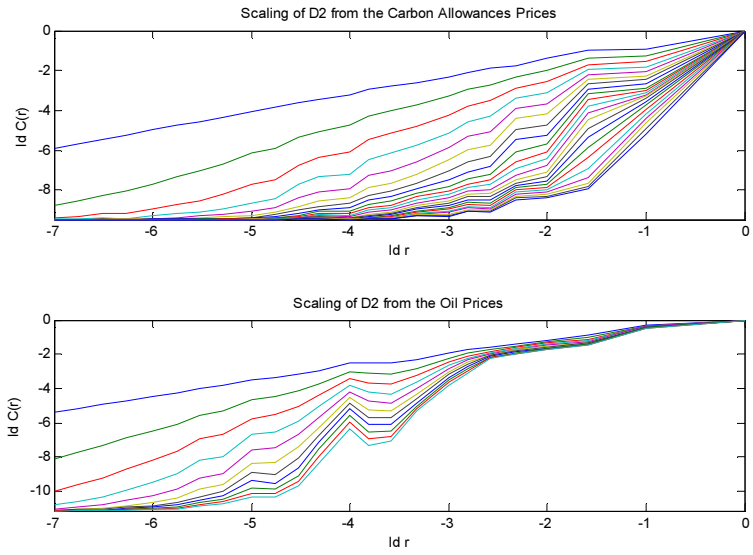


Figura 2.23: Dimensões de correlação - aproximação à contagem de caixas (licenças de carbono e petróleo bruto).

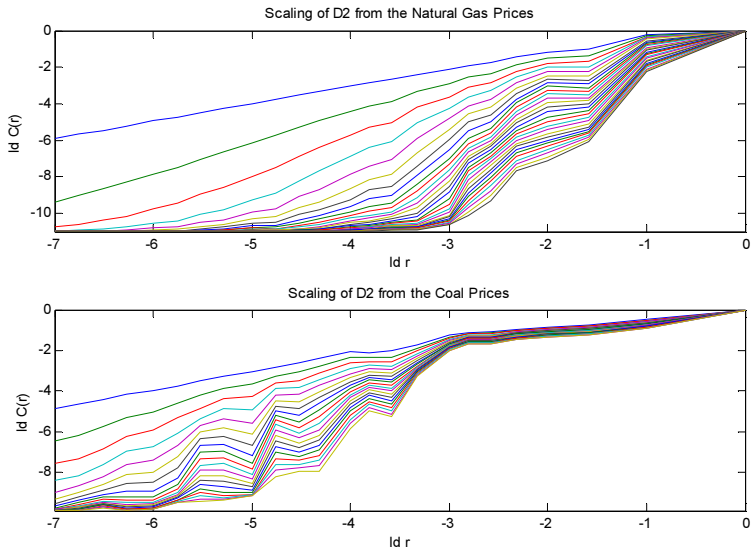


Figura 2.24: Dimensões de correlação - aproximação à contagem de caixas (gás natural e carvão).

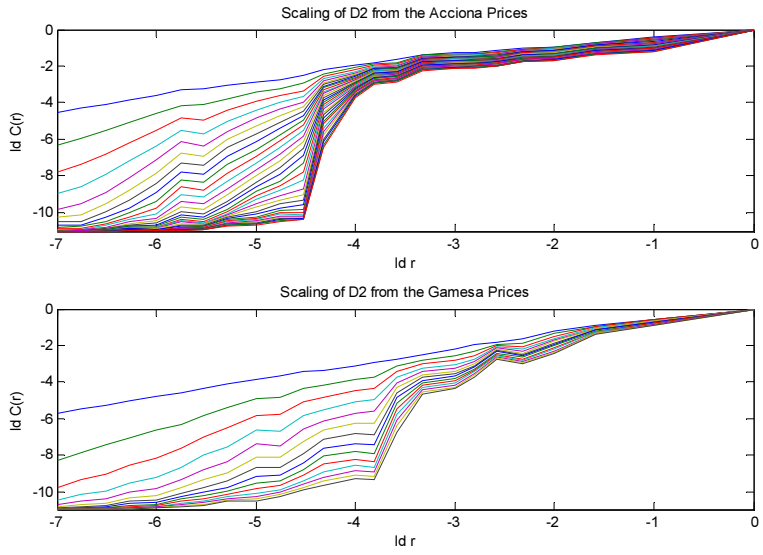


Figura 2.25: Dimensões de correlação - aproximação à contagem de caixas (*Acciona* e *Gamesa*).

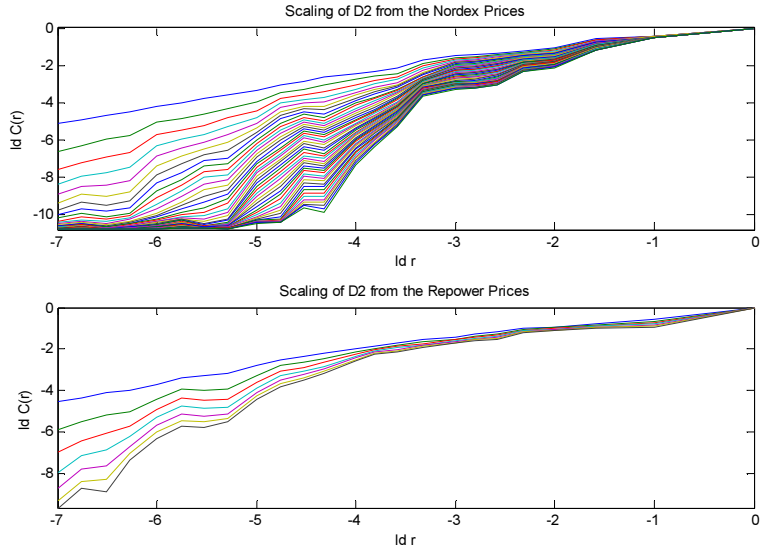


Figura 2.26: Dimensões de correlação - aproximação à contagem de caixas (*Nordex* e *Repower*).

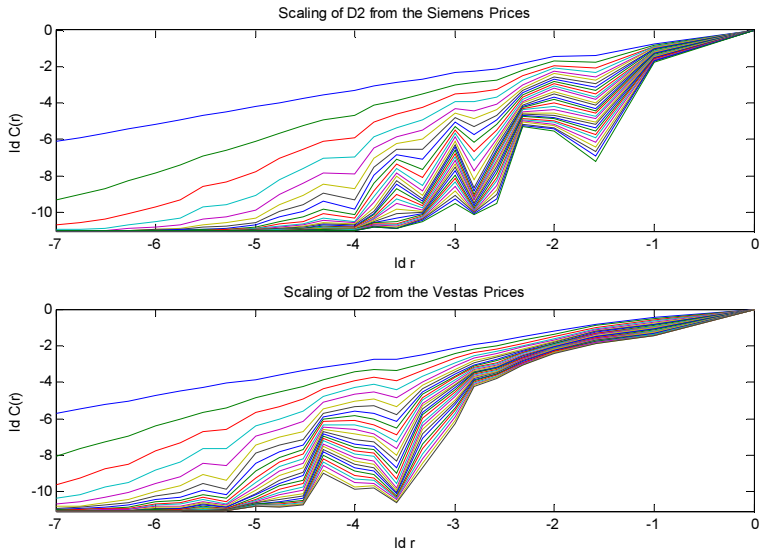


Figura 2.27: Dimensões de correlação - aproximação à contagem de caixas (*Siemens* e *Vestas*).

Agora, através da observação das Figuras 2.23-2.27, podemos concluir que as dimensões de correlação D_2 estimadas, com base nos declives dos ajustamentos lineares entre os pontos relativos às variáveis $\log(C(\varepsilon, d_e))$ *vs* $\log(\varepsilon)$, variam bastante em função da escala ε, e das dimensões máximas de mergulho estimadas d_e^{max}. Por exemplo, as séries temporais de preços dos activos do **carvão**, da *Acciona*, da *Gamesa*, e da *Repower* apresentam um *plateau* (conjunto de linhas planas) assinalável entre os pontos relativos às variáveis $\log(C(\varepsilon, d_e))$ *vs* $\log(\varepsilon)$, nas escalas maiores (ver Figuras 2.24-2.26). Donde, as estimativas das dimensões de correlação D_2, com base nos declives das linhas rectas ajustadas nestas escalas, são: ≈ 0.123 (**carvão**), ≈ 0.141 (*Acciona*), ≈ 0.132 (*Gamesa*), ≈ 0.114 (*Repower*). Ou seja, $D_2 \in [0.11, 0.14]$, pelo que apresenta um intervalo estimado próximo do intervalo calculado por Iseri *et al.* (2008) [250] na região de escala, para o índice diário agregado

das acções da Bolsa de Valores de Istambul ($D_2 \in [0.14, 0.16]$).

Por outro lado, as distâncias entre as curvas que unem os pontos relativos às variáveis $\log(C(\varepsilon, d_e))$ *vs* $\log(\varepsilon)$ diminuem, para dimensões crescentes de mergulho. Logo, quando as dimensões de mergulho são máximas (valores mínimos dos EPNL), as linhas são paralelas e algumas destas sobrepõem-se. Isto é, para cada série financeira, $D_2(d_{e_c})$ torna-se constante (ver Equações (2.59-2.60)), tal que $D_2 \approx D_2(d_{e_c})$), em que d_{e_c} corresponde ao valor da saturação de mergulho.

2.6.6 Estimativas dos Expoentes Máximos de Lyapunov em Termos dos Erros de Predição

Tal como referido, é amplamente aceite que a sensibilidade às condições iniciais constitui uma característica típica de um sistema caótico, quando pelo menos um dos expoentes de Lyapunov é positivo. Em particular, quando um sistema dinâmico não-linear determinístico apresenta pelo menos um expoente de Lyapunov, finito e positivo, e se a soma de todos os expoentes de Lyapunov é negativa, o sistema torna-se claramente caótico. Na procura da evidência de divergência exponencial entre trajectórias próximas nos estados iniciais (ou seja, para pelo menos um $\lambda_i > 0$, $i = 1, ..., d_e$), procedemos no cálculo do expoente máximo de Lyapunov, λ_1, para cada série temporal escalar de preços dos activos observados (*commodities*, ou *utilities*) de acordo com o algoritmo[32] proposto por Sato *et al.* (1987)

[32] Tal como explicitado por Parlitz (1998) [395], o algoritmo proposto por Sato *et al.* (1987) [439] e Kurths e Herzel (1987) [289], para o cálculo do expoente máximo de Lyapunov, λ_1, é muito semelhante ao algoritmo inicial de Wolf *et al.* (1985) [527]. Este algoritmo baseia-se no crescimento médio exponencial da distância entre trajectórias próximas, na escala logarítmica, desta vez **em termos da estimativa do erro de predição**, isto é:

$$p(i) = \frac{1}{N\tau_s} \log_2 \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\left\| \mathbf{y}^{n+i} - \mathbf{y}^{nn+i} \right\|}{\left\| \mathbf{y}^{n} - \mathbf{y}^{nn} \right\|} \right) \tag{2.76}$$

em que N é a dimensão da amostra da série temporal escalar $\{y_n\}_{n=1}^{N}$, τ_s é o período de amostragem da sucessão cronológica, $\mathbf{y}^{nn}$ é o ponto vizinho mais próximo do ponto de referência $\mathbf{y}^{n}$, i é o número de passos (horizontes temporais de predição), e $p(i)$ depende do número de passos de tempo i, podendo ser

[439] e Kurths e Herzel (1987) [289].

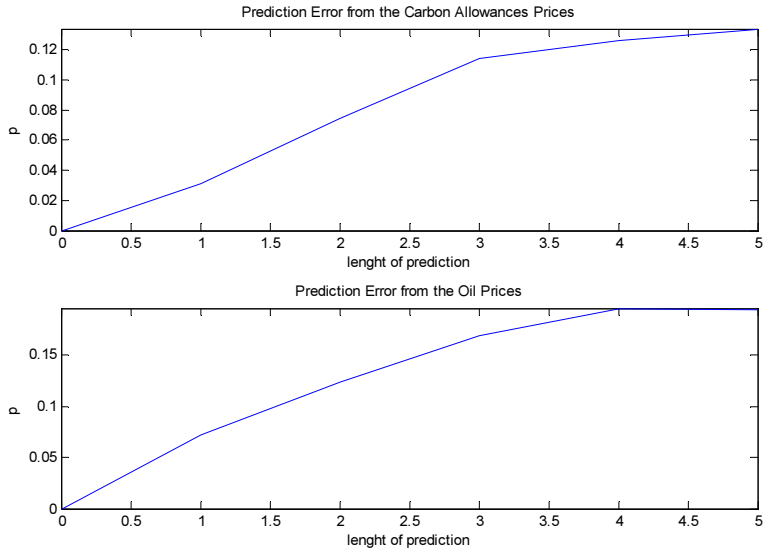


Figura 2.28: Expoentes máximos de Lyapunov (licenças de carbono e petróleo bruto).

dividido em três fases. Num sistema caótico, a fase I é o transiente, em que a órbita vizinha converge na direcção de λ_1. Durante a fase II, a distância entre as órbitas vizinhas aumenta exponencialmente ($e^{\lambda_1 \tau_s i}$) até que a distância exceda o intervalo de validade da aproximação linear do fluxo em torno da órbita de referência $\{\mathbf{y}^{n+i}\}$. Por fim, a fase III inicia, quando a distância entre as trajectórias próximas apresenta um acréscimo menor relativamente ao aumento exponencial ocorrido durante a fase II. Por exemplo, quando a fase II é suficientemente longa, podemos estimar o expoente máximo de Lyapunov λ_1, com base no declive do segmento linear ajustado entre os pontos relativos às variáveis $p(i)$ *vs* i.

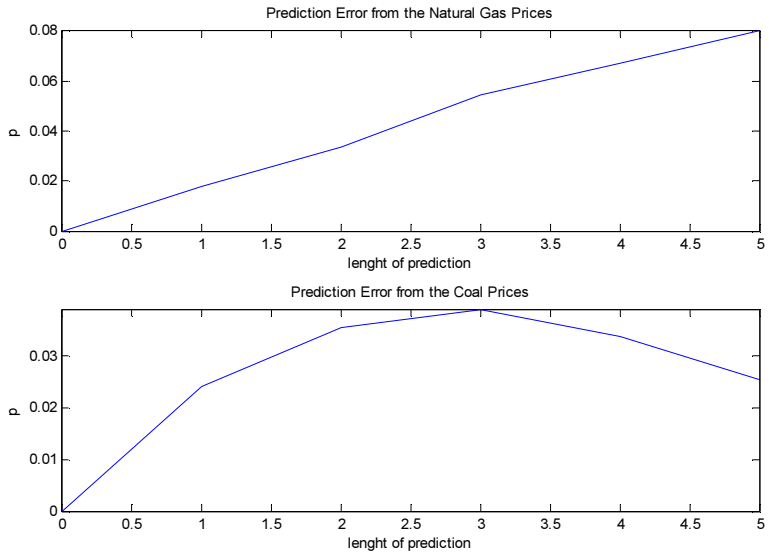


Figura 2.29: Expoentes máximos de Lyapunov (gás natural e carvão).

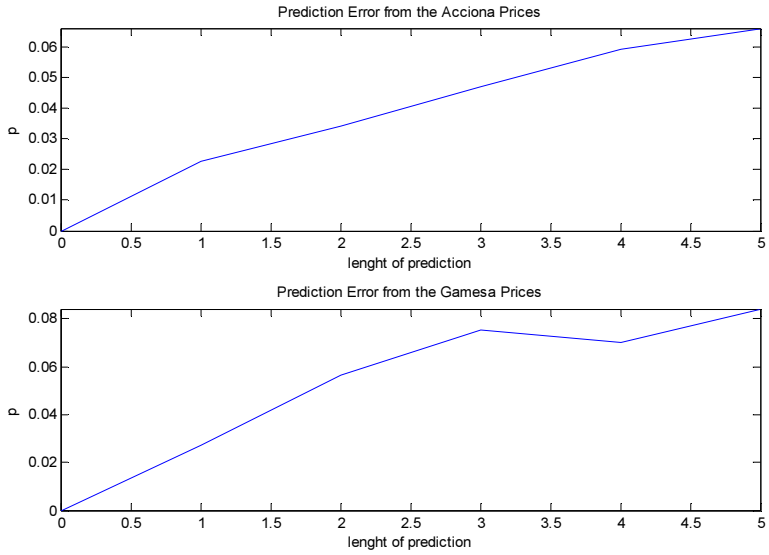


Figura 2.30: Expoentes máximos de Lyapunov (*Acciona* e *Gamesa*).

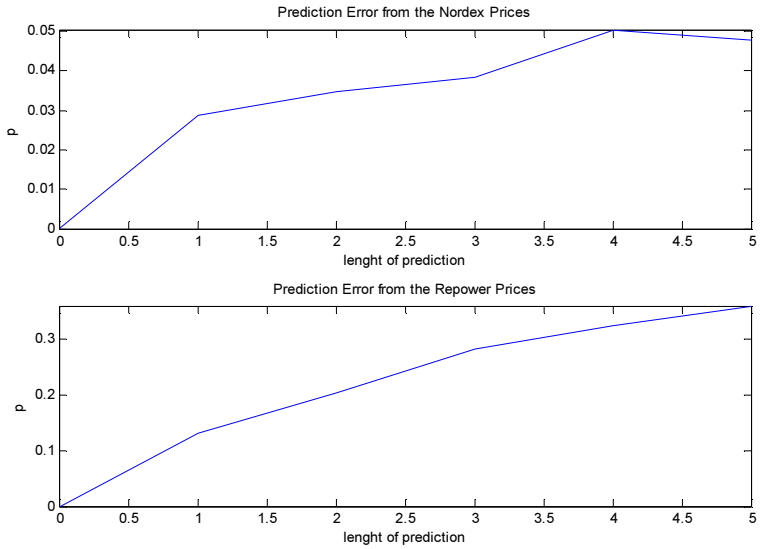


Figura 2.31: Expoentes máximos de Lyapunov (*Nordex* e *Repower*).

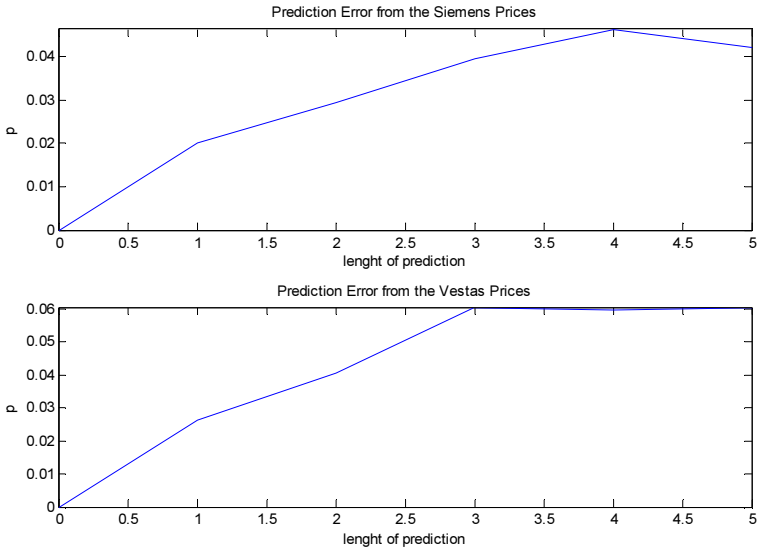


Figura 2.32: Expoentes máximos de Lyapunov (*Siemens* e *Vestas*).

Assim, através da observação dos gráficos relativos a $\hat{\lambda}_1$ apresentados nas Figuras

2.28-2.32, constatamos a presença de taxas assintóticas de separação entre trajectórias próximas iniciais (moções caóticas prováveis), para as dimensões máximas de mergulho estimadas d_e^{max}, através do critério de minimização dos EPNL, para os atrasos de tempo T calculados com recurso ao critério do primeiro mínimo local da informação mútua $I(T)$, para os horizontes temporais curtos propostos ($t_h = 5$), e para dez pares de vizinhos próximos ($j = 10$) do ponto de referência $\mathbf{Y}_j$.

Estimativas	Licenças de carbono	Petróleo bruto	Gás natural	Carvão	Acciona	Gamesa	Nordex	Repower	Siemens	Vestas
λ_1	0,0415	0,05231	0,01563	0,01152	0,01129	0,02852	0,00615	0,07858	0,00946	0,01429
$d_e(max.)$	22	11	28	20	31	14	44	7	30	28
T (I(T))	10	11	11	5	10	13	6	9	10	9

Tabela 2.3: Expoentes máximos de Lyapunov (λ_1) / parâmetros de mergulho (d_e^{max}, T).

Com efeito, os expoentes máximos de Lyapunov, λ_1, calculados com base no algoritmo proposto por estes últimos autores, para as séries financeiras observadas (ou seja, $\lambda_1 \in [0.006, 0.079]$), e os valores dos parâmetros de mergulho estimados previamente (d_e^{max}, T) estão apresentados na Tabela 2.3.

Estes resultados são, em parte, aproximados aos resultados calculados por Rosenstein *et al.* (1993)[425] nas simulações experimentais no sistema hiper-caótico[33] de Rössler (1979) [426] (caracterizado por um conjunto de quatro equações diferenciais contínuas e autónomas de primeira ordem), com algum ruído aditivo. Isto é, $\lambda_1 \in [0.048, 0.112]$, nas simulações realizadas pelos autores, com base no seu algoritmo[34], para $N = 8000$ (dimensão da amostra), para nove pares de vizinhos próximos ($j = 9$) do ponto de

[33] As dinâmicas subjacentes ao sistema hiper-caótico de Rössler (1979) [426] são expansíveis em duas ou mais direcções, porque apresentam mais do que um expoente de Lyapunov positivo.

[34] Rosenstein *et al.* (1993)[425] resolveram numericamente os sistemas hiper-caóticos de Rössler, com base na integração temporal pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem, para um passo igual a Δt.

referência $\mathbf{Y}_j$, e para as seguintes dimensões de mergulho: $d_e = 3, 6, 9, 12, 15$.

Capítulo 3

Sub-Rogados de Conjuntos de Dados

3.1 Introdução aos Métodos dos Sub-Rogados

As estimativas das características determinísticas locais de uma série temporal, como, por exemplo, o integral de correlação, a dimensão de correlação e os expoentes de Lyapunov, podem não ser fidedignas, pelo que se recomenda a utilização de dados em qualidade e em quantidade suficientes para observar regiões em escalas bem definidas.

Ao considerarmos diversos exemplos aplicados, tais como as dinâmicas das populações em biologia, as secreções hormonais dependentes do tempo e as cotações das taxas de câmbio do mercado financeiro, podem obter-se estimativas das características típicas dos sistemas não-lineares determinísticos com fraca acuidade. Mais ainda, na ausência de uma região bem definida em escala, as estimativas das características físicas das séries temporais de natureza determinística são afectadas a partir de sinais que apresentam diferentes níveis de ruído, ou que manifestam diferentes graus de não estacionariedade.

Quando um sistema dinâmico apresenta alteração de um parâmetro que leva a uma dimensão de um atractor substancialmente diferente, a forma geométrica geral do atractor

pode mudar, afectando as estimativas de resolução da dimensão do atractor de forma imprevista. Surge, por consequência, a necessidade de implementar testes estatísticos, com recurso aos sub-rogados lineares e/ou não-lineares, que postulam sobre a não-linearidade e o determinismo de uma série temporal. Os testes estatísticos conhecidos compreendem as estimativas das características físicas (não-lineares) indicadoras de presença de caos nas séries temporais, e permitem a comparação dos seus valores determinísticos (tal como a dimensão de correlação) entre o sinal escalar original e os sub-rogados gerados, consoante a hipótese nula especificada (por exemplo, a presença de um processo Gaussiano linear). Assim, caso existam diferenças significativas nas medidas das características determinísticas, então a hipótese nula subjacente aos processos realizáveis (sub-rogados) não é representativa dos dados originais. Em séries temporais, o determinismo de um sinal encontra-se extremamente condicionado pela previsibilidade do mesmo, pelo que as hipóteses formuladas para as diversas classes de sub-rogados artificiais são muito importantes, porque constituem um indicador objectivo acerca das limitações dos processos de modelação e da qualidade de previsão das séries temporais.

3.2 Conceitos e Definições dos Métodos dos Sub-Rogados

Para facilitar uma boa compreensão conceptual dos métodos de geração dos sub-rogados artificiais, suponha-se uma hipótese inicial específica ϕ, e $\mathcal{F}\phi$ o conjunto de todos os processos (ou sistemas) consistentes com a hipótese em estudo. Defina-se o sinal original $Y \in \mathbb{R}^N$ para N observações, em que $T : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathcal{U}$ corresponde à estatística que testa a hipótese nula ϕ de que Y foi gerado por algum processo $F \in \mathcal{F}\phi$. Assim, os conjuntos de dados de sub-rogados artificiais $\widetilde{S}_i$, $i = 1, 2, ...$ são gerados a partir dos dados originais, para

a hipótese nula ϕ. De um modo geral, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ permitindo discriminar entre a série temporal original Y e os sub-rogados artificiais[1] $\widetilde{S}_i$ consistentes com a hipótese nula especificada ϕ, para uma densidade de probabilidade aproximada $p_{T,F}(t) = Prob(T(\widetilde{S}_i) < t)$, isto é, para a densidade de probabilidade da estatística do teste T dado $F \in \mathcal{F}\phi$. Por exemplo, a estatística T testa se as medidas das características determinísticas (tal como a dimensão de correlação, o expoente de Lyapunov maximal, entre outras invariantes) dos dados observados são consistentes (ou não) com os processos lineares estocásticos $F \in \mathcal{F}\phi$.

Na prática, o processo de geração dos sub-rogados artificiais conta com dois tipos diferentes e fundamentais de hipóteses: *pivotal* e *non-pivotal*, tal como foi definido por Theiler e Prichard (1996) [499].

Definição 3.2.1 *Uma estatística do teste T é definida como pivotal se a densidade de probabilidade da estatística T, $p_{T,F}(t)$, for a mesma para todos os processos F consistentes com a hipótese ϕ em estudo. No caso contrário a estatística T é non-pivotal.*

Os mesmos autores definiram ainda as hipóteses abaixo apresentadas para a construção dos sub-rogados artificiais.

Definição 3.2.2 *Uma hipótese diz-se simples se o conjunto de todos os processos consistentes com a hipótese ϕ é único: $\mathcal{F}\phi$. Uma hipótese que não é simples é definida como complexa.*

Para a hipótese simples apenas precisamos de comparar algumas realizações dos sub--rogados artificiais de um sistema dinâmico particular, a partir da série temporal original, e decidir se o processo é típico ou não. Assim, suponha-se que são conhecidos antecipadamen-

[1] Note-se que os sub-rogados apresentam a mesma dimensão da série temporal original (N).

te os parâmetros da média (μ_*) e do desvio padrão (σ_*) de uma determinada população normal. A hipótese nula postula se os dados provêm de um processo único pré-especificado, isto é, por exemplo, se os dados são provenientes de uma amostragem independente de distribuição normal $N(\mu_* , \sigma_*^2)$.

Se uma hipótese é definida como complexa, o problema não é apenas o da geração de sub-rogados consistentes com um processo F particular, mas também o da estimativa de $F \in \mathcal{F}\phi$. Por exemplo, caso não sejam conhecidos os parâmetros da média (μ) e do desvio padrão (σ) de uma população (caso mais comum), a hipótese nula definida como complexa questiona agora se os dados são consistentes com um processo $N(\mu, \sigma)$ para determinados valores de μ e σ. Por outro lado, não é necessário especificar F, caso a estatística do teste T seja *pivotal*, porque a densidade de probabilidade $p_{T,F}(t)$ da estatística do teste T é a mesma para todos os processos $F \in \mathcal{F}\phi$.

Por fim, Theiler e Prichard (1996) [499] sugerem a realização de sub-rogados artificiais constrangidos[2] para os casos em que se aplicam testes estatísticos *non-pivotal* às hipóteses complexas.

Definição 3.2.3 *Seja $\widehat{F} \in \mathcal{F}\phi$ um processo estimado a partir de um sinal original Y, e seja $\widetilde{S}_i$ apresentado por um conjunto de dados gerados a partir de $F_i \in \mathcal{F}\phi$. Se $\widehat{F}_i \in \mathcal{F}\phi$ corresponde ao processo estimado a partir de $\widetilde{S}_i$, então o sub-rogado $\widetilde{S}_i$ diz-se uma realização constrangida se $\widehat{F}_i = \widehat{F}$. Caso contrário, para $\widehat{F}_i \neq \widehat{F}$, o sub-rogado artificial $\widetilde{S}_i$ é não-constrangido.*

Definição 3.2.4 *Um algoritmo que gera sub-rogados constrangidos é constrangido. Pelo*

[2] Os sub-rogados, lineares aleatórios e constrangidos, apresentados no presente trabalho correspondem à geração dos sub-rogados pelos algoritmos 0, 1 e 2 de Theiler *et al.* (1992) [497].

contrário, um algoritmo que não gera esta classe de sub-rogados é não-constrangido.

Theiler e Prichard (1996) [499] afirmaram que os sub-rogados realizáveis de forma constrangida permitem a utilização de estatísticas T *non-pivotal*, com acuidade. Pelo contrário, os sub-rogados gerados de forma não-constrangida requerem estatísticas T *pivotal*.

3.3 Testes de Não-Linearidade

3.3.1 Métodos dos Sub-Rogados de Processos Lineares

Os métodos dos sub-rogados lineares de Theiler *et al.* (1992) [497] e de Theiler e Prichard (1996) [499] testam se uma série temporal observada (linear ou não-linear) é consistente com a hipótese nula de um processo estocástico linear, em norma, um processo Gaussiano linear (PGL)[3], em que os testes são realizados através de conjuntos de sub-rogados cujos espectros de potência são (ou não) idênticos aos sinais originais. Por conseguinte, os autores propuseram dois métodos distintos de realizar sub-rogados lineares em séries temporais discretas, estacionárias e finitas, em que é pressuposto que os dados sejam provenientes de um processo estocástico linear e admita correlações lineares ao longo do tempo (hipótese nula). Como é sabido, os dois métodos teóricos de produção de sub-rogados lineares propostos pelos autores correspondem aos processos de realizações típicas ou aos processos de realizações constrangidas, e postulam sobre a presença de uma estrutura não-linear determinística (tal como a presença de estruturas caóticas) na série temporal observada.

[3]Em regra, a hipótese nula pressupõe que a série temporal original seja proveniente de um processo estocástico Gaussiano linear (PGL) com coeficientes constantes, pelo que a rejeição da hipótese nula sugere a não-linearidade e a possível ocorrência de caos determinístico, que possam explicar a irregularidade da série temporal observada.

O primeiro método de construção dos sub-rogados lineares de realizações típicas compreende, a título de exemplo, o ajustamento de um modelo linear do tipo ARMA(p,q)[4] à série temporal escalar original, para a hipótese nula de presença de um processo estocástico linear:

$$y_i = a_0 + \sum_{j=1}^{p} a_j y_{i-j} + \sum_{j=0}^{q} b_j e_{i-j}, i = 1, ..., N \tag{3.1}$$

onde $b_0 = 1$, e a utilização de diferentes realizações de ruído branco Gaussiano (com recurso às simulações numéricas), para os termos residuais do modelo, e_i, isto é, para $e_i \sim NID(0, \sigma^2), i = 1, ..., N$, permite a realização de um conjunto de sub-rogados estocásticos lineares. De acordo com Theiler e Prichard (1996) [499], diversas referências sobre este processo de geração de sub-rogados podem ser encontradas em Grassberger (1986b) [209], Kurths e Herzel (1987) [289] e Gantert *et al.* (1992) [192].

O segundo método de geração de sub-rogados lineares de realizações constrangidas, para a hipótese nula de ocorrência de um processo estocástico linear, apresenta como base o processo da transformada discreta de Fourier (TDF), em que os sub-rogados lineares e aleatórios estão constrangidos para apresentar o mesmo espectro de potência (e função de autocorrelação), relativamente à série temporal discreta observada.

Como é sabido, em norma, o método de geração de sub-rogados lineares de realizações constrangidas e aleatórias foi proposto inicialmente por Theiler *et al.* (1992) [497], com base nos algoritmos 0, 1, ou 2, e é amplamente utilizado na procura da não-linearidade (e do caos) nas séries temporais escalares. Assim, as hipóteses nulas (H_1, ou H_2), subjacentes aos algoritmos 1, ou 2, admitem que as séries temporais observadas sejam provenientes

[4] Para além dos modelos ARMA(p,q), isto é, dos modelos autoregressivos de médias móveis estacionários, com um ruído de *input* branco Gaussiano, é possível realizar modelos meramente autoregressivos AR(p) estacionários, com um ruído de *input iid* Gaussiano, ou ainda, construir modelos de médias móveis MA(q) estacionários, com o mesmo tipo de ruído.

de um processo Gaussiano linear (PGL), com um ruído de *input* branco Gaussiano (que é equivalente a um processo ARMA(p, q), com ruído de *input* branco Gaussiano), ou que estas sejam provenientes de um *output* de um processo Gaussiano linear (PGL), com ruído de *input iid* Gaussiano, distorcido por uma função monótona, estática e não-linear. Portanto, H_2 admite a não-Gaussianidade nos dados originais (Kantz e Schreiber (2005) [269]). De facto, o método utilizado pelos autores, para os algoritmos 1, ou 2 (subjacentes às hipóteses nulas H_1 e H_2), apresenta como base o cálculo da transformada discreta de Fourier (TDF)[5] dos dados originais, que sejam consistentes com os processos Gaussianos ou com os processos de amplitude Gaussiana ajustada (isto é, a partir de processos não-Gaussianos nos dados originais que são transformados em processos Gaussianos), o processo de aleatorização das fases da TDF (para quebrar as eventuais estruturas não-lineares no sinal), e a inversa da transformada discreta de Fourier (TDF) para gerar os processos dinâmicos (sub-rogados) estocásticos lineares pretendidos. Logo, o método dos sub-rogados constrangidos lineares e aleatórios de Theiler *et al.* (1992) [497], com base na transformada discreta de Fourier (TDF), surge assim como bastante atractivo, porque não exige estatísticas T *pivotal* e resulta numa aproximação directa aos dados originais, através de um processo de ruído filtrado linearmente[6]. De facto, o método foi reconhecido como bastante poderoso por Prichard e Theiler (1994) [417], tendo sido utilizado mais tarde em múltiplos estudos de detecção da não-linearidade nas séries temporais de natureza física (Theiler e Prichard (1997) [500]) e biológica (Witkowski *et al.* (1995) [526], Lee *et al.* (2001) [304]).

[5] A transformada discreta de Fourier (TDF) de um sinal original resulta numa transformação linear do sinal, e é invertível.

[6] Em regra, um ruído filtrado linearmente é completamente caracterizado pela sua função de autocorrelação (ou pelo espectro de potência) e é um processo Gaussiano linear de realização aleatória.

Por norma, cada sub-rogado linear gerado de forma constrangida e aleatória, com base nos algoritmos 1 ou 2, de Theiler *et al.* (1992) [497], apresenta sensivelmente o mesmo espectro de potência de Fourier relativamente aos dados originais, para uma dimensão amostral (N) grande, em que apenas são preservadas as correlações lineares originais e o padrão de geração de amplitudes de acordo com a distribuição normal[7].

Agora, para tornar os conceitos matemáticos mais claros relativos à transformada discreta de Fourier (TDF) e ao espectro de potência de Fourier são apresentadas algumas definições de acordo com Kantz e Schreiber (2005) [269] e com Shumway e Stoffer (2006) [458]:

Definição 3.3.1 *A transformada discreta de Fourier (TDF) de uma série temporal estacionária, discreta e finita* $y_1, ..., y_N$ *é apresentada pela equação:*

$$d(w_k) = N^{-1/2} \sum_{n=1}^{N} y_n e^{-2\pi i w_k n} \tag{3.2}$$

onde $k = 0, 1, ..., N-1$, N *é a dimensão da amostra, e as frequências* $w_k = k/N$ *são designadas por* ***frequências fundamentais****, em que estas representam o número de ciclos completos (*k*) no período observacional (*N*), e correspondem a uma transformação linear no seu domínio.*

No presente caso, a geração dos sub-rogados de realizações constrangidas para os algoritmos 1 e 2 de Theiler *et al.* (1992) [497] implica a inversa da TDF, que apresenta a transformação linear (um-a-um) no domínio do tempo, com base na equação que se

[7] No entanto, Kugiumtzis (2000) [283] refere que os sub-rogados lineares de realizações constrangidas podem originar implementações não correctas do teste, caso a distribuição de amplitude se desvie de uma distribuição normal, ou se, a estatística discriminante seleccionada (tal como o expoente máximo de Lyapunov λ_1) apresenta sensibilidade à distribuição espacial dos dados.

apresenta:

$$y_n = N^{-1/2} \sum_{k=0}^{N-1} d(w_k) e^{2\pi i w_k n} \tag{3.3}$$

onde $n = 1, ..., N$ e $i = \sqrt{-1}$.

Definição 3.3.2 *O* ***periodograma*** *de uma série temporal estacionária, discreta e finita* $y_1, ..., y_N$ *é definido por:*

$$I(w_k) = |d(w_k)|^2 \tag{3.4}$$

onde $k = 0, 1, ..., N - 1$.

O **espectro de potência** de uma série temporal estacionária, discreta e finita $y_1, ..., y_N$ pode ser estimado com base no periodograma.

No entanto, a estimativa do espectro de potência com base no periodograma pode apresentar alguns problemas, porque a resolução da frequência finita da TDF implica a dispersão nos *bins* adjacentes das frequências. Por exemplo, a TDF pode apresentar um "pico" finito no caso de um sinal harmónico puro, que tende a ser maior em séries temporais longas (Kantz e Schreiber (2005) [269]).

Definição 3.3.3 *A* ***transformada do coseno*** *de uma série temporal estacionária, discreta e finita* $y_1, ..., y_N$ *é expressa por:*

$$d_c(w_k) = N^{-1/2} \sum_{n=1}^{N} y_n \cos(2\pi w_k n) \tag{3.5}$$

e a ***transformada do seno*** *é,*

$$d_s(w_k) = N^{-1/2} \sum_{n=1}^{N} y_n \sin(2\pi w_k n) \tag{3.6}$$

onde $w_k = k/N$ *para* $k = 0, 1, ..., N - 1$.

Por consequência, a transformada discreta de Fourier (TDF) de uma série temporal estacionária, discreta e finita $y_1, ..., y_N$ é representada por:

$$d(w_k) = d_c(w_k) - id_s(w_k) \tag{3.7}$$

e o **periodograma** é expresso pela equação:

$$I(w_k) = d_c^2(w_k) + d_s^2(w_k). \tag{3.8}$$

3.3.2 Algoritmos de Construção dos Sub-Rogados Lineares Aleatórios e *Pivotalness* das Características Físicas de Caos

A construção dos sub-rogados lineares e aleatórios a partir de uma série temporal escalar, estacionária e finita y_n, para $n = 1, ..., N$, compreende a formulação das três classes hierárquicas de hipóteses nulas subjacentes aos algoritmos de Theiler *et al.* (1992) [497], em que é pressuposta a passagem de uma hipótese nula mais simples para outra de natureza mais complexa[8]:

- **Algoritmo 0** - ruído independente e identicamente distribuído;
- **Algoritmo 1** - ruído filtrado linearmente; e
- **Algoritmo 2** - transformação não-linear monótona de ruído filtrado linearmente.

Em primeiro lugar, a hipótese nula (H_0) para o algoritmo 0 pressupõe que uma série temporal discreta seja simplesmente um processo de ruído branco, isto é, supõe-se que os dados apresentem ausência de correlação entre os pontos observados, logo são *iid.*

[8] A passagem de uma classe de hipótese mais simples para outra mais complexa resulta da rejeição da classe de hipótese mais simples e assim sucessivamente.

Em segundo lugar, as hipóteses nulas (H_1 ou H_2) para os algoritmos 1, ou 2, pressupõem que os dados originais sejam provenientes de um processo Gaussiano linear (PGL) (tal como um modelo ARMA(p, q), com ruído de *input* branco Gaussiano) ou que os dados correspondam a um *output* de um processo dinâmico Gaussiano linear (PGL) distorcido por uma função monótona, estática e não-linear (ou seja, H_2 admite a não-Gaussianidade nos dados originais), em que os sub-rogados gerados por este algoritmo são conhecidos pelos processos da transformada de Fourier de amplitude Gaussiana ajustada (isto é, os processos de transformação Gaussiana). Donde, os processos dinâmicos lineares (sub-rogados) realizados por estes algoritmos apresentam apenas correlações lineares e são aleatórios. Isto é, os sub-rogados constrangidos, estocásticos e lineares são caracterizadas pela função de autocorrelação ou pelo espectro de potência de Fourier, em que Kantz e Schreiber (2005)[269] explicitaram que o teorema de Wiener-Khinchin comprova que a transformada de Fourier da função de autocorrelação é igual ao espectro de potência.

Normalmente, os métodos de geração dos sub-rogados estocásticos lineares são processos Gaussianos[9] e apresentam realizações consistentes com as hipóteses nulas subjacentes aos algoritmos apresentados: 0 - embaralhamento aleatório (*shuffling*) dos dados originais, 1 - processo de randomização das fases (*shuffling of the phases*) dos pares conjugados complexos da transformada discreta de Fourier (TDF) dos dados originais, consistente com um processo Gaussiano linear (PGL) e 2 - processo de randomização das fases (*shuffling of the phases*) dos pares conjugados complexos da TDF dos dados observados, consistente com um processo PGL de amplitude ajustada.

[9] Em regra, os sub-rogados gerados pelo algoritmo 0 são Gaussianos. Todavia, os processos realizados pelo algoritmo 0 podem ser não-Gaussianos, porque estes processos podem corresponder apenas a uma reordenação dos dados originais (i.e., "seguem" apenas um processo aleatório e *iid*).

Agora, caso a distribuição de probabilidade da estatística característica de caos q (tal como a dimensão de correlação) seja conhecida analiticamente para a hipótese nula do teste ϕ (por exemplo, a existência de um ruído filtrado linearmente no sinal), a região de rejeição encontra-se nas abas da distribuição especificada para um certo nível de significância α.

No caso contrário, a distribuição empírica da estatística discriminante q é formada numericamente pelo método de Monte Carlo[10] a partir dos $q^1, ..., q^M$ valores estimados para o conjunto dos M sub-rogados lineares consistentes com a hipótese nula respectiva (Kugiumtzis (2000) [284]). Por exemplo, a rejeição da hipótese nula de ocorrência de um processo Gaussiano linear (PGL, para o algoritmo 1) é determinada tanto pela ordenação hierárquica[11] da estatística discriminante q em teste como pelo valor da estatística do teste T ($T := S$)[12] para um dado nível de significância α, o que confere a validação dos resultados para a criação de novos métodos baseados na teoria do caos e nas dinâmicas não-lineares usados em finanças nos anos mais recentes.

Contudo, a rejeição da hipótese nula não nos indica que estejamos exclusivamente na presença de um sistema não-linear (com possíveis estruturas caóticas). Isto é, para o caso da utilização do algoritmo 2, apenas podemos afirmar que não é provável que os

[10] O método de Monte Carlo em termos de inferência estatística recorre a um processo de amostragem aleatória, com base na geração de números pseudo-aleatórios, onde são calculados os valores das características de caos, para múltiplas realizações (M) da hipótese nula ϕ.

[11] A rejeição da hipótese nula ϕ do teste implica que a estatística discriminante seleccionada q^0 para os dados originais apresente uma distribuição em ordem de primeiro lugar ou de último lugar, relativamente à distribuição em ordem da lista concatenada: $q^0, q^1, ..., q^M$, para os M sub-rogados realizados.

[12] A estatística do teste S, para um dado nível de significância α, é apresentada por:

$$S = \frac{\left|q^0 - \langle q \rangle\right|}{\sigma_q} \tag{3.9}$$

onde, q^0 é o valor da característica física no sinal original, $\langle q \rangle$ é o valor médio estimado da característica analisada para os M sub-rogados, e σ_q é o desvio padrão dos valores estimados das características físicas $q^1, ..., q^M$, para os M sub-rogados realizados por métodos numéricos.

Note-se que a estatística do teste S apresenta uma distribuição aproximada à distribuição normal para $M > 30$.

dados sejam gerados por um processo de transformação não-linear monótono de um ruído filtrado linearmente. Donde, é possível que o sistema compreenda uma transformação não-monótona, ou uma transformação não-Gaussiana, ou apresente um ruído dependente do estado (isto é, a título de exemplo, um ruído colorido típico de um modelo não-linear heterocedástico condicional autoregressivo: ARCH, GARCH, EGARCH, entre os semelhantes).

Algoritmo 0 - Sub-Rogados

O algoritmo 0 permite testar a hipótese nula de que a série temporal escalar em estudo é plenamente caracterizada por um processo de ruído branco. Neste contexto, apresentam-se agora as duas versões mais conhecidas para gerar os sub-rogados segundo este algoritmo.

