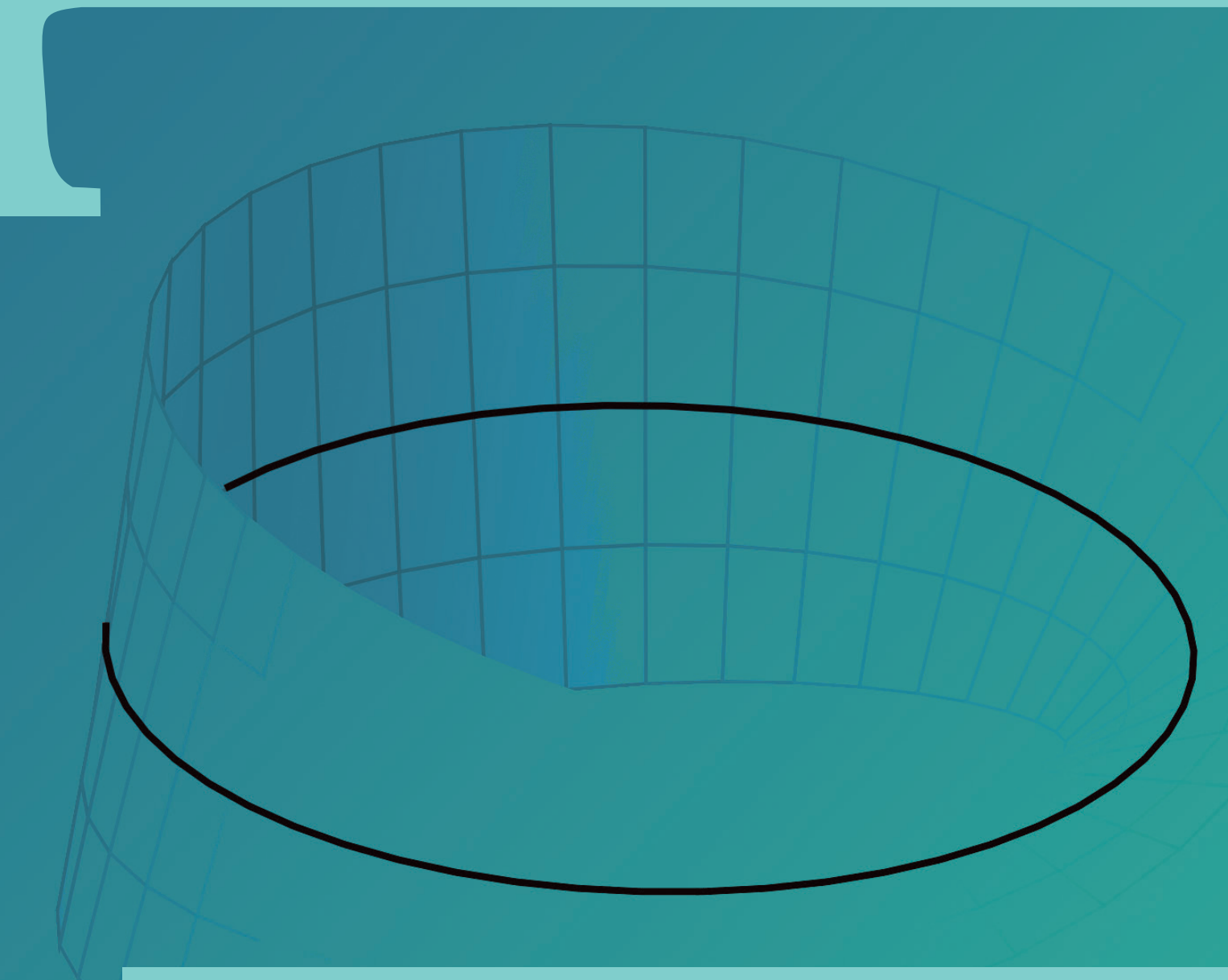


AÇÕES DE GRUPOS FINITOS NO TORO *n*-DIMENSIONAL: O EXEMPLO DO QUOCIENTE ESTENDIDO

Gastão Bettencourt[a] e Sérgio Mendes[b]

Departamento de Matemática, Universidade da Beira Interior e Centro de Matemática e Aplicações da Universidade da Beira Interior[a],

ISCTE - IUL e Centro de Matemática e Aplicações da Universidade da Beira Interior[b],

gastao@ubi.pt[a] e sergio.mendes@iscte-iul.pt[b]

INTRODUÇÃO

Um matemático, um físico e um químico encontram-se e alguém pergunta qual a estrutura algébrica com mais aplicações nas respetivas áreas. Ao contrário das histórias habituais, é provável que a resposta seja a mesma: a teoria dos grupos.