A primeira versão do algoritmo 0 foi proposta inicialmente por Theiler *et al.* (1992) [497], em que os sub-rogados $\{s_n\}_{n=1}^N$ são gerados pelo embaralhamento aleatório da ordem temporal do sinal discreto original $\{y_n\}_{n=1}^N$.

Isto é, em primeiro lugar, realiza-se um conjunto de dados aleatórios *iid*[13] $\{\tilde{y}_n\}_{n=1}^N$, e reordena-se a série temporal original $\{y_n\}_{n=1}^N$ para apresentar a mesma distribuição de ordem do conjunto de dados aleatórios *iid* $\{\tilde{y}_n\}_{n=1}^N$. Logo, os sub-rogados $\{s_n\}_{n=1}^N$ gerados aleatoriamente são equivalentes à reordenação de $\{y_n\}_{n=1}^N$, que "segue" $\{\tilde{y}_n\}_{n=1}^N$. Por conseguinte, o processo de embaralhamento da ordem temporal da série temporal escalar original $\{y_n\}_{n=1}^N$ destrói qualquer correlação temporal de natureza linear e/ou não-linear. Por outro lado, esta versão do algoritmo 0 pode ser descrita como um processo de realizações constrangidas (permutações sem reposição), para a hipótese nula, pelo que

[13] Em regra, realiza-se um conjunto de dados aleatórios *iid*, que é normalmente um processo Gaussiano $\{\tilde{y}_n^{Gauss}\}_{n=1}^N$, com recurso a um gerador de números pseudo-aleatórios normalizados para a média e variância dos dados originais.

os sub-rogados realizados apresentam valores idênticos aos dados originais.

A segunda versão deste algoritmo apresentada por Small (2005) [462] inclui a simulação de sub-rogados, através da utilização de um processo de amostragem com reposição, onde cada elemento da série temporal observada pode ser seleccionado mais do que uma vez. Todavia, esta versão do algoritmo 0 poderá ser apenas preferível para os sinais que apresentam um elevado número de observações N, onde não existe o risco de obter sub-rogados repetidos e não-aleatórios.

É sabido, no entanto, que a segunda versão deste algoritmo é menos utilizada em relação à primeira versão do algoritmo 0 proposta por Theiler *et al.* (1992) [497], porque os dados originais e os sub-rogados gerados aleatoriamente não apresentam valores idênticos.

Algoritmo 1 - Sub-rogados

O algoritmo 1 de Theiler *et al.* (1992) [497] permite a realização de sub-rogados Gaussianos lineares que são produzidos por um ruído filtrado linearmente (completamente caracterizado pela função de autocorrelação e é um processo de realização aleatória). Logo, a hipótese nula especificada baseia-se em toda a estrutura linear da série temporal escalar observada, porque a aplicação do método da TDF remove eventuais estruturas não-lineares no sinal.

Há duas versões diferentes para este algoritmo. A primeira resulta do cálculo da transformada discreta de Fourier (TDF) numa série temporal escalar consistente com um processo Gaussiano linear (PGL) e do posterior embaralhamento aleatório das fases (*shuffling of the phases*[14]) ϕ_k da TDF, com recurso à aplicação do algoritmo 0 (primeira

[14] A fase (ou ângulo fase) ϕ_k da transformada discreta de Fourier, $d(w_k)$, é apresentada pela seguinte equação:

$$\phi_k = \arg(d(w_k)) = \arctan(\mathrm{Re}(d_c(w_k)), \mathrm{Im}(d_s(w_k))) \tag{3.10}$$

em que a função **arctan** apresenta dois argumentos - real e imaginário.

versão), concluindo-se o processo de construção dos sub-rogados, com base na inversa da transformada discreta de Fourier[15]. O processo de embaralhamento das fases da TDF (isto é, para eliminar qualquer estrutura não-linear) mantém a distribuição de amplitude[16] nos pares conjugados complexos da TDF $d(w_k)$, pelo que os sub-rogados gerados de forma aleatória apresentam o mesmo espectro de potência (amplitude quadrática ou periodograma da TDF) relativamente aos dados originais, mas não apresentam determinismo não-linear. Por outro lado, o embaralhamento das fases da transformada discreta de Fourier (TDF) ϕ_k deve ser realizado de modo a preservar a autenticidade da inversa da transformada de Fourier. No entanto, Small (2005)[462] refere que esta versão apresenta o mesmo tipo de problemas do algoritmo 0, porque ao efectuar-se o embaralhamento aleatório das fases (*shuffling of the phases*) da TDF não se introduz um processo aleatório suficiente.

A segunda versão do algoritmo 1 modificada mais tarde por Kantz e Schreiber (2005) [269] compreende o cálculo da transformada de Fourier rápida (TFR)[17] numa série temporal escalar consistente com um processo Gaussiano linear (PGL), e é apresentada pela

[15] A normalização da transformada de Fourier implica que a transformada inversa apenas tenha em conta a mudança do sinal na exponencial e a troca da k frequência com n, pelo que a TDF e a sua inversa são invertíveis e lineares.

[16] A amplitude das componentes complexas da TDF, $d(w_k)$, é apresentada por:

$$|d(w_k)| = \sqrt{\mathrm{Re}(d_c(w_k))^2 + \mathrm{Im}(d_s(w_k))^2} \tag{3.11}$$

[17] Em regra, a transformada discreta de Fourier (TDF) é calculada por um algoritmo eficiente. Este algoritmo é conhecido pela Transformada de Fourier Rápida (TFR), tendo sido proposto inicialmente por Gauss em 1805 e desenvolvida mais tarde por Cooley e Tukey (1965) [112]. Deste modo, a TFR apresenta vantagem computacional relativamente à TDF, devido ao decréscimo computacional significativo, isto é, de $O(N^2)$ para $O(Nlog_2(N))$.

expressão seguinte no domínio da frequência:

$$d(w_k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{N} Y_n e^{-i2\pi nk/N} \tag{3.12}$$

em que as k frequências de Fourier em unidades físicas são apresentadas por $w_k = k/N\Delta n$, Δn é o intervalo de amostragem (neste caso, $\Delta n = 1$), $k = 0, 1, ..., N-1$, N é a dimensão amostral do sinal, e i é a unidade imaginária (isto é, $\sqrt{-1}$). Agora, em vez de se efectuar o embaralhamento aleatório das fases, ϕ_k, da TDF $d(w_k)$, multiplicam-se as componentes complexas $d(w_k)$, por rotações de fases aleatórias $e^{i\phi_k}$, pelo que $d'(w_k) = d(w_k)e^{i\phi_k}$, em que $e^{i\phi_k}$ estão definidas de acordo com a fórmula de Euler, isto é:

$$e^{i\phi_k} = \cos\phi_k + i\sin\phi_k, \tag{3.13}$$

onde as fases $\phi_k \sim U[0, 2\pi[$ são números aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo $[0, 2\pi[$, e $\phi_{N-k} = -\phi_k$ (anti-simétrica) para que seja possível obter a transformada inversa.

Finalmente, calcula-se a inversa da TFR de $d'(w_k)$, no domínio do tempo [Kantz e Schreiber (2005) [269]], isto é:

$$y'_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} d'(w_k) e^{i2\pi nk/N} \tag{3.14}$$

em que a nova série temporal apresenta números aleatórios para o espectro prescrito e as diferentes realizações das fases, ϕ_k, permitem a geração dos novos sub-rogados y'_n, para $n = 1, ..., N$, consistentes com a hipótese nula especificada (ruído Gaussiano correlacionado linearmente e aleatório). Portanto, os sub-rogados realizados preservam a distribuição Gaussiana (pelo menos assintoticamente, quando N apresenta uma dimensão elevada) e apresentam o mesmo espectro de potência relativamente à série temporal original.

É, no entanto, questionável a quantidade (reduzida) de randomização ($e^{i\phi_k}$) a adicionar aos sub-rogados para que o processo não seja excessivo.

Algoritmo 2 - Sub-Rogados

O algoritmo 2 dos sub-rogados proposto por Theiler *et al.* (1992) [497] estende a ideia da aplicação do algoritmo 1 aos sistemas que apresentam uma distribuição de ordem não-Gaussiana. Com efeito, o algoritmo 2 tem vindo a ser bastante popular nos últimos anos para a hipótese nula (H_2) de que uma série temporal discreta observada corresponda a uma transformação não-linear estática monótona[18] de um ruído filtrado linearmente[19], onde os sub-rogados aleatórios gerados pelo algoritmo 2 são designados pelos sub-rogados da transformada de Fourier de amplitude ajustada (AAFT - *Surrogates*: *Amplitude Adjusted Fourier Transform*).

A hipótese nula do algoritmo 2 definida pelos autores é, assim, apresentada pela seguinte sequência de passos aplicados a uma série temporal discreta não-linear x_n, para $n = 1, ..., N$:

- O processo é iniciado para os dados originais x_n construindo-se de forma paralela uma série temporal Gaussiana y_n^* (ruído branco Gaussiano), onde cada elemento é gerado independentemente a partir de um processo gerador de números pseudo-aleatórios Gaussianos;

- Reordenação do ruído branco Gaussiano, y_n^*, para que este apresente a mesma

[18] A monotonia da função $h(\cdot)$ mantém a ordem temporal da série temporal, isto é, os maiores valores de *input* produzem os maiores valores de *output*, e reciprocamente.

[19] Para uma melhor compreensão da hipótese nula (H_2) subjacente ao algoritmo 2, suponha-se que a série temporal observada $\{x_n\}_{n=1}^N$ é expressa por uma função de observação não-linear estática monótona $h(\cdot)$ de uma série temporal Gaussiana (linear) estacionária $\{y_n\}_{n=1}^N$, onde $x_n = h(y_n)$. A título de exemplo, suponha-se que a série temporal observada $\{x_n\}_{n=1}^N$ é apresentada por:

$$x_n = y_n^3 \tag{3.15}$$

onde y_n, $n = 1, ..., N$, estimado é expresso por um modelo autoregressivo de ordem 1: AR(1). Em geral, $y_n, n = 1, ..., N$ é um processo ARMA(p, q), onde os termos residuais do modelo apresentam um ruído branco Gaussiano e aleatório $e_n \sim IN(0, \sigma^2)$.

distribuição em ordem relativamente aos dados originais, x_n, em que y_n^* passa a ser designada por y_n (nova série temporal Gaussiana), que "segue" x_n e compreende a simulação $y_n = h^{-1}(x_n)$. Assim, esta simulação ocorre através da aplicação efectiva da inversa da função de observação $h(\cdot)$ não-linear estática monótona. Isto é, seja $F_x(x)$ definido como a função de distribuição cumulativa (FDC) de x_n e F_0 definido como a FDC Gaussiana, constata-se a igualdade: $y_n = g^{-1}(x_n) = F_0^{-1}(F_x(x_n))$, onde $g^{-1}(\cdot)$ apresenta uma distribuição de amplitude Gaussiana, e coincide com $h^{-1}(\cdot)$, para um certo factor de normalização (isto é, quando $N \longrightarrow \infty$), devido à singularidade da inversa da função monótona $h(\cdot)$ (Kugiumtzis (2000a) [283], baseado em Papoulis (1991) [393]);

- Geração de uma nova série temporal linear e aleatória (expressa por y_n^{TF}), através da aplicação do algoritmo 1 à série temporal Gaussiana y_n. Assim, numa primeira etapa, procede-se ao cálculo da transformada discreta de Fourier (TDF) de y_n no domínio da frequência, seguindo-se o processo de embaralhamento aleatório das fases da TDF, para remover qualquer dinâmica não-linear de y_n. Numa segunda etapa, calcula-se a inversa da transformada discreta de Fourier para gerar a série temporal y_n^{TF} (sub-rogado realizado) no domínio do tempo. Isto é, a série temporal y_n^{TF}, que se pretende realizar múltiplas vezes, é agora um processo Gaussiano linear (PGL) aleatório, explicitado por um ruído (Gaussiano) filtrado linearmente, previamente à transformada $h(\cdot)$; e

- Reordenação da série temporal escalar original, x_n, para apresentar a mesma ordem de distribuição da série temporal y_n^{TF}, onde x_n reordenado, agora especificado pelo sub-rogado z_n para a simulação $z_n = h(y_n^{TF})$, proporciona o sub-rogado gerado

para a série temporal observada x_n. Isto é, o sub-rogado gerado é expresso por $z_n = g(y_n^{TF}) = F_x^{-1}(F_0(y_n^{TF}))$, onde F_0 representa a FDC normal, e $h(\cdot) = g(\cdot)$, se a função composta $g(\cdot)$ é monótona (Kugiumtzis (2000a) [283]).

É sabido que a aplicação do algoritmo 2 (isto é, do algoritmo AAFT: *Amplitude Adjusted Fourier Transform*) numa série temporal estacionária finita x_n, para $n = 1, ..., N$, consistente com uma transformação não-linear monótona de um ruído filtrado linearmente (hipótese nula) pretende a realização de sub-rogados z_n, para $n = 1, ..., N$, com idênticas autocorrelações amostrais aos dados originais x_n. Todavia, a realização destes processos (sub-rogados z_n) não apresenta espectros empíricos idênticos (tal como, não apresenta funções de autocorrelação iguais) aos dados originais x_n. Assim, de acordo com Schreiber e Schmitz (1996) [446], a primeira causa destes desvios deve-se ao processo de randomização das fases da TDF de y_n (que "segue x_n"), porque este processo preserva apenas a distribuição Gaussiana em média. Por outro lado, a não-linearidade de $h(\cdot)$ implica um certo desvio no espectro entre os sub-rogados z_n e os dados originais x_n. A segunda causa da discrepância no espectro entre os sub-rogados e os dados originais apontada pelos autores resulta do desvio entre a função Gaussiana $g^{-1}(\cdot)$ e a função $h^{-1}(\cdot)$, quando N é pequeno.

No entanto, o algoritmo AAFT para uma série temporal não-finita ($N \longrightarrow \infty$) torna-se correcto assimptoticamente (isto é, $g^{-1}(\cdot) = h^{-1}(\cdot)$, para os primeiros três passos do algoritmo, e a função $h(\cdot)$ torna-se fracamente não-linear), pelo que os processos realizáveis, z_n, e o sinal original, x_n, apresentam funções de autocorrelações amostrais iguais (isto é, $\rho_x(\tau) = \rho_z(\tau)$, para $\tau = 1, ..., \tau_{\max}$) e a mesma distribuição de amplitude, isto é, $F_x(x) = F_z(z)$, onde $F_x(x)$ é a função de distribuição cumulativa amostral (FDC) de x_n.

Pivotalness da Dimensão de Correlação: Hipóteses Lineares

Os processos (sub-rogados) estocásticos lineares consistentes com as hipóteses nulas (H_0, H_1, H_2) subjacentes aos algoritmos 0, 1 e 2 de Theiler *et al.* (1992) [497], constituem as seguintes formas de ruído: ruído independente e identicamente distribuído (ruído *iid*), transformação linear de ruído filtrado linearmente (com *inputs iid*), e transformação não-linear monótona de ruído filtrado linearmente, em que estas duas últimas formas de ruído podem ser transformadas num processo de ruído *iid* (H_0), que é, em geral, um processo de ruído branco Gaussiano $IN(0,1)$. Isto é, os sub-rogados lineares estocásticos passam a apresentar uma dimensão infinita, em que a dimensão de correlação d_c é infinita. Assim, de acordo com Small *et al.* (2001) [468], para uma dimensão de correlação infinita ($d_c > d_e$), a série temporal estocástica mergulhada "preenche" o espaço de mergulho, resultando numa dimensão de correlação[20] d_c *pivotal* para os sub-rogados lineares estocásticos consistentes com as hipóteses nulas apresentadas (H_0, H_1, H_2).

A aproximação de Small (2005) [462] foi a de demonstrar que os sub-rogados estocásticos lineares transformados num processo de ruído branco Gaussiano $IN(0,1)$ são pelo menos uma função[21] C^2. Por outro lado, a função C^2 num conjunto limitado (isto é, numa série temporal finita ou num atractor limitado) distorce a função de distância (métrica) num espaço de mergulho $X \in \mathbb{R}^{d_e}$, por um factor limitado, tal como foi demonstrado por Takens (1993) [492], permitindo que o integral de correlação $lim_{N \longrightarrow \infty} C(\varepsilon, d_e)$ seja limitado entre duas métricas definidas em $X \in \mathbb{R}^{d_e}$, pelo que a dimensão de correlação,

[20] Para a estimativa da dimensão de correlação d_c com acuidade (valores não inteiros) nas dinâmicas caóticas é necessário estimar pelo menos a dimensão mínima de mergulho, d_e, na série temporal a mergulhar em $\mathbb{R}^{d_e}$, tal que $d_e > d_c + 1$.

[21] A função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 quando existem as derivadas parciais até à segunda ordem em todos os pontos de A e as funções, $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}) : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, são contínuas, para todo o i, j.

d_c, torna-se invariante para cada métrica utilizada (ou seja, d_c torna-se *pivotal*). Por conseguinte, uma série temporal estocástica mergulhada em $\mathbb{R}^{d_e}$ apresenta o mesmo valor da dimensão de correlação d_c, relativamente a duas métricas diferentes: $\rho(x, y)$ e $\rho'(x, y)$, para $x, y \in \mathbb{R}^{d_e}$ (Small *et al.* (2001) [468]).

***Pivotalness* do Integral de Correlação: Hipóteses Lineares**

Parta-se agora de uma hipótese nula simples, ϕ_*, na qual a série temporal observada $y_n, n = 1, ..., N$ apresenta uma distribuição normal estandardizada de média zero e variância unitária: $y_n \sim N(0, 1)$. Isto é, o conjunto de todos os processos $\mathcal{F}\phi_*$ consistentes com a hipótese nula ϕ_* especificada é único, resultando numa estatística T *pivotal* (Definição 3.2.1) para o integral de correlação $lim_{N \longrightarrow \infty} C(\varepsilon, d_e)$, ou para a dimensão de correlação d_c, ou para outra estatística descriminante estimada. Com efeito, Small (2005) [462] definiu

Corolário 3.3.1 *As estatísticas baseadas numa estimativa não enviesada do integral de correlação são pivotal para o algoritmo 0.*

Caso uma série temporal y_n, $n = 1, ..., N$ seja definida por um processo de ruído filtrado linearmente (isto é, para a hipótese ϕ_1 proposta para o algoritmo 1), e se em particular corresponde a um processo $F \in \mathcal{F}_{\phi_1}$ ajustado por um modelo ARMA(p, q), onde $e_n \sim IN(0, 1)$, então uma transformação linear adequada do modelo ARMA(p, q) resulta num processo de ruído *iid* Gaussiano. Logo, obtêm-se um resultado semelhante para o algoritmo 1.

Corolário 3.3.2 *As estatísticas baseadas numa estimativa não enviesada do integral de correlação são pivotal para o algoritmo 1.*

Se uma série temporal x_n, $n = 1, ..., N$ é expressa por uma transformação não-linear monótona estática de um ruído filtrado linearmente, y_n, $n = 1, ..., N$ para a hipótese ϕ_2, então a transformação não-linear monótona estática $h(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pode pelo menos ser aproximada arbitrariamente por uma função C^2, porque a dimensão de correlação, d_c, não altera na série temporal mergulhada em $\mathbb{R}^{d_e}$, tornando-se numa estatística pivotal para hipótese nula definida (H_2). Logo, obtém-se um resultado análogo para o algoritmo 2.

Corolário 3.3.3 *As estatísticas baseadas numa estimativa não enviesada do integral de correlação são pivotal para o algoritmo 2.*

3.3.3 Algoritmos: *Iterative Amplitude Adjusted Fourier Transform* (*IAAFT*), *Corrected Amplitude Adjusted Fourier Transform* (*CAAFT*), e o Teste do Bi-Espectro de Hinich

Apresentam-se agora alguns algoritmos construídos por diversos autores para aperfeiçoar o algoritmo 2 (algoritmo AAFT: *Amplitude Adjusted Fourier Transform*), e o teste do bi-espectro de Hinich (1982) [238] para ultrapassar o problema da ocorrência de séries temporais estacionárias lineares não-Gaussianas.

Em primeiro lugar, faz-se referência ao algoritmo *Iterative Amplitude Adjusted Fourier Transformed* (IAAFT) proposto por Schreiber e Schmitz (1996) [446], que corresponde a uma versão iterativa do algoritmo AAFT para corrigir os desvios no espectro e os desvios na distribuição de probabilidade empírica entre os sub-rogados realizáveis e os dados originais.

Em segundo lugar, considere-se o algoritmo *Corrected Amplitude Adjusted Fourier Transform* (CAAFT) proposto por por Kugiumtzis (2000) [283] para corrigir os desvios na função de autocorrelação (e no espectro de potência) entre os sub-rogados e a série temporal observada, para a nova hipótese nula de que uma série temporal corresponda a

uma transformação não-linear estática e não-monótona de dados "reais".

Em terceiro lugar, destaque-se o teste do bi-espectro de Hinich (1982) [238] que testa a presença de linearidade ou de Gaussianidade, numa série temporal.

Algoritmo: *Iterative Amplitude Adjusted Fourier Transform* (IAAFT)

Como já foi referido, o algoritmo IAAFT - *Iterative Amplitude Adjusted Fourier Transform* de Schreiber e Schmitz (1996) [446] decorre do algoritmo AAFT e corrige de forma iterativa os desvios no espectro e os desvios na distribuição empírica entre os sub-rogados Gaussianos (lineares) e o sinal original. O método subjacente a este algoritmo não apresenta qualquer pressuposto sobre a forma da função não-linear monótona estática $h(\cdot)$, e de modo equivalente ao algoritmo 2 (algoritmo AAFT) serve de teste contra a hipótese nula de ocorrência de uma série temporal $x_n,\ n = 1, ..., N$ consistente com uma transformação não-linear monótona de um ruído filtrado linearmente, em que a não-linearidade e o caos possam existir. Assim, de acordo com Maiwald *et al.* (2008) [327] o algoritmo é apresentado pela seguinte sequência de passos:

a) Criação prévia de uma lista ordenada a partir da amostra original ($x_{(1)} \leq ... \leq x_{(N)}$) e cálculo do seu periodograma (ver Definição 3.3.2),

$$I(w_k) = \left| \frac{\sum_{n=1}^{N} x_n e^{-inw_k}}{\sqrt{N}} \right|^2 ,$$

em que as frequências angulares são expressas por $w_k = 2\pi k/N$, $k = 0, ..., N-1$, e N é a dimensão da amostra;

b) Passo de inicialização: Geração de uma permutação aleatória (amostra sem substituição) $\left\{x_n^{a,(0)}\right\}_{n=1}^{N}$, para $j = 0$ (inicial), a partir dos dados originais $\{x_n\}_{n=1}^{N}$;

c) Passos de iteração:

(i) Para cada iteração de ordem j, calcula-se a transformada discreta de Fourier de $\left\{x_n^{a(j)}\right\}_{n=1}^{N}$, seguindo-se a substituição das suas amplitudes quadráticas (periodogramas) pelos periodogramas $I(w_k)$ dos dados originais ordenados $(x_{(1)} \leq ... \leq x_{(N)})$, sem que haja alteração das fases da TDF de $\left\{x_n^{a(j)}\right\}_{n=1}^{N}$, no domínio de Fourier, procedendo-se seguidamente ao cálculo da inversa da transformada de Fourier no domínio do tempo, isto é:

$$x_n^{b,(j)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{s=0}^{N-1} \frac{\hat{d}(w_s^{a,(j)})}{\left|\hat{d}(w_s^{a,(j)})\right|} \sqrt{|I(w_s)|} e^{inw_s} \tag{3.16}$$

onde $\hat{d}(w_s^{a,(j)}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{s=1}^{N} x_s^{a,(j)} e^{-inw_s}$ é a transformada discreta de Fourier de $\left\{x_s^{a,(j)}\right\}_{s=1}^{N}$, e as frequências angulares são expressas por $w_s = 2\pi s/N$, $s = 0, ..., N-1$, e N é a dimensão da amostra. Ou seja, este passo de iteração (i) contribui para convergência no espectro de potência de Fourier entre os sub-rogados aleatórios realizados e os dados originais, mas altera a distribuição de probabilidade entre estes.

(ii) A série resultante de (i) é "redimensionada" (classificada em ordem) de acordo com os dados originais x_n, isto é:

$$x_n^{a,(j+1)} = x_{(rank_n^j)} \tag{3.17}$$

em que $x_{(rank_n^j)}$ é a lista ordenada de $x_n^{b,(j)}$ (especificada por: $x_1^{b,(j)}, ..., x_N^{b,(j)}$) que "segue" a ordem dos dados originais ordenados $(x_{(1)} \leq ... \leq x_{(N)})$. Isto é, este passo de iteração (ii) contribui para a convergência na distribuição entre os sub-rogados e os dados originais, mas altera a convergência no espectro entre estes.

d) Repetição dos passos iterativos (i) e (ii) até que os desvios no espectro e os desvios na distribuição entre os sub-rogados gerados e os dados originais sejam suficientemente pequenos (para um determinado limite de tolerância atribuído).

Mais tarde, Kugiumtzis (2000) [284] e Schreiber e Schmitz (2000) [447] justificaram a preferência na geração de sub-rogados pelo algoritmo IAAFT *vs* algoritmo AAFT, pelas razões apresentadas, apesar de não ser esperada a convergência absoluta no espectro de potência de Fourier, quando N é finito. Isto é, os processos realizados (sub-rogados) apresentaram uma melhor aproximação às correlações lineares originais e apresentaram menores enviesamentos nas distribuições empíricas, relativamente aos dados observados.

Algoritmo: *Corrected Amplitude Adjusted Fourier Transform* (CAAFT)

Como é sabido, o algoritmo CAAFT - *Corrected Amplitude Adjusted Fourier Transform* proposto por Kugiumtzis (2000) [283] é especificado pelo "algoritmo corrigido do algoritmo AAFT". Com efeito, no ano anterior Kugiumtzis (1999) [282] já tinha referido que os sub-rogados realizados pelo algoritmo AAFT podiam apresentar autocorrelações amostrais distintas dos dados originais, quando a função $h(\cdot)$ não-linear estática é não-monótona. Assim, o novo algoritmo proposto pelo autor apresenta correcções dos desvios na autocorrelação amostral e na distribuição de amplitude entre os sub-rogados e os dados originais, através de um processo de aproximação às realizações típicas dos sub-rogados, para a nova hipótese nula de que uma série temporal corresponda a uma transformação não-linear estática e não-monótona de dados reais. O algoritmo CAAFT corresponde deste modo a uma versão modificada do algoritmo AAFT, **contornando-se o problema da transformação não-monótona**[22] (e da provável distribuição conjunta não normal de y_n), através da utilização de uma **nova transformação monótona** $\hat{\psi}$, com recurso ao método de interpolação linear (*piecewise linear function*). Donde, a autocorrelação amostral para os

[22] Se $h(\cdot)$ é uma função não-linear estática e não-monótona de dados reais, verifica-se que $g(\cdot)^{-1}$ não coincide com $h(\cdot)^{-1}$, para um certo factor de normalização (isto é, quando $N \longrightarrow \infty$), pelo que a simulação $y_n = g^{-1}(x_n)$ não apresenta uma distribuição normal conjunta no 1° passo do algoritmo AAFT.

novos sub-rogados (quase-paramétricos) construídos torna-se muito aproximada à autocorrelação amostral dos dados reais.

Por conseguinte, o algoritmo CAAFT definido pelo autor compreende a seguinte sequência de passos aplicados a uma série temporal original x_n, $n = 1, ...N$:

a) **Implementação plena do algoritmo AAFT** para gerar y_n (processo Gaussiano linear que "segue" x_n), y_n^{TF} ("sub-rogado" de y_n), e z_n (sub-rogado equivalente a x_n reordenado em relação a y_n^{TF});

b) **Escolha** de $\tau_{\max}$[23] e **cálculo** das **funções de autocorrelação amostrais**: $\rho_x(\tau)$, $\rho_y(\tau)$ e $\rho_z(\tau)$, para $\tau = 1, ..., \tau_{\max}$;

c) **Estimativa** pelo **método de interpolação linear** do **parâme- tro monótono** ψ ($\approx g^{-1}(\cdot)$ monótona por construção, para o algoritmo AAFT), com base na função de autocorrelação amostral $\rho_y(\tau)$ como função da autocorrelação amostral $\rho_z(\tau)$ dos sub-rogados realizados z_n. Por exemplo, podemos obter um valor aproximado para o **parâmetro monótono** $\hat{\psi}$, com base no **gráfico** de $\boldsymbol{\rho}_y(\boldsymbol{\tau})$ (ordenadas) em $\boldsymbol{\rho}_z(\boldsymbol{\tau})$ (abcissas), para $\tau = 1, ..., \tau_{\max}$.

d) **Estimativa** de uma **nova autocorrelação amostral**, $\rho_w(\tau)$, a partir de $\rho_w(\tau) = \hat{\psi}(\rho_x(\tau))$, em que $\rho_w(\tau)$ é o **novo PGL que "segue"** x_n original, $\tau = 1, ..., \tau_{\max}$, e $\rho_z(\tau) \approx \rho_x(\tau)$ no algoritmo AAFT;

e) **Selecção** de uma **ordem** p **adequada** para a **construção do modelo autoregressivo** AR(p) (isto é, para $p = \tau_{\max}$), a partir das **autocorrelações**, $\rho_w(\tau)$, **estimadas** no **passo anterior** (**d**), e **estimativa** dos **parâmetros do modelo** AR(p), com recurso às equações lineares de *Yule-Walker*. Por exemplo, em Box *et al.* (1994) [64] são apresentada

[23] Em geral, a escolha óptima de $\tau_{\max}$ (número de *lags*) ocorre quando a função de autocorrelação amostral dos dados originais $\rho_x(\tau)$ se aproxima de zero (Kugiumtzis (2000) [283]).

as equações de *Yule-Walker*, em que os parâmetros autoregressivos $(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_p)$ de um modelo AR(p) estacionário são expressos em termos das p autocorrelações amostrais $(\rho_1, \rho_2, ..., \rho_p)$, isto é, com base na seguinte equação:

$$\rho_l = \phi_1 \rho_{l-1} + \phi_2 \rho_{l-2} + \cdots + \phi_p \rho_{l-p},\ l = 1, 2, ..., p \tag{3.18}$$

f) **Geração** de uma **nova série temporal Gaussiana w** a partir do **modelo** AR(p) **estacionário** (isto é, quando as raízes do polinómio característico expressas em módulo se encontram fora do círculo unitário);

g) **Transformação** da **série temporal normal w** no **sub-rogado v** (**similar** a **z** no **algoritmo AAFT**), com **base na simulação** $v_n = g(w_n) = F_x^{-1}(F_0(w_n))$, $n = 1, ..., N$, onde $g(\cdot)$ é monótona por construção, F_0 é a função de distribuição cumulativa (FDC) normal, F_x^{-1} é a inversa da FDC de x_n, e v_n simboliza o sub-rogado z_n no algoritmo AAFT;

h) **Repetição** dos **passos do algoritmo** de **a**) a **g**), isto é, k **vezes** (ou seja, para k experimentações) para **gerar os sub-rogados** $\mathbf{v^1}, ..., \mathbf{v^k}$;

i) **Cálculo das autocorrelações amostrais** $\left\{\rho_v^1, ..., \rho_v^k\right\}$ para os **sub-rogados** $\mathbf{v^1}, ..., \mathbf{v^k}$, para **encontrar a autocorrelação** ρ_v^k **mais próxima de** ρ_x, que proporciona a **escolha óptima**[24] **de** ρ_w;

j) **Utilização** de **novo do modelo** AR(p), a partir da **autocorrelação óptima escolhida** $\rho_w(\tau)$ para as k **experimentações seleccionadas**, seguindo-se a **geração de** M **sub-rogados v,** com base na **repetição dos passos f**) e **g**) M **vezes.**

[24] Uma **forma robusta** de **determinar o número de experimentações** (k) compreende a **minimização do erro:** $\sum_{i=1}^{\tau}[\rho_x(i) - \rho_v^j(i)]^2$, para $j = 1, ..., k$, e $\tau = 1, ..., \tau_{\max}$, **escolhendo-se** posteriormente a **experimentação** k que **apresenta o erro mínimo com maior frequência**, em que os $\tau_{\max}$ mínimos são sucessivamente actualizados para as k experimentações (Kugiumtzis (2000) [283]).

Por último, acrescente-se que os sub-rogados gerados por este algoritmo estimam autocorrelações amostrais muito próximas dos dados originais, apesar de normalmente apresentarem uma variância maior em relação aos sub-rogados gerados pelo algoritmo AAFT. Por outro lado, Kugiumtzis (1999) [282] especifica a falha do algoritmo AAFT, quando ocorre uma transformação não-monótona em situações reais, o que favorece a rejeição da hipótese nula (H_2: transformação não-linear monótona de ruído filtrado linearmente) na ausência de não-linearidade no sinal observado. Donde, o algoritmo CAAFT parece ser mais apropriado para dados finitos reais, quando a monotonicidade de $h(\cdot)$ não é garantida.

Teste do Bi-Espectro de Hinich

O **teste** do **bi-espectro** proposto por Hinich (1982) [238] **foi construído** para **detectar a não-linearidade** ou **a não-Gaussianidade** numa **série temporal estacionária**. Com efeito, Hinich *et al.* (2005) [240] referiram que os sub-rogados *standard* lineares de Theiler *et al.* (1992) [497] podem rejeitar a hipótese nula de linearidade de uma série temporal na presença de dados reais lineares não-Gaussianos. Por outro lado, Hinich *et al.* (2005) [240] mostraram que os métodos de geração de sub-rogados lineares por meio de processos Gaussianos podem mesmo falhar na manutenção dos níveis de significância nos testes de hipóteses de linearidade no sinal baseados nas estatísticas dos testes mais simples.

O teste do bi-espectro de Hinich (1982) [238] foi elaborado para a detecção da não-linearidade em séries temporais estacionárias na sequência dos trabalhos anteriores de Hasselman *et al.* (1963) [228], Van Ness (1966) [512], Brillinger e Rosenblatt (1967a, 1967b) [69], [70], Rao e Gabr (1980) [419], Lii e Rosenblatt (1982) [307], entre outros. Aliás, Hasselman *et*

al. ((1963) [228], citado por Hinich (1982) [238]) já tinham concluído que o bi-espectro[25] constitui uma medida da interacção não-linear multiplicativa nas componentes de frequência de uma série temporal estacionária $\{y_n\}_{n=1}^{N}$. Mais ainda, o teste é não-paramétrico e apresenta vantagens nas propriedades assintóticas do seu estimador[26], e é expresso pela dupla transformada discreta de Fourier da função do momento (ou da cumulante) de terceira ordem de uma série temporal estacionária. O teste é, consequentemente, o poli-espectro de terceira ordem de um processo estocástico estacionário de média nula.

Agora, conforme explicitado por Brockett *et al.* (1988) [74], o bi-espectro é uma função periódica espacial cujos valores no plano (*outputs*) são determinados pelas relações simétricas de pares de frequências diferentes ($f_1,\ f_2$) (isto é, *inputs*) especificadas no seu domínio principal triangular: $\Omega = \left\{(f_1, f_2) : 0 < f_1 < \frac{1}{2},\ f_2 < f_1,\ 2f_1 + f_2 < 1\right\}$. Deste modo, Hinich (1982) [238] procedeu nas estimativas do bi-espectro $B_{xxx}(f_1, f_2)$ e dos espectros de potência $S_{xx}(f)$, tendo posteriormente estimado a função quadrática da *skewness* $\Gamma^2(f_1, f_2)$[27] (Equação (3.22)), para todos os pares de frequências diferentes, com

[25] O bi-espectro de uma série temporal real estacionária $\{y_n\}_{n=1}^{N}$, na qual o seu valor médio é nulo $E[y_n] = 0$, é expresso pela dupla transformada de Fourier da função do momento (ou da cumulante) de terceira ordem para os pares de frequências diferentes (f_1, f_2) no seu domínio principal:

$$B_{xxx}(f_1, f_2) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_{xxx}(r, s) e^{[-2\pi i(f_1 r + f_2 s)]} \tag{3.19}$$

onde $|C_{xxx}(r, s)|$ é somável e é a função cumulante de terceira ordem (bi-covariância), isto é:

$$C_{xxx}(r, s) = E\left[y(n + r)y(n + s)y(n)\right] \tag{3.20}$$

para os *lags* r e s.

[26] Por exemplo, Hinich e Patterson (1985) [239] aplicaram o teste do bi-espectro em 15 séries temporais financeiras (*daily stock returns*) com dimensão elevada ($N = 3881$).

[27] Parta-se do pressuposto de que um processo estacionário linear (filtro linear) é apresentado pela equação:

$$y_n = \sum_{s=0}^{\infty} \psi_s \varepsilon_{n-s} \tag{3.21}$$

recurso aos métodos computacionais.

A **linearidade** ou a **Gaussianidade** de uma **série temporal estacionária** são testadas directamente para as respectivas **hipóteses nulas** do **teste** do **bi-espectro**, em que as **estimativas de** $\Gamma^2(f_1, f_2)$ são **quase-constantes** ou **aproximam-se** do **valor zero** na presença de um **bi-espectro nulo**. No seu trabalho, Hinich (1982) [238] derivou o teste estatístico de linearidade (hipótese nula) numa série temporal estacionária com base na estimativa da amplitude interquartil da função quadrática da *skewness*, em que o teste apresenta uma distribuição assintótica a uma normal, sob a hipótese nula. Por exemplo, para um valor estimado de $\Gamma^2(f_1,\, f_2)$ não-constante a sua amplitude interquartil torna-se elevada, pelo que a hipótese nula de linearidade da série temporal é rejeitada para um determinado nível de significância escolhido α. Por outro lado, o autor construiu o teste de Gaussianidade (hipótese nula) numa série temporal estacionária com base nas estimativas dos desvios aleatórios de $\Gamma^2(f_1,\, f_2)$ do valor 0, em que o teste apresenta uma

onde $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{N} \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $|\psi_s| < \infty$, e $\mu_3 = E[\varepsilon_n^3]$ é expresso pelo momento de terceira ordem do processo das inovações. Donde, a série temporal linear apresentada é especificada como Gaussiana se a distribuição das inovações independentes apresenta uma distribuição normal. Neste contexto, Hinich (1982) [238] mostrou que a função quadrática da skewness, para todos os pares de frequências (f_1, f_2) no domínio principal do bi-espectro, é apresentada por:

$$\Gamma^2(f_1, f_2) = \frac{|B_{xxx}(f_1, f_2)|^2}{S_{xx}(f_1)S_{xx}(f_2)S_{xx}(f_1 + f_2)} = \frac{\mu_3^2}{\sigma_\varepsilon^6} \tag{3.22}$$

em que $\sigma_\varepsilon^2 = E[\varepsilon_n^2]$, $\mu_3 = E[\varepsilon_n^3]$, $B_{xxx}(f_1, f_2)$ é o bi-espectro apresentado na Equação (3.19), e $S_{xx}(f)$ é o espectro de potência de Fourier. Ou seja, $S_{xx}(f)$ resulta da transformada discreta de Fourier (TDF) da função de autocovariância do sinal observado, isto é:

$$S_{xx}(f) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_{xx}(s) e^{[-2\pi i f s]} \tag{3.23}$$

em que $C_{xx} = E[y(n+s)y(n)]$, para o lag s, é conhecida pela função do momento de segunda ordem.

Por fim, se as inovações do processo linear $\varepsilon(n)$ são agora não-Gaussianas e se $\mu_3 = E[\varepsilon_n^3] \neq 0$, então a cumulante de terceira ordem $C_{xxx}(r, s) = E\left[y(n+r)y(n+s)y(n)\right] \neq 0$ para muitos valores de r e s. Donde, o bi-espectro $B_{xxx}(f_1, f_2) \neq 0$, pelo que se rejeita a hipótese nula de Gaussianidade na série estacionária linear, para um dado nível de significância escolhido α.

distribuição assintótica aproximada à $N(0,1)$ sob a hipótese nula. Isto é, se as estimativas dos desvios apresentados se afastarem do valor nulo, rejeita-se a hipótese nula de presença de distribuição Gaussiana. Como já foi referido, o teste do bi-espectro de Hinich (1982) [238] testa a hipótese nula de ausência de dependência não-linear de terceira ordem, isto é, onde a função *skewness* se encontra relacionada com a cumulante de terceira ordem (bi-covariância), ou com o bi-espectro, e é plana. Logo, a rejeição da hipótese nula do teste sugere a existência de um processo não-linear.

A título de exemplo, na Figura 3.1 é apresentado um mapa de baixo relevo (*bas-relief map*) da estimativa do bi-espectro estandardizado por Hinich e Patterson (1985) [239] nas rendibilidades diárias das acções (*daily stock returns*) da eléctrica *Carolina Power & Light*, com sede no Estado da Carolina do Norte dos EUA.

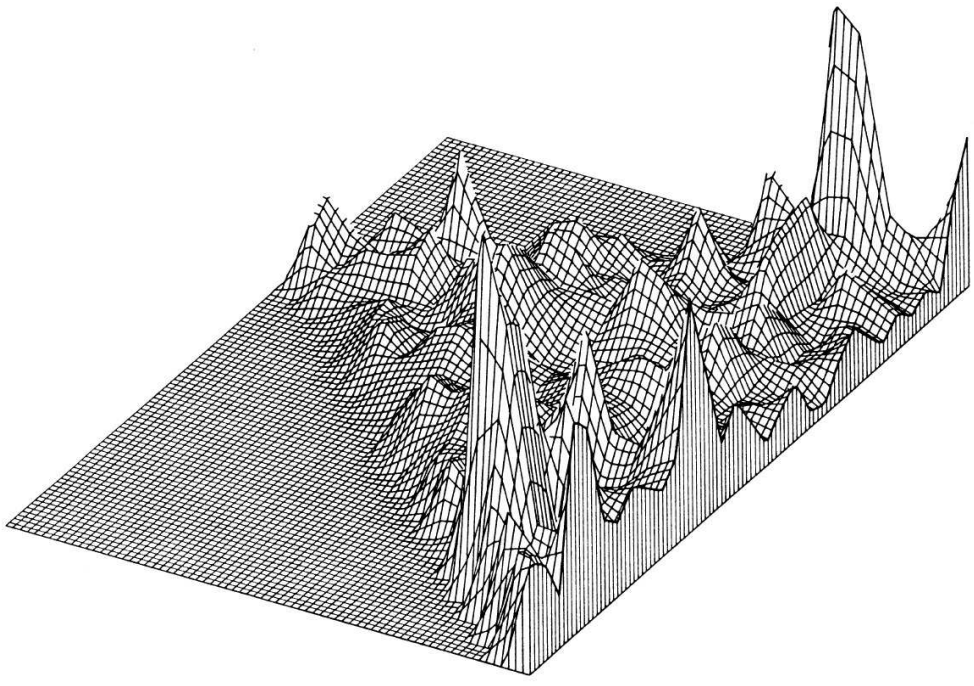


Figura 3.1: *Bas-relief map* do bi-espectro estimado nas rendibilidades da *Carolina Power & Light*.

Com efeito, através da observação do mapa na Figura 3.1 os autores rejeitaram as hipóteses nulas de linearidade e de Gaussianidade nas rendibilidades diárias das acções da eléctrica *Carolina Power & Light*, porque a estimativa do bi-espectro estandardizado apresentou um afastamento significativo do valor zero.

É sabido que todas as séries temporais Gaussianas estacionárias são lineares, existindo ainda séries temporais não-Gaussianas lineares, que resultam de processos de médias móveis (MA) de inovações aleatórias puras e não-Gaussianas (Hinich e Patterson (1985) [239]). Por outro lado, a não-linearidade presente em séries temporais estacionárias não é compatível com a realização de processos *iid* e/ou Gaussianos.

Importa agora salientar que a opção pelo tipo de teste de não-linearidade (e algoritmo subjacente) a utilizar é controversa na comunidade científica. Recentemente, Schreiber e Schmitz (2000) [447] argumentaram que, se por um lado subsistem dúvidas sobre a aplicação do teste de não-linearidade através do algoritmo AAFT em séries temporais de pequena dimensão (N), por outro lado, a função de observação não-linear estática monótona $h(\cdot)$ e invertível nos dados originais aproxima-se da identidade, quando N é grande. Logo, as correlações dos dados originais tornam-se mais fracas e os testes subjacentes ao algoritmo AAFT são expressos como correctos. Mais ainda, Kugiumtzis (2001) [285] argumenta que o algoritmo AAFT é adequado quando a transformação não-linear estática monótona $h(\cdot)$ não é demasiado não-linear.

3.3.4 Teste Não Paramétrico de Independência: Teste de BDS

Os testes de linearidade aplicados às séries temporais foram iniciados por Granger e Newbold (1976), e Keenan (1985), nos quais as hipóteses alternativas de não-linearidade não apresentavam uma forma particular de não-linearidade (Vialar (2009) [515]).

Mais recentemente, foi elaborado o teste estatístico não paramétrico proposto por Brock *et al.* (1996) [71], designado pelo teste BDS, que testa a dependência em série e a estrutura não-linear de uma série temporal, e tem como base o integral de correlação. O teste BDS teve a sua origem em pesquisas sobre as dinâmicas não-lineares e sobre a teoria do caos, e foi construído para detectar a possível presença de caos determinístico nas séries temporais. O teste é ainda frequentemente utilizado no diagnóstico de presença de não-linearidade nos resíduos dos modelos lineares (ARMA e semelhantes) ajustados aos dados originais, que implique alguma dependência não-linear na série temporal original.

Para a construção do teste BDS, estabelece-se um método que utiliza o integral de correlação $C_{d_e}(d_e, \varepsilon, N')$ numa determinada dimensão de mergulho d_e, e que mede o número de pares possíveis de pontos históricos (ou sequenciais) que se encontram mais próximos do que uma dada distância ε numa norma Euclidiana particular, para $N \longrightarrow \infty$.

Como é sabido, o teste BDS permite-nos concluir que uma série temporal *iid* (hipótese nula) ou um processo de ruído branco para $N \longrightarrow \infty$, ocorre quando $C_{d_e}(\varepsilon) \longrightarrow C_1(\varepsilon)^{d_e}$, onde $C_1(\varepsilon)^{d_e}$ é definido como a probabilidade que resulta do produto das probabilidades individuais para cada par de pontos históricos em $\mathbb{R}^{d_e \tau}$.

Por conseguinte, o numerador do teste estatístico BDS, para uma determinada dimensão de mergulho (d_e), para $N \longrightarrow \infty$ e para $N' = N - \tau(de - 1)$, é definido por:

$$\sqrt{N}\left[C_{d_e}(d_e, \varepsilon, N') - C_1(1, \varepsilon, N')^{d_e}\right] \longrightarrow N(0, \sigma^2_{d_e}) \tag{3.24}$$

em que a variância $\sigma^2_{d_e}$ apresenta uma expressão complicada, podendo-se, no entanto, estimar o σ_{d_e} de $C(d_e, \varepsilon, N') - C(1, \varepsilon, N')^{d_e}$ pelo método de Monte Carlo[28].

O teste estatístico de Brock *et al.* (1996) [71] é, deste modo, apresentado pela expressão:

$$BDS(\varepsilon) = \sqrt{N}\left[\frac{C_{d_e}(d_e, \varepsilon, N') - C_1(1, \varepsilon, N')^{d_e}}{\sigma_{d_e}(\varepsilon)}\right] \tag{3.25}$$

em que a distribuição do teste BDS obedece a uma distribuição assintótica à $N(0,1)$ quando $N \longrightarrow \infty$, para um sistema de vectores $y_n \in \mathbb{R}^{d_e \tau}$, independentes e identicamente distribuídos (hipótese nula): *iid*.

As hipóteses alternativas à hipótese de um ruído branco Gaussiano podem ser apresentadas por diversos processos: **dependência linear**, **não-estacionariedade**, **caos dinâmico**, ou **estocástico não-linear** (tal como um **modelo heterocedástico condicional autoregressivo**).

Concluindo, o teste BDS permite-nos confirmar se estamos na presença de um ruído branco, ou se, pelo contrário, a série temporal apresenta dependência nos seus termos. Mais ainda, um valor estatístico não-nulo e significativo do teste estatístico de BDS apresenta evidência de determinismo (e não-linearidade) na série temporal observada.

[28] Recorde-se que a estimação pelo método de Monte Carlo teve origem nos métodos computacionais intensivos sugeridos por Barnard (1963) [31], Hope (1968) [244] e Besag e Diggle (1977) [46], permitindo calcular valores da estatística do teste T para várias realizações diferentes da hipótese nula, bem como a estimativa empírica da distribuição de T para esse conjunto de valores.

3.3.5 Sub-rogados Não-Lineares

Os sub-rogados não-paramétricos gerados por processos lineares constrangidos, que resultam da aplicação dos algoritmos 0, 1, e 2 de Theiler *et al.* (1992) [497] aos dados originais, podem revelar-se pouco úteis para o caso em que uma parte significativa da série temporal observada seja marcadamente determinística ou não-linear. Pela razão exposta, enumeram-se agora alguns processos de geração de **sub-rogados não-lineares e não standard** que têm vindo a ser desenvolvidos nos anos mais recentes e que podem ser utilizados em trabalhos futuros na procura de sistemas não-lineares determinísticos. Estes novos métodos testam se há alguma inconsistência dos dados originais com determinadas classes de sistemas não-lineares, em que os métodos de geração de sub-rogados não-lineares testam as dinâmicas subjacentes aos sistemas, através de uma análise mais cuidada.

Em primeiro lugar, suponha-se a hipótese nula de que uma série temporal seja proveniente de **um sistema dinâmico complexo não-linear de ruído conduzido** (ou seja, um ruído branco Gaussiano aditivo (*variates*)) de **uma forma particular: modelo de base cilíndrica**. Assim, para testar esta hipótese, constrói-se um modelo de base cilíndrica, a partir dos dados originais e geram-se os sub-rogados, isto é, as simulações de ruído conduzido a partir do modelo. Com efeito, Judd e Mees (1995) [261] e Small e Judd (1998) [466] apresentaram os métodos de construção dos modelos de base cilíndrica e os respectivos algoritmos, que correspondem a uma generalização dos modelos de base radial (Powel (1992)) [415], para janelas de mergulho variáveis: d_w. Isto é, este tipo de modelos utiliza o critério do comprimento de descrição mínimo subjacente ao método de Rissanen (1989) [421] para a estimação dos parâmetros do modelo de base cilíndrica, e está incluído nos métodos fortes de aproximação de funções, tal como os modelos das redes

neuronais artificiais, em que o erro de aproximação óptimo aumenta muito lentamente para dimensões de mergulho, d_e, crescentes.

Tal como referido, o modelo de base cilíndrica apresentado por estes autores pertence aos modelos pseudo-lineares (ou seja, está incluído nos modelos que apresentam combinações lineares de funções não-lineares), captura as dinâmicas não-lineares complexas subjacentes às séries temporais, e permite a geração dos sub-rogados a partir deste, com base num algoritmo de pesquisa estocástico. Ademais, a geração destes sub-rogados estocásticos não-lineares corresponde a um método de modelação paramétrico e de realização não-constrangida, que permite a comparação dos seus valores determinísticos (tal como, a dimensão de correlação[29], $d_c(\varepsilon_0)$, segundo o método de Judd (1992) [259]) com os valores dos dados originais. Uma vez que estes sub-rogados são de realização não-constrangida deve-se utilizar uma estatística do teste T *pivotal* de acordo com a hipótese nula ϕ^* (de existência de dinâmicas não-lineares), mas agora restrita a uma classe específica de sistemas não-lineares de ruído conduzido, que possam ser modelados por um modelo de base cilíndrica, para uma dada dimensão de mergulho - d_e. A título de exemplo, Small e Judd (s.d.) [464], com base no trabalho de Small *et al.* (1999) [467], testaram a hipótese

[29] Conforme explicitado por Small e Judd (2003) [472], o algoritmo de Judd (1992) [259] assume que uma série temporal original $\{y_n\}_{n=1}^{N}$ mergulhada num espaço de dimensão-d_e, para $\tau = 1$, é expressa por:

$$z_n = (y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, ..., y_{n-d_e+1}) \tag{3.26}$$

em que esta pode ser modelada como o produto entre a estrutura fractal e o ruído. Isto é, para uma dada distância, ε_0, numa norma Euclidiana particular e para quaisquer $\varepsilon < \varepsilon_0$, o integral de correlação, quando $N \longrightarrow \infty$, é expresso por:

$$C(\varepsilon, N, d_e) \approx \varepsilon^{d_c} p(\varepsilon) \tag{3.27}$$

onde d_c é a dimensão de correlação e $p(\varepsilon)$ é um termo de correcção polinomial no ruído do sistema. Isto é, $p(\varepsilon)$ tem em conta as variações do declive do integral de correlação $C(\varepsilon, N, d_e)$ dentro e fora da região de escala definida no algoritmo de Grassberger e Procaccia (1983) [211]. Portanto, a dimensão de correlação, d_c, é agora estimada em função da escala, ε_0, com maior acuidade ($d_c(\varepsilon_0)$).

nula de que os dados fisiológicos da respiração de crianças durante o sono, com flutuações periódicas, pudessem ser modelados por uma órbita periódica não-linear (subjacente a um modelo de base cilíndrica), com dois graus de liberdade, conduzida por um ruído branco Gaussiano, aleatório, e aditivo (*variates*).

Os autores puderam assim concluir que os padrões de respiração das crianças eram consistentes com os processos de órbitas periódicas não-lineares de ruído conduzido, suplementados por flutuações determinísticas mais complexas (caos). Ou seja, um processo misto de regime não-linear de ruído conduzido e de caos. Caso contrário, a rejeição da hipótese nula implica que os dados originais não possam ser modelados por um modelo de base cilíndrica de ruído conduzido, ou então o algoritmo de modelação falha na construção do modelo com acuidade (Small (2005) [462]).

Em segundo lugar, abordam-se outras classes de modelos não-lineares especificadas pelos **sub-rogados pseudo-periódicos (SPP)**, que foram propostos inicialmente por Small et *al.* (2001) [475] **na procura da não-linearidade** e da **provável existência de caos em séries temporais cíclicas.**

Em terceiro lugar, salientam-se outras técnicas computacionais que produzem sub-rogados não-lineares avançados: **o atractor de Dolan (1999) de duas dimensões** e **a aproximação ao método de arrefecimento simulado (simulated annealing) de Schreiber (1998)**. Os sub-rogados do atractor de Dolan foram propostos por Dolan *et al.* (1999) [133] para testar sobre a presença de órbitas periódicas instáveis que se encontram mergulhadas nos sistemas caóticos, apresentando, a título de exemplo, uma proveitosa potencialidade no controlo da arritmia cardíaca. Por outro lado, os sub-rogados subjacentes ao método heurístico de *simulated annealing* foram propostos por Schreiber

(1998) [445], consistindo na minimização de uma função de custo, interpretada como a energia num sistema termodinâmico, que é construída para apresentar um mínimo global quando as constrições inerentes aos sub-rogados realizados sejam satisfeitas. Por exemplo, o princípio geral consiste na implementação de uma função objectivo para apresentar um mínimo global, quando as condições inerentes aos sub-rogados *standard* lineares sejam satisfeitas. Com efeito, o autor demonstrou a superioridade deste algoritmo relativamente a outros algoritmos de permutações aleatórias (AAFT e IAAFT), em que o desvio máximo da função de autocovariância entre os dados originais e os processos lineares estocásticos foi mínimo. Várias referências clássicas sobre o método de *simulated annealing* podem ser encontradas em Metropolis *et al.* (1953) [353], Kirkpatrick *et al.* (1983) [275] e Vidal (1993) [516].

Sub-Rogados Pseudo Periódicos (SPP)

As séries temporais pseudo-periódicas[30] (ou cíclicas) podem corresponder a uma realização de uma órbita periódica ruidosa (não-caótica), um oscilador (não-caótico), ou um oscilador de fluxo caótico (Luo *et al.* (2005) [316]).

Assim, para as séries temporais que apresentam comportamento cíclico, os métodos dos sub-rogados standard lineares não são úteis, pelo que Small *et al.* (2001) [475] construíram um novo algoritmo (sub-rogados pseudo-periódicos), que serve de teste contra a hipótese nula de existência de uma órbita periódica (não-caótica) com ruído não-correlacionado. Com efeito, os sub-rogados pseudo-periódicos (SPP) compreendem formas de modelos mais simples, são não paramétricos (isto é, os parâmetros dos modelos são livres) e permitem-nos formular melhor as hipóteses alternativas, tal como a ocorrência de dinâmicas caóticas

[30] Uma série temporal pseudo-periódica apresenta uma tendência periódica forte e manifesta um pico claro no espectro de potência.

quase-periódicas, inter-cíclicas não-periódicas determinísticas (caos possível), ou a ocorrência de órbitas periódicas com ruído correlacionado.

Por outro lado, os sub-rogados pseudo-periódicos correspondem às técnicas de modelação linear local, tal como preconizado por Farmer e Sidorowich (1987) [169] na predição local de moções caóticas (por exemplo, *Mackey-Glass delay differential equation*, *Rayleigh--Bénard convection*, e *Taylor-Couette flow*), através de um método de aproximação linear local.

Com efeito, o algoritmo dos SPP proposto por Small *et al.* (2001) [475] é apresentado de acordo com os passos que se seguem. Primeiro, a série temporal original é mergulhada num dado espaço de fase de acordo com o teorema de mergulho[31] de Takens (1981) [490]. Agora, para gerar cada sub-rogado, escolhe-se um ponto inicial aleatório, z_i, a partir da série temporal mergulhada $\mathbf{z}_n$ definida na Equação (3.28), que evolui em torno do atractor. Seguidamente, para cada iteração do algoritmo escolhe-se aleatoriamente o sucessor de um dos vizinhos (locais) provenientes do ponto inicial, z_i, e não o sucessor do ponto corrente. Por fim, logo que sejam gerados dados suficientes, expressam-se como sub-rogados as séries temporais correspondentes à primeira coordenada escalar do passeio aleatório (*random walk*) em $\mathbf{z}_n$: $\{(S_n)_1 : n = 1, ..., N\}$.

Deste modo, os sub-rogados pseudo-periódicos (SPP) seguem aproximadamente o mesmo espaço vectorial dos dados originais e estão contaminados com ruído dinâmico[32]

[31] Recorde-se que o teorema de mergulho de Takens (1981) [490] permite a reconstrução de um atractor num dado espaço fase $\mathbb{R}^{d_e \tau}$, a partir da série temporal escalar original $\{y_n\}_{n=1}^{N}$:

$$\mathbf{z}_n = [y_n, y_{n-\tau}, y_{n-2\tau}, ..., y_{n-(d_e-1)\tau}] \tag{3.28}$$

onde d_e é a dimensão de mergulho e τ é o tempo de atraso de mergulho.

[32] Por exemplo, o ruído dinâmico, δ_n, Gaussiano e aleatório (*variates*), subjacente a um mapa temporal discreto, ou a um fluxo integrado numa unidade de tempo, em $\mathbb{R}^{d_e \tau}$, isto é:

(tal como nas simulações realizadas pelo autor no atractor caótico de Rössler, com ruído dinâmico aditivo branco e Gaussiano (*variates*)). Portanto, este **algoritmo (SPP) preserva o comportamento** do **sinal original** para **escalas maiores (estrutura periódica)**, mas **corrompe quaisquer dinâmicas** de **escala fina (caóticas quase-periódicas, inter-cíclicas não-periódicas determinísticas** (**caos provável**), e **periódicas com ruído colorido)** dos **dados originais devido ao ruído *iid* Gaussiano**, que é, em regra, **pequeno**. Caso o ruído seja elevado as órbitas periódicas são também obliteradas, e no limite o processo é um ruído branco Gaussiano. Assim, o algoritmo dos SPP, para um ruído apropriado (não muito elevado), é utilizado, em regra, para testar qualquer estrutura adicional determinística de escala menor (tal como o caos, linear determinística, ou não-linear determinística) para os casos em que a hipótese nula de presença de dinâmicas periódicas com ruído *iid*, ou de não-determinismo, seja rejeitada.

Ademais, o algoritmo SPP permite-nos ainda obter mais informação sobre as séries temporais. Ou seja, quando este algoritmo (SPP) é aplicado às séries financeiras não-periódicas pode capturar a não estacionariedade e o *drift*[33], é capaz de modelizar as linearidades locais em processos não-lineares e a não-estacionariedade em variância nas dinâmicas de ruído dependente do estado, tal como os processos heterocedásticos condicionais autoregressivos[34] (ARCH, GARCH, EGARCH e semelhantes). Por consequência, para um mergulho

---

(3.29) $$z_{n+1} = f(z_n) + \delta_n,$$

afecta a evolução do atractor $\mathbf{z}_n$ (Small e Tse (2003) [472]).

[33] A aplicação do algoritmo SPP às séries temporais financeiras não-periódicas "espelha" a fractura ou a não-estacionariedade (isto é, a possível heterocedasticidade condicional) dos dados, devidas a eventos súbitos exógenos, tais como, as greves, os tremores de terra, a desvalorização da moeda, entre outras causas.

[34] Recorde-se que os processos heterocedásticos condicionais autoregressivos ocorrem em sistemas não-lineares estocásticos nos quais a variância do ruído depende dos valores prévios da série temporal.

adequado duma série financeira não-cíclica, os sub-rogados pseudo-periódicos servem de teste contra a hipótese nula de existência de um processo de heterocedasticidade condicional autoregressivo, permitindo a existência de padrões claramente não-lineares determinísticos na série financeira observada (tal como o caos), na presença de ruído apropriado, iid e Gaussiano.

Por fim, o algoritmo SPP aplicado às séries temporais financeiras não-periódicas pode ainda servir como um teste sobre a presença de dinâmicas determinísticas estacionárias de curto prazo, com ruído não-correlacionado (H_0), em oposição às dinâmicas determinísticas, com ruído correlacionado em períodos de correlação longos (H_1) (Small e Tse (2003a) [471]). A título de exemplo, Small (2005) [462] aplicou o algoritmo dos sub-rogados pseudo-periódicos (SPP) nas seguintes séries temporais não-periódicas dos mercados financeiros: *Dow-Jones Industrial Average* ($N = 27643$), *Yen-US$ exchange rate* ($N = 7800$) e *London gold fixings* ($N = 8187$). O autor pode assim concluir que, para a série temporal dos preços diários do ouro, a dimensão de correlação $d_c(\varepsilon_0)$ estimada segundo o método de Judd (1992) [259] difere das dimensões de correlação $d_c(\varepsilon_0)$ estimadas para os sub-rogados realizados, com base no gráfico de contorno[35], pelo que a hipótese nula de existência de dinâmicas determinísticas de curto prazo com ruído não-correlacionado foi rejeitada. Donde, a série temporal de preços do ouro tende a apresentar maior determinismo/previsibilidade, com ruído correlacionado no longo prazo.

[35] O gráfico de contorno dá-nos uma representação pictórica da função de distribuição de $d_c(\varepsilon_0)$, para valores distintos de ε_0.

3.4 Procura da Não-Linearidade e do Caos nas Séries Temporais de Rendibilidades

3.4.1 Introdução à Metodologia Empregue

Seguindo alguns exemplos de pesquisas científicas nacionais e internacionais descritas no presente Capítulo (3) e nos Capítulos 1-2, propomos como objectivo desta secção a averiguação da possível existência de não-linearidade e de caos determinístico nas quatro séries temporais de preços dos mercados financeiros, que apresentaram uma dimensão óptima de mergulho inferior a dez ($d_e < 10$): **carvão**, *Acciona*, *Gamesa* e *Repower*.

Deste modo, o processo de averiguação da não-linearidade dos dados ocorre em duas fases. Na primeira fase, dá-se início ao pré-processamento das séries financeiras em análise, isto é, convertem-se as séries temporais de preços dos activos escolhidos em séries temporais de rendibilidades (*log-returns*), e à selecção das mesmas, com base no método misto utilizado no Capítulo (2) para a determinação da dimensão óptima de mergulho ($d_e < 10$). Ou seja, para cada série financeira, define-se um índice do erro de predição não-linear (EPNL) ajustado menor ou igual a 25%, para uma dimensão máxima de mergulho estimada d_e^{max}, e para um certo valor estimado de saturação da dimensão fractal D, para dimensões crescentes de mergulho d_e. Na segunda fase, implementam-se os testes de não-linearidade e de procura de determinismo, para a única série temporal seleccionada (alterações de preços da *Acciona*, para uma dimensão óptima de mergulho), com base na metodologia apresentada no presente capítulo: (a) utilização do teste estatístico de não-linearidade de Brock *et al.* (1996) [71] (teste BDS) para o integral de correlação e (b) construção dos sub-rogados *standard* lineares, com recurso aos algoritmos (0, 1 e 2) de Theiler *et al.* (1992) [497], para a dimensão de correlação (aproximação ao método

de contagem de caixas, com base no algoritmo da árvore binária multidimensional de Sedgewick (1988) [450]) e para o expoente máximo de Lyapunov (através do cálculo do erro de predição segundo o algoritmo proposto por Sato *et al.* (1987) [439] e Kurths e Herzel (1987) [289]).

Em síntese, o fluxograma apresentado na Figura 3.2 proporciona um enquadramento geral para as decisões a tomar para cada algoritmo de geração de séries temporais de sub-rogados lineares. Refira-se ainda que para a implementação dos testes de não-linearidade e de procura de caos nas séries financeiras, recorreu-se ao *software* EViews e ao pacote TSTOOL 1.2 do *software* MATLAB (R2009a).

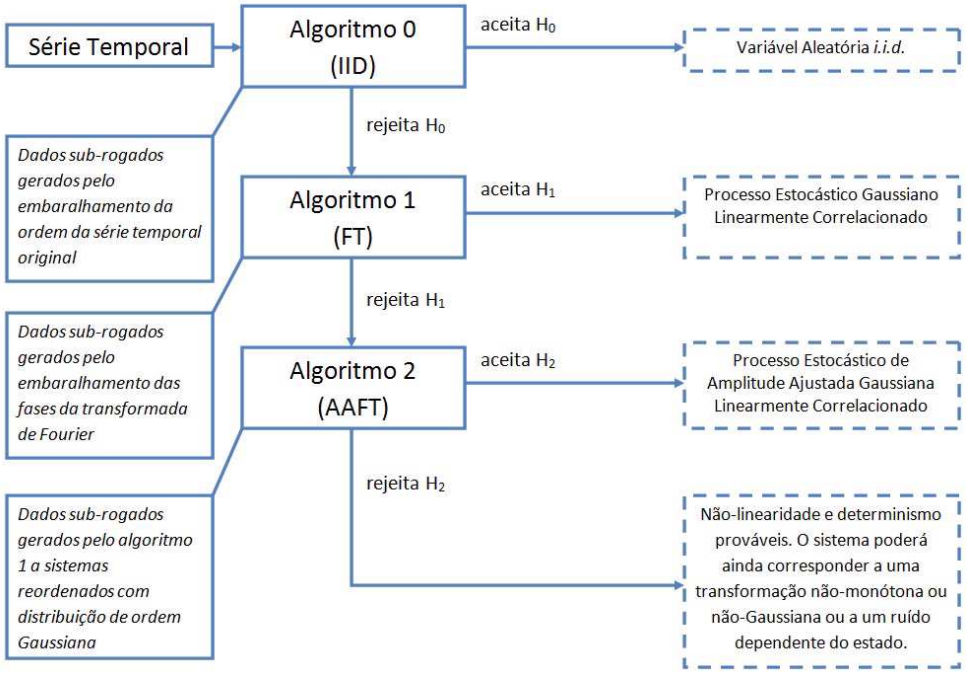


Figura 3.2: Fluxograma dos testes de hipóteses nulas: H_0, H_1, e H_2.

Importa agora referir que a série temporal de cotações da *Acciona* não exibe dinâmica pseudo-periódica (ver Figura 2.5), pelo que o teste dos sub-rogados não-lineares pseudo-

periódicos (SPP) postula contra as dinâmicas determinísticas estacionárias de curto prazo, com ruído *iid*, ou pode capturar a não-estacionariedade em variância em processos (dinâmicas) de ruído dependente do estado (ruído colorido). O algoritmo dos SPP permite, deste modo, uma análise mais aprofundada sobre as séries financeiras, através da estimação da dimensão de correlação, $d_c(\varepsilon)$, segundo o algoritmo de Judd (1992) [259], ou com base na estimação da mesma característica com recurso ao algoritmo Gaussiano de *kernel* (Yu *et al.* (2000) [532]), para o sinal original e para os sub-rogados construídos a partir deste.

Selecção das Rendibilidades de Natureza Determinística ($d_e < 10$)

Previamente às estimações dos parâmetros de mergulho, atraso de tempo τ e dimensão de mergulho d_e, nas séries financeiras em análise (**carvão**, *Acciona*, *Gamesa*, e *Repower*), procede-se ao pré-processamento das mesmas, tal como apresentado nas Figuras 3.3 e 3.4.

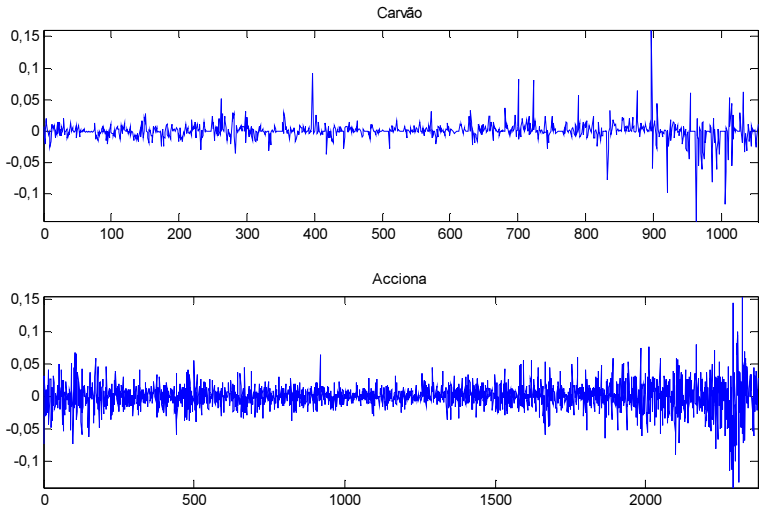


Figura 3.3: Rendibilidades financeiras do carvão e da *Acciona*.

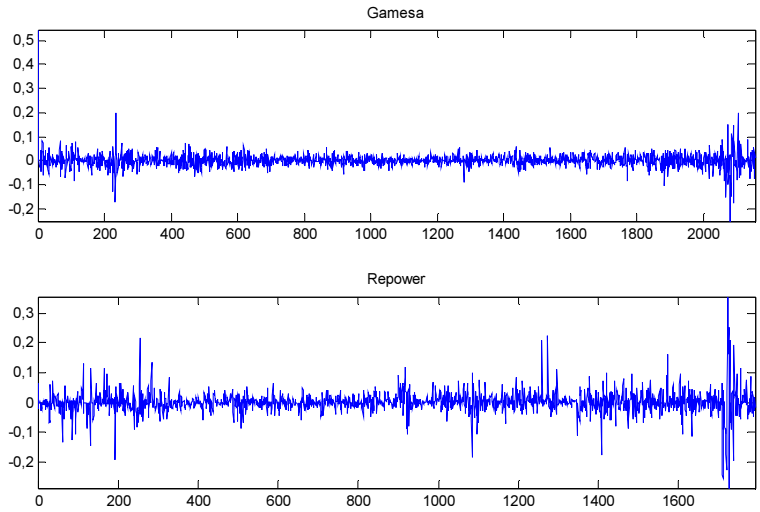


Figura 3.4: Rendibilidades financeiras da *Gamesa* e da *Repower*.

Como já foi referido, a reconstrução do espaço de fase de um sistema dinâmico a partir de uma série temporal escalar requer a selecção do *lag* de mergulho τ (atraso de tempo) e da dimensão de mergulho d_e. Com efeito, inicia-se a análise através da estimação do atraso de tempo τ ($\tau := T$), a partir do primeiro mínimo local da função de informação mútua média $I(T)$. Isto é, os primeiros mínimos de $I(T)$ obtidos nas séries financeiras observadas (**carvão**, *Acciona*, *Gamesa* e *Repower*) ocorrem para $\tau = 2$, valores que vão ser utilizados para a reconstrução do atractor, em que a escolha de τ determina a qualidade das trajectórias reconstruídas no espaço de fase.

De facto, pode-se concluir que o valor estimado do atraso de tempo ($\tau = 2$) nas séries temporais pré-processadas (alterações de preços) é substancialmente menor e mais próximo de zero (onde o processo é puramente estocástico para um atraso de tempo igual a zero: $\tau = 0$), relativamente aos valores estimados nas mesmas séries temporais

não pré-processadas (preços dos activos), que se encontram apresentados no Capítulo 2: **carvão** ($\tau = 5$), *Acciona* ($\tau = 3$), *Gamesa* ($\tau = 13$) e *Repower* ($\tau = 9$).

É sabido, que o primeiro mínimo local τ ($\tau := T$) obtido para a função de informação mútua média $I(T)$ captura as correlações não-lineares de uma série temporal. Logo, estas séries temporais de rendibilidades apresentam menores correlações não-lineares entre os pontos observados em relação às séries temporais de preços dos activos.

Em regra, as séries temporais de preços das *commodities* e das *utilities* (ver Capítulo 2) confirmaram a presença de certas características típicas de um processo não-linear determinístico, pelo que a diminuição de alguma das características de não-linearidade (tal como, o atraso de tempo τ) e do possível determinismo após o pré-processamento das mesmas, sugere a existência de ruído adicional (dinâmico e/ou observacional) nos dados originais. Aliás, um estudo de Cao e Soofi (1999) [83] diz-nos que a diferenciação de uma série temporal contaminada com ruído pode amplificar o efeito do ruído na mesma, tal como parece ter acontecido nas séries temporais de alterações de preços em análise. Podemos então concluir que o valor do ruído adicional presente no sistema dinâmico parece ser significativo, mas não o suficiente para excluir a complexidade e o determinismo nas séries temporais não pré-processadas, porque a dimensão de mergulho estimada nestas séries temporais é inferior a dez ($d_e < 10$).

Agora, as Figuras 3.5 e 3.6 mostram as estimativas das dimensões fractais D nas séries temporais de rentabilidades (**carvão**, *Acciona*, *Gamesa*, e *Repower*), com base no estimador de máxima verosimilhança de Takens (1985) [491] para dimensões crescentes de mergulho, em que as estimativas de D são eficientes (isto é, apresentam variâncias mínimas). Como é sabido, a saturação (ou quase saturação) da dimensão fractal sugere

a dimensão mínima de mergulho de uma série temporal. No presente caso, a dimensão fractal quase satura apenas na série temporal de alterações de preços da *Acciona*, isto é, $D \approx 7.3557$.

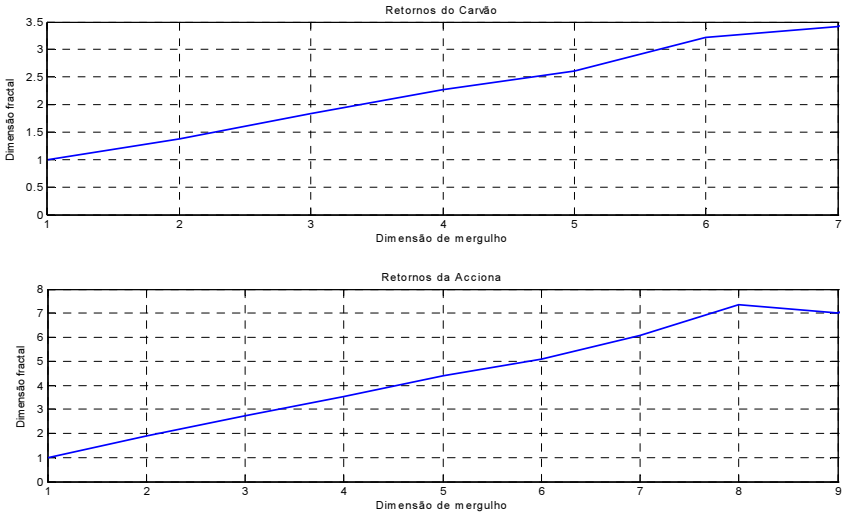


Figura 3.5: Dimensões fractais nas sucessões cronológicas de rendibilidades do carvão e da *Acciona*.

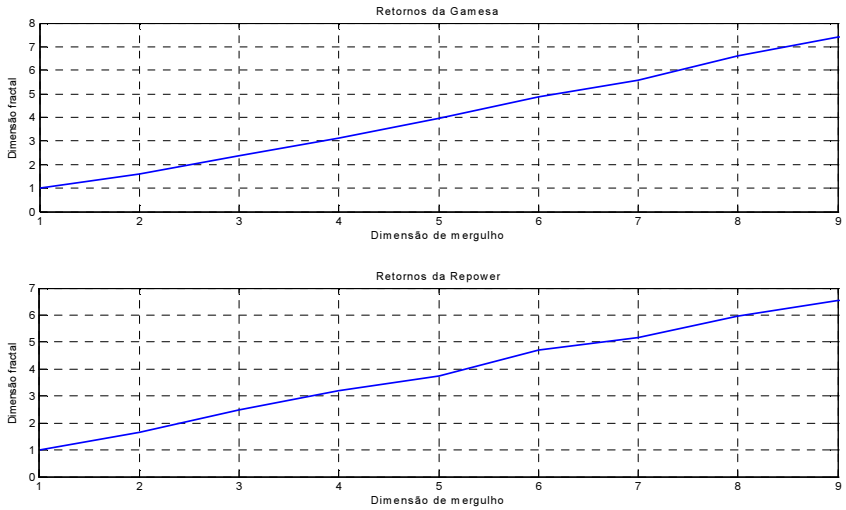


Figura 3.6: Dimensões fractais nas sucessões cronológicas de rendibilidades da *Gamesa* e da *Repower*.

No entanto, para as outras séries temporais de alteração de preços (**carvão**, *Gamesa* e *Repower*) não é possível estimar os valores de saturação das dimensões fractais D para dimensões crescentes de mergulho (Figuras 3.5-3.6). Logo, o pré-processamento das séries temporais de cotações nestes activos financeiros (que estão provavelmente contaminadas com ruído adicional para dimensões óptimas de mergulho ($d_e \leq 9$)) pode ter amplificado o ruído de tal modo que os processos iniciais subjacentes aos sistemas dinâmicos não-lineares determinísticos com algum ruído adicional (característicos dos sistemas complexos) possam agora pertencer aos processos estocásticos de elevada dimensão ($d_e \geq 10$).

Particularmente, a estimativa da dimensão óptima de mergulho ($d_e < 10$), através da metodologia mista proposta, apenas ocorre na série temporal de rendibilidades da *Acciona*, uma vez que esta série temporal é a única que apresenta quase saturação da

dimensão fractal ($D \approx 7.3557$). Por outro lado, para a concretização da metodologia são agora estimados os erros de predição não-lineares (*non-linear prediction errors* (*NLPE*)) na série temporal de alterações de preços da *Acciona*, para dimensões crescentes de mergulho, e o seu índice para uma dimensão máxima de mergulho ($d_e^{\max} = 31$).

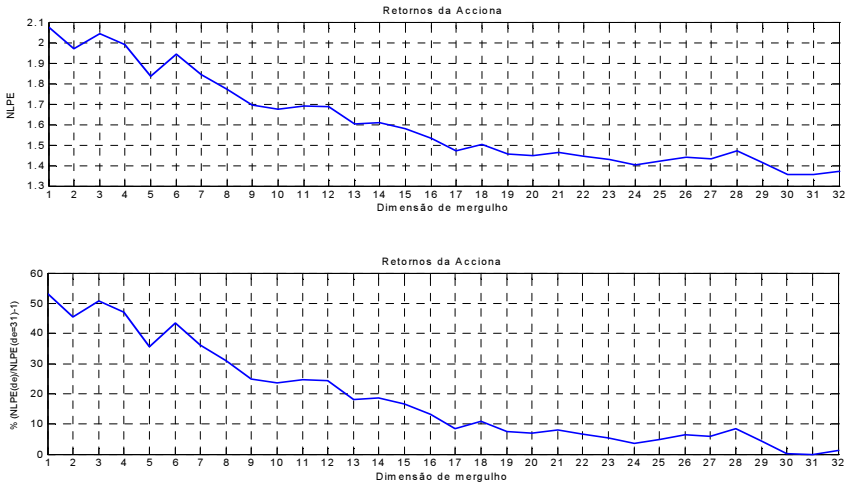


Figura 3.7: NLPE e Índice na série de rendibilidades da Acciona.

Tal como referido, o modelo de estimativa não-linear do erro de predição a um passo pertence aos modelos de constante local, providenciando a "melhor" predição de um sinal para dimensões crescentes de mergulho (ver Small e Tse (2004) [474]). Com efeito, através da análise da Figura 3.7, pode-se concluir que a dimensão de mergulho estimada para a série temporal de rendibilidades da *Acciona*, com um índice do erro de predição não-linear (EPNL) menor ou igual a 25% (com $d_e^{\max} = 31$), é de 9. Uma vez que a dimensão fractal quase satura cerca de $D \approx 7.3557$, pode-se concluir que a dimensão óptima de mergulho para a série temporal de alterações de preços da *Acciona* é de 9 (inteiro de $D+1+1$). Logo, é provável que a série temporal de rendibilidades da *Acciona* corresponda a um sistema

dinâmico não-linear determinístico bastante complexo ($d_e < 10$), contaminado com um determinado nível de ruído adicional.

3.4.2 Testes de Não-linearidade e de Procura de Determinismo: Rendibilidades da Acciona

Como já foi referido, o teste estatístico BDS de Brock *et al.* (1996) [71] foi construído para testar a dependência em série e a não-linearidade de uma série temporal. Logo, o teste BDS para a hipótese nula verifica se a amostra da série temporal de alterações de preços (*log-returns*) provem de um processo de geração de dados *iid*, em que a hipótese alternativa não é especificada. Como é sabido, as hipóteses alternativas à hipótese nula podem ser apresentadas por diversos processos de geração de dados: processo estocástico linear, processo estocástico não-linear, não-estacionariedade, ou caos dinâmico.

Deste modo, o teste BDS, é aplicado aos dados da série temporal de rendibilidades da *Acciona*, com base no programa EViews, para as seguintes dimensões de mergulho: $d_e = 2, 3, ..., 9$, recorrendo-se ainda ao método de *bootstrap* para estimar os valores do teste BDS e dos seus valores p[36], para a hipótese nula. O método de *bootstrap* surge assim como uma alternativa adicional, porque compensa os possíveis desvios da distribuição do teste BDS de uma distribuição assintótica à normal $N(0, 1)$, quando $N \longrightarrow \infty$. Por conseguinte, o método de *bootstrap* para a estimativa dos valores do teste BDS e dos seus valores p é implementado para um conjunto elevado de repetições (10000). Ou seja, para cada repetição é realizado aleatoriamente um conjunto de observações (amostra) sem substituição a partir da série temporal de rendibilidades da *Acciona* (para a mesma dimensão dos dados originais), em que o valor do teste BDS é recalculado para cada

[36] O valor p (habitualmente denominado por *p-value*) é o menor nível de significância (α) a partir do qual se começa a rejeitar H_0, i.e., se o valor $p \leq \alpha$ rejeita-se H_0.

amostra aleatória gerada e comparado com o valor do teste BDS no sinal original. Logo, que todas as repetições estejam completas o EViews estima o *bootstrapped p-value* final do teste BDS.

BDS Test for DLPACCIONA
Date: 07/15/10 Time: 15:37
Sample: 1/03/2000 2/04/2009
Included observations: 2373

Dimension	BDS Statistic	Std. Error	z-Statistic	Normal Prob.	Bootstrap ...
2	0.018461	0.001696	10.88493	0.0000	0.0000
3	0.046293	0.003066	15.09702	0.0000	0.0000
4	0.071877	0.004153	17.30917	0.0000	0.0000
5	0.094135	0.004921	19.12782	0.0000	0.0000
6	0.110362	0.005396	20.45244	0.0000	0.0000
7	0.122088	0.005621	21.71839	0.0000	0.0000
8	0.128380	0.005648	22.73150	0.0000	0.0000
9	0.131779	0.005523	23.86130	0.0000	0.0000

Raw epsilon	0.0327036		
Pairs within epsilon	4519366.0	V-statistic	0.8032452
Triples within epsilon	9.162E+09	V-statistic	0.6864952

Dimension	C(m,n)	c(m,n)	C(1,n-(m-1))	c(1,n-(m-1))	c(1,n-(m-1)...
2	1864972.0	0.663777	2257024.0	0.803316	0.645316
3	1584729.0	0.564510	2254866.0	0.803225	0.518217
4	1369325.0	0.488191	2253056.0	0.803258	0.416314
5	1200606.0	0.428401	2250963.0	0.803190	0.334266
6	1060483.0	0.378722	2248896.0	0.803131	0.268360
7	944320.00	0.337523	2246857.0	0.803081	0.215435
8	844615.00	0.302141	2246170.0	0.803515	0.173761
9	757976.00	0.271378	2244234.0	0.803502	0.139599

Figura 3.8: Estimativas dos valores do teste BDS e dos seus valores p.

Através da observação da Figura 3.8 constatamos que os valores não-nulos do teste estatístico BDS são significativos (valores $p = 0$), o que implica a dependência em série e a existência de um certo determinismo na série temporal temporal de alterações de preços da *Acciona* (Figura 3.8). Donde, o determinismo da série temporal leva à rejeição dos modelos de expectativas racionais, isto é, à rejeição da hipótese de eficiência dos mercados (HEM) bolsistas, em que não é suposto que os mercados financeiros sejam eficientes no que diz respeito à informação (elementos políticos, económicos, financeiros, comportamentais,

entre outros).

São agora utilizados os sub-rogados estocásticos lineares Gaussianos propostos por Theiler *et al.* (1992) [497], que testam se uma série temporal escalar estacionária apresenta alguma evidência de não-lineridade e de caos determinístico. É sabido que a rejeição sistemática das hipóteses nulas dos testes (H_0, H_1, e H_2) sugere alguma evidência de não-linearidade e de caos nos sinais observados. Com efeito, no presente estudo, são aplicados os testes estatísticos, para a dimensão de correlação (aproximação ao método da contagem de caixas) e para o expoente máximo de Lyapunov (com base no cálculo do erro de predição), para cada amostra extraída da série temporal de alterações de preços (*log-returns*) da *Acciona* e para os 50 sub-rogados realizados a partir desta, para cada algoritmo: 0, 1, e 2.

Donde, cada amostra extraída da série temporal original de rentabilidades (*log-returns*) da *Acciona*, $y_n, n = 1, ..., 2372$, apresenta um incremento igual a 100 para as séries temporais de 100 a 900 observações e um incremento de 1000 para as séries temporais de 1000 a 2000 observações[37]. Por conseguinte, para cada um dos 11 conjuntos de dados (ou amostras) são gerados 150 sub-rogados artificiais (algoritmos: 0, 1 e 2) e calculam-se 153 estimativas, para a dimensão de correlação, e para o expoente máximo de Lyapunov. Por outro lado, na construção dos sub-rogados lineares, procede-se no mergulho prévio das amostras extraídas da série temporal de rentabilidades da *Acciona* nos espaços de fase dos sistemas dinâmicos, de acordo com o método misto proposto de mergulho não-uniforme. Por razões de simplificação, seleccionam-se os parâmetros de

[37] Isto é, as amostras extraídas da série temporal de retornos da Acciona apresentam escalas temporais distintas: $N = 100$, $N = 200$, $N = 300$, $N = 400$, $N = 500$, $N = 600$, $N = 700$, $N = 800$, $N = 900$, $N = 1000$ e $N = 2000$.

mergulho (atraso de tempo: $\tau = 2$, e dimensão óptima de mergulho: $d_e = 9$) estimados na série temporal de rentabilidades da *Acciona*, para todas as observações ($N = 2372$). Em particular, para a realização dos testes estatísticos propostos, considera-se como dimensão máxima de mergulho $d_e^{\max} = 8$, porque esta encontra-se mais próxima das dimensões estimadas por Barnett e Serletis (2000) [34] (ou seja, $d_e = 6$, $d_e = 7$), nos seus estudos experimentais aplicados em diversas séries temporais não-lineares determinísticas dos mercados financeiros.

Como é sabido, as hipóteses nulas das estatísticas dos testes de Theiler *et al.* (1992) [497] pressupõem que os dados originais possam ser consistentes com os processos estocásticos lineares. No presente estudo propôs-se 2% de probabilidade ($\alpha = 0.02$) de rejeição para cada hipótese nula (H_0, H_1, e H_2), quando a hipótese nula escolhida é verdadeira (erro de 1ª espécie). Isto é, mais do que um resultado errado em 50 não é considerado normalmente válido pela comunidade científica. Deste modo, para a implementação da estatística do teste pressupõe-se a estimação do valor da característica típica de caos (dimensão de correlação, ou expoente máximo de Lyapunov) escolhida, λ_0, para cada conjunto de dados original (amostra). Por outro lado, estimam-se os valores médios, $\bar{\lambda}$, e os desvios padrões σ, para os sub-rogados estocásticos lineares gerados a partir de cada amostra original, para cada um dos três algoritmos: 0, 1 e 2. Por conseguinte, pode-se agora aplicar o teste bilateral para a hipótese nula especificada, em que $Z \sim N(0,1)$ permite comparar o valor estimado da característica típica de caos escolhida, λ_0, na amostra original com o valor médio estimado da característica em análise, $\bar{\lambda}$, para os sub-rogados construídos a partir desta. Ou seja, no presente trabalho foi escolhida a estatística do teste $Z \sim N(0,1)$ a 98%

do coeficiente de confiança, para a hipótese nula escolhida, que requer a seguinte condição:

$$\left|\lambda_0 - \bar{\lambda}\right| < 2.326\sigma$$

onde a hipótese nula é rejeitada, para o caso em que a condição não se verifique.

Tal como referido no presente Capítulo (3), a geração de sub-rogados estocásticos lineares a partir de uma série temporal original compreende normalmente a formulação de classes hierárquicas de hipóteses nulas, de acordo com os algoritmos mencionados: algoritmo 0 - ruído normal e identicamente distribuído, algoritmo 1 - ruído filtrado linearmente, e algoritmo 2 - transformação não-linear monótona de ruído filtrado linearmente. Por conseguinte, os resultados dos testes de hipóteses nulas (H_0, H_1 e H_2) correspondentes aos algoritmos - 0, 1 e 2, para toda as amostras extraídas (11) a partir da série temporal original de rendibilidades da *Acciona* e para os sub-rogados construídos a partir destas, para a dimensão de correlação e para o expoente máximo de Lyapunov, são apresentados nos anexos VIII (Figuras: VIII.1-VIII.11) e IX (Figuras: IX.1-IX.11), respectivamente. Em particular, as figuras mostram os valores calculados da característica típica de caos escolhida (a azul) para as amostras originais, bem como os valores médios e desvios padrões estimados da respectiva característica (a vermelho) para os sub-rogados realizados.

Logo, para todas as amostras originais rejeitam-se as três hipóteses nulas (H_0, H_1 e H_2), para a dimensão de correlação e para o expoente máximo de Lyapunov, podendo-se concluir que as amostras originais para todas as escalas de tempo definidas (N) não são típicas de uma transformação não-linear monótona de ruído filtrado linearmente (H_2). Isto é, explicitando em detalhe, podemos concluir que os resultados dos testes dos sub-rogados lineares subjacentes aos algoritmos 0, 1, e 2, para todas as amostras extraídas (11) da série temporal observada de rendibilidades da *Acciona* nos mercados bolsistas, são consistentes

com a rejeição dos seguintes modelos: modelo de passeio aleatório das rendibilidades (rejeição da hipótese H_0), o que reforça o teste BDS estimado, modelos lineares de médias móveis autoregressivos ARMA(p, q) estacionários das rendibilidades (rejeição da hipótese H_1), e modelos lineares de médias móveis autoregressivos ARMA(p, q) estacionários de rendibilidades distorcidos por uma função de medição independente do tempo (estática) não-linear monótona (rejeição da hipótese H_2). Por consequência, a rejeição consistente das hipóteses nulas (H_0, H_1 e H_2) para todas as séries temporais, com dimensões temporais distintas (amostras), pressupõe um reforço acrescido da não-lineari- dade e do determinismo nestas séries temporais e na série temporal original de alterações de preços da *Acciona*, para todas as observações ($N = 2372$).

Mais ainda, as dimensões de correlação, D_2, estimadas (que correspondem aos declives apresentados) pelo método de aproximação à contagem de caixas, através da aplicação do algoritmo da árvore binária multidimensional de Sedgewick (1988) [450], nas amostras originais, são menores relativamente às mesmas medidas estimadas nos sub-rogados lineares gerados a partir destas (Figuras: VIII.1-VIII.11 do anexo VIII), para as hipóteses nulas (H_0, H_1 e H_2), o que sugere de novo a não-linearidade e o determinismo nas amostras originais.

O mesmo sucede para os expoentes máximos de Lyapunov λ_1 (Figuras: IX.1 - IX.11 do anexo IX), ou seja, os expoentes máximos de Lyapunov estimados são em regra menores para as amostras originais, relativamente aos expoentes máximos de Lyapunov estimados para os sub-rogados lineares construídos de acordo com as hipóteses nulas - H_0, H_1 e H_2, o que pressupõe novamente a não-linearidade e o determinismo nas amostras originais. Ou seja, os expoentes máximos de Lyapunov, λ_1, são calculados em termos dos erros de

predição (ver Equação (2.76) apresentada no Capítulo 2), pelo que são assim esperados menores erros de predição não-lineares estimados para as 11 amostras da série temporal de rendibilidades da *Acciona*, relativamente aos erros de predição estimados para os sub-rogados lineares, para as mesmas hipóteses formuladas. Pode-se assim concluir que a hipótese de eficiência dos mercados bolsistas (HEM) é rejeitada na série temporal original de alterações de preços (*log-returns*) da *Acciona*, devido à rejeição sistemática das hipóteses nulas apresentadas (H_0, H_1 e H_2), segundo as características físicas indicadoras de caos (dimensão de correlação e expoente máximo de Lyapunov), para todas as dimensões amostrais N, e à rejeição da hipótese nula de existência de um processo de ruído branco, com base no teste BDS. Isto é, estes resultados pressupõem a não-linearidade e a existência de dinâmicas caóticas determinísticas com algum ruído adicional (dinâmicas complexas), na sucessão cronológica observada de rentabilidades da *Acciona*.

Por outro lado, os resultados dos testes ADF de Dickey e Fuller (1979) [130] e dos testes PP de Phillips e Perron (1998) [409] aplicados às séries temporais de rendibilidades (*log-returns*) das *commodities* e das *utilities* (Acciona entre outras) rejeitam a hipótese de existência de uma moção Browniana, isto é, confirmam a rejeição da HME (ver Capítulo 1), em que não é suposto que os mercados sejam eficientes na avaliação das alterações de preços dos activos. Mais ainda, os resultados dos testes estatísticos de efeitos ARCH de Engle (1982) [151] rejeitam a hipótese nula de ausência de efeitos ARCH nos resíduos dos modelos, para todas as séries temporais de rendibilidades observadas, excepto para as *commodities* de licenças de carbono e de carvão, para um nível de significância de 5% (Capítulo 1). Como é sabido, os processos ARCH são inconsistentes com os incrementos *iid*, as suposições "brancas", e HME (McCauley (2009) [342]).

Em resumo, a rejeição sistemática das hipóteses nulas (H_0, H_1, e H_2) de Theiler *et al.* (1992) [497] não nos indica a "pura" existência de um sistema não-linear determinístico, com algum ruído, na série temporal de alterações de preços da *Acciona*. Torna-se assim possível que a sucessão cronológica de rentabilidades da *Acciona* compreenda uma transformação não-monótona, ou não-Gaussiana, ou apresente um ruído dependente do estado (ruído colorido), ou em alternativa, seja muito provavelmente um processo misto que resulte de vários processos (caos, não-linear determinístico (não-caótico), correlações lineares, ruído branco aditivo, ruído colorido).

Capítulo 4

Conclusões Finais e Projectos Futuros

Apresentamos agora uma súmula das principais conclusões e algumas sugestões sobre os projectos futuros a desenvolver no domínio das séries financeiras univariadas estocásticas e/ou não-lineares determinísticas, em que o caos possa coexistir com os processos estocásticos, em dimensões altas (ver Judd e Mees (1995,1998) [261], [263], Small e Judd (1998) [466], Kyrtsou e Terraza (2002, 2003) [295], [296], Small e Tse (2003a, 2003b) [471], [472], Small (2005) [462], e Kyrtsou e Serletis (2006) [294]). Com efeito, a problematização padrão das séries financeiras observadas pertencerem apenas aos processos estocásticos ou unicamente aos processos não-lineares determinísticos deu lugar à coexistência de vários processos: caos, não-linear determinístico (não-caótico), correlações lineares, ruído (observacional e/ou dinâmico), e ruído colorido.

Procurámos assim evidenciar a presença da não-linearidade, da não-Gaussianidade, e do determinismo existente nas sucessões cronológicas de preços e de rendibilidades observadas diariamente nos mercados financeiros. As séries financeiras escolhidas foram extraídas a partir da base de dados do sistema *Bloomberg* (Abril de 2009), em períodos

diferentes de observação (de 3 de Janeiro de 2000 a 4 de Fevereiro de 2009), e em termos dos preços de fecho diários (dias úteis), sem valores omissos e/ou *outliers* severos, comparativamente a outros contractos apresentados no sistema. Deste modo, por um lado, foram escolhidas algumas séries temporais de preços das *commodities*: preços *spot* das licenças de carbono (*EUETSYR2 INDEX*) do *European Union Emission Trading Scheme* (*EU ETS*), preços *spot* do petróleo bruto (*USCRWTIC INDEX*), preços dos futuros do gás natural (*NG1 COMB comdty*), preços dos futuros do carvão (*API21 MON MCCL INDEX*). Por outro lado, seleccionaram-se as séries temporais de preços das acções de *utilities* das principais construtoras de eólicas europeias: *Acciona* (*ANA SM EQUITY*), *Gamesa* (*GAM SM EQUITY*), *Nordex* (*NDX1 GR EQUITY*), *Repower* (*RPW GR EQUITY*), *Siemens* (*SIE GR EQUITY*), e *Vestas* (*VWSDC EQUI- TY*).

As políticas da União Europeia (UE) para a mitigação do carbono, subjacentes ao protocolo de Kyoto (1997), com recurso à transacção de créditos de carbono nos mercados financeiros, conduziram à primeira etapa (Fase I) de implementação do *European Union Emissions Trading Scheme* (*EU ETS*) das licenças de carbono (de 1 de Janeiro de 2005 a 31 de Dezembro de 2007), seguindo-se a Fase II de *trading* das licenças de carbono (de 1 de Janeiro de 2008 a 31 de Dezembro de 2011). Todavia, a experiência da Fase I do *EU ETS* para as licenças de carbono não providenciou a informação adequada nos valores de *trading* de créditos de carbono para reduzir os custos das eléctricas (ou doutras empresas emitentes de CO_2 para a atmosfera) ou a volatilidade das cotações. Isto é, na Fase I do *EU ETS* realizaram-se inventários pobres de emissões de gases de efeito estufa nos diversos estados membros da União Europeia, provocando a falta de transparência na informação sobre os créditos a conceder às empresas (Aquisições Líquidas de Cessações

de Activos Não-Produzidos Não-Financeiros). Pelo contrário, a Fase II de *trading* das licenças de carbono apresentou proveitos financeiros, permitindo o recurso à importação de créditos de Kyoto por parte dos países fora da UE. Por conseguinte, a integração dos mercados assegurou melhores condições de competição entre as eléctricas na Europa e a recapitalização das empresas produtoras de energia não renovável localizadas fora do espaço europeu, para efectuarem as reconversões tecnológicas necessárias para a produção de energia não-poluente.

Na Introdução da presente dissertação, contextualizámos o Objecto de Investigação (sérias financeiras observadas) e as motivações do estudo em termos do aprofundamento dos processos não-lineares determinísticos (caos e ruído, em dimensões baixas de mergulho), ou complexos (caos e ruído adicional, em dimensões altas de mergulho). Parece-nos, deste modo, fazer sentido detectar a existência de caos determinístico nos sinais observados, devido ao aumento persistente dos preços dos combustíveis fósseis (com volatilidade acentuada), ao crescimento global da economia, ao aumento da procura de *commodities* energéticas nos países emergentes (BRIC: Brasil, Rússia, Índia, e China), e às restrições da oferta de combustíveis fósseis. De facto, as causas da crise energética, devem-se principalmente ao aumento da procura de energia global e às restrições da oferta de combustíveis fósseis, devido aos atrasos de tempo nos investimentos com capacidade produtiva (Kyrtsou *et al.* (2009) [293]). Isto é, as restrições da oferta de energia proveniente dos combustíveis fósseis são fundamentais nos estudos sobre os regimes caóticos determinísticos nas séries financeiras de *commodities* energéticas, com impactos na economia global e nos mercados financeiros.

Deste modo, a Organização dos Países Exportadores de Petróleo (OPEP) tem vindo a

opor-se ao aumento da sua produção para baixar os preços, devido às apreensões quanto aos decréscimos sazonais do consumo de petróleo e à oferta crescente desta *commodity* por parte dos países que não pertencem à OPEP (Kyrtsou *et al.* (2009) [293] e *U.S. Energy Information Administration* (2013) [149]). Por outro lado, as organizações industriais dos mercados das *commodities* energéticas (petróleo bruto, gás natural, carvão, e outras) e das *utilities* das principais construtoras de eólicas europeias são essencialmente oligopolísticas, pelo que a averiguação do caos determinístico nestas séries financeiras, aponta para uma abordagem credível. Por fim, sabemos da existência de relações não-lineares (não-determinísticas) entre os preços da *commodity* de licenças de carbono e os seus fundamentais, tais como, os preços das *commodities* energéticas, os factores de risco macroeconómicos, e os climáticos (Lutz *et al.* (2013) [317]).

Em particular, durante os diversos períodos observados (2000 - 2009), a economia em geral foi alvo de tensões elevadas provenientes dos ataques terroristas (2001), do acréscimo substancial da volatilidade dos preços das *commodities* energéticas e doutros activos em geral, dos escândalos corporativos, e, mais recentemente, da crise do *subprime* (2007).

No Capítulo 1, as séries financeiras observadas foram objecto de estudo na componente descritiva, em termos das análises de evolução das cotações e das análises exploratórias das alterações das cotações dos activos (inclusive as distribuições estatísticas das rendibilidades), e na componente da estacionariedade fraca das mesmas. Assim, em regra, no agrupamento das *commodities*, os mercados financeiros apresentaram taxas de rendibilidade (*simple net returns*) positivas e negativas, com alguns períodos de volatilidade acentuada e/ou mais aglutinada (*clusters* de volatilidade). Concretamente, durante o período de 2002 a 2007 constataram-se, em geral, altas taxas de rendibilidade nas séries temporais de preços *spot*

do petróleo bruto e de preços dos futuros de gás natural, devido ao crescimento global da economia e ao choque da procura mundial de energias fósseis.

Analogamente, para o agrupamento das *utilities* (*Acciona*, *Gamesa*, *Nordex*, *Repower*, *Siemens*, e *Vestas*) ocorreram taxas de rendibilidade negativas durante o período de 2001 a 2002, e durante o ano de 2008, devido, por um lado, ao *crash* bolsista posterior ao 11 de Setembro de 2001 e ao grau de incerteza inicial sobre a implementação real das políticas da UE para a produção de energia "limpa", e, por outro lado, devido à "derrocada" dos mercados financeiros decorrente da *subprime lending crisis* (com início em Setembro de 2007). No entanto, para os períodos intermédios (2005 - 2007) ocorreram altas taxas de rendibilidade, devido aos factores referidos.

A análise exploratória das séries temporais de rendibilidades das *commodities* e das *utilities* observadas permite-nos concluir que as flutuações das mesmas não apresentam distribuições *iid* ao longo dos períodos observados, devido à existência de agrupamentos de alta volatilidade (*volatility clustering*), que são característicos dos processos de heterocedasticidade condicional autoregressivos e/ou dos processos não-lineares complexos (caos e ruído adicional), em dimensões altas. Ademais, os resultados da curtose ($K > 3$) e dos histogramas das rendibilidades das *commodities* e das *utilities* analisadas, durante os respectivos períodos observacionais, mostram que os sinais apresentam distribuições leptocúrticas. Por outro lado, os valores das medidas de assimetria (*skewness*) são, em regra, próximos de zero ($|S_{kw}| \leq 0.43$), podendo indicar alterações fortes nos preços dos activos.

Por fim, a análise da distribuição das séries temporais de alterações de preços dos activos observados permite-nos concluir que estas são não-Gaussianas (resultados dos

testes de Jarque e Bera (1987) [251]). Portanto, estes resultados estão na linha dos factos estilizados familiares assumidos pela comunidade académica e pelas comunidades financeiras.

A análise da estacionariedade fraca das séries financeiras observadas, foi realizada, com base no teste ADF paramétrico de Dickey e Fuller (1979) [130] e no teste PP não-paramétrico de Phillips e Perron (1988) [409], e com recurso aos testes de efeitos ARCH de Engle (1982) [151]. Isto é, em primeiro lugar, foram realizados os testes de raiz unitária nas séries de preços e de rendibilidades dos produtos financeiros observados, para averiguar se os processos estocásticos subjacentes às séries temporais são estacionários às primeiras diferenças *vs* processos estacionários em tendência com flutuações estacionárias em torno de uma tendência linear. Com efeito, para um nível de significância de 5%, não se rejeita a hipótese nula de existência de raiz unitária para as séries temporais de preços dos activos observados, na escala logarítmica. Donde há eficiência nos mercados bolsistas, em que a informação nova é rapidamente reflectida nos preços dos activos financeiros. Pelo contrário, às primeiras diferenças os testes de raiz unitária confirmam a rejeição da hipótese nula de existência de raiz unitária, para o mesmo nível de significância, o que confirma a presença de processos integrados de ordem um, I(1), nas séries temporais de preços analisadas.

Estes resultados são contra a hipótese da eficiência dos mercados (HME) nas séries temporais de alterações de preços (*log-returns*) das *commodities* e das *utilities* analisadas, em que toda a informação relevante não está completamente reflectida na cotação do activo transaccionado nos mercados financeiros. Em segundo lugar, os resultados dos testes estatísticos (estatística F, e estatística LM) de efeitos ARCH de Engle (1982) [151]

nos resíduos dos modelos nas séries temporais de alterações de preços das *commodities* (excepto, para as licenças de carbono e carvão) e das *utilities*, rejeitam a hipótese nula de ausência de efeitos ARCH, ao nível de significância de 5%. Como é sabido, os processos de heterocedasticidade condicional autoregressivos (modelos ARCH, GARCH, EGARCH, e familiares) apresentam um ruído de estado dependente (ou um ruído colorido), isto é, são contra os processos de passeio aleatório (*random walk processes*), em que estes últimos apresentam as mesmas propriedades matemáticas dos processos de Wiener (ou seja, são caracterizados por processos Gaussianos contínuos no tempo, com média nula e incrementos *iid* aleatórios).

No Capítulo 2, as séries temporais escalares de preços dos activos financeiros observados foram objecto de estudo de acordo com a teoria do caos. Por consequência pretendemos averiguar se existe alguma evidência de presença de atractores estranhos reconstruídos nos espaços de fases, a partir das séries temporais originais, subjacente ao teorema de mergulho de Mañé (1981) [332] e Takens (1981) [490]. Os autores fundamentaram em termos matemáticos, a ideia inicial proposta por Ruelle (1979) [428] e Packard *et al.* (1980) [389], de utilizar coordenadas de atraso de tempo para reconstruir o espaço de fase a partir de uma série temporal escalar caótica, com base no teorema de mergulho (teorema geométrico). Por conseguinte, na procura da não-linearidade e do caos determinístico nas séries temporais de cotações das *commodities* e das *utilities* observadas, procedemos, em primeiro lugar, às estimativas dos valores de atraso de tempo, T, para as reconstruções dos atractores nos espaços de fases, quando as autocorrelações amostrais se anulam (isto é, $\rho(T) \leq 0 \Longrightarrow \tau = T$), para detectar algumas evidências de processos não-lineares determinísticos ou de processos estocásticos.

No entanto, as estimativas dos valores de atrasos de tempo T, quando as autocorrelações amostrais se anulam, podem não ser adequadas nas escolhas de T, porque provavelmente não reflectem as correlações não-lineares entre as coordenadas vectoriais (Abarbanel (1996) [2]). Agora, com base na observação das autocorrelações amostrais ao longo do tempo, podemos concluir que os valores estimados dos atrasos de tempo, T, são maiores do que o escalar 150, revelando algumas evidências de processos não-lineares determinísticos (decaimentos exponenciais das autocorrelações amostrais em *lags* de tempo sucessivos ($T \in [0, 170]$)), com perturbações estocásticas (presença de ruído), ou de processos estocásticos (*iid*, ou lineares, ou não-lineares), com dimensão não-finita. Por outro lado, os comportamentos das autocorrelações amostrais ao longo do tempo sugerem a presença de regimes aperiódicos (caos verosímil).

Em segundo lugar, os valores estimados dos atrasos de tempo T, com base nos primeiros mínimos locais da $I(T)$, são diminutos ($\tau = T \leq 13$), pelo que a existência de correlações curtas entre as coordenadas sucessivas dos atrasos de tempo podem ser interpretadas como o resultado de certas quantidades não-lineares determinísticas, subjacentes aos sistemas caóticos.

Em terceiro lugar, propusemos um método misto, subjacente às técnicas de mergulho não-uniforme (ver Judd e Mees (1995) [261] e Judd e Mees(1998) [263]), para a determinação da dimensão óptima de mergulho ($d_e < 10$) nas séries temporais de cotações das *commodities* e das *utilities*, em termos da acuidade de predição nos modelos não-lineares complexos. Em particular, o método proposto compreende um processo de modelação local dos dados originais, que permite a escolha dos "melhores" modelos de predição, por meio de uma aproximação ao critério do comprimento de descrição mínimo de Rissanen

(1989) [421]. Isto é, o novo método misto compreende dois métodos distintos de estimativa da dimensão óptima de mergulho, permitindo minimizar os erros de predição não-lineares (EPNL) de um modelo de constante local ajustado a uma série temporal escalar (ver Small e Tse (2004) [474]). Assim, numa primeira etapa, estimam-se os EPNL, tal como sugerido pelos autores, para dimensões crescentes de mergulho (com um valor unitário inicial), até à dimensão máxima de mergulho d_e^{max}, em que ocorra um valor mínimo local do EPNL. Em segundo lugar, estimam-se os pontos de saturação fractal D, com recurso ao estimador de máxima verosimilhança de D (Takens (1985) [491]), para dimensões sucessivas de mergulho, a partir de $d_e = 1$. Por fim, procede-se à selecção óptima das séries temporais observadas, através do método proposto. Ou seja, para um índice dos EPNL $\leq 20\%$, e para um dado valor de saturação da dimensão fractal D (tal que o inteiro de $(D+1) \leq 9$), em que é muito provável que o sistema não-linear determinístico seja caótico (com algum ruído), para dimensões baixas de mergulho ($d_e < 5$), ou seja extremamente complexo (caos e ruído adicional) para dimensões altas de mergulho ($5 \leq d_e < 10$).

Agora, através da observação das estimativas das dimensões fractais, D, em dimensões crescentes de mergulho, constatamos que estas apresentam valores fraccionais, favorecendo a existência de atractores estranhos. Em particular, as séries temporais de preços do **carvão**, da *Acciona*, da *Gamesa* e da *Repower* apresentam dimensões óptimas de mergulho ($5 \leq d_e < 10$) e índices dos EPNL $\leq 20\%$, admitindo a ocorrências de regimes não-lineares complexos (caos e ruído adicional). Por outro lado, os valores estimados das dimensões de correlação ($D_2 \in [0.11, 0.14]$) nas escalas maiores ε, para as mesmas séries financeiras (**carvão**, *Acciona*, *Gamesa*, e *Repower*), com base no método de aproximação à contagem de caixas, sugerem uma vez mais a existência de moções não-lineares determinísticas ou

complexas. Mais ainda, estes resultados são aproximados às dimensões de correlação estimadas por Iseri *et al.* (2008) [250] ($D_2 \in [0.14, 0.16]$) na região de escala, com base na medição dos comprimentos de curvas "suavizadas" nos espaços de fases, para valores sucessivos da dimensão de mergulho, até um valor máximo da dimensão de mergulho ($d_{e_c} = 100$), em que a dimensão do atractor se torna constante ($D_2(d_{e_c}) \cong 0.15$).

Na procura da evidência de divergência exponencial entre trajectórias próximas nos estados iniciais, procedeu-se ao cálculo do expoente de Lyapunov maximal, λ_1, nas séries temporais de preços dos activos observados (*commodities* e *utilities*), com base no algoritmo proposto por Sato *et al.* (1987) e Kurths e Herzel (1987) [289]. Assim, os valores dos λ_1 calculados ($\lambda_1 \in [0.006, 0.079]$), para os parâmetros de mergulho estimados previamente ($d_e^{max} \leq 31$, $T(I(T)) \leq 13$) e para horizontes temporais curtos ($t_h = 5$), aproximam-se parcialmente dos resultados calculados por Rosenstein *et al.* (1993)[425] nas simulações experimentais no sistema hiper-caótico de Rössler (1979) [426] ($\lambda_1 \in [0.048, 0.112]$), com algum ruído aditivo, reforçando a existência provável de caos nos sinais observados.

No Capítulo 3, procedemos à continuação da averiguação da não-linearidade e do caos determinístico prováveis nas séries temporais de preços dos activos seleccionadas no Capítulo 2 (isto é, nas séries temporais de preços, que apresentaram uma dimensão óptima de mergulho ($d_e < 10$): **carvão**, *Acciona*, *Gamesa*, e *Repower*). Por conseguinte, o processo de averiguação da não-linearidade e do caos ocorreu em duas etapas. Na primeira etapa deu-se início ao pré-processamento destas séries temporais, ou seja, as séries foram convertidas em séries temporais de alterações de preços (*log-returns*), seguindo-se a selecção das mesmas, com recurso ao método misto proposto no Capítulo 2, para a determinação da dimensão óptima de mergulho (agora com um índice do EPNL ajustado

menor ou igual a 25%).

Na segunda etapa implementaram-se os testes de não-linearidade e de detecção do caos determinístico para a única sucessão cronológica seleccionada (rendibilidades da *Acciona*, para $d_e \leq 9$), por meio da utilização do teste econométrico de não-linearidade de Brock *et al.* (1996) [71] (teste BDS) para o integral de correlação, e através da utilização dos sub-rogados *standard* lineares de realizações constrangidas (algoritmos (0, 1, e 2) de Theiler *et al.* (1992) [497]) para a dimensão de correlação D_2 (aproximação ao método de contagem de caixas (algoritmo de Sedgewick (1988) [450]) e para o expoente de Lyapunov máximo λ_1 (cálculo do erro de predição (ver Parlitz (1988) [395], com recurso ao algoritmo proposto por Sato *et al.* (1987) [439] e Kurths e Herzel (1987) [289])).

Com efeito, os valores não-nulos do teste estatístico BDS, com recurso ao método de *bootstrap* (10000 repetições), são significativos (valores $p = 0$), o que traduz a dependência em série e a provável existência de caos determinístico na série temporal de alterações de preços da *Acciona*. Mais ainda, as hipóteses alternativas à hipótese de um ruído branco Gaussiano podem ser expressas por diversos processos: dependência linear, não-estacionariedade, caos dinâmico, ou estocástico não-linear (tal como um processo de ruído colorido). Logo, a hipótese de eficiência dos mercados financeiros (HME) é rejeitada, em que não é suposto que os mercados sejam eficientes relativamente à informação (elementos políticos, económicos, financeiros, comportamentais, entre outros).

Agora, a rejeição sistemática das hipóteses nulas dos testes (H_0 - ruído independente e identicamente distribuído, H_1 - ruído filtrado linearmente, H_2 - transformação não-linear monótona de ruído filtrado linearmente), para um nível de significância das estatísticas dos testes de 2%, subjacentes aos sub-rogados lineares *standard* de realização constrangida de

Theiler *et al.* (1992) [497] (algoritmos 0, 1, e 2), para a dimensão de correlação D_2 e para o expoente de Lyapunov maximal λ_1, para cada amostra extraída da série temporal de rendibilidades da *Acciona* ($N = 2372$), sugere um reforço acrescido da não-linearidade e do caos determinístico na série temporal observada. Isto é, foram aplicados 50 sub-rogados lineares de realização constrangida para cada algoritmo (0, 1, e 2), para cada invariante a estimar (D_2 e λ_1), e para cada amostra extraída da série temporal de rendibilidades da *Acciona*, em escalas temporais distintas: $N = 100$, $N = 200$, $N = 300$, $N = 400$, $N = 500$, $N = 600$, $N = 700$, $N = 800$, $N = 900$, $N = 1000$ e $N = 2000$. Portanto, para cada uma das 11 amostras realizaram-se 150 sub-rogados e calcularam-se 153 estimativas para a dimensão de correlação e para o expoente de Lyapunov máximo.

Donde, podemos concluir que os processos nas amostras originais não são característicos de uma transformação não-linear monótona de ruído filtrado linearmente (H_2). Ou seja, podemos concluir que os resultados dos testes dos sub-rogados lineares de realização constrangida aplicados em todas as amostras extraídas (11) da série temporal de alterações de preços da *Acciona* são consistentes com a rejeição dos seguintes processos: processos de passeio aleatório (rejeição de H_0), o que reforça o teste BDS estimado para a série temporal de rendibilidades da *Acciona*; processos lineares de médias móveis autoregressivos ARMA (p, q) (rejeição de H_1); e modelos ARMA(p, q) distorcidos por uma função de medição estática não-linear monótona (rejeição de H_2). Mais ainda, as dimensões de correlação, D_2, estimadas nas amostras originais, são menores relativamente às mesmas medidas estimadas nos sub-rogados lineares gerados a partir destas, para as hipóteses nulas (H_0, H_1 e H_2), o que reforça a existência da não-linearidade e o do determinismo nas amostras originais. O mesmo acontece para os expoentes máximos de Lyapunov, λ_1, isto é, os

expoentes máximos de Lyapunov estimados são em norma menores nas amostras originais, relativamente aos expoentes máximos de Lyapunov, λ_1, estimados nos sub-rogados lineares realizados subjacentes às hipóteses nulas (H_0, H_1 e H_2), o que pressupõe novamente a não-linearidade e o determinismo nas amostras originais, porque estes são calculados em termos dos erros de predição. Logo, são esperados menores erros de predição não-lineares nas 11 amostras da série temporal de rendibilidades da *Acciona*, relativamente aos erros de predição estimados nos sub-rogados lineares, para as mesmas hipóteses formuladas.

No entanto, os resultados obtidos nas amostras e na série temporal de rendibilidades da *Acciona* não nos indicam a existência "pura" de sistemas dinâmicos não-lineares determinísticos/complexos, no sentido do caos. Donde, as amostras e a série temporal original podem compreender uma transformação não-monótona, ou não-Gaussiana, ou um ruído colorido (que apresenta dependência não-linear ao longo de períodos de observações longos).

Quanto aos projectos futuros a desenvolver, propomos a realização dos sub-rogados lineares CAAFT (*Corrected Amplitude Adjusted Fourier Transform*) para a invariante a estimar (dimensão de correlação, expoente máximo de Lyapunov, entre outras) nos sub-rogados gerados e nos dados observados, como um teste estatístico de averiguação da não-linearidade e do determinismo nas séries financeiras observadas. Com efeito, o algoritmo dos sub-rogados AAFT (*Amplitude Adjusted Fourier Transform*) pode falhar quando ocorre uma transformação não-monótona dos dados "reais", favorecendo a rejeição da hipótese nula do teste (H_2: transformação não-linear estática monótona de um ruído filtrado linearmente), na ausência de não-linearidade na série temporal observada.

Propomos ainda a realização dos sub-rogados não-lineares e *não-standard*, tais como os sub-rogados pseudo periódicos (SPP) para a dimensão de correlação, $d_c(\varepsilon_0)$, estimada nas

diversas escalas, ε_0, nos sub-rogados gerados e no sinal original, que, quando aplicados às séries temporais dos mercados bolsistas não-cíclicas podem capturar a não-estacionariedade e as "fracturas" nas mesmas. Em particular, para um mergulho apropriado de uma série financeira não-periódica, os SPP servem de teste contra a hipótese nula de existência de um processo de ruído colorido, permitindo a ocorrência de dinâmicas não-lineares determinísticas (tal como o caos), na presença de ruído apropriado.

O desenvolvimento avançado da predição em séries temporais caóticas ocorreu durante a década de 90, em que Weigend e Gershenfeld (1994) [520] e Abarbanel (1996) [2] apresentaram diversos métodos: linear local, polinomial local, funções de base radial (FBR), redes neuronais, algoritmos genéticos, entre outros. De facto, a eficácia destes métodos tem sido demonstrada nos testes de predição em muitos exemplos, podendo ser utilizados em trabalhos futuros de predição (erros de predição na amostra), ou de previsão (*performance* de previsão fora da amostra). Alguns destes métodos foram mais tarde propostos por Braga *et al.* (2002) [67], Lu (2002) [314], Kugiumtzis (2002) [286], Nygren (2004) [381], Mcnelis (2005) [345], Mohammadi e Nejad (2005) [356], entre outros, onde se encontram (ou se disponibilizam) os respectivos programas computacionais para implementar os modelos de previsão em séries temporais dos mercados financeiros. Por exemplo, em Papadopoulou (2010) [392] são apresentados modelos de previsão em séries temporais não-lineares determinísticas, com recurso às redes neuronais artificiais, em que foi utilizado o *software* MENFIS para as redes neuronais *feedforward* treinadas através da técnica de *backpropagation*.

Por fim, refira-se que alguns destes métodos são "rápidos" em termos computacionais, apesar de poderem apresentar baixa acuidade em termos de aproximação. Outros são

mais lentos, mas, em regra, apresentam elevada acuidade de predição.

Um sistema complexo resulta da combinação de um processo caótico determinístico e de um processo aleatório (ruído). Por consequência, as redes neuronais são capazes de capturar com acuidade as características não-lineares determinísticas e as características aleatórias. Donde, a sua utilização é muito importante para a modelação dos sistemas caóticos (com algum ruído) de baixa dimensão, ou dos processos complexos (caos e ruído adicional) de dimensão elevada.

Bibliografia

[1] Aarts, E. e J. Korst (1989), *Simulated Annealing and Boltzmann Machines: A Stochastic Approach to Combinatorial Optimization and Neural Computing*. New York: John Wiley & Sons Ltd.

[2] Abarbanel, H. (1996), *Analysis of Observed Chaotic Data*. New York: Springer-Verlag, Inc.

[3] Abarbanel, H.D.I., R. Brown e J.B. Kadtke (1990), Prediction and system identification in chaotic nonlinear systems: time series with broadband spectra, *Physics Letters A* 138(8), 401-408.

[4] Abarbanel, H.D.I., R. Brown e J.B. Kadtke (1990), Prediction in chaotic nonlinear systems: methods for time series with broadband Fourier spectra, *Physical Review A* 41(4), 1782-1807.

[5] Abarbanel, H., R. Brown, J.J. Sidorowich e L.S. Tsimring (1993), The analysis of observed chaotic data in physical systems, *Reviews of Modern Physics* 65(4), 1331-1392.

[6] Abarbanel, H.D.I e U. Parlitz (2006), Nonlinear analysis of time series data, em Schelter, B., M. Winterhalder e J. Timmer (Eds.), Handbook of Time Series Analysis: Recent Theoretical Developments and Applications, Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH&Co. KGaA, 5-37.

[7] Adams, R.A. e C. Essex (2010), *Calculus: A Complete Course*. Toronto: Pearson Canada Inc.

[8] Adebiyi, A. (2012), *A Model for Stock Price Prediction Using the Soft Computing Approach: Neural Networks and ARIMA Model to Stock Price Prediction*. Saarbrücken: Verlag: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH&Co. KG.

[9] Adrangi, B., A. Chatrath, K.K. Dhanda e K. Raffiee (2001), Chaos in oil prices? Evidence from futures markets, *Energy Economics* 23, 405-425.

[10] Afonso, A. e C. Nunes (2011), *Estatística e Probabilidades: Aplicacções e Soluções em SPSS*. Lisboa: Escolar Editora.

[11] Afonso, A. e J. Teixeira (1998), Nonlinear tests of weakly efficient markets: evidence from Portugal, *Working Paper 6/1998/DE*, Instituto Superior de Economia e Gestão.

[12] Agnon, Y., A. Golan e M. Shearer (1999), Nonparametric, nonlinear, short-term forecasting: theory and evidence for nonlinearities in the commodity markets, *Economics Letters* 65, 293-299.

[13] Aitchison, J. e D. Silvey (1958), Maximum-likelihood estimation of parameters subject to restraints, *Annals of Mathematical Statistics* 29(3), 813-828.

[14] Akaike, H. (1974), A new look at the statistical model identification, *IEEE Transactions on Automatic Control* 19(6), 716-723.

[15] Akaike, H. (1976), Canonical correlation analysis of time series and the use of an information criterion, em Mehra, R.K. e D.G. Lainiotis (Eds.), *System identification: advances and case studies*, New York: Academic Press, 52-107.

[16] Alexandre, F., I.G. Martins, J.S. Andrade, P.R. Castro e P. Bação (2009), *A Crise Financeira Internacional*. Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra.

[17] Anderson, P., K. Arrow e D. Pines, Eds. (1988), *The Economy As An Evolving Complex System*, Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity V, California: Addison-Wesley.

[18] Anoruo, E. (2011), Testing for linear and nonlinear causality between crude oil price changes and stock market returns, *International Journal of Economic Sciences and Applied Research* 4(3), 75-92.

[19] Antoniou, A. e C.E. Vorlow (2004), Price clustering and discreteness: randomness, noise or chaotic dynamics?, *Physica A: Statistical mechanics and its applications* 348(15), 389-403.

[20] Aquino, J.C. e G. Rodríguez (2011), Understanding the functional central limit theorems with some applications to unit root testing with structural change, *Documento de Trabajo No. 319*, Pontificia Universidad Católica del Perú.

[21] Araújo, T.V. (2011), *Introdução à Economia Computacional*. Coimbra: Edições Almedina, SA.

[22] Arthur, W.B. (2013), Complexity economics: a different framework for economic thought, *SFI Working Paper*: 2013-04-012, Santa Fe Institute.

[23] Baker, G.L. e J.P. Gollub (1996), *Chaotic Dynamics: An Introduction*, 2nd Edition. New York: Cambridge University Press.

[24] Baltagi, B.H. (2011), *Econometrics*. Berlin - Heidelberg: Springer-Verlag.

[25] Banerjee, A., J. Dolado, J. Galbraith e D. Hendry (1993), *Co-integration, Error Correction, And the Econometric Analysis of Non-stationary Data*. New-York: Oxford University Press.

[26] Banerjee, A., R.L. Lumsdaine e J.H. Stock (1992), Recursive and sequential tests of the unit-root and trend-break hypotheses: theory and international evidence, *Journal of Business & Economic Statistics* 10(3), 271-287.

[27] Barão, S.M.M. (2008), *Linear and Non-Linear Time Series Analysis: Forecasting Financial Markets*. Tese de Mestrado em Prospecção e Análise de Dados, ISCTE.

[28] Barclays Capital Research Report (2009), European renewables: Wind.

[29] Barkoulas, J.T., W. C. Labys e J.I. Onochie (1999), Long memory in futures prices, *The Financial Review* 34, 91-100.

[30] Barkoulas, J.T., W. C. Labys e J.I. Onochie (1997), Fractional dynamics in international commodity prices, *The Journal of Futures Markets* 17(2), 161-189.

[31] Barnard, G.A. (1963), Discussion on "The spectral analysis of point process"by M.S. Bartlett, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 25, 294.

[32] Barnett, W.A. e P. Chen (1988), The aggregation-theoretic monetary aggregates are chaotic and have strange attractors: an econometric application of mathematical chaos, em Barnett, W.A., E.R. Berndt e H. White (Eds.), *Dynamic Econometric Modeling*, Cambridge: Cambridge University Press, 199-246.

[33] Barnett, W.A., A.R. Gallant, M.J. Hinich, J.A. Jungeilges, D.T. Kaplan e M.J. Jensen (1997), A single-blind controlled competition among tests for nonlinearity and chaos, *Journal of Econometrics* 8, 157-192.

[34] Barnett, W.A. e A. Serletis (2000), Martingales, nonlinearity, and chaos. *Journal of Economic Dynamics & Control* 24, 703-724.

[35] Barnett, A.G. e R.C. Wolff (2005), A time-domain test for some types of nonlinearity, *IEEE Transactions on Signal Processing* 53(1), 26-33.

[36] Barron, A.R. (1993), Universal approximation bounds for superpositions of a sigmoidal function, *IEEE Transactions on Information Theory* 39(3), 930-945.

[37] Bartlett, M. (1946), On the theoretical specification and sampling properties of autocorrelated time series, *Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society* 8(1), 27-41.

[38] Bartlett, M.S. (1963), The spectral analysis of point processes. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 25(2), 264-296.

[39] Bassler, K.E., G.H. Gunaratne e J.L. McCauley (2006), Markov processes, Hurst exponents, and nonlinear diffusion equations: with application to finance, *Physica A* 369(2), 343-353.

[40] Bates, D.S. (1996), Jumps and stochastic volatility: exchange rate processes implicit in Deutsche mark options, *The Review of Financial Studies* 9(1), 69-107.

[41] Bauer, R.J. e G.E. Liepins (1992), Genetic algorithms and computerized trading strategies, em O´Leary, D.E. e P.R. Watkins (Eds.), *Expert Systems in Finance*, Amsterdam: Elsevier Science Publishers.

[42] Baumol, W.J. e J. Benhabib (1989), Chaos: significance, mechanism, and economic applications, *The Journal of Economic Perspectives* 3(1), 77-105.

[43] BBCNews (2006), Climate chaos: Bush´s climate of fear, 1 de Juno de 2006, http://news.bbc.co.uk/2/hi/programmes/panorama/5005994.stm

[44] Benhabib, J., S. Schmitt-Grohe e M. Uribe (2004), Chaotic interest rate rules: Expanded version, *NBER Working Paper* 10272, Center of Applied Economics at New York University, http://www.nber.org/papers/w10272.

[45] Berlinet, A. e C. Francq (1999), Estimation des covariances entre autocovariances empiriques de processus multivariés non linéaires, *La revue Canadienne de Statistique* 27, 525-546.

[46] Besag, J. e P.J. Diggle (1977), Simple Monte-Carlo tests for spatial pattern, *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)* 26(3), 327-333.

[47] Betz, R., W. Eichhammer e J. Schleich (2004), Designing national allocation plans for EU emissions trading: A first analysis of the outcome, *Energy & Environment*, 15(3), 375-425.

[48] Bezruchko, B.P. e Smirnov, D.A. (2010), *Extracting Knowledge From Time Series: An Introduction to Nonlinear Empirical Modeling*. Heidelberg: Springer-Verlag.

[49] Bhargava, A. (1986), On the theory of testing for unit roots in observed time series, *Review of Economic Studies* LIII, 369-384.

[50] Bickel, P.J. e P. Bühlmann (1996), What is a linear process?, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 93, 12128-12131.

[51] Bingham, S. e M. Kot (1989), Multidimensional trees, range searching, and a correlation dimension algorithm of reduced complexity, *Physics Letters A* 140(6), 327-330.

[52] Bishop, C.M. (2008), *Neural Networks for Pattern Recognition*. New York: Oxford University Press.

[53] Black, F. (1986), Noise, *The Journal of Finance* 41(3), 529-543.

[54] Blanco, S., S. Kochen, R.Q. Quian, L. Riquelme, O. Rosso e P. Salgado (1997), Characterization of epileptic EEG time series (I): Gabor transform and nonlinear dynamic methods, em Fernandez-Berdaguer, E.M. e C.E. D' Attelis (Eds.), *Wavelet Theory and Harmonic Analysis in Applied Sciences*, Boston: Birkhäuser, 179-226.

[55] Boldrin, M. (1988), Persistent oscillations and chaos in dynamic economic models: Notes for a survey, *Working Paper* No. 458a, University of California.

[56] Boldrin, M., K. Nishimura, T. Shigoka e M. Yano (2001), Chaotic equilibrium dynamics in endogenous growth models, *Journal of Economic Theory* 96 (1), 97-132.

[57] Bollerslev, T. (1986), Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* 31(3), 307-327.

[58] Bonilla, C.A., R. Romero e E. Gutierrez (2011), Episodic non-linearities and market efficiency in the mexican stock market, *The Manchester School* 79(3), 367-389.

[59] Bookstein, F.L. (1989), Principal warps: thin-plate splines and the decomposition of deformations, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 11(6), 567-585.

[60] Borovkova, S., R. Burton e H. Dehling (1999), Consistency of the Takens estimator for the correlation dimension, *The Annals of Applied Probability* 9(2), 376-390.

[61] Borrelli, V., F. Lazarus e B. Thilbert (2013), Les fractales lisses, *Pour La Science* 425, 20-27.

[62] Bouchaud, J.P. e R. Cont (1998), A Langevin approach to stock market fluctuations and crashes, *The European Physical Journal B* 6, 543-550.

[63] Bouchaud, J. e M. Potters (2000), *Theory of Financial Risks: From Statistical Physics to Risk Management*. Cambridge: Cambridge University Press.

[64] Box, G.E.P., G.M. Jenkins e G.C. Reinsel (1994), *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

[65] Box, G. e D. Pierce (1970), Distribution of residual autocorrelations in autoregressive integrated moving average time series models, *Journal of the American Statistical Association* 65(332), 1509-1526.

[66] BP (2010), *BP Statistical review of world energy*, June 2010, http://www.google.pt/url?sa=t&rct=j&q=bp%20statistical%20review%20of%20world-%20energy-june%202010-this%20workbook&source=web&cd=2&cad=rja&ved=0CCAQFjAB&url=http%3A%2F%2Fwww.bp.com%2Fliveassets%2Fbp_internet%2Fglobalbp%2Fglobalbp_uk_english%2Freports_and_publications%2Fstatistical_energy_review_2008%2FSTAGING%2Flocal_assets%2F2010_downloads%2Fstatistical_review_of_world_energy_full_report_2010.pdf&ei=-dOkUK-YM8m5hAeDxoHQDw&usg=AFQjCNEvg7V-TQFwpRCUVLqW0v3QV4SXNQ

[67] Braga, A., A.C. Carvalho, T. Ludermir, M. Almeida e E. Lacerda (2002), Radial basis functions networks, Soofi, A.S e L. Cao (Eds.), *Modelling and Forecasting*

Financial Data: Techniques of Nonlinear Dynamics, Massachusetts: Kluwer Academic Press, 159-178.

[68] Breusch, T. (1978), Testing for autocorrelation in dynamic linear models, *Australian Economic Papers* 17, 334-355.

[69] Brillinger, D.R. e M. Rosenblatt (1967a), Asymptotic theory of k-th order spectra, em Harris, B. (Ed.), *Spectral Analysis of Time Series*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 153-188.

[70] Brillinger, D.R. e M. Rosenblatt (1967b), Computation and interpretation of k-th order spectra, em Harris, B. (Ed.), *Spectral Analysis of Time Series*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 189-232.

[71] Brock, W., W. Dechert e J. Scheinkman (1996), A test for independence based on the correlation dimension, *Econometrics Reviews* 15(3), 197-235.

[72] Brock, W.A., D.A. Hsieh e B. LeBaron (1992), *Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*. Cambridge: MIT Press.

[73] Brock, W.A. e C. Sayers (1988), Is the business cycle characterized by deterministic chaos?, *Journal of Monetary Economics* 22, 71-90.

[74] Brockett, P.L., M.J. Hinich e D. Patterson (1988), Bispectral-based tests for the detection of gaussianity and linearity in time series, *Journal of the American Statistical Association* 83(403), 657-664.

[75] Brooks, C. (1996), Testing for non-linearity in daily sterling exchange rates, *Applied Financial Economics* 6, 307-317.

[76] Brooks, C. (2005), *Introductory Econometrics for Finance*, 6th Edition. Cambridge: Cambridge University Press.

[77] Brown, S.P.A. e M.K. Yücel (2007), What drives natural gas prices?, *Working Paper* 0703, Federal Reserve Bank of Dallas.

[78] Brys, G., M. Hubert e A. Struyf (2004), A robustification of the Jarque-Bera test of normality, *COMPSTAT 2004 Symposium: Proceedings in Computacional Statistics*, Antoch, J. (Ed.), Prague, Czech Republic: Charles University Prague, Faculty of Mathematics and Physics, 753-760.

[79] BTM Consult (2009), International wind power development: world market update 2008 (Forecast 2009 - 2013), http://www.btm.dk/reports/previous+reports/world+market+update+2008/?s=55.

[80] Campbell, J.Y. e N.G. Mankiw (1987), Are output fluctuations transitory?, *The Quarterly Journal of Economics* 102(4), 857-880.

[81] Cancela, A.M.R. (2008), *Comparative Study of Artificial Neural Network and Box-Jenkins ARIMA for Stock Price Indexes*. Tese de Mestrado em Prospecção e Análise de Dados, ISCTE.

[82] Candelon, B., M. Joëts e S. Tokpavi (2012), Testing for crude oil markets globalization during extreme price movements, *Working Paper* 2012-28, Maastricht University and University of Paris Ouest.

[83] Cao, L. e A.S. Soofi (1999), Nonlinear deterministic forecasting of daily dollar exchange rates, *International Journal of Forecasting* 15(4), 421-430.

[84] Cappuccio, N. e D. Lubian (2010), The fragility of the KPSS stationarity test, *Statistical Methods and Applications* 19(2), 237-253.

[85] Carmona, N.S. (2006), *Modelação Econométrica da Procura de Electricidade em Portugal Continental: Uma Aplicação Empírica*. Tese de Mestrado em Econometria Aplicada e Previsão, ISEG.

[86] Casdagli, M. (1989), Nonlinear prediction of chaotic time series, *Physica D* 35(3), 335-356.

[87] Casdagli, M. (1991), Chaos and deterministic versus stochastic nonlinear modeling, *SFI Working Paper*, Santa Fe Institute.

[88] Casdagli, M., S. Eubank, J.D. Farmer e J. Gibson (1991), State space reconstruction in the presence of noise, *Physica D* 51, 52-98.

[89] Castro, R. (2012), *Uma Introdução Às Energias Renováveis: Eólica, Fotovoltaica e Mini-Hídrica*. Lisboa: IST Press.

[90] Celluci, C.J., A.M. Albano e P.E. Rapp (2004), Statistical validation of mutual information calculations: Comparisons of alternative numerical algorithms, http://www.dtic.mil/cgi-bin/GetTRDoc?AD=ADA445843.

[91] Çetin, U. e M. Verschuere (2009), Pricing and hedging in carbon emissions markets, *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 12(7), 949-967.

[92] Cevik, S. e T. Sedik (2011), A barrel of oil or a bottle of wine: how do global growth dynamics affect commodity prices?, *International Monetary Fund Working Paper /11/1*, http://www.imf.org/external/pubs/ft/wp/2011/wp1101.pdf

[93] Chan, N.H. (2009), Time series with roots on or near the unit circle, em Andersen, T.G., R.A. Davis, J. Kreib e T. Mikosch (Eds.), *Handbook of Financial Time Series, Part IV: Topics in Cointegration and Unit Roots*. Berlin: Springer-Verlag, 695-707.

[94] Chan, K.S. e H. Tong (2001), *Chaos: A Statistical Perspective*. New York: Springer-Verlag, Inc.

[95] Chatfield, C. (2004), *The Analysis of Time Series: An Introduction*. New York: Chapman & Hall/CRC.

[96] Chatterjee, S. e A.S. Hadi (2006), *Regression Analysis by Example*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

[97] Chen, P. (1988), Empirical and theoretical evidence of economic chaos, *System Dynamics Review* 4, 81-108.

[98] Chen, S.H. (2002), Genetic algorithms and genetic programming in computational finance: an overview of the book, em Chen, S.H., *Genetic Algorithms and Genetic Programming Computational Finance*, Boston: Kluwer Academic Publishers, 1-26.

[99] Cheung, Y. e K.S. Lai (1995), Lag order and critical values of the augmented Dickey-Fuller test, *Journal of Business & Economic Statistics* 13(3), 277-280.

[100] Cheung, Y. e K.S. Lai (1995), Lag order and critical values of a modified Dickey-Fuller test, em Adam C., A. Banerjee, C. Bowdler, D. Hendry, B. Javorcik, J. Knight, H.B. Nielsen, V. Prowse e J. Temple (Eds.), *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, Oxford: University of Oxford, 411-419.

[101] Chevallier, J. (2010), Price relationships in the EU emissions trading system, *HAL Working Paper*, Université Paris Dauphine.

[102] Chinn, M.D. e O. Coibion (2009), The predictive content of commodity futures, *Working Paper Series No. 2009-016*, University of Wisconsin-Madison & College of William and Mary.

[103] Choi, I. (2009), Improving empirical size of the KPSS test of stationarity, *Journal of Economic Theory and Econometric*, 20, 1-14.

[104] Christiano, L.J. (1992), Searching for a break in GNP, *Journal of Business & Economic Statistics* 10(3), 237-250.

[105] Chu, P.K.K. (2003), Study on the non-random and chaotic behavior of chinese equities market, *Review of Pacific Basin Financial Markets and Policies* 6(2), 1-24.

[106] Chwee, V. (1998), Chaos in natural gas futures?, *Energy Journal* 19(2), 149-166.

[107] Citigroup Global Markets (2011), A very hostile political environment: Have Govts made the european utility sector un-investable?, http://www.thegwpf.org/have-govts-made-the-european-utility-sector-un--investable/.

[108] Congressional Research Service (2007), The European Union's energy security challenges, http://www.fas.org/sgp/crs/row/RL33636.pdf

[109] Cont, R. (2001), Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues, *Quantitative Finance* 1, 223-236.

[110] Cont, R. e J.P. Bouchaud (2000), Herd behavior and aggregate fluctuactions in financial markets, *Macroeconomic Dynamics* 4, 170-196.

[111] Cont, R., M. Potters e J.P. Bouchaud (1997), Scaling in stock market data: stable laws and beyond, em Dubrelle, B., F. Graner e D. Sornette (Eds.), *Scale Invariance and Beyond* 14, Berlin: Springer, 1-11.

[112] Cooley, J.W. e J.W. Tukey (1965), An algorithm for the machine calculation of complex fourier series, *Mathematics of Computation* 19(90), 297-301.

[113] Cowper, M. (2000), *Nonlinear Processing of Non-Gaussian Stochastic and Chaotic Deterministic Time Series*. Ph.D. Thesis, Department of Electronics and Electrical Engineering, University of Edinburgh.

[114] Creti, A., P.A. Jouvet e V. Mignon (2012), Carbon price drivers: Phase I versus Phase II equilibrium?, *Energy Economics* 34, 327-334.

[115] Cryer, J.D. e K. Chan (2008), *Time Series Analysis with Applications in R*, 2nd Edition. New York: Springer Science+Business Media, LLC.

[116] Cushing, J.M. (2004), *Differential Equations: An Applied Approach*. New Jersey: Pearson Education, Inc.

[117] Cvitanović (1989), Universality in chaos, em Streater, R.F. (Ed.), *Universality in Chaos*, Bristol: Institute of Physics Publishing, 3-34.

[118] Cvitanović, P., G.H. Gunaratne e I. Procaccia (1988), Topological and metric properties of Hénon-type strange attractors, *Physical Review* A 38 (3), 1503-1520.

[119] Davidson, J. (2006), Asymptotic methods and functional central limit theorems, T. Mills e K. Patterson (Eds.), *Palgrave Handbook of Econometrics, Vol. I: Econometric Theory*. Basingstoke: Palgrave Macmillan, 159-211.

[120] Davidson, R. e J.G. Mackinnon (1993), *Estimation and Inference in Econometrics*. New York: Oxford University Press.

[121] DeCoster, G.P. e D.W. Mitchell (1994), A reply, *Journal of Business and Economic Statistics* 12, 136-137.

[122] DeCoster, G.P. e D.W. Mitchell (1991), Nonlinear monetary dynamics, *Journal of Business and Economic Statistics* 9, 455-462.

[123] DeJong, N.D., J.C. Nankervis, N.E. Savin e C.H. Whiteman (1992a), The power problems of unit root tests in time series with autoregressive errors, *Journal of Econometrics* 53, 323-343.

[124] DeJong, N.D., J.C. Nankervis, N.E. Savin e C.H. Whiteman (1992b), Integration versus trend stationarity in macroeconomic time series, *Econometrica* 60(2), 423-433.

[125] DeLurgio, S.A. (1998), *Forecasting Principles and Applications*. Boston: Irwin/McGraw-Hill.

[126] Determan, J. e J.A. Foster (1999), Using chaos in genetic algorithms, *Proceedings of the 1999 Congress on Evolutionary Computation (CEC99)*, Washington, D.C., USA: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2094-2101.

[127] Dhamija, A. (2009), *Forecasting Exchange Rate & Estimating Volatility: Use of Neural Networks in Quantitative Finance*. Verlag: VDM Verlag Dr. Müller Aktiengesellschaft & Co. KG.

[128] Dickey, D. (1976), Estimation and hypothesis testing in nonstationary time series. Ph.D. thesis, Iowa State University.

[129] Dickey, D.A., W.R. Bell e R.B. Miller (1986), Unit roots in time series models: tests and implications, *The American Statistician* 40(1), 12-26.

[130] Dickey, D.A. e W.A. Fuller (1979), Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root, *Journal of the American Statistical Association* 74(366a), 427-431.

[131] Dickey, D.A. e W.A. Fuller (1981), Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root, *Econometrica* 49(4), 1057-1072.

[132] Dolan, K.T. e M.L. Spano (2000), Surrogate for nonlinear time series analysis, *Physical Review E* 64, 046128-1-046128-6.

[133] Dolan, K., A. Witt, M.L. Spano, A. Neiman e F. Moss (1999), Surrogates for finding unstable periodic orbits in noisy data sets, *Pysical Review E* 59(5), 5235-5241.

[134] Donsker, M. (1951), An invariance principle for certain probability limit theorems, *Memoirs of the American Mathematical Society* 6, 1-12.

[135] Dougherty, C. (2011), *Introduction to Econometrics*. Oxford, OX2 6DP: Oxford University Press.

[136] Doukas, J. e A. Rahman (1987), Unit roots tests: evidence from the foreign exchange futures market, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22(1), 101-108.

[137] Durbin, J. e G.S. Watson (1950), Testing for serial correlation in least squares regression: I, *Biometrika* 37, 409-428.

[138] Durbin, J. e G.S. Watson (1951), Testing for serial correlation in least squares regression: II, *Biometrika* 38, 159-177.

[139] Durlauf, S.N. e P.C.B. Phillips (1987), Trends versus random walks in time series analysis, *Econometrica* 56(6), 1333-1354.

[140] Eckmann, J.P., S.O. Kamphorst, D. Ruelle e S. Ciliberto (1986), Lyapunov exponents from time series, *Physical Review A* 34, 4971-4979.

[141] Eckmann, J.P. e D. Ruelle (1985), Ergodic theory of chaos and strange attractors, *Reviews of Modern Physics* 57(3), 617-656.

[142] Efron, B. e R. Tibshirani (1986), Bootstrap methods for standard errors, confidence intervals, and other measures of statistical accuracy, *Statistical Science* 1(1), 54-75.

[143] Elder, J. e P.E. Kennedy (2001), F versus t tests for unit roots, *Economics Bulletin* 3(3):1-6.

[144] Elgammal, A., R. Duraiswami, D. Harwood e L.S. Davis (2002), Background and foreground modeling using nonparametric Kernel density estimation for visual surveillance, Proceedings of the IEEE 90(7), 1151-1163.

[145] Ellerman, A.D., Convery, F.J. e C. Perthuis (2010), *Pricing Carbon: The European Union Emissions Trading Scheme*. New York: Cambridge University Press.

[146] Elliot, G., T.J. Rothenberg e J.H. Stock (1996), Efficient tests for an autoregressive unit root, *Econometrica* 64(4), 813-836.

[147] Elsner, J.B. e A.A. Tsonis (1992), Nonlinear prediction, chaos, and noise, *Bulletin American Meteorological Society* 73(1), 49-60.

[148] Endres, A. e V. Radke (2012), *Economics for Environmental Studies: A Strategic Guide to Micro and Macroeconomics*. Heidelberg: Springer-Verlag.

[149] Energy Information Administration (2013), Short-term energy and summer and fuels outlook (STEO), http://www.eia.gov/forecasts/steo/pdf/steo_full.pdf

[150] Energy Watch Group (2008), Wind power in context: a clean revolution in the energy sector, Ludwig-Boelkow-Foundation, http://www.transcend.org/tri/downloads/Wind_Power_in_Context.pdf

[151] Engle, R.F. (1982), Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica* 50(4), 987-1007.

[152] Engle, R. (2001), GARCH 101: the use of ARCH/GARCH models in applied econometrics, *Journal of Economic Perspectives* 15(4), 157-168.

[153] Engle, R. e C. Granger (1987), Co-integration and error correction: representation, estimation and testing, *Econometrica* 55(2), 251-276.

[154] Ericsson, N. e R. Mackinnon (2002), Distributions of error correction tests for cointegration, *Econometrics Journal* 5(2), 285-318.

[155] Eurobserv'er (2007), World wind power capacity ended up reaching 72 628 MW in 2006: 72,6 GW dans le mode, http://www.energies-renouvelables.org/observ-er/stat_baro/observ/baro177.pdf

[156] Eurobserv'er (2008), 65 GW dans l' UE/in EU, http://www.eurobserv-er.org/pdf/baro189.pdf

[157] Eurobserv'er (2010), EU wind turbine market growth between 2008 and 2009: 158 GW éoliens installés dans le monde fin 2009 et 74,8 GW éoliens installés dans l' UE fin 2009, http://www.eurobserv-er.org/pdf/baro195.pdf

[158] European Commission (2001), Directive 2001/77/EC of the European Parliament and of the Council of 27 September 2001: On the promotion of electricity produced from renewable energy sources in the internal electricity market, http://www.Official Journal of the European Union L 283/33 - L 283/40

[159] European Commission (2003), Directive 2003/87/EC of the European Parliament and of the Council of 13 October 2003: Establishing a scheme for greenhouse gas emission allowance trading within the community and amending council directive 96/61/EC, http://www.Official Journal of the European Union L 275/32 - L 275/46

[160] European Wind Energy Association (2009), Wind energy - the facts: part IV: Industry and markets, http://www..wind-energy-the-facts.org/documents/download/Chapter4.pdf

[161] Eurostat (2010), Environment and energy: Renewable energy statistics 56/2010, http://www.epp.eurostat.ec.europa.eu/cache/ITY_OFFPUB/KS-SF-10-056/EN /KS-SF-10-056-EN.PDF

[162] Eurostat (2013), Renewable energy statistics: Data from September 2012, http://www.epp.eurostat.ec.europa.eu/statistics_explained/index.php/Renewable_energy_statistics

[163] Evans, M. (2003), *Practical Business Forecasting*. Oxford: Blackwell Publishers Ltd.

[164] Evans, G.B.A. e N.A. Savin (1981), Testing for unit roots: I, *Econometrica* 49(3), 753-779.

[165] Evans, G.B.A. e N.A. Savin (1984), Testing for unit roots: II, *Econometrica* 52(5), 1241-1269.

[166] Fama, E.F. (1970), Efficient capital markets: a review of theory and empirical work, *The Journal of Finance* 25(2), 383-417.

[167] Farmer, J.D. (1981), Spectral broadening of period-doubling bifurcation sequences, *Physical Review Letters* 47, 179-182.

[168] Farmer, J.D. (1982), Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system, *Physica 4D*, 366-393.

[169] Farmer, J.D. e J.J. Sidorowich (1987), Predicting chaotic time series, *Physical Review Letters* 59(8), 845-848.

[170] Farmer, J.D. e J.J. Sidorowich (1991), Optimal shadowing and noise reduction, *Physica D* 47, 373-392.

[171] Farmer, J.D. e F. Lillo (2004), On the origin of power-law tails in price fluctuations, *Quantitative Finance* 314, C7-C11.

[172] Feigenbaum, M.J. (1989), Universal behavior in nonlinear systems, em Streater, R.F. (Ed.), *Universality in Chaos*, Bristol: Institute of Physics Publishing, 49-84.

[173] Feng, J.C. e C.K. Tse (2008), *Reconstruction of Chaotic Signals with Applications to Chaos-Based Communications*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd..

[174] Feng, Z.H., L.L. Zou e Y.M. Wei (2011), Carbon price volatility: evidence from EU ETS, *Applied Energy* 88, 590-598.

[175] Ferrara, N.F. e C.P.C. Prado (1995), *Caos: Uma Introdução*. São Paulo: Editora Edgar Blücher LTDA.

[176] Ferreira, D.B. (2007), Os hidratos de metano: fonte energética do futuro ou fonte de risco ambiental?, *Finisterra* XLII (83), 79-90.

[177] Ferreira, N.R.B.J. (2005), *Não-linearidades e Cointegração de Índices Bolsistas Internacionais*. Tese de Doutoramento em Gestão, Especialidade em Métodos Quantitativos, ISCTE.

[178] Fisher, R.A. (1951), *The design of Experiments*. New York: Hafner Press.

[179] Fletcher, S.R. (2005), Global climate change: the Kyoto Protocol, http://www.dandelion-patch.mit.edu/afs/sipb/contrib/wikileaks-crs/wikileaks-crs--reports/RL30692.pdf

[180] Flores, J.D. (2011), Local stability in first-order systems, Math-735: Mathematical Modeling, *Unpublished manuscript*, http://www.University of South Dacota. people.usd.edu/~jflores/.../MMChapter5_5p5.pdf

[181] Fowler, A.C. e G. Kember (1993), Delay recognition in chaotic time series, *Physics Letters A* 175, 402-408.

[182] Frank, M., R. Gencay e T. Stengos (1988), International chaos, *European Economic Review* 32(8), 1569-1584.

[183] Frank, M. e T. Stengos (1989), Some evidence concerning macroeconomic chaos, *Journal of Monetary Economics* 22(3), 423-438.

[184] Frank, M. e T. Stengos (1989), Measuring the strangeness of gold and silver rates of return, *Review of Economic Studies* 56, 553-567.

[185] Franke, R. (1982), Scattered data interpolation: tests of some methods, *Mathematics of Computation* 38(157), 181-200.

[186] Franke, J., W.K. Härdle e C.M. Hafner (2008), *Statistics of Financial Markets: An Introduction*. Heidelberg: Springer-Verlag.

[187] Fraser, A.M. (1989), Reconstructing attractors from scalar time series: a comparison of singular system and redundancy criteria, *Psysica D* 34, 391-404.

[188] Fraser, A.M. e H.L. Swinney (1986), Independent coordinates for strange attractors from mutual information, *Physical Review A* 33(2), 1134-1140.

[189] Fuller, W.A. (1976), *Introduction to statistical time series*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

[190] Fuller, W.A. (1996), *Introduction to statistical time series*. Second Edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.

[191] Gabaix X., P. Gopikrishnan, V. Plerou e H.E. Stanley (2008), Quantifying and understanding the economics of large financial movements, *Journal of Economic Dynamics & Control* 32, 303-319.

[192] Gantert, C., J. Honerkamp e J. Timmer (1992), Analyzing the dynamics of hand tremor time series, *Biological Cybernetics* 66, 479-484.

[193] Gately, E.J. (1996), *Neural Networks for Financial Forecasting: Top Techniques for Designing and Applying the Latest Trading Systems*. New York: John Wiley&Sons, Inc.

[194] Ghysels, E. e P. Perron (1993), The effect of seasonal adjustment filters on tests for a unit root, *Journal of Econometrics* 55(1), 57-98.

[195] Givens, G.H. e J.A. Hoeting (2005), *Computational Statistics*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

[196] Gleick, J. (2008), *Chaos: Making a New Science*. New York: Penguin Books Ltd.

[197] Global Wind Energy Council (2011), Global wind 2009 report: Renewable energy financing in a year of economic turmoil, the global status of wind power, and the market forecast for 2010-2014, http://www.gwec.net/wp-content/uploads/2012/06/GWEC_Global_Wind_2009_-Report_LOWRES_15th.-Apr..pdf

[198] Global Wind Energy Council & Greenpeace International (2012), Global wind energy outlook: Wind energy and climate change, the global wind energy outlook scenarios, and the regional results, http://www.gwec.net/wp-content/uploads/2012/11/GWEO_2012_lowRes.pdf

[199] Global Wind Energy Council (2011), Spain: Total instaled capacity, http://www.gwec.

[200] Godfrey, L.G. (1978), Testing for higher order serial correlation in regression equations when the regressors include lagged dependent variables, *Econometrica* 46(6), 1303-1310.

[201] Godfrey, L. (1979) Testing the adequacy of a time series model, *Biometrika* 66(1), 67-72.

[202] Goodstein E.S. (2008), *Economics and the Environment*. Danvers: John Wiley & Sons, Inc.

[203] Gopikrishnan, P., V. Plerou, Y. Liu, L.A.N. Amaral, X. Gabaix e H.E. Stanley (2000), Scaling and correlation in financial time series, *Physica A* 287, 362-373.

[204] Górriz, J.M., J. Ramírez, C.G. Puntonet e J.C. Segura (2006), Generalized LRT-based voice activity detector, *IEEE Signal Processing Letters* 13(10), 636-639.

[205] Gourieroux, C. e A. Monfort (1997), *Time Series and Dynamic Models*. Cambridge University Press.

[206] Graber, C. (s.d.), Wind power in spain, http://www.uprm.edu/aceer/.../wind_power _spain/.

[207] Granger, C.W.J. e P. Newbold (1974), Spurious regressions in econometrics, *Journal of Econometrics* 2, 111-120.

[208] Grassberger, P. (1986a), Estimating the fractal dimensions and entropies of strange attractors, em Holden, A.V. (Ed.), *Chaos*, New Jersey: Priceton University Press, 291-311.

[209] Grassberger, P. (1986b), Do climatic attractor exist?. *Nature* 323, 609-612.

[210] Grassberger, P. e H. Kantz (1985), Generating partitions for the dissipative Hénon map, *Physics Letters A* 113 (5), 235-238.

[211] Grassberger, P. e I. Procaccia (1983), Characterization of strange attractors, *Physical Review Letters* 50(5), 346-349.

[212] Gray, S.F. (1996), Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime-switching process, *Journal of Financial Economics* 42, 27-62.

[213] Grebogi, C., E. Ott e J.A. Yorke (1982), Chaotic attractors in crisis, *Physical Review Letters* 48(22), 1507-1510.

[214] Greene, W. (1997), *Econometric Analysis*, 3rd Edition. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

[215] Griffiths, W.E., R.C. Hill e G.G. Judge (1993), *Learning and Practicing Econometrics.* New York: John Wiley & Sons, Inc.

[216] Guillaume, D.M., M.M. Dacorogna, R.R. Davé, U.A. Müller, R.B. Olsen e O.V. Pictet (1997), From the bird's eye to the microscope: A survey of new stylized facts of the intra-daily foreign exchange markets, *Finance and Sthochastics* 1, 95-129.

[217] Gujarati, D.N. (2000), *Econometria Básica*, 3ª Edição. São Paulo: MAKRON Books.

[218] Hall, A. (1994), Testing for a unit root in time series with pretest data-based model selection, *Journal of Business & Economic Statistics* 12(4), 461-470.

[219] Hall, S.G. e S.S. Qaqeesh (2009), The behaviour of Dickey Fuller test in the case of noisy data: to what extent we can trust the outcome, *Working Paper No. 09/18*, University of Leicester, http://www.le.ac.uk/economics/research/repec/lec/leecon/dp09-18.pdf

[220] Hamilton, J.D. (1989), A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle, *Econometrica* 57(2), 357-384.

[221] Hamilton, J.D. (1994), *Time Series Analysis*. Princeton: Princeton University Press.

[222] Hamilton, J.D. (2003), What is an oil shock?, *Journal of Econometrics* 113(2), 363-398.

[223] Hamilton, J.D. (2009), Causes and consequences of the oil shock of 2007-08, http://www.brookings.edu/about/projects/bpea/editions/~/media/Projects/BPEA/Spring%202009/2009a_bpea_hamilton.PDF

[224] Hannan, E.J. e B.G. Quinn (1979), The determination of the order of an autoregression, *Journal of the Royal Statistical Society* B 41(2), 190-195.

[225] Hansen, J., M. Sato e R. Ruedy (2013), Global temperature update through 2012, http://www.nasa.gov/pdf/719139main_2012_GISTEMP_summary.pdf

[226] Hareesh, G. (2010), *Modeling and Analysis of Some Heavy Tailed Time Series*. Ph.D. Thesis, Department of Statistics, Cochin University of Science and Technology.

[227] Harvey, C.R. e A. Siddique (2000), Conditional skewness in asset pricing tests, *The Journal of Finance* 55(3), 1263-1295.

[228] Hasselman, K., W. Munk e G. MacDonald (1963), Bispectra of ocean waves, *Proceedings of the Symposium on Time Series Analysis*, Rosenblatt, M. (Ed.), New York: Wiley, 135-139.

[229] Hatanaka, M. (1996), *Time-Series-Based Econometrics: Unit roots and Cointegration*. Oxford: Oxford University Press.

[230] Hayashi, F. (2000), *Econometrics*. Priceton, New Jersey: Priceton University Press.

[231] Haykin, S. (1989), *An Introduction to Analog and Digital Communications*. New York: John Wiley & Sons.

[232] Haykin S. e S. Puthusserypady (1997), Chaothics dynamics of sea clutter, *Chaos* 7(4), 777-802.

[233] Hénon, M. (1976), A two-dimensional mapping with a strange attractor, *Communication in Mathematical Physics* 50, 69-77.

[234] Hénon, M. e Y. Pomeau (1976), Two strange attractors with a smiple structure, em Temam, R. (Ed.), *Turbulence and Navier-Stokes Equations: Lecture Notes in Mathematics* 565, New-York: Springer-Verlag, 29-68.

[235] Henry, B., N. Lovell e F. Camacho (2001), Nonlinear dynamics time series analysis, em Akay, M. (Ed.), *Nonlinear Biomedical Signal Processing, Volume II: Dynamic Analysis and Modelling, Chapter 1*. New York: IEEE Press Series on Biomedical Engineering, 1-39.

[236] Hentschel, H.G.E. e I. Procaccia (1983), The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors, *Physica 8D*, 435-444.

[237] Herrndorf, N. (1984), A functional central limit theorem for weakly dependent sequences of random variables, *The Annals of Probability* 12(1), 141-153.

[238] Hinich, M.J. (1982), Testing for gaussianity and linearity of a stationary time series, *Journal of Time Series Analysis* 3(3), 169-176.

[239] Hinich, M.J. e D.M. Patterson (1985), Evidence of nonlinearity in daily stock returns, *Journal of Business & Economic Statistics* 3(1), 69-77.

[240] Hinich, M.J., L. Stone e E.M. Mendes (2005), Detecting nonlinearity in time series: surrogate and bootstrap approaches, *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics* 9(4), 1-13.

[241] Hinich, M.J. e M.A. Wolinsky (1988), A test for aliasing using bispectral analysis, *Journal of the American Statistical Association* 83(402), 499-502.

[242] Hiremath G. e B. Kamaiah (2010), Nonlinear dependence in stock returns: Evidences from India, *Journal of Quantitative Economics* 8(1), 69-85.

[243] Holden, A.V. e M.A. Muhamad (1986), A graphical zoo of strange and peculiar attractors, em Holden, A.V. (Ed.), *Chaos*, Priceton: Priceton University Press, 15-35.

[244] Hope, A.C.A. (1968), A simplified Monte-Carlo significance test procedure, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 30(3), 582-598.

[245] Hsieh, D.A. (1991), Chaos and nonlinear dynamics: application to financial markets, *The Journal of Finance* 46(5), 1839-1877.

[246] Huberman, B.A. e A.B. Zisook (1981), Power spectra of strange attractors, *Physical Review Letters* 46, 626-628.

[247] Hudson, J.L. e J.C. Mankin (1981), Chaos in the Belousov-Zhabotinskii reaction, em Streater, R.F. (Ed.), *Universality in Chaos*, Bristol: Institute of Physics Publishing, 157-163.

[248] Hwang, S. e S.E. Satchell (1999), Modelling emerging market risk premia using higher moments, *International Journal of Finance and Economics* 4(4), 271-296.

[249] International Monetary Fund (2011), Oil scarcity, growth, and global imbalances, http:/www.imf.org/external/pubs/ft/weo/2011/01/pdf/c3.pdf

[250] Iseri, M., H. Caglar e N. Caglar (2008), A model proposal for the chaotic structure of Istanbul stock exchange, *Chaos, Solitons & Fractals* 36(5), 1392-1398.

[251] Jarque, C.M. e A.K. Bera (1987), A test for normality of observations and regression residuals, *International Statistical Review* 55(2), 163-172.

[252] Jin, Y. (2004), *Nonlinear Adaptative Estimation and its Application to Synchronization of Lorenz System*. Ph.D. Thesis, Department of Electrical and Computer Engineering, University of Central Florida.

[253] Joëts, M. (2012), Energy price transmissions during extreme movements, *Working Paper* 2012-38, Université de Paris Ouest.

[254] Johnston, J. e J. Dinardo (1997), *Econometric Methods*, 4th Edition. New York: McGraw-Hill.

[255] Johnson, N.L. e S. Kotz (1972), *Distributions in Statistics: Continuous Multivariate Distributions*. New York: John Wiley and Sons.

[256] Jonassen, T.M. (2009), A mathematica implementation of nonlinear dynamical systems theory via the spider algorithm and finding critical zeros of high-degree polynomials, *The Mathematica Journal* 11(3), 315-332.

[257] Jones, G. e L. Bouamane (2011), Historical trajectories and corporate competences in wind energy, *Working Paper 11-112*, Harvard Business School.

[258] Jorion, P. (1988), On jump processes in the foreign exchange and stock markets, *The Review of Financial Studies* 1(4), 427-445.

[259] Judd, K. (1992), An improved estimator of dimension and some comments on providing confidence intervals, *Physica D* 56, 216-228.

[260] Judd, K. (1994), Estimating dimension from samples, *Physica D* 71(4), 421-429.

[261] Judd, K. e A.I. Mees (1995), On selecting models for nonlinear time series, *Physica D* 82, 426-444.

[262] Judd, K. e A. Mees (1997a), Modeling chaos from experimental data, em Judd, K., A. Mees, K.L. Teo e T.L. Vincent (Eds.), *Control and Chaos*, Boston: Birkäuser, 25-38.

[263] Judd, K. e A.I. Mees (1998), Embedding as a modeling problem, *Physica D* 120, 273-286.

[264] Judd, K. e M. Small (2000), Towards long-term prediction, *Physica D*, 31-44.

[265] Judd, K., M. Small e A.I. Mees (2001), Achieving good nonlinear models: keep it simple, vary the embedding, and get the dynamics right, em Mees, A.I. (Ed.), *Nonlinear Dynamics and Statistics*, Boston: Birkhäuser, 65-80.

[266] Kanno, T., T. Miyano, I. Tokuda, J. Galvanovskis e M. Wakui (2007), Chaotic electrical activity of living β-cells in the mouse pancreatic islet, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 226(2), 107-116.

[267] Kantor, B. (1979), Rational expectations and economic thought, *Journal of Economic Literature* XVII, 1422-1441.

[268] Kantz, H. (2001), Time series analysis in reconstructed state spaces, *Stochastics and Dynamics* 1(1), 85-111.

[269] Kantz, H. e T. Schreiber (2005), *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.

[270] Kaplan, D.T. e L. Glass (1993), Coarse-grained embeddings of time series: random walks, Gaussian random processes, and deterministic chaos, *Physica D* 64, 431-454.

[271] Kaplan, J. e J. Yorke (1979), Chaotic behavior of multidimensional difference equations, em Peitgen, H.O. e H.O. Walther (Eds.), *Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Mathematics* 730, Berlin: Springer, 228-237.

[272] Kennel, M.B., R. Brown e H.D.I. Abarbanel (1992), Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction, *Physical Review A* 45(6), 3403-3411.

[273] Kennel, M. e S. Isabelle (1992), Method to distinguish possible chaos from colored noise and to determine embedding parameters, *Physical Review A* 46(6), 3111-3118.

[274] Kim, T.H. e H. White (2004), On more robust estimation of skewness and kurtosis, *Finance Research Letters* 1(1), 56-73.

[275] Kirkpatrick, S., J.C.D. Gelatt e M. Vecchi (1983), Optimization by simulated annealing, *Science* 220, 671-680.

[276] Klaassen, F. (2002), Improving GARCH volatility forecasts with regime-switching GARCH, *Empirical Economics* 27(2), 363-394.

[277] Klepper, G. e S. Peterson (2005), Emissions trading, CDM, JI, and more: the climate strategy of the EU, *FEEM Working Paper No. 2005,55*, Fondazione Eni Enrico Mattei in cooperation with the Kiel Institute for the World Economy.

[278] Kostelich, E.J. e T. Schreiber (1993), Noise reduction in chaotic time-series data: A survey of common methods, *Physical Review E* 48(3), 1752-1763.

[279] Krawiecki, A., S. Matyjaśkiewicz e J.A. Holyst (2004), Fractal spectroscopy by noise-free stochastic multiresonance at higher harmonics, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 14(1), 141-159.

[280] Kreuz, T., R.G. Andrzejak, F. Mormann, A. Kraskov, H. Stögbauer, C.E. Elger, K. Lehnertz e P. Grassberger (2004), Measure profile surrogates: a method to validate the performance of epileptic seizure prediction algorithms, *Physical Review E* 69(6), 061915(1-9).

[281] Krishnan, V. (2006), *Probability and Random Processes*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

[282] Kugiumtzis, D. (1999), Test your surrogate data before you test for nonlinearity, *Physical Review E* 60(3), 2808-2816.

[283] Kugiumtzis, D. (2000a), Surrogate data test for nonlinearity including non-monotonic transforms, *Physical Review E* 62(1), 1-2.

[284] Kugiumtzis, D. (2000b), Surrogate data test on time series, em Soofi, A.S. e L. Cao (Eds.), *Modelling and Forecasting Financial Data: Techniques of Nonlinear Dynamics*, Boston: Kluwer Academic Publishers, 268-282.

[285] Kugiumtzis, D. (2001), On the reliability of the surrogate data test for nonlinearity in the analysis of noise time series, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 11(7), 1881-1896.

[286] Kugiumtzis, D. (2002), State space local linear prediction, Soofi, A.S e L. Cao (Eds.), *Modelling and Forecasting Financial Data: Techniques of Nonlinear Dynamics*, Massachusetts: Kluwer Academic Press, 95-113.

[287] Kugiumtzis, D. (2008a), Evaluation of surrogate and bootstrap tests for nonlinearity in time series, *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics* 12(4), 1-26, http://www.bepress.com/snde/vol12/iss1/art4.pdf

[288] Kunst, R.M. (2011), Applied time-series analysis, University of Vienna and Institute for Avanced Studies Vienna, *Unpublished manuscript*, http://www.homepage.univie.ac.at/robert.kunst/tspres.pdf

[289] Kurths, J. e H. Herzel (1987), An attractor in a solar time series, *Physica D* 25, 165-172.

[290] Kwiatkowski, D., P.C.B. Phillips, P. Schmidt e Y. Shin (1992), Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: how shure are we that economic time series have a unit root?, *Journal of Econometrics* 54, 159-178.

[291] Kyrtsou, C. (2008), Re-examining the sources of heteroskedasticity: The paradigm of noisy chaotic models, *Physica A* 387, 6785-6789.

[292] Kyrtsou, C. e W. Labys (2006), Evidence for chaotic dependence between US inflation and commodity prices, *Journal of Macroeconomics* 28(1), 256-266.

[293] Kyrtsou, C., A.G. Malliaris e A. Serletis (2009), Energy sector pricing: on the role of neglected nonlinearity, *Energy Economics* 31, 492-502.

[294] Kyrtsou, C. e A. Serletis (2006), Univariate tests for nonlinear structure, *Journal of Macroeconomics* 28, 154-168.

[295] Kyrtsou, C. e M. Terraza (2002), Stochastic chaos or ARCH effects in stock series? A comparative study, *International Review of Financial Analysis* 11, 407-431.

[296] Kyrtsou, C. e M. Terraza (2003), Is it possible to study chaotic and ARCH behaviour jointly? Application of a noisy Mackey-Glass equation with heteroskedastic errors to the Paris stock exchange returns series, *Computational Economics* 21, 257-276.

[297] Labs, W.C. (2003), New directions in modeling and forecasting of commodity markets, *Revue Mondes en Développement* 122, 3-19.

[298] Lai, Y.C. e N. Ye (2003), Recent developments in chaotic time series analysis, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 13(6), 1383-1422.

[299] Lawrence, R. (1997), Using neural networks to forecast stock market prices, *Working Paper*, University of Manitoba.

[300] Lazo, J.G.L., M.A.C., Pacheco e M.M.R. Vellasco (2002), Portfolio selection and management using a hybrid intelligent and statistical system, em Chen, S.H., *Genetic Algorithms and Genetic Programming Computational Finance*, Boston: Kluwer Academic Publishers, 221-238.

[301] LeBaron94 (1994), Chaos and nonlinear forecastability in economics and finance, *Philosophical Transactions: Physical Sciences and Engineering* 348 (1688), 397-404.

[302] Leduc, S. e K. Sill (2004), A quantitative analysis of oil-price shocks, systematic monetary policy, and economic downturns, *Journal of Monetary Economics* 51, 781-808.

[303] Lee, T.H., H. White e C.W.J. Granger (1993), Testing for neglected nonlinearity in time series models, *Journal of Econometrics* 56, 269-290.

[304] Lee, Y.J, Y. Zhu, Y. Xu, M. Shen, H. Zhang e N.V. Thakor (2001), Detection of non-linearity in the EEG of schizophrenic patients, *Clinical Neurophysiology* 112, 1288-1294.

[305] Lesne, A. (2007), The discrete versus continuous controversy in physics, em Longo, G. (Ed.), *Mathematical Structures in Computer Science*, Cambridge: Cambridge University Press, 185-223.

[306] Li, T.Y. e J.A. Yorke (1975), Period three implies chaos, *The American Mathematical Monthly* 82(10), 985-992.

[307] Lii, K.S. e M. Rosenblatt (1982), Deconvolution and estimation of transfer function phase and coefficients for nongaussian linear process, *The Annals of Statistics* 10(4), 1195-1208.

[308] Ljung, G.M. e G.E.P. Box (1978), On a measure of lack of fit in time series models, *Biometrika* 65(2), 297-303.

[309] Lopes, A.C. (1999), Modelos DL e ADL, raízes unitárias e cointegração: uma introdução, ISEG, http://www.repository.utl.pt/bitstream/10400.5/781/1/tapoio.pdf

[310] Lorenz, E.N. (1980), Noisy periodicity and reverse bifurcation, *Annals of the New York Academy of Sciences* 357, 282-291.

[311] Lorenz, E.N. (1993), *The Essence of Chaos*. Seattle: University of washington Press.

[312] Lorenz, E.N. (1963), Deterministic nonperiodic flow, *Journal of the Atmospheric Sciences* 20, 130-141.

[313] Lorenz, H.M. (1989), *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*. Berlin: Springer-Verlag.

[314] Lu, Z. (2002), Local polynomial prediction and volatility estimation in financial time series, Soofi, A.S e L. Cao (Eds.), *Modelling and Forecasting Financial Data: Techniques of Nonlinear Dynamics*, Massachusetts: Kluwer Academic Press, 115-135.

[315] Luo, X. (2004), *Characterising Nonlinear Determinism From Experimental Time Series Data*. M.D. Thesis, Department of Electronic and Information Engineering, The Hong Kong Polytechnic University.

[316] Luo, X., T. Nakamura e M. Small (2005), Surrogate test to distinguish between chaotic and pseudoperiodic time series, *Physical Review E* 71(2), 0262301-0262308.

[317] Lutz, B.J., U. Pigorsch e R. Waldemar (2013), Nonlinearity in cap-and-trade systems: The EUA price and its fundamentals, *Working Paper: ZEW Discussion Papers* No. 13-001, Centre for European Economic Research in Cooperation with the University of Mannheim & Freudenberg & Co.

[318] Mackey, M.C. e L. Glass (1977), Oscillation and chaos in physiological control systems, *Science* 197, 287-289.

[319] Mackinnon, J. (1991), Critical values of cointegration tests, chapter 13 em Engle, R.F. e C.W.J. Granger (Eds.), *Long Run Economic Relationships: Readings in Cointegration*, Oxford: Oxford University Press.

[320] Mackinnon, J. (1992), Approximate asymptotic distribution functions for unit root and cointegration tests, *Working Paper No. 861*, Queen´s University.

[321] Mackinnon, J. (1996), Numerical distribution functions for unit root and cointegration tests, *Journal of Applied Econometrics* 11(6), 601-618.

[322] Mackinnon, J. (2010), Critical values for cointegration tests, *Working Paper No. 1227*, Queen´s University.

[323] Maddala, G.S. e I. Kim (2004), *Unit roots, Cointegration, and Structural Change*. Cambridge: Cambridge University Press.

[324] Maddala, G.S. e K.L. Lahiri (2009), *Introduction to Econometrics*. Chicester: John Wiley & Sons Ltd.

[325] Magnus, J.R. e B. Pesaran (1991), The bias of forecasts from a first-order autoregression, *Econometric Theory* 7(2), 222-235.

[326] Magnus, J.R. e B. Pesaran (1989), The exact multiperiod mean-square forecast error for the first-order autoregressive model with an intercept, *Journal of Econometrics* 42(2), 157-179.

[327] Maiwald, T., E. Mammen, S. Nandi e J. Timmer (2008), Surrogate data - a qualitative and quantitative analysis, Dahlhaus, R., J. Kurths, P. Maass e J. Timmer (Eds.), *Mathematical Methods in Time Series Analysis and Digital Image Processing: Understanding Complex Systems*, Berlin: Springer-Verlag, 41-74.

[328] Makridakis, S., S.C. Wheelwright e R.J. Hyndman (1998), *Forecasting: Methods and Applications*. Danvers, MA 01923: John Wiley & Sons, Inc.

[329] Mandelbrot, B.B. (1983), *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W.H. Freeman and Company Ltd.

[330] Mandelbrot, B.B. (1999), A multifractal walk down wall street, *Scientific American* 280(2), 70-73.

[331] Mandelbrot, B.B. (2010), *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk*. New York: Springer Science+Business Media, Inc.

[332] Mañé, R. (1981), On the dimension of the compact invariant sets of certain non-linear maps, em Rand, D.A. e L.S. Young (Eds.), *Lecture Notes in Mathematics: Dynamical Systems and Turbulence* 898, New-York: Springer, 230-242.

[333] Manneville, P. (2010), *Instabilities, Chaos and Turbulence*. London, 57 Shelton Street: Imperial College Press.

[334] Mantegna, R. e H. Stanley (2000), *An Introduction to Econophhysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge: Cambridge University Press.

[335] Marques, C.R. (1998), *Modelos Dinâmicos, Raízes Unitárias e Cointegração*. Lisboa: Edições da Universidade Nova de Lisboa.

[336] Martinez, W.L. e A.R. Martinez (2002), *Computacional Statistics Handbook with MATLAB*. Boca Raton: Chapman&Hall/CRC.

[337] Matignon, R. (2005), *Neural Network Modeling using SAS Enterprise Miner*. Cary: SAS Institute Inc.

[338] May, R.M. (1976), Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* 261, 459-467.

[339] Mayorga, R.O., A.S. Khan, R.D. Mayorga, P.V. Lima e M.A. Margarido (2007), Análise de transmissão de preços do mercado atacadista de melão do Brasil, *Revista de Economia e Sociologia Rural* 45(3), 675-704.

[340] McBride, G.B. (2005), *Using Statistical Methods for Water Quality Management*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

[341] McCauley, J.P. (2004), *Dynamics of Markets: Econophysics and Finance*. Cambridge, CB2 2RU: Cambridge University Press.

[342] McCauley, J.L. (2009), ARCH and GARCH models vs. martingale volatility of finance market returns, *International Review of Financial Analysis* 18(4), 151-153.

[343] McCauley, J.L. (2006), Response to "Worrying Trends in Econophysics", *Unpublished manuscript*, http://www.arxiv.org/ftp/physics/papers/0606/0606002.pdf

[344] McLeish, D.L. (1975), Invariance principles for dependent variables, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* 32(3), 165-178.

[345] Mcnelis, P.D. (2005), *Neural Networks in Finance: Gaining Predictive Edge in the Market*. Burlington, MA 01803: Elsevier Academic Press.

[346] McNerney, J., J.E. Trancik e J.D. Farmer (2010), Historical costs of coal-fired electricity and implications for the future, *Working Paper submitted to Elsevier*, Boston University & Santa Fe Institute.

[347] Mees, A.I. (1991), Dynamical systems and tesselations: detecting determinism in data, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 1(4), 777-794.

[348] Meese, R.A. e K.J. Singleton (1982), On unit roots and the empirical modeling of exchange rates, *The Journal of Finance* 37(4), 1029-1035.

[349] Menna, M., G. Rotundo e B. Tirozzi (2002), Distinguishing between chaotic and stochastic systems in financial time series, *International Journal of Modern Physics C* 13(1), 31-39.

[350] Mendelson, B. (1990), *Introduction to Topology*, 3rd Edition. New York: Dover Publications, Inc.

[351] Mendes, D.E.A. (2004), *Produtos Tensoriais em Dinâmicas de Aplicações Triangulares*. Tese de Doutoramento em Matemática, IST.

[352] Mendes, D.A. e T.M. Isfan (2003), Caos e ruído na bolsa de valores de lisboa, em Reis, E. e M.M. Hill (Eds.), *Temas em Métodos Quantitativos* 3, Lisboa: Edições Sílabo, 291-320.

[353] Metropolis, N., A.W. Rosenbluth, M.N. Rosenbluth e A.H. Teller (1953), Equation of state calculations by fast computing machines, *The Journal of Chemical Physics* 21(6), 1087-1092.

[354] Mills, T. e R. Markellos (2008), *The Econometric Modelling of Financial Time Series*. Cambridge: Cambridge University Press.

[355] Mindlin, G.B., H.G. Solari, M.A. Natiello, R. Gilmore e X.J. Hou (1991), Topological analysis of chaotic time series data from the Belousov-Zhabotinskii reaction, *Journal of Nonlinear Science* 1(2), 147-173.

[356] Mohammadi, S. e H.A. Nejad (2005), A matlab code for univariate time series forecasting, http://www.econpapers.repec.org/software/wpawuwppr/0505001.htm

[357] Mokhov, I.I., V.A. Bezerkhny, A.V. Eliseev e A.A. Karpenko (2006), Interrelation between variations in the global surface air temperature and solar activity based on observations and reconstructions, *Doklady Earth Sciences* 409(5), 805-809.

[358] Morais, V. e C. Vieira (2013), *Matlab: Curso Completo*. Lisboa: FCA - Editora de Informática, Lda.

[359] Morettin, P. e C. Toloi (2004), *Análise de Séries Temporais*. São Paulo: Edgard Blücher.

[360] Morgan Stanley Research Europe (2007), Utilities CO_2: back to the future.

[361] Morgan Stanley Research Europe (2009), Clean energy: Wind turbine manufacturers under pressure.

[362] Mukherjee, S., Osuna, E. e F. Girosi (1997), Nonlinear prediction of chaotic time series using Support Vector Machines, *Neural Networks for Signal Processing VII: Proceedings of the 1997 IEEE Signal Processing Society Workshop*, em Principe, J., L. Gile, N. Morgan e E. Wilson (Eds.), New York: The Institute of Electrical and Electronic Engineers, Inc., 511-520.

[363] Müller, D. (2007), *Processos Estocásticos e Aplicações*. Coimbra: Edições Almedina, SA.

[364] Murteira, B., C. Ribeiro, J. Silva e C. Pimenta (2002), *Introdução à Estatística*. Lisboa: McGraw-Hill.

[365] Murteira, B., D. Müller e K. Turkman (1993), *Análise de Sucessões Cronológicas*. Lisboa: McGraw-Hill.

[366] Nabeya, S. e K. Tanaka (1988), Asymptotic theory of a test for the constancy of regression coefficients against the random walk alternative, *The Annals of Statistics* 16(1), 218-235.

[367] National Research Council (2012), Climate change: Evidence, impacts, and choices, answers to common questions about the science of climate change, http://www.nas-sites.org/americasclimatechoices/files/2012/06/19014_cvtx_R1 .pdf

[368] Nauenberg, M. e J. Rudnick (1989), Universality and the power spectrum at the onset of chaos, em Streater, R.F. (Ed.), *Universality in Chaos*, Bristol: Institute of Physics Publishing, 276-278.

[369] Nelson, D. (1988), Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach, *Econometrica* 59(2), 347-370.

[370] Nelson, C.R. e H. Kang (1984), Pitfalls in the use of time as an explanatory variable in regression, *Journal of Business & Economic Statistics* 2(1), 73-82.

[371] Nelson, C.R. e C.I. Plosser (1982), Trends and random walks in macroeconomic time series: some evidence and implications, *Journal of Monetary Economics* 10(2), 139-162.

[372] Neuhauser, C. (2004), *Matemáticas para Ciencias*, 2ª Edición. Madrid: Pearson Educación, S.A..

[373] Newey, W. e K. West (1987), A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix, *Econometrica* 55(3), 703-708.

[374] Newhouse, S.E. (1979), The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms, *Publications Mathématiques de l ´I.H.É.S.* 50 (1), 101-151.

[375] Ng, S. e P. Perron (2001), Lag length selection and the construction of unit root tests with good size and power, *Econometrica* 69(6), 1519-1554.

[376] Nicolau, J. (2011), Modelação de séries temporais financeiras, http://www.pascal.iseg.utl.pt/~nicolau/myHP/fundacao_economicas2.pdf.

[377] Nicolau, J. (2012), *Modelação de Séries Temporais Financeiras*. Coimbra: Edições Almedina, SA.

[378] Nord Pool Consulting (2009), Carbon market as financing source: Nord Pool experience, http://www.norad.no/en/_attachment/147016/binary/81240?download /.../091111.pp

[379] Nunes, L.C. e P.M.M. Rodrigues (2009), Séries temporais: evolução e tópicos recentes, *Boletim da Sociedade Portuguesa de Estatística*, 14-22.

[380] Nychka, D.W., S. Ellner, A.R. Gallant e D. McCaffrey (1992), Finding chaos in noisy systems, *Journal of the Royal Statistical Society* B 54, 399-426.

[381] Nygren, K. (2004), *Stock Prediction - A Neural Network Approach*. Master Thesis, Royal Institute of Technology.

[382] Oliveira, W.S. e A.J. Fernandes (2011), Innovation and technology management in wind energy cluster, *Energy and Environment Research* 1(1), 175-187.

[383] Oliveira, M.C.C. e P. Raghupathy (2010), Mecânica computacional em tecnologia, *Unpublished manuscript*, https://woc.uc.pt/dem/getFile.do?tipo=2&id=5684

[384] Oliveira, M., L. Santos e N. Fortuna (2011), *Econometria*. Lisboa: Escolar Editora.

[385] Oskooe, S., H. Li e A. Shamsavari (2010), The random walk hypothesis in emerging stock market, *International Research Journal of Finance and Economics* 50, 51-61.

[386] Otero, J. e J. Smith (2005), The KPSS test with outliers, *Computacional Economics* 26(3), 59-67.

[387] Ott, E. (1981), Strange attractors and chaotic motions of dynamical systems, *Reviews of Modern Physics* 53(4), 655-671.

[388] Oseledec, V.I. (1968), A multiplivative ergodic theorem, *Transactions of the Moscow Mathematical Society* 19, 197-231.

[389] Packard, N.H., J.P. Crutchfield, J.D. Farmer e R.S. Shaw (1980), Geometry from a time series, *Physical Review Letters* 45(9), 712-716.

[390] Panas, E. (2001), Long memory and chaotic models of prices on the London metal exchange, *Resources Policy* 27(4), 235-246.

[391] Panichkitkosolkul, W. e S. Niwitpong (2012), Effect of preliminary unit root tests on prediction intervals for Gaussian autoregressive processes with additive outliers, *Chian Mai Journal of Science* 39(1), 8-29.

[392] Papadopoulou, M. (2010), *Nonlinear Time Series Forecasting Using Neural Networks and Fuzzy System Techniques*, MSc in Mathematics with Modern Applications, Department of Mathematics, University of York.

[393] Papoulis, A. (1991), *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 3rd Edition. New York: McGraw-Hill.

[394] Parlitz, U. (1992), Identification of true and spurious Lyapunov exponents from time series, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 2(1), 155-165.

[395] Parlitz, U. (1998), Nonlinear time-series analysis, em Suykens, J.A.K. e J. Vandewalle (Eds.), *Nonlinear Modeling: Advanced Black-Box Techniques*, Boston: Kluwer Academic Publishers, 209-239.

[396] Paskota, M., K.L. Teo e A. Mees (1997b), Combined controls for noisy chaotic systems, em Judd, K., A. Mees, K.L. Teo e T.L. Vincent (Eds.), *Control and Chaos*, Boston: Birkäuser, 207-225.

[397] Patterson, K. (2011), *Unit Root Tests in Time Series, Volume 1: Key Concepts and Problems.* New York: Palgrave Macmillan.

[398] Patterson, D.M. e R.A. Ashley (2000), *A nonlinear Time Series Workshop: A Toolkit for Detecting and Identifying Nonlinear Serial Dependence.* Massachussetts: Kluwer Academic Publishers.

[399] Pearson, R.K. (2005), *Mining Imperfect Data.* Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.

[400] Perron, P. (1989), The great crash, the oil price shock, and the unit root hypothesis, *Econometrica* 57(6), 1361-1401.

[401] Perron, P. (1993), The hump-shaped behavior of macroeconomic flutuactions, *Emprical Economics* 18, 707-727.

[402] Perron, P. e S. Ng (1996), Useful modifications to some unit root tests with dependent errors and their local asymptotic properties, *The Review of Economic Studies* 63(3), 435-463.

[403] Perron, P. e G. Rodríguez (2003), GLS detrending, efficient unit root tests and structural change, *Journal of Econometrics* 115(1), 1-27.

[404] Peters, E.E. (1991), *Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

[405] Pfaff, B. (2008), *Analysis of Integrated and Cointegrated Time Series with R*. New York, 233 Spring Street: Springer Science+Business Media, LLC.

[406] Phillips, P.C.B. (1977), Approximations to some finite sample distributions associated with a first-order stochastic difference equation, *Econometrica* 45(2), 463-485.

[407] Phillips, P.C.B. (1987a), Time series regression with a unit root, *Econometrica* 55(2), 277-301.

[408] Phillips, P. (1987b), Towards a unified asymptotic theory for autoregression, *Biometrika* 74(3), 535-547.

[409] Phillips, P.C.B. e P. Perron (1988), Testing for a unit root in time series regression, *Biometrika* 75(2), 335-346.

[410] Pineda, F.J. e J.C. Sommerer (1993), Estimating generalized dimensions and choosing time delays: a fast algorithm, em Weigend, S.A. e N.A. Gershenfeld (Eds.), *Time-Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past*, Massachusetts, Reading: Addison-Wesley Pub. Co., 367-385.

[411] Plosser, C.I. e G.W. Schwert (1978), Money, income, and sunspots: measuring economic relationships and the effects of differencing, *Journal of Monetary Economics* 4(4), 637-660.

[412] Podobnik, B., D. Horvatic, A.M. Petersen e H.E. Stanley (2009), Cross-correlations between volume change and price change, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 106(52), 22079-22084.

[413] Pomeau, Y., J.C. Roux, A. Rossi, S. Bachelart e C. Vidal (1989), Intermittent behaviour in the Belousov-Zhabotinsky reaction, em Streater, R.F. (Ed.), *Universality in Chaos*, Bristol: Institute of Physics Publishing, 167-169.

[414] Poon, C.S., C. Li e G.Q. Wu (2010), A unified theory of chaos linking nonlinear dynamics and statistical physics, *Chaotic Dynamics Working Paper*, University of Cornell.

[415] Powell, M.J.D. (1992), The theory of radial basis function approximation in 1990, em Light, W.A. (Ed.), *Advances in Numerical Analysis II: Wavelets, Subdivision Algorithms and Radial Basis Functions*, Oxford: Oxford University Press, 105-210.

[416] Powers, B. (2011), Natural gas vs. oil and coal, http://www.financialsense.com/contributors/bill-powers/natural-gas-vs-oil-and-coal

[417] Prichard, D. e J. Theiler (1994), Generating surrogate data for time series with several simultaneously measured variables, *Physical Review Letters* 73(7), 951-954.

[418] Priestly, M.B. (1989), *Non-linear and Non-Stationary Time Series Analysis*. London: Academic Press.

[419] Rao, T.S. e M.M. Gabr (1980), A test for linearity of stationary time series, *Journal of Time Series Analysis* 1(2), 145-158.

[420] Reitz, S. e U. Slopek (2008), Nonlinear oil price dynamics - a tale of heterogeneous speculators?, *Discussion Paper: Series Economic Studies* No. 10/2008, Deutsche Bundesbank and University of Giessen.

[421] Rissanen, J. (1989), *Stochastic Complexity in Statistical Inquiry*. Singapore: World Scientific.

[422] Rivera, D.P.S. (2010), *Análisis de Series Temporales*. Madrid: Alianza Editorial, S.A..

[423] Robinson, A.L. (1983), How does fluid become turbulent?, *Science* 221, 140-143.

[424] Román, A.P.S. e J.P. García (2001), *Modelos Econométricos*. Madrid: Ediciones Pirámide, Grupo Anaya, S.A..

[425] Rosenstein, M., J. Colllins, De Luca, C.J. (1993), A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets, *Physica D* 65, 117-134.

[426] Rossler, O.E. (1979), An equation for hyperchaos, *Physics Letters A* 71(1), 155-157.

[427] Rowlands, I.H. (2005), The European directive on renewable electricity: conflicts and compromises, *Energy Policy* 33, 965-974.

[428] Ruelle, D. (1979), Ergodic theory of differentiable dynamical systems, *Publications Mathématiques de l ´Institut des Hautes Études Scientifiques* 50(1), 27-58.

[429] Rusticelli, E., R.A. Ashley, E.B. Dagum e D.M. Patterson (2009), A new bispectral test for nonlinear serial dependence, *Econometric Reviews* 28(1-3), 279-293.

[430] Saari, D. (1996), The ease of generating chaotic behavior in Economics, *Chaos Solitons, and Fractals* 7 (12), 2267-2278.

[431] Saavedra, C.J.R. (2011), *Teoría del Caos: Sistemas Dinámicos y Series de Tiempo*. Saarbrücken: Editorial Académica Española.

[432] Saha, S., S. Das e M.A.K. Chowdhury (2011), *Comparative Study of ARIMA & ANN Models: A Comparative Study of Artificial Neural Network and Box-Jenkins ARIMA modeling for Dhaka Stock Exchange General Index*. Saarbrücken: Verlag: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH&Co. KG.

[433] Said, S.E. e D.A. Dickey (1985), Hypothesis testing in ARIMA(p,1,q) models, *Journal of the American Statistical Association* 80(390), 369-374.

[434] Said, S.E. e D.A. Dickey (1984), Testing for unit roots in autoregressive-moving average models of unknown order, *Biometrika* 71(3), 599-607.

[435] Samuelson, P.A. (1965), Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly, *Industrial Management Review* 6, 41-49.

[436] Samuelson, P.A. (1973), Proof that properly discounted present values of assets vibrate randomly, *The Bell Journal of Economics and Management Science* 4(2), 369-374.

[437] Sano, M. e Y. Sawada (1985), Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series, *Physical Review Letters* 55(10), 1082-1085.

[438] Santos, F.D., A. Amorim e J. Batista (2008), *Mecânica Quântica*. Lisboa, Avenida de Berna: Fundação Calouste Gulbenkian.

[439] Sato, S., M. Sano e Y. Sawada (1987), Practical methods of measuring the generalized dimension and the largest Lyapunov exponent in high dimensional chaotic systems, *Progress of Theoretical Physics* 77(1), 1-5.

[440] Sauer, T., J.A. Yorke e M. Casdagli (1991), Embedology, *Journal of Statistical Physics* 65(3-4), 579-616.

[441] Scheinkman, J.A. e B. LeBaron (1989), Nonlinear dynamics and stock returns, *The Journal of Business* 62(3), 311-337.

[442] Schittenkopf, C., G. Dorffner e E.J. Dockner (1999), On non-linear, stochastic dynamics in economic and financial time series, *Report Series* 40, Vienna University of Economics and Business Administration in cooperation with University of Vienna.

[443] Schlink, U., P. Haase, G. Nunnari e O. Herbarth (s.d.), Identifying and modelling dynamical non-linearity in time-series of urban air pollution, *Unpublished manuscript*, http://www.aix.meng.auth.gr/saturn/annualrep00/AnnRep00_UFZ.pdf

[444] Schouten, J.C., F. Takens e C.M. van den Bleek (1994), Estimation of the dimension of a noisy attractor, *Physical Review E* 50(3), 1851-1861.

[445] Schreiber, T. (1998), Constrained randomization of time series, *Physical Review Letters* 80(10), 2105-2108.

[446] Schreiber, T. e A. Schmitz (1996), Improved surrogate data for non-linearity tests, *Physical Review Letters* 77(4), 635-638.

[447] Schreiber, T. e A. Schmitz (2000), Surrogate time series, *Physica D* 142, 346-382.

[448] Schwarz, G. (1978), Estimating the dimension of a model, *The Annals of Statistics* 6(2), 461-464.

[449] Schwert, G.W. (1989), Tests for unit roots: a Monte Carlo investigation, *Journal of Business & Economic Statistics* 7(2), 147-159.

[450] Sedgewick, R. (1988), *Algorithms in C++, Parts 1-4: Fundamentals Data Structures Sorting Searching*. New York: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

[451] Serletis, A. (1992), Unit root behavior in energy futures prices, *The Energy Journal* 13(2), 119-128.

[452] Serletis, A. (1997), Is there an East-West split in North-American natural gas markets?, *MPRA Working Paper* No. 1746, Munich Personal RePEc Archive.

[453] Serletis, A. e P. Gogas (1997), Chaos in East European black market exchange, *Research in Economics* 51, 359-385.

[454] Serletis, A. e G. Periklis (1999), The north american natural gas liquids markets are chaotic, *The Energy Journal* 20(1), 83-103.

[455] Seydel, R. (1988), *From Equilibrium to Chaos: Practical Bifurcation and Stability Analysis*. New York: Elsevier Science Publishing Co., Inc.

[456] Shaw, R.S. (1985), *The Dripping Faucet as a Model Chaotic System*. Santa Cruz: Aerial Press.

[457] Shelhamer, M. (2007), *Nonlinear Dynamics in Physiology: A State-Space Approach*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

[458] Shumway, R.H. e D.S. Stoffer (2006), *Time Series Analysis and Its Applications With R Examples*, 2nd Edition. New York: Springer Science+Business Media, LLC.

[459] Silva, M.G. (2013), *Bolsa: Investir nos Mercados Financeiros*. Odivelas, Olival Basto: Bookout, Lda.

[460] Sinha, S., A. Chatterjee, A. Chakraborti e B.K. Chakrabarti (2011), *Econophysics: An Introduction*. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA.

[461] Smale, S. (1962), On the structure of manifolds, *American Journal of Mathematics* 84(3), 387-399.

[462] Small, M. (2005), Applied nonlinear time series analysis: applications in physics, physiology and finance, em Chua, L.O. (Ed.), *World Scientific Series on Nonlinear SciencE, Series A Vol. 52*, New Jersey: World Scientific, 1-245.

[463] Small, M. (2006), Applied nonlinear time series analysis: MATLAB code, http://www.small.eie.polyu.edu.hk/matlab/.

[464] Small, M. e K. Judd (s.d.), Using surrogate data to test for nonlinearity in experimental data, *Unpublished manuscript*, http://www.eie.polyu.edu.hk/~ensmall/.../NOLTA97.pdf

[465] Small, M. e K. Judd (1998a), Correlation dimension: a pivotal statistic for non-constrained realizations of composite hypotheses in surrogate data analysis, *Physica D* 120, 386-400.

[466] Small, M. e K. Judd (1998b), Comparisons of new nonlinear modeling techniques with applications to infant respiration, *Physica D* 117, 283-298.

[467] Small, M., K. Judd, M. Lowe e S. Stick (1999), Is breathing in infants chaotic? Dimension estimates for respiratory patterns during quiet sleep, *Journal of Applied Physiology* 86(1), 359-376.

[468] Small, M., K. Judd e A. Mees (2001), Testing time series for nonlinearity, *Statistics and Computing* 11, 257-268.

[469] Small, M. e C.K. Tse (2002a), Applying the method of surrogate data to cyclic time series. *Physica D* 164, 187-201.

[470] Small, M. e C.K. Tse (2002), Minimum description lenght neural networks for time series prediction, *Physical Review E* 66(6), 6701-6712.

[471] Small, M. e C.K. Tse (2003a), Determinism in financial time series, *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics* 7(3), 1-29. Disponível em http://www.chaos.eie.polyu.edu.hk/~ensmall/pdf/SNDE7.pdf

[472] Small, M. e C.K. Tse (2003b), Detecting determinism in time series: the method of surrogate data, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications* 50(5): 663-672.

[473] Small, M. e C.K. Tse (2003c), Evidence for deterministic nonlinear dynamics in financial time series data, *Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Computational for Financial Engineering*, Hong Kong, China: Polytechnic University, 339-346.

[474] Small, M. e C.K. Tse (2004), Optimal embedding parameters: a modelling paradigm, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 194(3-4), 283-296.

[475] Small, M., D. Yu e R.G. Harrison (2001), Surrogate test for pseudo-periodic time series data, *Physical Review Letters* 87(18), 188101-1-188101-4.

[476] Smith, L.A. (2007), *Chaos: A Very Short Introduction*. Oxford: Oxford University Press.

[477] Smith, S. (2011), *Environmental Economics: A Very Short Introduction*. New York: Oxford University Press Inc.

[478] Soros, G. (2009), *O Novo Paradigma dos Mercados Financeiros: A Crise Financeira de 2008 e o Seu Significado*. Coimbra: Edições Almedina, SA.

[479] Sprott, J.C. (1997), Some simple chaotic jerk functions, *American Journal of Physics* 65(6), 537-543.

[480] Sprott, J.C. (2003), *Chaos and Time-Series Analysis*. New York: Oxford University Press.

[481] Stanley, H.E., L.A.N. Amaral, X. Gabaix, P. Gopikrishnan e V. Plerou (2001), Similarities and differences between physics and economics, *Physica A* 299, 1-15.

[482] Stanley, H.E., V. Plerou e X. Gabaix (2008), A statistical physics view of financial fluctuations: Evidence for scaling and universality, *Physica A* 387, 3967-3981.

[483] Stark, J., D.S. Broomhead, M.E. Davies e J. Huke (2003), Delay embeddings for forced systems: II. stochastic forcing, *Journal of Nonlinear Science* 13(6), 519-577.

[484] Stavins, R. (2008), Addressing climate change with a comprehensive US cap-and-trade system, *Oxford Review of Economic Policy* 24(2), 298-321.

[485] Steeb, W.H. (2011), *The Nonlinear Workbook*, 5th Edition. New Jersey: World Scientific.

[486] Stock, J.H. e M.W. Watson (1988), Variable trends in economic time series, *The Journal of Economic Perspectives* 2(3), 147-174.

[487] Strogatz, S.H. (2000), *Nonlinear dynamics and chaos with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Cambridge, MA: Westview Press.

[488] Sugihara, G. e R.M. May (1990), Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series, *Nature* 344(6268), 734-741.

[489] Szpiro, G.G. (1997), Forecasting chaotic time series with genetic algorithms, *Physical Review E* 55(3), 2557-2568.

[490] Takens, F. (1981), Detecting strange attractors in turbulence, em Rand, D.A. e L.S. Young (Eds.), *Dynamical Systems and Turbulence, Volume 898 of Lecture Notes in Mathematics*, New York: Springer-Verlag, 366-381.

[491] Takens, F. (1985), On the numerical determination of the dimension of an attractor, em Braaksma, B.L.J., H. Broer e F. Takens (Eds.), *Dynamical Systems and Bifurcations. Lecture Notes in Mathematics* 1125, New York: Springer, 99-106.

[492] Takens, F. (1993), Detecting nonlinearities in stationary time series, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 3(2), 241-256.

[493] Taylor, S. (2008), *Modelling Financial Time Series*. New Jersey: World Scientific.

[494] Theiler, J. (1988), Lacunarity in a best estimator of fractal dimension, *Physics Letters A* 133(4-5), 195-200.

[495] Theiler, J. (1990), Estimating the fractal dimension of chaotic time series, *The Lincoln Laboratory Journal* 3(1), 63-86.

[496] Theiler, J. e S. Eubank (1993), Don´t bleach chaotic data, *Chaos* 3(4), 771-782.

[497] Theiler, J., S. Eubank, A. Longtin, B. Galdrikian e J.D. Farmer (1992), Testing for nonlinearity in time series: the method of surrogate data, *Physica D* 58, 77-94.

[498] Theiler J., B. Galdrikian, A. Longtin, S. Eubank e D. Farmer (1992), Using surrogate data to detect nonlinearity in time series, em Casdagli, M. e S. Eubank (Eds.), *Nonlinear Modeling and Forecasting, Vol. XII of SFI Studies in the Sciences of Complexity*, Reading, MA: Addison-Wesley Publishing.

[499] Theiler, J. e D. Prichard (1996), Constrained-realization Monte-Carlo method for hypothesis testing, *Physica D* 94(4), 221-235.

[500] Theiler, J. e D. Prichard (1997), Using "surrogate surrogate data"to calibrate the actual rate of false positives in tests for nonlinearity in time series, *Fields Institute Communications* 11, 99-113.

[501] Theodoridis, S. e K. Koutroumbas (2009), *Pattern Recognition*. Burlington, MA 01803: Academic Press.

[502] Thompson, J.M.T. e H.B. Stewart (2002), *Nonlinear Dynamics and Chaos*. New York: Jonh Wiley & Sons, Ltd.

[503] Timmermann, A. e C.W.J. Granger (2004), Efficient market hypothesis and forecasting, *International Journal of Forecasting* 20, 15-27.

[504] Tomé, F.J.S. (2003), Caos e métodos não-lineares nos mercados financeiros, *Millenium: Educação, Ciência e Tecnologia*, 140-148.

[505] Tsonis, A.A. e J.B. Elsner (1988), The weather attractor over very short time scales, *Nature* 333, 545-547.

[506] Tsonis, A.A., G.N. Triantafyllou e J.B. Elsner (1994), Searching for determinism in observed data: a review of the issue involved, *Nonlinear Processes in Geophysics* 1, 12-25.

[507] TSTOOL (2009), Tstool user manual: version 1.2, Universität Göttingen, http://www.physik3.gwdg.de/tstool/manual.pdf

[508] UniCredit, Markets & Investment Banking (2008), Presentation for expo CO_2: Climate economics policy, business and technology, 7 April, 1-17, http://www.expoco2.org/ponencies08/ALBERS.pdf

[509] United Nations (2007), The United Nations development agenda: development for all, http://www.un.org/esa/devagenda/UNDA_BW5_Final.pdf

[510] United States International Trade Commission (2009), Wind turbines: industry & trade summary, http://www.usitc.gov/publications/332/ITS-2.pdf

[511] Van der Pol, B. e J. Van der Mark (1927), Frequency demultiplication, *Nature* 120, 363-364.

[512] Van Ness, J.W. (1966) Asymptotic normality of bispectral estimates, *The Annals of Mathematical Statistics* 37(5), 1257-1272.

[513] Varsakelis, D.H. e C. Kyrtsou (2010), Testing for Granger causality in the presence of chaotic dynamics, *Brussels Economic Review* 53(2), 323-327.

[514] VDMA Power Systems & German Wind Energy Association (2009), The wind industry in Germany: Economic report 2009, http://www.renewablesinsight.com/.../windindustrie_in_deutschland_en_02.

[515] Vialar, T. (2009), *Complex and Chaotic Nonlinear Dynamics: Advances in Economics and Finance, Mathematics and Statistics*. Heidelberg: Springer-Verlag.

[516] Vidal, R.V.V. (1993), Optimal partition of an interval - the discrete version, em Vidal R.V.V. (Ed.), *Applied simulated annealing*, New York: Springer-Verlag, 291-311.

[517] Vilhena, V.M. (1958), *Pequeno Manual de Filosofia*. Coimbra: Livraria Sá da Costa.

[518] Wald, A. (1943), Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large, *Transactions of the American Mathematical Society* 54(3), 426-482.

[519] Wang, W., P. Gelder e J. Vrijling (2005), Trend and stationarity analysis for stareamflow processes of rivers in western europe in the 20th century, *International Conference on Water Economics, Statistics, and Finance (IWA)*, Rethymno, Greece: University of Crete, 451-461.

[520] Weigend, A. e N.A. Gershenfeld, Eds. (1994), Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past, Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity XV, California: Westview Press.

[521] Weiss, G.H. (1994), *Aspects and Applications of the Random Walk*. Amsterdam: North-Holland Press.

[522] White, J.S. (1958), The limiting distribution of the serial correlation coefficient in the explosive case, *The Annals of Mathematical Statistics* 29(4), 1188-1197.

[523] Wichern, D.W. (1973), The behavior of the sample autocorrelation function for an integrated moving average process, Biometrika 60(2), 235-239.

[524] Wiersema, U. (2010), *Brownian Motion Calculus*. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd.

[525] Williams, G.P. (2006), *Chaos Theory Tamed*. Washington, D.C.: Joseph Henry Press / National Academy Press.

[526] Witkowski, F.X., K.M. Kavanagh, P.A. Penkoske, R. Plonsey, M.L. Spano, W.L. Ditto e D.T. Kaplan (1995), Evidence for determinism in ventricular fibrillation, *Physical Review Letters* 75(6), 1230-1233.

[527] Wolf, A., J.B. Swift, H.L. Swinney e J.A. Vastano (1985), Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica 16D*, 285-317.

[528] Wong, M.W. (2011), Discrete Fourier analysis, em Wong, M.W., L. Rodino, B. Schulze, J. Sjöstrand, S. Thangavelu e M. Zworski (Eds.), *Pseudo-Differential Operators - Theory and Applications* 5, Toronto, Ontario M3J 1P3, Canada: York University, Springer Basel AG, 1-176.

[529] World Bank Institute (2008), State and trends of the carbon market 2008, http://www.siteresources.worldbank.org/NEWS/Resources/State&Trendsformatted06May10pm.pdf.

[530] Yao, Q. e H. Tong (1994), On prediction and chaos in stochastic systems, *Philosophical Transactions of the Royal Society London A* 348, 357-369.

[531] Yu, D., W. Lu e R.G. Harrison (1999), Detecting dynamical nonstationarity in time series data, *Chaos* 9(4), 865-870.

[532] Yu, D., Small, M., R.G. Harrison e C. Diks (2000), Efficient implementation of the Gaussian Kernel algorithm in estimating invariants and noise level from noisy time series data, *Physical Review E* 61(4), 3750-3756.

[533] Yu, L., S. Wang e K.K. Lai (2007), *Foreign-Exchange -Rate Forecasting with Artificial Neural Networks*. New York: Springer Science+Business Media, LLC.

[534] Yushu, C., M. Junhai e L. Zengrong (1999), The state space reconstruction technology of different kinds of chaotic data obtained from dynamical system, *Acta Mechanica Sinica* 15(1), 82-92.

[535] Zeileis, A. (2004), Econometric computing with HC and HAC covariance matrix estimators, *Journal of Statistical Software* 11(10), 1-17, http://www.jstatsoft.org/.

[536] Zivot, E. (2009), Practical issues in the analysis of univariate GARCH models, em Andersen T., R. Davis, J. Kreib e T. Mikosch (Eds.), *Handbook of financial time series*, Part I: Recent developments in GARCH modeling. Berlin: Springer-Verlag, 113-155.

[537] Zivot, E. e D.W.K. Andrews (1992), Further evidence on the great crash, the oil-price shock, and the unit-root hypothesis, *Journal of Business & Economic Statistics*, 10(3), 251-270.

[538] Zivot, E. e J. Wang (2006), *Modeling Financial Time Series with S-Plus*. New York: Springer Science+Business Media, LLC.

Anexos

Anexo I: Estatísticas Descritivas das Sucessões Cronológicas de Cotações das *Commodities* e das *Utilities*

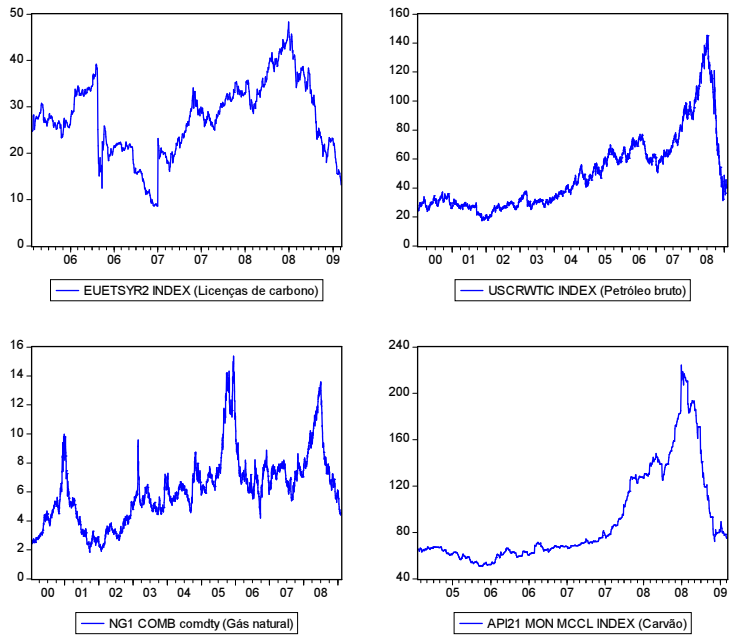


Fig. I.1: Cotações das *commodities*.

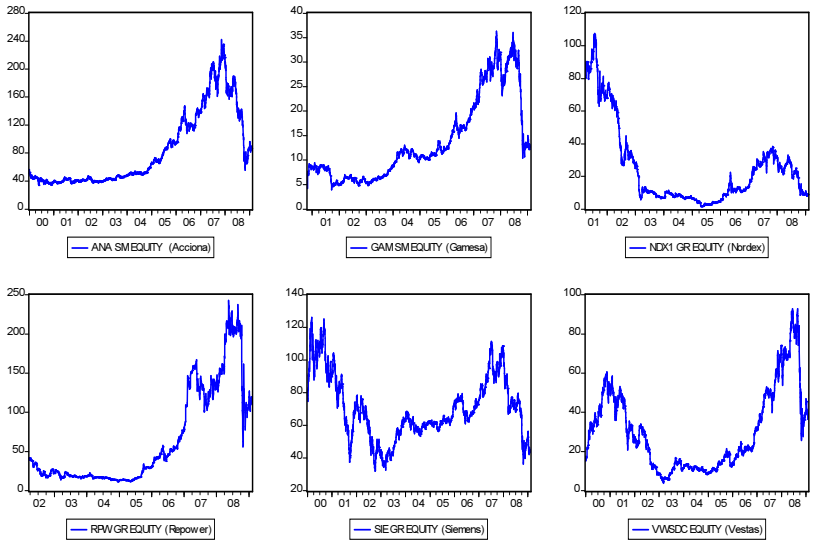


Figura I.2: Cotações das *utilities*.

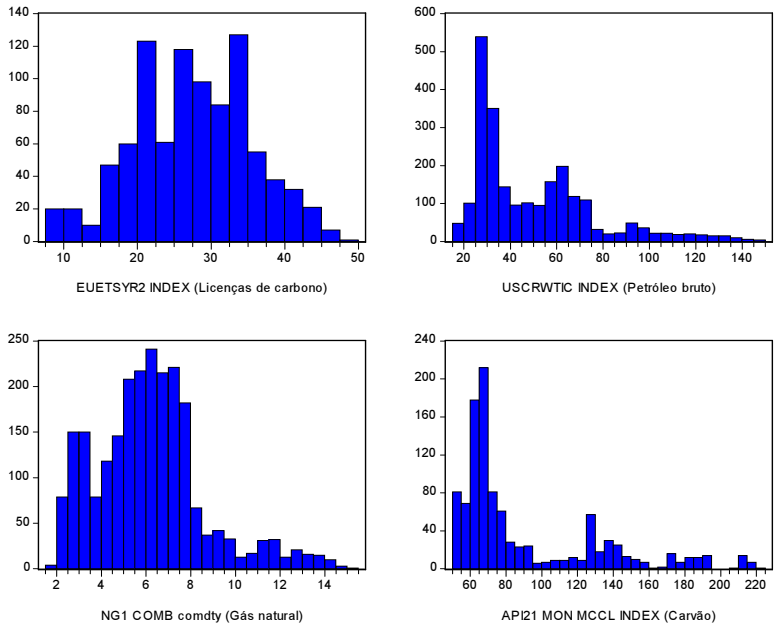


Figura I.3: Histogramas das cotações das *commodities*.

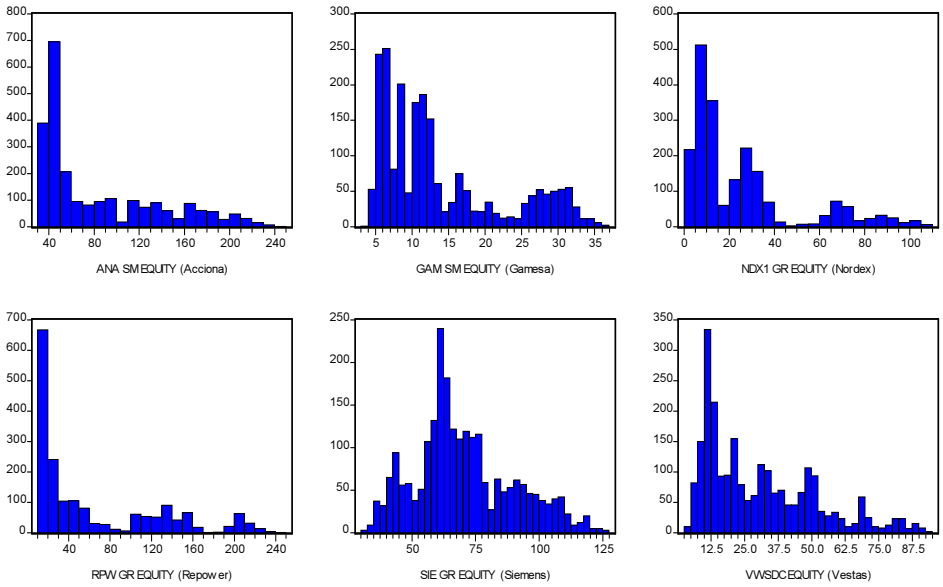


Figura I.4: Histogramas das cotações das *utilities*.

	Média	Mediana	Máximo	Mínimo	Desvio Padrão	Assimetria	Curtose
Commodities							
Licenças de Carbono	27,52041	27,51500	48,29000	8,64000	8,02915	-0,06431	2,62801
Petróleo Bruto	49,87343	40,07000	145,29000	17,45000	26,48154	1,27776	4,26553
Gás Natural	6,16730	6,10000	15,38000	1,83000	2,45208	0,83396	4,03360
Carvão	89,91475	68,91500	224,30000	50,78000	40,65325	1,41069	3,99181
Utilities							
Acciona	83,10995	51,80000	241,90000	33,80000	53,29890	1,07201	2,88571
Gamesa	13,8781	11,09500	36,30000	3,90000	8,45279	0,99079	2,69519
Nordex	24,81277	12,94000	107,50000	1,52000	24,42047	1,54735	4,50251
Repower	63,69844	29,70000	242,50000	11,33000	61,67565	1,14296	3,00851
Siemens	70,38836	66,70000	126,15000	32,05000	19,46177	0,51094	2,73298
Vestas	30,54835	23,87000	92,79000	3,88000	20,72209	0,91579	3,02387

Tabela I.1: Estatísticas descritivas das séries temporais de cotações das *commodities* e das *utilities*.

Cotações	Estatística JB	Valor-*p*
Commodities		
EUETSYR2 INDEX	5,952	0,051
USCRWTIC INDEX	803,736**	0,000
NG1 COMB Comdty	378,771**	0,000
API21 MON MCCL INDEX	393,531**	0,000
Utilities		
ANA SM EQUITY	455,806**	0,000
GAM SM EQUITY	361,417**	0,000
NDX1 GR EQUITY	1010,388**	0,000
RPW GR EQUITY	390,390**	0,000
SIE GR EQUITY	110,298**	0,000
VWSDC EQUITY	331,752**	0,000

** Rejeição da hipótese nula do teste a um nível de significância inferior a 1%.

Tabela I.2: Resultados do teste de Jarque e Bera.

Anexo II: Testes ADF em Nível e às Primeiras Diferenças nas Sucessões Cronológicas de Preços Logaritmizados das *Commodities*

Null Hypothesis: LALLOW has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=21)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-1.881869	0.3410
Test critical values:	1% level	-3.437228	
	5% level	-2.864466	
	10% level	-2.568381	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(LALLOW)
Method: Least Squares
Date: 06/11/12 Time: 17:15
Sample(adjusted): 27/07/2005 4/02/2009
Included observations: 921 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LALLOW(-1)	-0.009552	0.005076	-1.881869	0.0602
C	0.030514	0.016663	1.831199	0.0674

R-squared	0.003839	Mean dependent var	-0.000685
Adjusted R-squared	0.002755	S.D. dependent var	0.051064
S.E. of regression	0.050993	Akaike info criterion	-3.112081
Sum squared resid	2.389679	Schwarz criterion	-3.101602
Log likelihood	1435.113	F-statistic	3.541431
Durbin-Watson stat	2.055969	Prob(F-statistic)	0.060170

(a) Modelo com Intercepto (nível)

Null Hypothesis: D(LALLOW) has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=21)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-31.35611	0.0000
Test critical values:	1% level	-2.567478	
	5% level	-1.941168	
	10% level	-1.616468	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(LALLOW,2)
Method: Least Squares
Date: 06/11/12 Time: 18:28
Sample(adjusted): 28/07/2005 4/02/2009
Included observations: 920 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(LALLOW(-1))	-1.034783	0.033001	-31.35611	0.0000

R-squared	0.516876	Mean dependent var	-8.18E-05
Adjusted R-squared	0.516876	S.D. dependent var	0.073467
S.E. of regression	0.051065	Akaike info criterion	-3.110355
Sum squared resid	2.396399	Schwarz criterion	-3.105111
Log likelihood	1431.763	Durbin-Watson stat	1.999649

(b) Modelo sem Intercepto (1as diferenças)

Figura II.1: Testes ADF, EUETSYR2 INDEX (licenças de carbono).

Null Hypothesis: LOIL has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=26)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-1.537926	0.5143
Test critical values:	1% level	-3.432913	
	5% level	-2.862558	
	10% level	-2.567357	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(LOIL)
Method: Least Squares
Date: 06/12/12 Time: 10:33
Sample(adjusted): 5/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2371 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LOIL(-1)	-0.001686	0.001096	-1.537926	0.1242
C	0.006577	0.004185	1.571483	0.1162

R-squared	0.000997	Mean dependent var	0.000192
Adjusted R-squared	0.000576	S.D. dependent var	0.025853
S.E. of regression	0.025846	Akaike info criterion	-4.472476
Sum squared resid	1.582533	Schwarz criterion	-4.467608
Log likelihood	5304.121	F-statistic	2.365217
Durbin-Watson stat	2.038562	Prob(F-statistic)	0.124200

(a) Modelo com Intercepto (nível)

Null Hypothesis: D(LOIL) has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=26)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-49.67235	0.0001
Test critical values:	1% level	-2.565938	
	5% level	-1.940957	
	10% level	-1.616610	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(LOIL,2)
Method: Least Squares
Date: 06/12/12 Time: 10:30
Sample(adjusted): 6/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2370 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(LOIL(-1))	-1.020172	0.020538	-49.67235	0.0000

R-squared	0.510167	Mean dependent var	5.92E-06
Adjusted R-squared	0.510167	S.D. dependent var	0.036934
S.E. of regression	0.025849	Akaike info criterion	-4.472658
Sum squared resid	1.582912	Schwarz criterion	-4.470223
Log likelihood	5301.100	Durbin-Watson stat	1.999853

(b) Modelo sem Intercepto (1as diferenças)

Figura II.2: Testes ADF, USCRWTIC INDEX (petróleo bruto).

Null Hypothesis: LGAS has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=27)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-2.634070	0.0862
Test critical values:	1% level	-3.432926	
	5% level	-2.862564	
	10% level	-2.567360	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(LGAS)
Method: Least Squares
Date: 06/12/12 Time: 11:03
Sample(adjusted): 20/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2360 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LGAS(-1)	-0.004823	0.001831	-2.634070	0.0085
C	0.008659	0.003272	2.646468	0.0082

R-squared	0.002934	Mean dependent var	0.000272
Adjusted R-squared	0.002511	S.D. dependent var	0.036645
S.E. of regression	0.036599	Akaike info criterion	-3.776722
Sum squared resid	3.158580	Schwarz criterion	-3.771835
Log likelihood	4458.532	F-statistic	6.938326
Durbin-Watson stat	2.052473	Prob(F-statistic)	0.008492

(a) Modelo com Intercepto (nível)

Null Hypothesis: D(LGAS) has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=27)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-49.99454	0.0001
Test critical values:	1% level	-2.565943	
	5% level	-1.940958	
	10% level	-1.616609	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(LGAS,2)
Method: Least Squares
Date: 06/12/12 Time: 11:07
Sample(adjusted): 21/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2359 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(LGAS(-1))	-1.028683	0.020576	-49.99454	0.0000

R-squared	0.514560	Mean dependent var	-1.55E-05
Adjusted R-squared	0.514560	S.D. dependent var	0.052561
S.E. of regression	0.036621	Akaike info criterion	-3.775975
Sum squared resid	3.162280	Schwarz criterion	-3.773531
Log likelihood	4454.762	Durbin-Watson stat	1.998967

(b) Modelo sem Intercepto (1as diferenças)

Figura II.3: Testes ADF, NG1 COMB comdty (gás natural).

Null Hypothesis: LCOAL has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 1 (Automatic based on SIC, MAXLAG=22)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-0.839739	0.8069
Test critical values:	1% level	-3.436336	
	5% level	-2.864071	
	10% level	-2.568169	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(LCOAL)
Method: Least Squares
Date: 06/12/12 Time: 11:28
Sample(adjusted): 21/01/2005 4/02/2009
Included observations: 1054 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LCOAL(-1)	-0.001038	0.001236	-0.839739	0.4012
D(LCOAL(-1))	0.116863	0.030632	3.814996	0.0001
C	0.004704	0.005481	0.858283	0.3909

R-squared	0.014218	Mean dependent var	0.000134
Adjusted R-squared	0.012342	S.D. dependent var	0.015510
S.E. of regression	0.015414	Akaike info criterion	-5.504224
Sum squared resid	0.249712	Schwarz criterion	-5.490105
Log likelihood	2903.726	F-statistic	7.579120
Durbin-Watson stat	1.989370	Prob(F-statistic)	0.000539

(a) Modelo com Intercepto (nível)

Null Hypothesis: D(LCOAL) has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=22)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-28.86358	0.0000
Test critical values:	1% level	-2.567158	
	5% level	-1.941124	
	10% level	-1.616497	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(LCOAL,2)
Method: Least Squares
Date: 06/12/12 Time: 11:30
Sample(adjusted): 21/01/2005 4/02/2009
Included observations: 1054 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(LCOAL(-1))	-0.883494	0.030609	-28.86358	0.0000

R-squared	0.441707	Mean dependent var	2.20E-06
Adjusted R-squared	0.441707	S.D. dependent var	0.020617
S.E. of regression	0.015405	Akaike info criterion	-5.507288
Sum squared resid	0.249895	Schwarz criterion	-5.502582
Log likelihood	2903.341	Durbin-Watson stat	1.989308

(b) Modelo sem Intercepto (1as diferenças)

Figura II.4: Testes ADF, API21 MON MCCL INDEX (carvão).

Anexo III: Testes ADF em Nível e às Primeiras Diferenças nas Sucessões Cronológicas de Preços Logaritmizados das *Utilities*

Null Hypothesis: LACCIONA has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=27)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-0.837811	0.8077
Test critical values:	1% level	-3.432912	
	5% level	-2.862558	
	10% level	-2.567357	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(LACCIONA)
Method: Least Squares
Date: 06/12/12 Time: 13:57
Sample(adjusted): 4/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2372 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LACCIONA(-1)	-0.000605	0.000722	-0.837811	0.4022
C	0.002757	0.003090	0.892185	0.3724

R-squared	0.000296	Mean dependent var	0.000192
Adjusted R-squared	-0.000126	S.D. dependent var	0.020363
S.E. of regression	0.020364	Akaike info criterion	-4.949208
Sum squared resid	0.982865	Schwarz criterion	-4.944342
Log likelihood	5871.761	F-statistic	0.701928
Durbin-Watson stat	2.069170	Prob(F-statistic)	0.402221

(a) Modelo com Intercepto (nível)

Null Hypothesis: D(LACCIONA) has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=27)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-50.68244	0.0001
Test critical values:	1% level	-2.565938	
	5% level	-1.940957	
	10% level	-1.616610	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(LACCIONA,2)
Method: Least Squares
Date: 06/12/12 Time: 14:02
Sample(adjusted): 5/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2371 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(LACCIONA(-1))	-1.037983	0.020480	-50.68244	0.0000

R-squared	0.520117	Mean dependent var	4.32E-05
Adjusted R-squared	0.520117	S.D. dependent var	0.029302
S.E. of regression	0.020299	Akaike info criterion	-4.956090
Sum squared resid	0.976536	Schwarz criterion	-4.953656
Log likelihood	5876.445	Durbin-Watson stat	2.004507

(b) Modelo sem Intercepto (1as diferenças)

Figura III.1: Testes ADF, ANA SM EQUITY (Acciona).

Null Hypothesis: LGAMESA has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=26)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-1.826866	0.3677
Test critical values:	1% level	-3.433184	
	5% level	-2.862678	
	10% level	-2.567422	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(LGAMESA)
Method: Least Squares
Date: 06/12/12 Time: 14:23
Sample(adjusted): 31/10/2000 4/02/2009
Included observations: 2157 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LGAMESA(-1)	-0.001913	0.001047	-1.826866	0.0679
C	0.005223	0.002646	1.974100	0.0485

R-squared	0.001546	Mean dependent var	0.000517
Adjusted R-squared	0.001083	S.D. dependent var	0.028009
S.E. of regression	0.027994	Akaike info criterion	-4.312730
Sum squared resid	1.688789	Schwarz criterion	-4.307467
Log likelihood	4653.280	F-statistic	3.337438
Durbin-Watson stat	1.729940	Prob(F-statistic)	0.067858

(a) Modelo com Intercepto (nível)

Null Hypothesis: D(LGAMESA) has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=26)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-48.76890	0.0001
Test critical values:	1% level	-2.566035	
	5% level	-1.940971	
	10% level	-1.616601	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(LGAMESA,2)
Method: Least Squares
Date: 06/12/12 Time: 14:36
Sample(adjusted): 1/11/2000 4/02/2009
Included observations: 2156 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(LGAMESA(-1))	-0.952827	0.019538	-48.76890	0.0000

R-squared	0.524619	Mean dependent var	-0.000247
Adjusted R-squared	0.524619	S.D. dependent var	0.036858
S.E. of regression	0.025413	Akaike info criterion	-4.506683
Sum squared resid	1.391695	Schwarz criterion	-4.504050
Log likelihood	4859.204	Durbin-Watson stat	1.976627

(b) Modelo sem Intercepto (1as diferenças)

Figura III.2: Testes ADF, GAM SM EQUITY (Gamesa).

Null Hypothesis: LNORDEX has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=26)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-1.751331	0.4052
Test critical values:	1% level	-3.433344	
	5% level	-2.862749	
	10% level	-2.567460	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(LNORDEX)
Method: Least Squares
Date: 06/12/12 Time: 14:48
Sample(adjusted): 2/04/2001 4/02/2009
Included observations: 2048 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LNORDEX(-1)	-0.001852	0.001057	-1.751331	0.0800
C	0.003995	0.003098	1.289757	0.1973

R-squared	0.001497	Mean dependent var	-0.001131
Adjusted R-squared	0.001009	S.D. dependent var	0.045873
S.E. of regression	0.045850	Akaike info criterion	-3.325927
Sum squared resid	4.301062	Schwarz criterion	-3.320434
Log likelihood	3407.749	F-statistic	3.067160
Durbin-Watson stat	1.923031	Prob(F-statistic)	0.080039

(a) Modelo com Intercepto (nível)

Null Hypothesis: D(LNORDEX) has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=26)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-43.60574	0.0001
Test critical values:	1% level	-2.566092	
	5% level	-1.940978	
	10% level	-1.616595	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(LNORDEX,2)
Method: Least Squares
Date: 06/12/12 Time: 14:50
Sample(adjusted): 3/04/2001 4/02/2009
Included observations: 2047 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(LNORDEX(-1))	-0.962414	0.022071	-43.60574	0.0000

R-squared	0.481692	Mean dependent var	3.31E-05
Adjusted R-squared	0.481692	S.D. dependent var	0.063640
S.E. of regression	0.045817	Akaike info criterion	-3.327844
Sum squared resid	4.294917	Schwarz criterion	-3.325097
Log likelihood	3407.049	Durbin-Watson stat	2.001057

(b) Modelo sem Intercepto (1as diferenças)

Figura III.3: Testes ADF, NDX1 GR EQUITY (Nordex).

Null Hypothesis: LREPOWER has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 4 (Automatic based on SIC, MAXLAG=25)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-0.484003	0.8918
Test critical values:	1% level	-3.433805	
	5% level	-2.862953	
	10% level	-2.567569	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(LREPOWER)
Method: Least Squares
Date: 06/12/12 Time: 15:02
Sample(adjusted): 1/04/2002 4/02/2009
Included observations: 1788 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LREPOWER(-1)	-0.000445	0.000920	-0.484003	0.6284
D(LREPOWER(-1))	0.092662	0.023558	3.933420	0.0001
D(LREPOWER(-2))	0.065551	0.023651	2.771645	0.0056
D(LREPOWER(-3))	-0.028884	0.023654	-1.221093	0.2222
D(LREPOWER(-4))	-0.107442	0.023544	-4.563408	0.0000
C	0.002201	0.003512	0.626681	0.5309

R-squared	0.026147	Mean dependent var	0.000562
Adjusted R-squared	0.023414	S.D. dependent var	0.036931
S.E. of regression	0.036496	Akaike info criterion	-3.779885
Sum squared resid	2.373532	Schwarz criterion	-3.761466
Log likelihood	3385.218	F-statistic	9.568964
Durbin-Watson stat	1.995701	Prob(F-statistic)	0.000000

(a) Modelo com Intercepto (nível)

Null Hypothesis: D(LREPOWER) has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 3 (Automatic based on SIC, MAXLAG=25)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-22.91070	0.0000
Test critical values:	1% level	-2.566256	
	5% level	-1.941001	
	10% level	-1.616580	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(LREPOWER,2)
Method: Least Squares
Date: 06/12/12 Time: 15:04
Sample(adjusted): 1/04/2002 4/02/2009
Included observations: 1788 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(LREPOWER(-1))	-0.978548	0.042711	-22.91070	0.0000
D(LREPOWER(-1),2)	0.071137	0.037408	1.901652	0.0574
D(LREPOWER(-2),2)	0.136584	0.031700	4.308703	0.0000
D(LREPOWER(-3),2)	0.107562	0.023522	4.572761	0.0000

R-squared	0.458758	Mean dependent var	-9.07E-06
Adjusted R-squared	0.457848	S.D. dependent var	0.049547
S.E. of regression	0.036482	Akaike info criterion	-3.781761
Sum squared resid	2.374391	Schwarz criterion	-3.769481
Log likelihood	3384.894	Durbin-Watson stat	1.995718

(b) Modelo sem Intercepto (1as diferenças)

Figura III.4: Testes ADF, RPW GR EQUITY (Repower).

Null Hypothesis: LSIEMENS has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=27)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-2.011040	0.2822
Test critical values:	1% level	-3.432912	
	5% level	-2.862558	
	10% level	-2.567357	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(LSIEMENS)
Method: Least Squares
Date: 06/12/12 Time: 15:26
Sample(adjusted): 4/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2372 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LSIEMENS(-1)	-0.003729	0.001854	-2.011040	0.0444
C	0.015469	0.007835	1.974424	0.0484

R-squared	0.001704	Mean dependent var	-0.000253
Adjusted R-squared	0.001282	S.D. dependent var	0.025167
S.E. of regression	0.025151	Akaike info criterion	-4.527027
Sum squared resid	1.499150	Schwarz criterion	-4.522161
Log likelihood	5371.054	F-statistic	4.044283
Durbin-Watson stat	1.930867	Prob(F-statistic)	0.044434

(a) Modelo com Intercepto (nível)

Null Hypothesis: D(LSIEMENS) has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=27)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-47.16336	0.0001
Test critical values:	1% level	-2.565938	
	5% level	-1.940957	
	10% level	-1.616610	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(LSIEMENS,2)
Method: Least Squares
Date: 06/12/12 Time: 15:27
Sample(adjusted): 5/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2371 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(LSIEMENS(-1))	-0.968125	0.020527	-47.16336	0.0000

R-squared	0.484152	Mean dependent var	3.00E-05
Adjusted R-squared	0.484152	S.D. dependent var	0.035013
S.E. of regression	0.025148	Akaike info criterion	-4.527694
Sum squared resid	1.498782	Schwarz criterion	-4.525260
Log likelihood	5368.581	Durbin-Watson stat	1.999370

(b) Modelo sem Intercepto (1as diferenças)

Figura III.5: Testes ADF, SIE GR EQUITY (Siemens).

Null Hypothesis: LVESTAS has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=27)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-1.268663	0.6462
Test critical values:	1% level	-3.432912	
	5% level	-2.862558	
	10% level	-2.567357	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(LVESTAS)
Method: Least Squares
Date: 06/12/12 Time: 15:35
Sample(adjusted): 4/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2372 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LVESTAS(-1)	-0.001373	0.001082	-1.268663	0.2047
C	0.004719	0.003525	1.338774	0.1808

R-squared	0.000679	Mean dependent var	0.000355
Adjusted R-squared	0.000257	S.D. dependent var	0.037546
S.E. of regression	0.037541	Akaike info criterion	-3.725906
Sum squared resid	3.340162	Schwarz criterion	-3.721040
Log likelihood	4420.924	F-statistic	1.609506
Durbin-Watson stat	1.897219	Prob(F-statistic)	0.204686

(a) Modelo com Intercepto (nível)

Null Hypothesis: D(LVESTAS) has a unit root
Exogenous: None
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=27)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-46.27807	0.0001
Test critical values:	1% level	-2.565938	
	5% level	-1.940957	
	10% level	-1.616610	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(LVESTAS,2)
Method: Least Squares
Date: 06/12/12 Time: 15:37
Sample(adjusted): 5/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2371 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(LVESTAS(-1))	-0.949307	0.020513	-46.27807	0.0000

R-squared	0.474694	Mean dependent var	5.99E-06
Adjusted R-squared	0.474694	S.D. dependent var	0.051745
S.E. of regression	0.037504	Akaike info criterion	-3.728341
Sum squared resid	3.333444	Schwarz criterion	-3.725907
Log likelihood	4420.948	Durbin-Watson stat	1.997920

(b) Modelo sem Intercepto (1as diferenças)

Figura III.6: Testes ADF, VWSDC EQUITY (Vestas).

Anexo IV: Testes PP de Phillips e Perron em Nível e às Primeiras Diferenças nas Sucessões Cronológicas de Preços Logaritmizados das *Commodities*

Null Hypothesis: LALLOW has a unit root
Exogenous: Constant
Bandwidth: 6 (Newey-West using Bartlett kernel)

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-1.832611	0.3647
Test critical values:	1% level	-3.437228	
	5% level	-2.864466	
	10% level	-2.568381	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	0.002595
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.002504

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(LALLOW)
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 27/07/2005 4/02/2009
Included observations: 921 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LALLOW(-1)	-0.009552	0.005076	-1.881869	0.0602
C	0.030514	0.016663	1.831199	0.0674

R-squared	0.003839	Mean dependent var	-0.000685
Adjusted R-squared	0.002755	S.D. dependent var	0.051064
S.E. of regression	0.050993	Akaike info criterion	-3.112081
Sum squared resid	2.389679	Schwarz criterion	-3.101602
Log likelihood	1435.113	F-statistic	3.541431
Durbin-Watson stat	2.055969	Prob(F-statistic)	0.060170

(a) Modelo com Intercepto (nível)

Null Hypothesis: D(LALLOW) has a unit root
Exogenous: None
Bandwidth: 7 (Newey-West using Bartlett kernel)

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-31.35959	0.0000
Test critical values:	1% level	-2.567478	
	5% level	-1.941168	
	10% level	-1.616468	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	0.002605
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.002588

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(LALLOW,2)
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 28/07/2005 4/02/2009
Included observations: 920 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(LALLOW(-1))	-1.034783	0.033001	-31.35611	0.0000

R-squared	0.516876	Mean dependent var	-8.18E-05
Adjusted R-squared	0.516876	S.D. dependent var	0.073467
S.E. of regression	0.051065	Akaike info criterion	-3.110355
Sum squared resid	2.396399	Schwarz criterion	-3.105111
Log likelihood	1431.763	Durbin-Watson stat	1.999649

(b) Modelo sem Intercepto (1as diferenças)

Figura IV.1: Testes de PP, EUETSYR2 INDEX (licenças de carbono).

Null Hypothesis: LOIL has a unit root
Exogenous: Constant
Bandwidth: 31 (Newey-West using Bartlett kernel)

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-1.494935	0.5363
Test critical values:	1% level	-3.432913	
	5% level	-2.862558	
	10% level	-2.567357	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	0.000667
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.000614

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(LOIL)
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 5/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2371 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LOIL(-1)	-0.001686	0.001096	-1.537926	0.1242
C	0.006577	0.004185	1.571483	0.1162

R-squared	0.000997	Mean dependent var	0.000192
Adjusted R-squared	0.000576	S.D. dependent var	0.025853
S.E. of regression	0.025846	Akaike info criterion	-4.472476
Sum squared resid	1.582533	Schwarz criterion	-4.467608
Log likelihood	5304.121	F-statistic	2.365217
Durbin-Watson stat	2.038562	Prob(F-statistic)	0.124200

(a) Modelo com Intercepto (nível)

Null Hypothesis: D(LOIL) has a unit root
Exogenous: None
Bandwidth: 30 (Newey-West using Bartlett kernel)

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-49.73519	0.0001
Test critical values:	1% level	-2.565938	
	5% level	-1.940957	
	10% level	-1.616610	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	0.000668
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.000624

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(LOIL,2)
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 6/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2370 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(LOIL(-1))	-1.020172	0.020538	-49.67235	0.0000

R-squared	0.510167	Mean dependent var	5.92E-06
Adjusted R-squared	0.510167	S.D. dependent var	0.036934
S.E. of regression	0.025849	Akaike info criterion	-4.472658
Sum squared resid	1.582912	Schwarz criterion	-4.470223
Log likelihood	5301.100	Durbin-Watson stat	1.999853

(b) Modelo sem Intercepto (1as diferenças)

Figura IV.2: Testes de PP, USCRWTIC INDEX (petróleo bruto).

Null Hypothesis: LGAS has a unit root
Exogenous: Constant
Bandwidth: 0 (Newey-West using Bartlett kernel)

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-2.634070	0.0862
Test critical values:	1% level	-3.432926	
	5% level	-2.862564	
	10% level	-2.567360	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	0.001338
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.001338

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(LGAS)
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 20/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2360 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LGAS(-1)	-0.004823	0.001831	-2.634070	0.0085
C	0.008659	0.003272	2.646468	0.0082

R-squared	0.002934	Mean dependent var	0.000272
Adjusted R-squared	0.002511	S.D. dependent var	0.036645
S.E. of regression	0.036599	Akaike info criterion	-3.776722
Sum squared resid	3.158580	Schwarz criterion	-3.771835
Log likelihood	4458.532	F-statistic	6.938326
Durbin-Watson stat	2.052473	Prob(F-statistic)	0.008492

(a) Modelo com Intercepto (nível)

Null Hypothesis: D(LGAS) has a unit root
Exogenous: None
Bandwidth: 2 (Newey-West using Bartlett kernel)

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-49.99659	0.0001
Test critical values:	1% level	-2.565943	
	5% level	-1.940958	
	10% level	-1.616609	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	0.001341
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.001337

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(LGAS,2)
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 21/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2359 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(LGAS(-1))	-1.028683	0.020576	-49.99454	0.0000

R-squared	0.514560	Mean dependent var	-1.55E-05
Adjusted R-squared	0.514560	S.D. dependent var	0.052561
S.E. of regression	0.036621	Akaike info criterion	-3.775975
Sum squared resid	3.162280	Schwarz criterion	-3.773531
Log likelihood	4454.762	Durbin-Watson stat	1.998967

(b) Modelo sem Intercepto (1as diferenças)

Figura IV.3: Testes de PP, NG1 COMB comdty (gás natural).

Null Hypothesis: LCOAL has a unit root
Exogenous: Constant
Bandwidth: 13 (Newey-West using Bartlett kernel)

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-0.937401	0.7765
Test critical values:	1% level	-3.436330	
	5% level	-2.864069	
	10% level	-2.568168	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	0.000240
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.000393

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(LCOAL)
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 20/01/2005 4/02/2009
Included observations: 1055 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LCOAL(-1)	-0.000972	0.001243	-0.781646	0.4346
C	0.004434	0.005512	0.804368	0.4214

R-squared	0.000580	Mean dependent var	0.000141
Adjusted R-squared	-0.000369	S.D. dependent var	0.015504
S.E. of regression	0.015507	Akaike info criterion	-5.493112
Sum squared resid	0.253223	Schwarz criterion	-5.483706
Log likelihood	2899.616	F-statistic	0.610971
Durbin-Watson stat	1.765914	Prob(F-statistic)	0.434598

(a) Modelo com Intercepto (nível)

Null Hypothesis: D(LCOAL) has a unit root
Exogenous: None
Bandwidth: 11 (Newey-West using Bartlett kernel)

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-29.39653	0.0000
Test critical values:	1% level	-2.567158	
	5% level	-1.941124	
	10% level	-1.616497	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	0.000237
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.000294

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(LCOAL,2)
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 21/01/2005 4/02/2009
Included observations: 1054 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(LCOAL(-1))	-0.883494	0.030609	-28.86358	0.0000

R-squared	0.441707	Mean dependent var	2.20E-06
Adjusted R-squared	0.441707	S.D. dependent var	0.020617
S.E. of regression	0.015405	Akaike info criterion	-5.507288
Sum squared resid	0.249895	Schwarz criterion	-5.502582
Log likelihood	2903.341	Durbin-Watson stat	1.989308

(b) Modelo sem Intercepto (1as diferenças)

Figura IV.4: Testes de PP, API21 MON MCCL INDEX (carvão).

Anexo V: Testes PP de Phillips e Perron em Nível e às Primeiras Diferenças nas Sucessões Cronológicas de Preços Logaritmizados das *Utilities*

Null Hypothesis: LACCIONA has a unit root
Exogenous: Constant
Bandwidth: 1 (Newey-West using Bartlett kernel)

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-0.821148	0.8125
Test critical values:	1% level	-3.432912	
	5% level	-2.862558	
	10% level	-2.567357	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	0.000414
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.000399

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(LACCIONA)
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 4/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2372 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LACCIONA(-1)	-0.000605	0.000722	-0.837811	0.4022
C	0.002757	0.003090	0.892185	0.3724

R-squared	0.000296	Mean dependent var	0.000192
Adjusted R-squared	-0.000126	S.D. dependent var	0.020363
S.E. of regression	0.020364	Akaike info criterion	-4.949208
Sum squared resid	0.982865	Schwarz criterion	-4.944342
Log likelihood	5871.761	F-statistic	0.701928
Durbin-Watson stat	2.069170	Prob(F-statistic)	0.402221

(a) Modelo com Intercepto (nível)

Null Hypothesis: D(LACCIONA) has a unit root
Exogenous: None
Bandwidth: 0 (Newey-West using Bartlett kernel)

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-50.68244	0.0001
Test critical values:	1% level	-2.565938	
	5% level	-1.940957	
	10% level	-1.616610	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	0.000412
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.000412

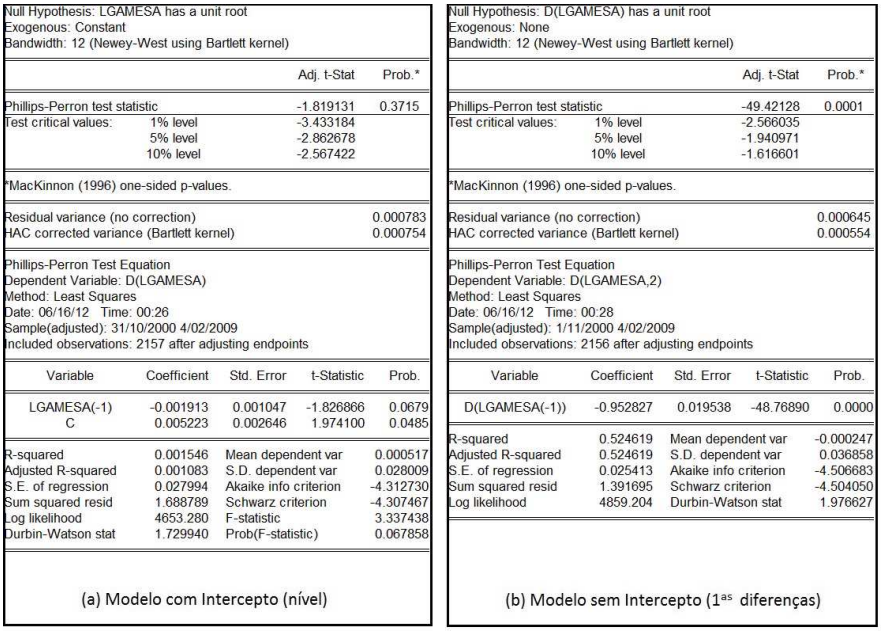
Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(LACCIONA,2)
Method: Least Squares
Date: 06/16/12 Time: 00:19
Sample(adjusted): 5/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2371 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(LACCIONA(-1))	-1.037983	0.020480	-50.68244	0.0000

R-squared	0.520117	Mean dependent var	4.32E-05
Adjusted R-squared	0.520117	S.D. dependent var	0.029302
S.E. of regression	0.020299	Akaike info criterion	-4.956090
Sum squared resid	0.976536	Schwarz criterion	-4.953656
Log likelihood	5876.445	Durbin-Watson stat	2.004507

(b) Modelo sem Intercepto (1as diferenças)

Figura V.1: Testes de PP, ANA SM EQUITY (Acciona).



Null Hypothesis: LGAMESA has a unit root
Exogenous: Constant
Bandwidth: 12 (Newey-West using Bartlett kernel)

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-1.819131	0.3715
Test critical values:	1% level	-3.433184	
	5% level	-2.862678	
	10% level	-2.567422	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	0.000783
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.000754

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(LGAMESA)
Method: Least Squares
Date: 06/16/12 Time: 00:26
Sample(adjusted): 31/10/2000 4/02/2009
Included observations: 2157 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LGAMESA(-1)	-0.001913	0.001047	-1.826866	0.0679
C	0.005223	0.002646	1.974100	0.0485

R-squared	0.001546	Mean dependent var	0.000517
Adjusted R-squared	0.001083	S.D. dependent var	0.028009
S.E. of regression	0.027994	Akaike info criterion	-4.312730
Sum squared resid	1.688789	Schwarz criterion	-4.307467
Log likelihood	4653.280	F-statistic	3.337438
Durbin-Watson stat	1.729940	Prob(F-statistic)	0.067858

(a) Modelo com Intercepto (nível)

Null Hypothesis: D(LGAMESA) has a unit root
Exogenous: None
Bandwidth: 12 (Newey-West using Bartlett kernel)

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-49.42128	0.0001
Test critical values:	1% level	-2.566035	
	5% level	-1.940971	
	10% level	-1.616601	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	0.000645
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.000554

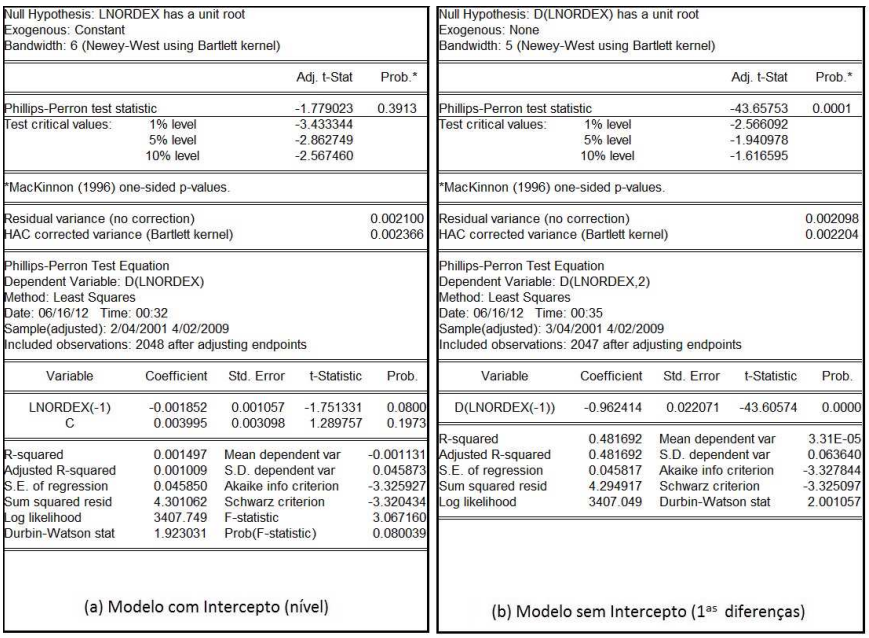
Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(LGAMESA,2)
Method: Least Squares
Date: 06/16/12 Time: 00:28
Sample(adjusted): 1/11/2000 4/02/2009
Included observations: 2156 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(LGAMESA(-1))	-0.952827	0.019538	-48.76890	0.0000

R-squared	0.524619	Mean dependent var	-0.000247
Adjusted R-squared	0.524619	S.D. dependent var	0.036858
S.E. of regression	0.025413	Akaike info criterion	-4.506683
Sum squared resid	1.391695	Schwarz criterion	-4.504050
Log likelihood	4859.204	Durbin-Watson stat	1.976627

(b) Modelo sem Intercepto (1as diferenças)

Figura V.2: Testes de PP, GAM SM EQUITY (Gamesa).



Null Hypothesis: LNORDEX has a unit root
Exogenous: Constant
Bandwidth: 6 (Newey-West using Bartlett kernel)

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-1.779023	0.3913
Test critical values:	1% level	-3.433344	
	5% level	-2.862749	
	10% level	-2.567460	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	0.002100
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.002366

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(LNORDEX)
Method: Least Squares
Date: 06/16/12 Time: 00:32
Sample(adjusted): 2/04/2001 4/02/2009
Included observations: 2048 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LNORDEX(-1)	-0.001852	0.001057	-1.751331	0.0800
C	0.003995	0.003098	1.289757	0.1973

R-squared	0.001497	Mean dependent var	-0.001131
Adjusted R-squared	0.001009	S.D. dependent var	0.045873
S.E. of regression	0.045850	Akaike info criterion	-3.325927
Sum squared resid	4.301062	Schwarz criterion	-3.320434
Log likelihood	3407.749	F-statistic	3.067160
Durbin-Watson stat	1.923031	Prob(F-statistic)	0.080039

(a) Modelo com Intercepto (nível)

Null Hypothesis: D(LNORDEX) has a unit root
Exogenous: None
Bandwidth: 5 (Newey-West using Bartlett kernel)

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-43.65753	0.0001
Test critical values:	1% level	-2.566092	
	5% level	-1.940978	
	10% level	-1.616595	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	0.002098
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.002204

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(LNORDEX,2)
Method: Least Squares
Date: 06/16/12 Time: 00:35
Sample(adjusted): 3/04/2001 4/02/2009
Included observations: 2047 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(LNORDEX(-1))	-0.962414	0.022071	-43.60574	0.0000

R-squared	0.481692	Mean dependent var	3.31E-05
Adjusted R-squared	0.481692	S.D. dependent var	0.063640
S.E. of regression	0.045817	Akaike info criterion	-3.327844
Sum squared resid	4.294917	Schwarz criterion	-3.325097
Log likelihood	3407.049	Durbin-Watson stat	2.001057

(b) Modelo sem Intercepto (1as diferenças)

Figura V.3: Testes de PP, NDX1 GR EQUITY (Nordex).

Null Hypothesis: LREPOWER has a unit root
Exogenous: Constant
Bandwidth: 13 (Newey-West using Bartlett kernel)

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-0.489347	0.8908
Test critical values:	1% level	-3.433797	
	5% level	-2.862949	
	10% level	-2.567567	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	0.001363
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.001390

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(LREPOWER)
Method: Least Squares
Date: 06/16/12 Time: 00:39
Sample(adjusted): 26/03/2002 4/02/2009
Included observations: 1792 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LREPOWER(-1)	-0.000444	0.000930	-0.477425	0.6331
C	0.002234	0.003550	0.629242	0.5293

R-squared	0.000127	Mean dependent var	0.000591
Adjusted R-squared	-0.000431	S.D. dependent var	0.036926
S.E. of regression	0.036934	Akaike info criterion	-3.758248
Sum squared resid	2.441787	Schwarz criterion	-3.752120
Log likelihood	3369.390	F-statistic	0.227935
Durbin-Watson stat	1.799316	Prob(F-statistic)	0.633118

(a) Modelo com Intercepto (nível)

Null Hypothesis: D(LREPOWER) has a unit root
Exogenous: None
Bandwidth: 16 (Newey-West using Bartlett kernel)

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-38.14793	0.0000
Test critical values:	1% level	-2.566254	
	5% level	-1.941000	
	10% level	-1.616580	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	0.001348
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.001075

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(LREPOWER,2)
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 27/03/2002 4/02/2009
Included observations: 1791 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(LREPOWER(-1))	-0.900653	0.023499	-38.32726	0.0000

R-squared	0.450748	Mean dependent var	-4.60E-05
Adjusted R-squared	0.450748	S.D. dependent var	0.049554
S.E. of regression	0.036725	Akaike info criterion	-3.770153
Sum squared resid	2.414236	Schwarz criterion	-3.767087
Log likelihood	3377.172	Durbin-Watson stat	2.009127

(b) Modelo sem Intercepto (1as diferenças)

Figura V.4: Testes de PP, RPW GR EQUITY (Repower).

Null Hypothesis: LSIEMENS has a unit root
Exogenous: Constant
Bandwidth: 6 (Newey-West using Bartlett kernel)

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-1.961273	0.3043
Test critical values:	1% level	-3.432912	
	5% level	-2.862558	
	10% level	-2.567357	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	0.000632
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.000606

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(LSIEMENS)
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 4/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2372 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LSIEMENS(-1)	-0.003729	0.001854	-2.011040	0.0444
C	0.015469	0.007835	1.974424	0.0484

R-squared	0.001704	Mean dependent var	-0.000253
Adjusted R-squared	0.001282	S.D. dependent var	0.025167
S.E. of regression	0.025151	Akaike info criterion	-4.527027
Sum squared resid	1.499150	Schwarz criterion	-4.522161
Log likelihood	5371.054	F-statistic	4.044283
Durbin-Watson stat	1.930867	Prob(F-statistic)	0.044434

(a) Modelo com Intercepto (nível)

Null Hypothesis: D(LSIEMENS) has a unit root
Exogenous: None
Bandwidth: 3 (Newey-West using Bartlett kernel)

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-47.14286	0.0001
Test critical values:	1% level	-2.565938	
	5% level	-1.940957	
	10% level	-1.616610	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	0.000632
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.000607

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(LSIEMENS,2)
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 5/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2371 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(LSIEMENS(-1))	-0.968125	0.020527	-47.16336	0.0000

R-squared	0.484152	Mean dependent var	3.00E-05
Adjusted R-squared	0.484152	S.D. dependent var	0.035013
S.E. of regression	0.025148	Akaike info criterion	-4.527694
Sum squared resid	1.498782	Schwarz criterion	-4.525260
Log likelihood	5368.581	Durbin-Watson stat	1.999370

(b) Modelo sem Intercepto (1as diferenças)

Figura V.5: Testes de PP, SIE GR EQUITY (Siemens).

Null Hypothesis: LVESTAS has a unit root
Exogenous: Constant
Bandwidth: 6 (Newey-West using Bartlett kernel)

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-1.270372	0.6454
Test critical values:	1% level	-3.432912	
	5% level	-2.862558	
	10% level	-2.567357	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	0.001408
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.001412

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(LVESTAS)
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 4/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2372 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LVESTAS(-1)	-0.001373	0.001082	-1.268663	0.2047
C	0.004719	0.003525	1.338774	0.1808

R-squared	0.000679	Mean dependent var	0.000355
Adjusted R-squared	0.000257	S.D. dependent var	0.037546
S.E. of regression	0.037541	Akaike info criterion	-3.725906
Sum squared resid	3.340162	Schwarz criterion	-3.721040
Log likelihood	4420.924	F-statistic	1.609506
Durbin-Watson stat	1.897219	Prob(F-statistic)	0.204686

(a) Modelo com Intercepto (nível)

Null Hypothesis: D(LVESTAS) has a unit root
Exogenous: None
Bandwidth: 8 (Newey-West using Bartlett kernel)

		Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic		-46.21861	0.0001
Test critical values:	1% level	-2.565938	
	5% level	-1.940957	
	10% level	-1.616610	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Residual variance (no correction)	0.001406
HAC corrected variance (Bartlett kernel)	0.001264

Phillips-Perron Test Equation
Dependent Variable: D(LVESTAS,2)
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 5/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2371 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(LVESTAS(-1))	-0.949307	0.020513	-46.27807	0.0000

R-squared	0.474694	Mean dependent var	5.99E-06
Adjusted R-squared	0.474694	S.D. dependent var	0.051745
S.E. of regression	0.037504	Akaike info criterion	-3.728341
Sum squared resid	3.333444	Schwarz criterion	-3.725907
Log likelihood	4420.948	Durbin-Watson stat	1.997920

(b) Modelo sem Intercepto (1ªs diferenças)

Figura V.6: Testes de PP, VWSDC EQUITY (Vestas).

Anexo VI: Testes ARCH-LM nas Sucessões Cronológicas de Rendibilidades das *Commodities*

ARCH Test:

F-statistic	0.244757	Probability	0.942459
Obs*R-squared	1.230199	Probability	0.941948

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 3/08/2005 4/02/2009
Included observations: 916 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.002484	0.001163	2.135851	0.0330
RESID^2(-1)	0.035848	0.033150	1.081390	0.2798
RESID^2(-2)	0.001287	0.033170	0.038803	0.9691
RESID^2(-3)	0.000224	0.033168	0.006751	0.9946
RESID^2(-4)	0.006792	0.033168	0.204766	0.8378
RESID^2(-5)	0.002062	0.033148	0.062212	0.9504

R-squared	0.001343	Mean dependent var	0.002604
Adjusted R-squared	-0.004144	S.D. dependent var	0.034664
S.E. of regression	0.034736	Akaike info criterion	-3.875545
Sum squared resid	1.098004	Schwarz criterion	-3.843973
Log likelihood	1781.000	F-statistic	0.244757
Durbin-Watson stat	1.999910	Prob(F-statistic)	0.942459

(a) Testes ARCH-LM: 5 *lags*.

ARCH Test:

F-statistic	0.133965	Probability	0.999343
Obs*R-squared	1.354005	Probability	0.999323

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 06/17/12 Time: 22:55
Sample(adjusted): 10/08/2005 4/02/2009
Included observations: 911 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.002436	0.001187	2.053283	0.0403
RESID^2(-1)	0.035825	0.033333	1.074750	0.2828
RESID^2(-2)	0.001209	0.033354	0.036242	0.9711
RESID^2(-3)	4.53E-05	0.033354	0.001357	0.9989
RESID^2(-4)	0.006848	0.033354	0.205315	0.8374
RESID^2(-5)	0.001718	0.033352	0.051498	0.9589
RESID^2(-6)	0.008820	0.033352	0.264468	0.7915
RESID^2(-7)	0.005442	0.033352	0.163172	0.8704
RESID^2(-8)	-8.66E-05	0.033351	-0.002598	0.9979
RESID^2(-9)	0.005236	0.033351	0.156993	0.8753
RESID^2(-10)	-0.001377	0.033330	-0.041314	0.9671

R-squared	0.001486	Mean dependent var	0.002602
Adjusted R-squared	-0.009608	S.D. dependent var	0.034758
S.E. of regression	0.034924	Akaike info criterion	-3.859258
Sum squared resid	1.097746	Schwarz criterion	-3.801124
Log likelihood	1768.892	F-statistic	0.133965
Durbin-Watson stat	1.999967	Prob(F-statistic)	0.999343

(b) Testes ARCH-LM: 10 *lags*.

Figura VI.1: Testes ARCH-LM, EUETSYR2 INDEX (licenças de carbono).

ARCH Test:

F-statistic	38.07401	Probability	0.000000
Obs*R-squared	176.6079	Probability	0.000000

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 06/18/12 Time: 00:00
Sample(adjusted): 12/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2366 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000353	4.26E-05	8.270657	0.0000
RESID^2(-1)	0.075157	0.020341	3.694852	0.0002
RESID^2(-2)	0.123564	0.020320	6.080901	0.0000
RESID^2(-3)	0.032664	0.020469	1.595742	0.1107
RESID^2(-4)	0.087539	0.020321	4.307716	0.0000
RESID^2(-5)	0.152781	0.020343	7.510397	0.0000

R-squared	0.074644	Mean dependent var	0.000668
Adjusted R-squared	0.072684	S.D. dependent var	0.001784
S.E. of regression	0.001718	Akaike info criterion	-9.893191
Sum squared resid	0.006963	Schwarz criterion	-9.878561
Log likelihood	11709.64	F-statistic	38.07401
Durbin-Watson stat	2.002237	Prob(F-statistic)	0.000000

(a) Testes ARCH-LM: 5 *lags*.

ARCH Test:

F-statistic	29.11417	Probability	0.000000
Obs*R-squared	260.2607	Probability	0.000000

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 19/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2361 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000255	4.42E-05	5.760236	0.0000
RESID^2(-1)	0.062956	0.020577	3.059535	0.0022
RESID^2(-2)	0.094204	0.020622	4.568204	0.0000
RESID^2(-3)	-0.003484	0.020671	-0.168561	0.8662
RESID^2(-4)	0.077982	0.020385	3.825526	0.0001
RESID^2(-5)	0.121281	0.020448	5.931149	0.0000
RESID^2(-6)	-0.016735	0.020441	-0.818692	0.4130
RESID^2(-7)	0.166155	0.020479	8.113312	0.0000
RESID^2(-8)	0.061511	0.020767	2.962033	0.0031
RESID^2(-9)	-0.015776	0.020749	-0.760349	0.4471
RESID^2(-10)	0.071455	0.020708	3.450623	0.0006

R-squared	0.110233	Mean dependent var	0.000668
Adjusted R-squared	0.106447	S.D. dependent var	0.001785
S.E. of regression	0.001687	Akaike info criterion	-9.926522
Sum squared resid	0.006692	Schwarz criterion	-9.899654
Log likelihood	11729.26	F-statistic	29.11417
Durbin-Watson stat	1.996934	Prob(F-statistic)	0.000000

(b) Testes ARCH-LM: 10 *lags*.

Figura VI.2: Testes ARCH-LM, USCRWTIC INDEX (petróleo bruto).

ARCH Test:

F-statistic	17.85459	Probability	0.000000
Obs*R-squared	86.22408	Probability	0.000000

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 06/18/12 Time: 00:22
Sample(adjusted): 27/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2355 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000906	9.22E-05	9.833469	0.0000
RESID^2(-1)	0.034513	0.020570	1.677860	0.0935
RESID^2(-2)	0.035412	0.020575	1.721099	0.0854
RESID^2(-3)	0.149962	0.020354	7.367662	0.0000
RESID^2(-4)	0.026352	0.020575	1.280779	0.2004
RESID^2(-5)	0.078215	0.020569	3.802608	0.0001

R-squared	0.036613	Mean dependent var	0.001342
Adjusted R-squared	0.034563	S.D. dependent var	0.003714
S.E. of regression	0.003649	Akaike info criterion	-8.386267
Sum squared resid	0.031275	Schwarz criterion	-8.371581
Log likelihood	9880.829	F-statistic	17.85459
Durbin-Watson stat	1.999037	Prob(F-statistic)	0.000000

(a) Testes ARCH-LM: 5 *lags*.

ARCH Test:

F-statistic	9.762273	Probability	0.000000
Obs*R-squared	94.15221	Probability	0.000000

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 3/02/2000 4/02/2009
Included observations: 2350 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000833	0.000101	8.233944	0.0000
RESID^2(-1)	0.034526	0.020644	1.672391	0.0946
RESID^2(-2)	0.033887	0.020656	1.640523	0.1010
RESID^2(-3)	0.148748	0.020666	7.197757	0.0000
RESID^2(-4)	0.024542	0.020893	1.174604	0.2403
RESID^2(-5)	0.071301	0.020899	3.411713	0.0007
RESID^2(-6)	-0.009093	0.020899	-0.435091	0.6635
RESID^2(-7)	0.001895	0.020894	0.090718	0.9277
RESID^2(-8)	0.013968	0.020667	0.675849	0.4992
RESID^2(-9)	0.003277	0.020657	0.158640	0.8740
RESID^2(-10)	0.055992	0.020644	2.712281	0.0067

R-squared	0.040065	Mean dependent var	0.001343
Adjusted R-squared	0.035961	S.D. dependent var	0.003717
S.E. of regression	0.003650	Akaike info criterion	-8.383572
Sum squared resid	0.031159	Schwarz criterion	-8.356600
Log likelihood	9861.697	F-statistic	9.762273
Durbin-Watson stat	2.003709	Prob(F-statistic)	0.000000

(b) Testes ARCH-LM: 10 *lags*.

Figura VI.3: Testes ARCH-LM, NG1 COMB comdty (gás natural).

ARCH Test:

F-statistic	1.946945	Probability	0.084085
Obs*R-squared	9.700223	Probability	0.084189

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 06/18/12 Time: 01:18
Sample(adjusted): 27/01/2005 4/02/2009
Included observations: 1050 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000203	4.29E-05	4.729228	0.0000
RESID^2(-1)	0.055584	0.030948	1.796037	0.0728
RESID^2(-2)	0.043786	0.030940	1.415184	0.1573
RESID^2(-3)	-0.009651	0.030968	-0.311642	0.7554
RESID^2(-4)	0.060311	0.030940	1.949269	0.0515
RESID^2(-5)	0.006652	0.030949	0.214947	0.8299

R-squared	0.009238	Mean dependent var	0.000240
Adjusted R-squared	0.004493	S.D. dependent var	0.001301
S.E. of regression	0.001298	Akaike info criterion	-10.45064
Sum squared resid	0.001758	Schwarz criterion	-10.42231
Log likelihood	5492.584	F-statistic	1.946945
Durbin-Watson stat	2.000061	Prob(F-statistic)	0.084085

(a) Testes ARCH-LM: 5 *lags*.

ARCH Test:

F-statistic	1.808182	Probability	0.055053
Obs*R-squared	17.96010	Probability	0.055640

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 3/02/2005 4/02/2009
Included observations: 1045 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000174	4.50E-05	3.856664	0.0001
RESID^2(-1)	0.050558	0.031097	1.625826	0.1043
RESID^2(-2)	0.041276	0.031049	1.329393	0.1840
RESID^2(-3)	-0.011529	0.031054	-0.371251	0.7105
RESID^2(-4)	0.057354	0.031053	1.846988	0.0650
RESID^2(-5)	0.001465	0.031104	0.047086	0.9625
RESID^2(-6)	0.002286	0.031104	0.073509	0.9414
RESID^2(-7)	0.016982	0.031053	0.546880	0.5846
RESID^2(-8)	0.036985	0.031055	1.190933	0.2340
RESID^2(-9)	0.074987	0.031050	2.415039	0.0159
RESID^2(-10)	0.009813	0.031098	0.315562	0.7524

R-squared	0.017187	Mean dependent var	0.000241
Adjusted R-squared	0.007682	S.D. dependent var	0.001304
S.E. of regression	0.001299	Akaike info criterion	-10.44441
Sum squared resid	0.001744	Schwarz criterion	-10.39229
Log likelihood	5468.206	F-statistic	1.808182
Durbin-Watson stat	2.000136	Prob(F-statistic)	0.055053

(b) Testes ARCH-LM: 10 *lags*.

Figura VI.4: Testes ARCH-LM, API21 MON MCCL INDEX (carvão).

Anexo VII: Testes ARCH-LM nas Sucessões Cronológicas de Rendibilidades das *Utilities*

ARCH Test:

F-statistic	102.0880	Probability	0.000000
Obs*R-squared	420.7685	Probability	0.000000

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 11/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2367 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000143	2.61E-05	5.467714	0.0000
RESID^2(-1)	0.082315	0.020265	4.061820	0.0001
RESID^2(-2)	0.187780	0.020151	9.318417	0.0000
RESID^2(-3)	0.075893	0.020452	3.710832	0.0002
RESID^2(-4)	0.134096	0.020147	6.655849	0.0000
RESID^2(-5)	0.172277	0.020186	8.534308	0.0000

R-squared	0.177764	Mean dependent var	0.000412
Adjusted R-squared	0.176023	S.D. dependent var	0.001237
S.E. of regression	0.001123	Akaike info criterion	-10.74284
Sum squared resid	0.002978	Schwarz criterion	-10.72821
Log likelihood	12720.15	F-statistic	102.0880
Durbin-Watson stat	2.029265	Prob(F-statistic)	0.000000

(a) Testes ARCH-LM: 5 *lags*.

ARCH Test:

F-statistic	58.80717	Probability	0.000000
Obs*R-squared	472.6069	Probability	0.000000

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 06/18/12 Time: 10:38
Sample(adjusted): 18/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2362 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	9.79E-05	2.64E-05	3.705658	0.0002
RESID^2(-1)	0.047913	0.020577	2.328437	0.0200
RESID^2(-2)	0.154014	0.020535	7.500028	0.0000
RESID^2(-3)	0.043833	0.020734	2.114059	0.0346
RESID^2(-4)	0.088685	0.020748	4.274451	0.0000
RESID^2(-5)	0.135346	0.020796	6.508379	0.0000
RESID^2(-6)	0.057129	0.020794	2.747391	0.0061
RESID^2(-7)	0.020826	0.020755	1.003412	0.3158
RESID^2(-8)	0.067461	0.020734	3.253662	0.0012
RESID^2(-9)	0.078809	0.020535	3.837742	0.0001
RESID^2(-10)	0.067383	0.020491	3.288369	0.0010

R-squared	0.200088	Mean dependent var	0.000412
Adjusted R-squared	0.196685	S.D. dependent var	0.001239
S.E. of regression	0.001110	Akaike info criterion	-10.76419
Sum squared resid	0.002897	Schwarz criterion	-10.73733
Log likelihood	12723.51	F-statistic	58.80717
Durbin-Watson stat	1.998300	Prob(F-statistic)	0.000000

(b) Testes ARCH-LM: 10 *lags*.

Figura VII.1: Testes ARCH-LM, ANA SM EQUITY (Acciona).

ARCH Test:

F-statistic	55.88006	Probability	0.000000
Obs*R-squared	247.9052	Probability	0.000000

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 06/18/12 Time: 11:03
Sample(adjusted): 7/11/2000 4/02/2009
Included observations: 2152 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000369	5.49E-05	6.716260	0.0000
RESID^2(-1)	0.074978	0.021539	3.481026	0.0005
RESID^2(-2)	0.303732	0.021534	14.10473	0.0000
RESID^2(-3)	0.069793	0.021723	3.212857	0.0013
RESID^2(-4)	-0.043262	0.021553	-2.007207	0.0449
RESID^2(-5)	0.020034	0.007487	2.675729	0.0075

R-squared	0.115198	Mean dependent var	0.000647
Adjusted R-squared	0.113136	S.D. dependent var	0.002496
S.E. of regression	0.002351	Akaike info criterion	-9.265409
Sum squared resid	0.011859	Schwarz criterion	-9.249589
Log likelihood	9975.580	F-statistic	55.88006
Durbin-Watson stat	1.988988	Prob(F-statistic)	0.000000

(a) Testes ARCH-LM: 5 *lags*.

ARCH Test:

F-statistic	49.61902	Probability	0.000000
Obs*R-squared	404.7277	Probability	0.000000

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 14/11/2000 4/02/2009
Included observations: 2147 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000210	5.46E-05	3.856718	0.0001
RESID^2(-1)	0.065197	0.021297	3.061395	0.0022
RESID^2(-2)	0.257659	0.021258	12.12039	0.0000
RESID^2(-3)	0.020416	0.021951	0.930056	0.3524
RESID^2(-4)	-0.110936	0.021881	-5.069872	0.0000
RESID^2(-5)	0.138799	0.021825	6.359716	0.0000
RESID^2(-6)	0.087190	0.021899	3.981535	0.0001
RESID^2(-7)	0.068887	0.021955	3.137646	0.0017
RESID^2(-8)	-0.048287	0.021403	-2.256060	0.0242
RESID^2(-9)	0.192411	0.021257	9.051625	0.0000
RESID^2(-10)	0.002569	0.007227	0.355515	0.7222

R-squared	0.188508	Mean dependent var	0.000645
Adjusted R-squared	0.184709	S.D. dependent var	0.002499
S.E. of regression	0.002256	Akaike info criterion	-9.345183
Sum squared resid	0.010873	Schwarz criterion	-9.316124
Log likelihood	10043.05	F-statistic	49.61902
Durbin-Watson stat	2.012771	Prob(F-statistic)	0.000000

(b) Testes ARCH-LM: 10 *lags*.

Figura VII.2: Testes ARCH-LM, GAM SM EQUITY (Gamesa).

ARCH Test:

F-statistic	35.76157	Probability	0.000000
Obs*R-squared	164.8629	Probability	0.000000

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 9/04/2001 4/02/2009
Included observations: 2043 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.001162	0.000159	7.308660	0.0000
RESID^2(-1)	0.203996	0.022115	9.224219	0.0000
RESID^2(-2)	0.019561	0.022450	0.871313	0.3837
RESID^2(-3)	0.056104	0.022419	2.502464	0.0124
RESID^2(-4)	0.105925	0.022449	4.718476	0.0000
RESID^2(-5)	0.061106	0.022108	2.763995	0.0058

R-squared	0.080696	Mean dependent var	0.002102
Adjusted R-squared	0.078440	S.D. dependent var	0.006529
S.E. of regression	0.006267	Akaike info criterion	-7.303988
Sum squared resid	0.080013	Schwarz criterion	-7.287476
Log likelihood	7467.023	F-statistic	35.76157
Durbin-Watson stat	2.002162	Prob(F-statistic)	0.000000

(a) Testes ARCH-LM: 5 *lags*.

ARCH Test:

F-statistic	20.55053	Probability	0.000000
Obs*R-squared	187.6008	Probability	0.000000

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 16/04/2001 4/02/2009
Included observations: 2038 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000958	0.000167	5.723292	0.0000
RESID^2(-1)	0.200279	0.022204	9.019790	0.0000
RESID^2(-2)	0.007489	0.022601	0.331375	0.7404
RESID^2(-3)	0.044561	0.022597	1.971932	0.0488
RESID^2(-4)	0.097486	0.022548	4.323446	0.0000
RESID^2(-5)	0.048075	0.022651	2.122390	0.0339
RESID^2(-6)	-0.003707	0.022653	-0.163629	0.8700
RESID^2(-7)	0.080563	0.022549	3.572851	0.0004
RESID^2(-8)	-0.017934	0.022598	-0.793619	0.4275
RESID^2(-9)	0.064313	0.022600	2.845704	0.0045
RESID^2(-10)	0.024059	0.022197	1.083859	0.2786

R-squared	0.092051	Mean dependent var	0.002106
Adjusted R-squared	0.087572	S.D. dependent var	0.006536
S.E. of regression	0.006243	Akaike info criterion	-7.309245
Sum squared resid	0.079009	Schwarz criterion	-7.278913
Log likelihood	7459.121	F-statistic	20.55053
Durbin-Watson stat	2.001012	Prob(F-statistic)	0.000000

(b) Testes ARCH-LM: 10 *lags*.

Figura VII.3: Testes ARCH-LM, NDX1 GR EQUITY (Nordex).

ARCH Test:

F-statistic	120.2572	Probability	0.000000
Obs*R-squared	451.0366	Probability	0.000000

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 2/04/2002 4/02/2009
Included observations: 1787 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000459	0.000129	3.569094	0.0004
RESID^2(-1)	0.305834	0.023687	12.91134	0.0000
RESID^2(-2)	0.076533	0.024747	3.092545	0.0020
RESID^2(-3)	0.209000	0.024315	8.595658	0.0000
RESID^2(-4)	0.045436	0.024748	1.835966	0.0665
RESID^2(-5)	0.026506	0.023685	1.119120	0.2632

R-squared	0.252399	Mean dependent var	0.001364
Adjusted R-squared	0.250300	S.D. dependent var	0.005979
S.E. of regression	0.005177	Akaike info criterion	-7.685905
Sum squared resid	0.047730	Schwarz criterion	-7.667477
Log likelihood	6873.356	F-statistic	120.2572
Durbin-Watson stat	1.999585	Prob(F-statistic)	0.000000

(a) Testes ARCH-LM: 5 *lags*.

ARCH Test:

F-statistic	62.41958	Probability	0.000000
Obs*R-squared	464.3950	Probability	0.000000

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 06/18/12 Time: 11:29
Sample(adjusted): 9/04/2002 4/02/2009
Included observations: 1782 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000437	0.000131	3.346668	0.0008
RESID^2(-1)	0.305056	0.023705	12.86866	0.0000
RESID^2(-2)	0.081059	0.024749	3.275288	0.0011
RESID^2(-3)	0.208367	0.024783	8.407761	0.0000
RESID^2(-4)	0.036884	0.025272	1.459512	0.1446
RESID^2(-5)	0.012957	0.025281	0.512500	0.6084
RESID^2(-6)	-0.024070	0.025282	-0.952076	0.3412
RESID^2(-7)	0.010025	0.025273	0.396656	0.6917
RESID^2(-8)	0.059880	0.024784	2.416089	0.0158
RESID^2(-9)	0.059404	0.024750	2.400181	0.0165
RESID^2(-10)	-0.069286	0.023703	-2.923156	0.0035

R-squared	0.260603	Mean dependent var	0.001367
Adjusted R-squared	0.256428	S.D. dependent var	0.005987
S.E. of regression	0.005163	Akaike info criterion	-7.688611
Sum squared resid	0.047201	Schwarz criterion	-7.654750
Log likelihood	6861.552	F-statistic	62.41958
Durbin-Watson stat	1.989122	Prob(F-statistic)	0.000000

(b) Testes ARCH-LM: 10 *lags*.

Figura VII.4: Testes ARCH-LM, RPW GR EQUITY (Repower).

ARCH Test:

F-statistic	64.44802	Probability	0.000000
Obs*R-squared	284.2617	Probability	0.000000

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 11/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2367 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000290	3.74E-05	7.733220	0.0000
RESID^2(-1)	0.045518	0.020493	2.221186	0.0264
RESID^2(-2)	0.234182	0.020447	11.45338	0.0000
RESID^2(-3)	0.091299	0.020921	4.363941	0.0000
RESID^2(-4)	0.079446	0.020446	3.885710	0.0001
RESID^2(-5)	0.089651	0.020490	4.375465	0.0000

R-squared	0.120094	Mean dependent var	0.000631
Adjusted R-squared	0.118230	S.D. dependent var	0.001623
S.E. of regression	0.001524	Akaike info criterion	-10.13268
Sum squared resid	0.005482	Schwarz criterion	-10.11805
Log likelihood	11998.02	F-statistic	64.44802
Durbin-Watson stat	2.011584	Prob(F-statistic)	0.000000

(a) Testes ARCH-LM: 5 *lags*.

ARCH Test:

F-statistic	43.90804	Probability	0.000000
Obs*R-squared	371.7126	Probability	0.000000

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 18/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2362 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000190	3.85E-05	4.943854	0.0000
RESID^2(-1)	0.025564	0.020438	1.250833	0.2111
RESID^2(-2)	0.201537	0.020426	9.866874	0.0000
RESID^2(-3)	0.070874	0.020728	3.419277	0.0006
RESID^2(-4)	0.044618	0.020776	2.147587	0.0318
RESID^2(-5)	0.060542	0.020785	2.912780	0.0036
RESID^2(-6)	0.028732	0.020780	1.382634	0.1669
RESID^2(-7)	-0.009541	0.020764	-0.459510	0.6459
RESID^2(-8)	0.103552	0.020711	4.999811	0.0000
RESID^2(-9)	0.037071	0.020409	1.816356	0.0694
RESID^2(-10)	0.133366	0.020416	6.532332	0.0000

R-squared	0.157372	Mean dependent var	0.000630
Adjusted R-squared	0.153788	S.D. dependent var	0.001623
S.E. of regression	0.001493	Akaike info criterion	-10.17085
Sum squared resid	0.005243	Schwarz criterion	-10.14399
Log likelihood	12022.77	F-statistic	43.90804
Durbin-Watson stat	2.012479	Prob(F-statistic)	0.000000

(b) Testes ARCH-LM: 10 *lags*.

Figura VII.5: Testes ARCH-LM, SIE GR EQUITY (Siemens).

ARCH Test:

F-statistic	12.12859	Probability	0.000000
Obs*R-squared	59.27457	Probability	0.000000

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 06/18/12 Time: 11:52
Sample(adjusted): 11/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2367 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000999	0.000127	7.859655	0.0000
RESID^2(-1)	0.081370	0.020553	3.958960	0.0001
RESID^2(-2)	0.087182	0.020596	4.232884	0.0000
RESID^2(-3)	0.023053	0.020669	1.115371	0.2648
RESID^2(-4)	0.049106	0.020596	2.384215	0.0172
RESID^2(-5)	0.049538	0.020553	2.410280	0.0160

R-squared	0.025042	Mean dependent var	0.001408
Adjusted R-squared	0.022977	S.D. dependent var	0.005634
S.E. of regression	0.005569	Akaike info criterion	-7.540531
Sum squared resid	0.073234	Schwarz criterion	-7.525906
Log likelihood	8930.218	F-statistic	12.12859
Durbin-Watson stat	2.006217	Prob(F-statistic)	0.000000

(a) Testes ARCH-LM: 5 *lags*.

ARCH Test:

F-statistic	8.999801	Probability	0.000000
Obs*R-squared	87.08541	Probability	0.000000

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 18/01/2000 4/02/2009
Included observations: 2362 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000786	0.000133	5.897968	0.0000
RESID^2(-1)	0.069814	0.020609	3.387474	0.0007
RESID^2(-2)	0.074923	0.020654	3.627439	0.0003
RESID^2(-3)	0.014150	0.020679	0.684288	0.4939
RESID^2(-4)	0.036907	0.020664	1.786044	0.0742
RESID^2(-5)	0.036816	0.020649	1.782972	0.0747
RESID^2(-6)	0.053399	0.020647	2.586262	0.0098
RESID^2(-7)	0.039942	0.020662	1.933090	0.0533
RESID^2(-8)	0.057215	0.020676	2.767172	0.0057
RESID^2(-9)	0.021841	0.020652	1.057570	0.2904
RESID^2(-10)	0.037632	0.020607	1.826156	0.0680

R-squared	0.036869	Mean dependent var	0.001410
Adjusted R-squared	0.032773	S.D. dependent var	0.005640
S.E. of regression	0.005547	Akaike info criterion	-7.546444
Sum squared resid	0.072340	Schwarz criterion	-7.519586
Log likelihood	8923.351	F-statistic	8.999801
Durbin-Watson stat	2.002341	Prob(F-statistic)	0.000000

(b) Testes ARCH-LM: 10 *lags*.

Figura VII.6: Testes ARCH-LM, VWSDC EQUITY (Vestas).

Anexo VIII: Testes de Não-Linearidade (algoritmos: 0, 1 e 2) para a Dimensão de Correlação, com base no Método de Aproximação à Contagem de Caixas, Aplicados às Amostras da Série Temporal de Rendibilidades da Acciona

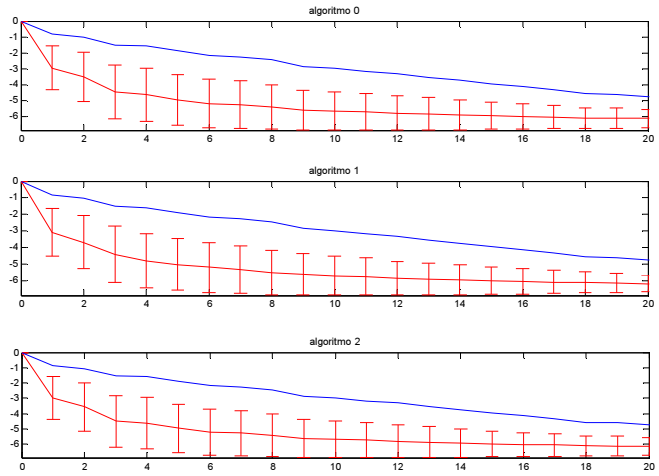


Figura VIII.1: Testes de não-linearidade para a dimensão de correlação e para $N = 100$.

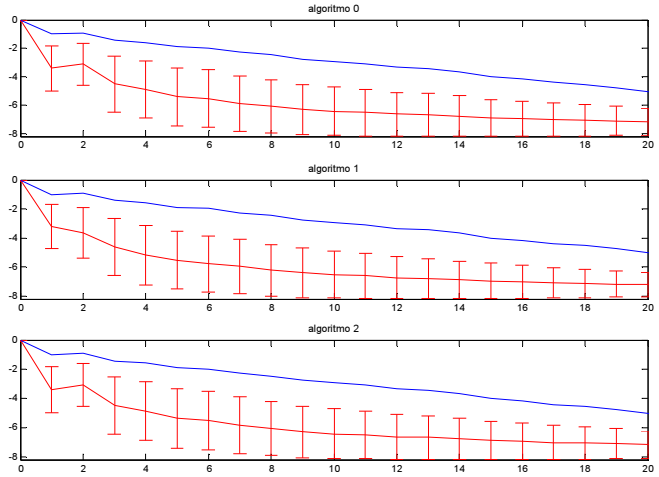


Figura VIII.2: Testes de não-linearidade para a dimensão de correlação e para $N = 200$.

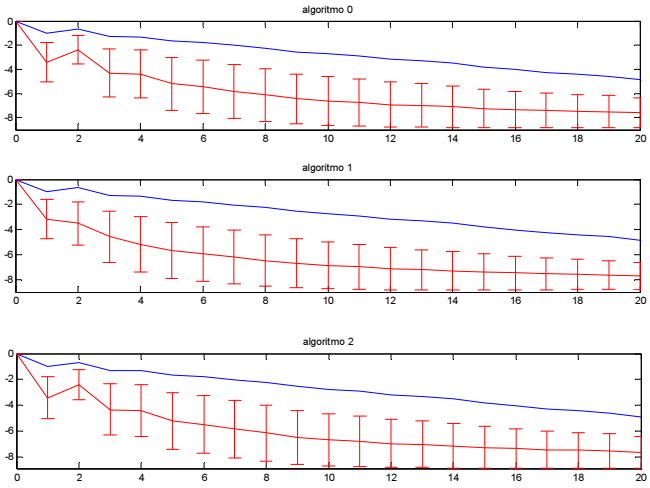


Figura VIII.3: Testes de não-linearidade para a dimensão de correlação e para $N = 300$.

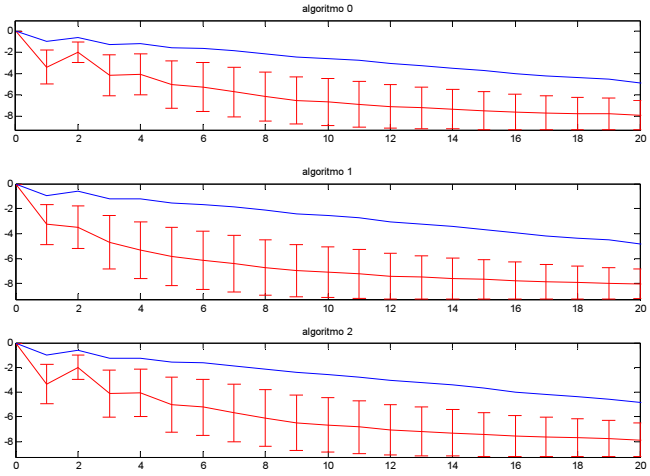


Figura VIII.4: Testes de não-linearidade para a dimensão de correlação e para $N = 400$.

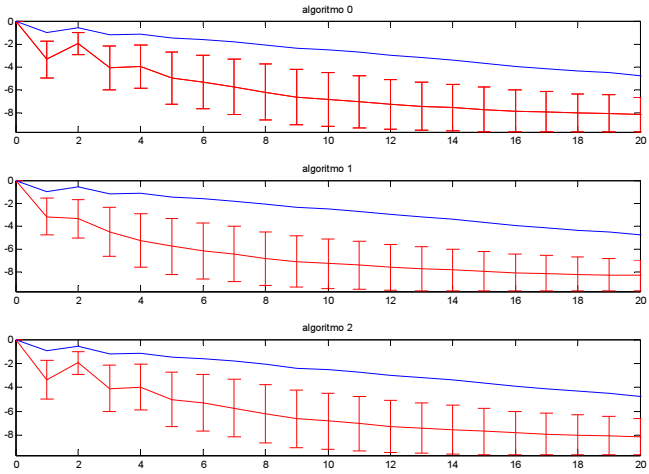


Figura VIII.5: Testes de não-linearidade para a dimensão de correlação e para $N = 500$.

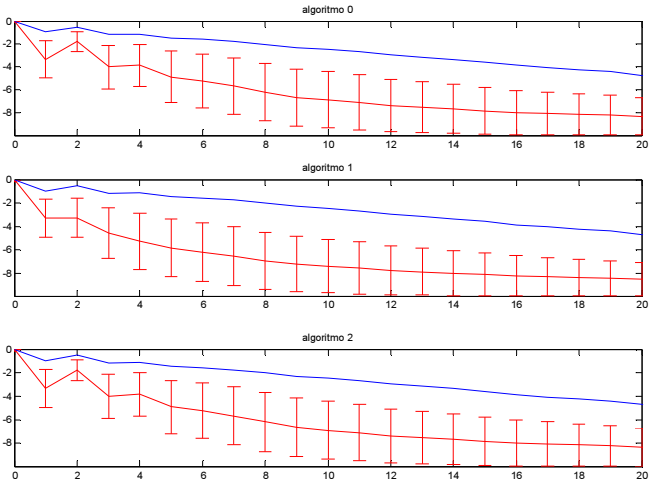


Figura VIII.6: Testes de não-linearidade para a dimensão de correlação e para $N = 600$.

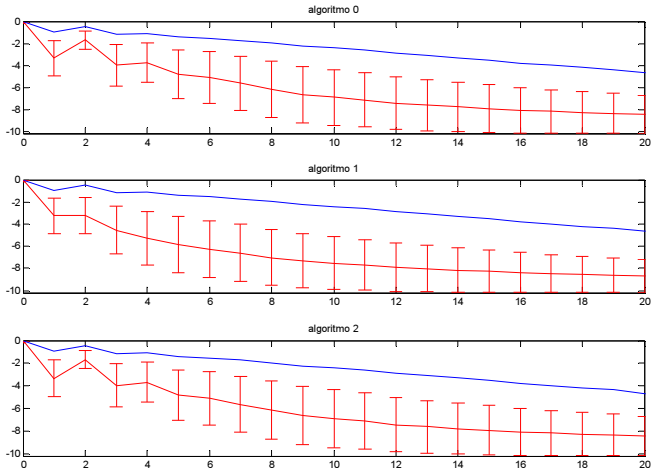


Figura VIII.7: Testes de não-linearidade para a dimensão de correlação e para $N = 700$.

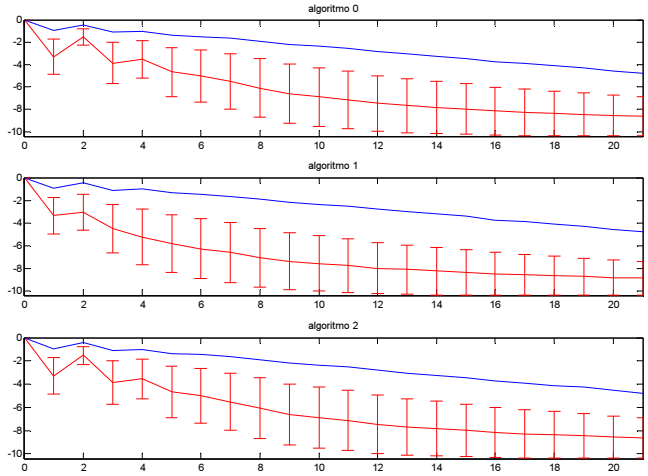


Figura VIII.8: Testes de não-linearidade para a dimensão de correlação e para $N = 800$.

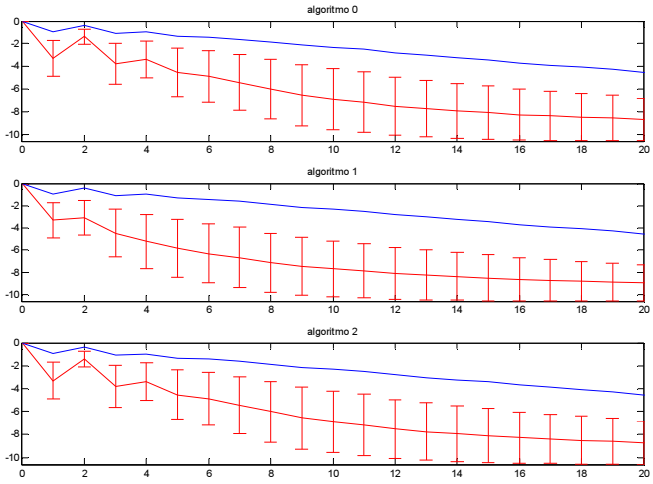


Figura VIII.9: Testes de não-linearidade para a dimensão de correlação e para $N = 900$.

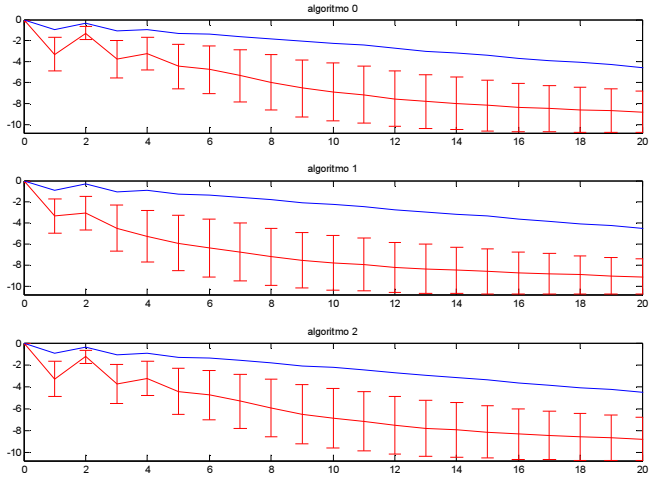


Figura VIII.10: Testes de não-linearidade para a dimensão de correlação e para $N = 1000$.

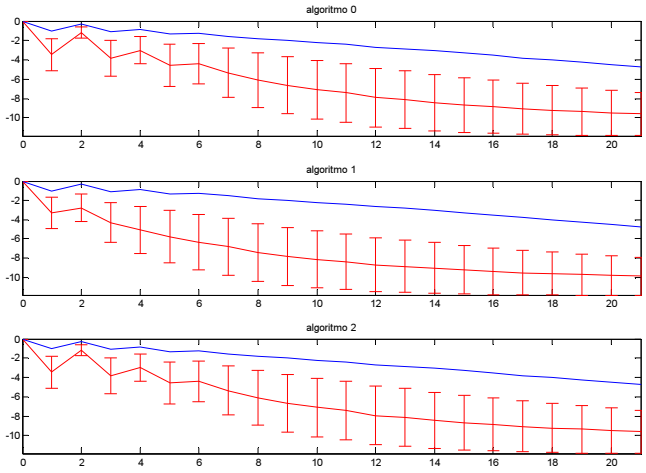


Figura VIII.11: Testes de não-linearidade para a dimensão de correlação e para $N = 2000$.

Anexo IX: Testes de Não-Linearidade (algoritmos: 0, 1 e 2) para o Expoente Máximo de Lyapunov Aplicados às Amostras da Série Temporal de Rendibilidades da Acciona

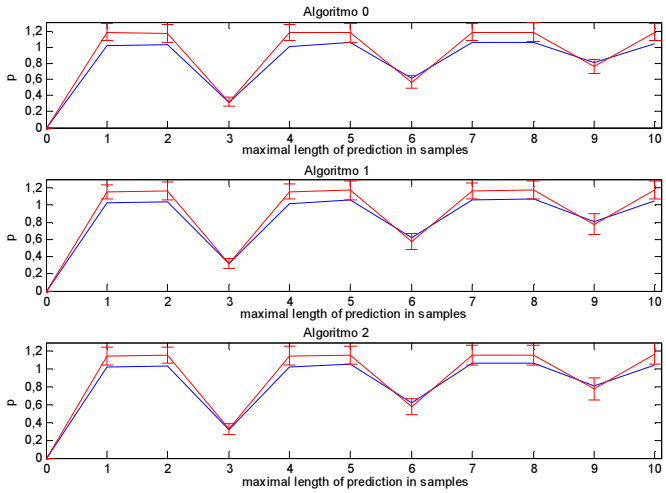


Figura IX.1: Testes de não-linearidade para o expoente máximo de Lyapunov e para $N = 100$.

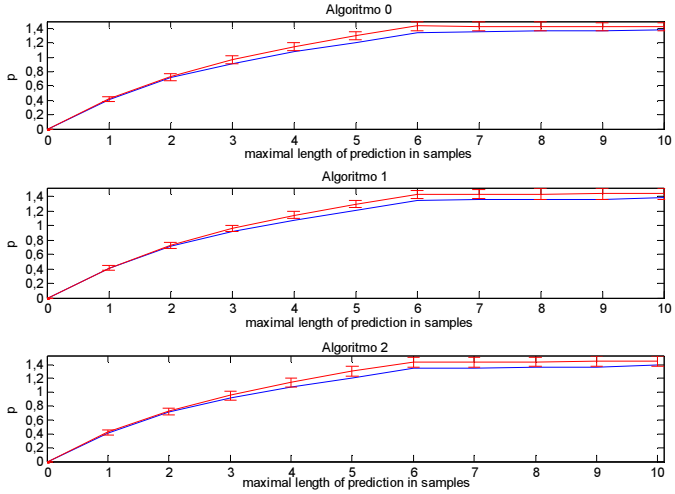


Figura IX.2: Testes de não-linearidade para o expoente máximo de Lyapunov e para $N = 200$.

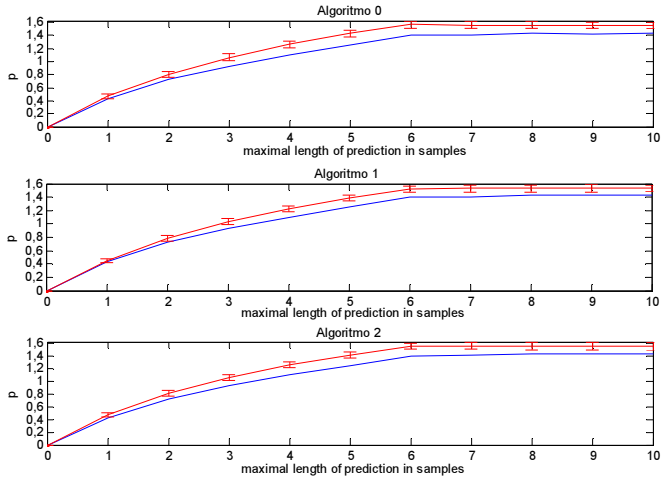


Figura IX.3: Testes de não-linearidade para o expoente máximo de Lyapunov e para $N = 300$.

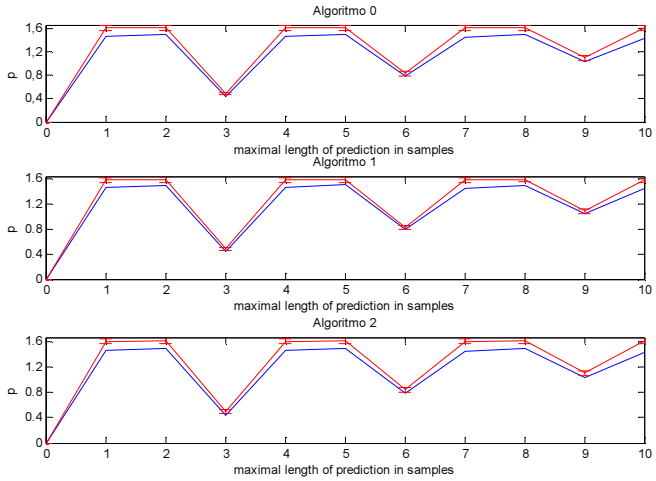


Figura IX.4: Testes de não-linearidade para o expoente máximo de Lyapunov e para $N = 400$.

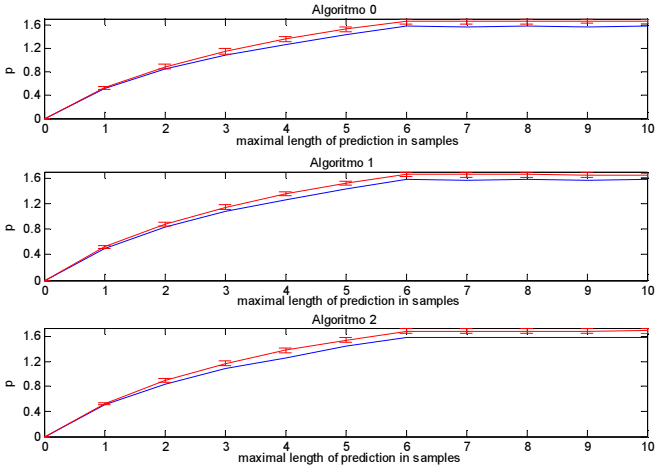


Figura IX.5: Testes de não-linearidade para o expoente máximo de Lyapunov e para $N = 500$.

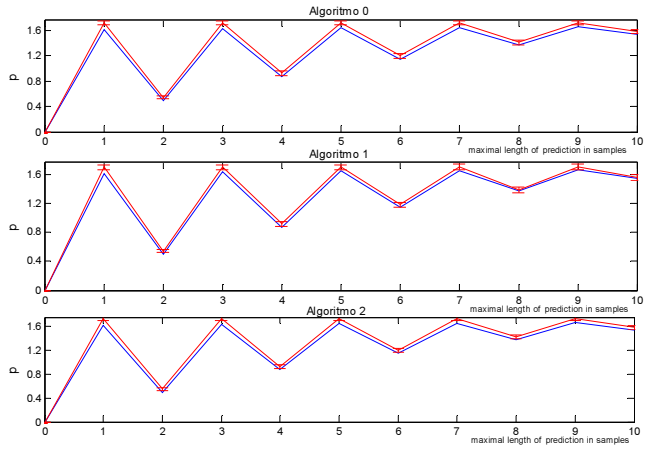


Figura IX.6: Testes de não-linearidade para o expoente máximo de Lyapunov e para $N = 600$.

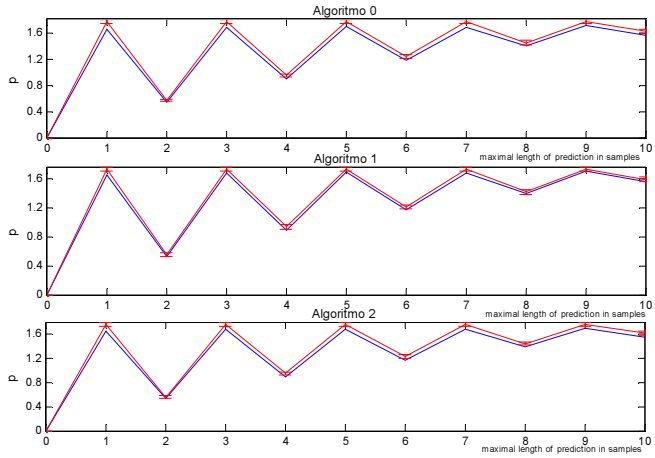


Figura IX.7: Testes de não-linearidade para o expoente máximo de Lyapunov e para $N = 700$.

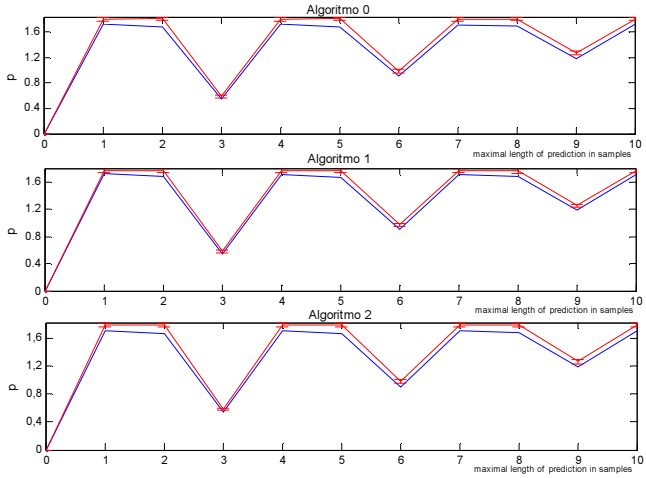


Figura IX.8: Testes de não-linearidade para o expoente máximo de Lyapunov e para $N = 800$.

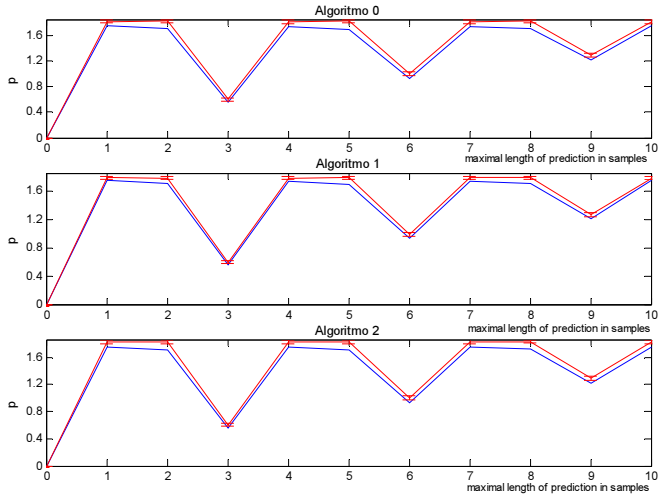


Figura IX.9: Testes de não-linearidade para o expoente máximo de Lyapunov e para $N = 900$.

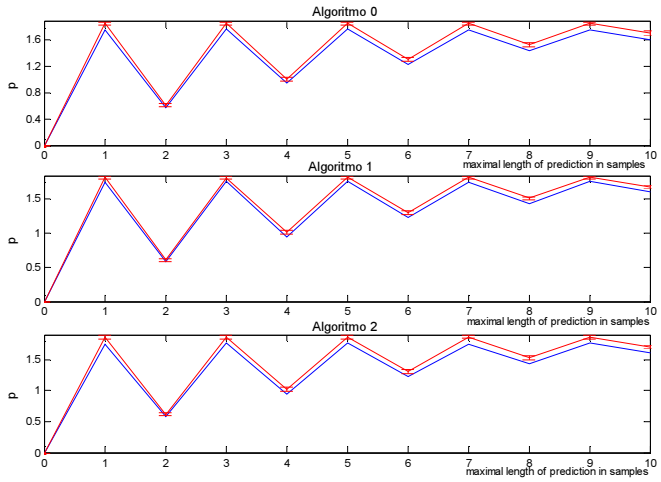


Figura IX.10: Testes de não-linearidade para o expoente máximo de Lyapunov e para $N = 1000$.

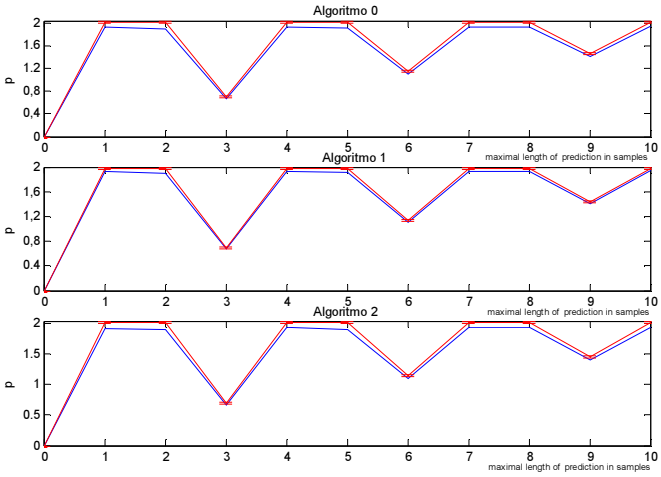


Figura IX.11: Testes de não-linearidade para o expoente máximo de Lyapunov e para $N = 2000$.