Os grupos são uma representação abstrata da simetria de determinado objeto (estrutura algébrica, espaço métrico, figura geométrica, ou um objeto físico como um cristal). Cada elemento do grupo corresponde a um tipo de simetria desse objeto. Por exemplo, um quadrado no plano pode ser identificado pelos seus vértices, $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. O conjunto das simetrias do quadrado, que representamos por $\mathrm{Sym}(X)$, corresponde ao grupo diedral com oito elementos, D_8: quatro rotações ($0, \pi/2, \pi$ e $3\pi/2$ radianos) e quatro reflexões através dos quatro eixos de simetria (as duas diagonais, a horizontal e a vertical). Dizemos, então, que o grupo D_8 atua no quadrado e escrevemos $D_8 \curvearrowright X$ para indicar essa ação.

Genericamente, dado um objeto X, uma maneira natural de obter um grupo é precisamente considerar as simetrias de X, $G = \mathrm{Sym}(X)$. Este grupo G vem naturalmente equipado com uma ação $G \curvearrowright X$ em X, ou seja, uma função

$$G \times X \to X,$$

que iremos denotar simplesmente por $(g, x) \mapsto g \cdot x$. Neste sentido, uma simetria é um automorfismo de X, isto é, uma bijeção de X em si próprio, que preserva a estrutura de X (algébrica, topológica, geométrica, etc.).

O quociente estendido generaliza o espaço quociente para a ação de um grupo finito num espaço topológico localmente compacto X. São apresentados vários exemplos e calculados em detalhe os casos da ação dos grupos simétrico S_n e cíclico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ no toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$.

Vejamos um outro exemplo: o conjunto $[n] = \{1, \ldots, n\}$ de n elementos. Dado que $[n]$ não tem, *a priori*, nenhuma estrutura, as suas simetrias são dadas simplesmente pelo conjunto das bijeções $[n] \to [n]$, ou seja, as permutações dos elementos de $[n]$ que correspondem ao grupo simétrico $\mathrm{Sym}([n]) = S_n$. A ação $S_n \curvearrowright [n]$ é dada por $\sigma \cdot k = \sigma(k)$, com $\sigma \in S_n$ e $k \in [n]$.

Há várias razões para estudarmos ações de grupos. Por exemplo, quando os objetos têm uma estrutura "complicada", pode ser útil representá-los através de objetos mais simples ou mais conhecidos, como matrizes. Esta ideia serve de base à teoria das representações. Por outro lado, certos grupos podem ter eles próprios uma estrutura "complicada", sendo útil conhecer a sua ação em certos conjuntos. Um exemplo da teoria dos números é o grupo de Galois absoluto $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, formado pelos automorfismos do fecho algébrico $\overline{\mathbb{Q}}$ do corpo dos racionais, que fixam $\mathbb{Q}$.

Por vezes, a ação do grupo num objeto não preserva qualquer informação sobre o grupo. Um exemplo desse fenómeno ocorre precisamente no caso mais simples, quando o objeto é o conjunto com um único ponto. Usando uma ideia de Alain Connes e de Paul Baum [3], é possível modificar o objeto e definir uma nova ação, de modo que alguma informação sobre o grupo seja sempre preservada. Ao objeto assim obtido chamamos quociente estendido (ver [2] para uma breve introdução).

Para simplificar a abordagem, vamos considerar ações de grupos finitos, nomeadamente o grupo simétrico S_n e o grupo cíclico com n elementos $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, no toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$. Estas ações encontraram recentemente aplicação numa conjetura geométrica, conhecida por conjetura ABPS (acrónimo de Aubert-Baum-Plymen-Solleveld), cuja formulação necessita de alguma sofisticação matemática que não pretendemos neste artigo. O leitor interessado poderá consultar [1] para mais detalhes. No entanto, os autores acham o conceito de quociente estendido, que definiremos na secção 2, suficientemente simples e interessante para o darem a conhecer aos leitores da *Gazeta de Matemática*.

Este texto é inspirado em notas manuscritas do segundo autor, baseadas na palestra dada por Roger Plymen no seminário *K-theory Day* na Universidade de Manchester, em fevereiro de 2005. O *K-theory Day* foi um seminário regional de matemática no Reino Unido, apoiado pela London Mathematical Society durante quase uma década, e cujas atividades se deveram em grande parte ao empenho de Roger Plymen (Universidade de Manchester), Jazek

Brodzki (Universidade de Southampton) e Ulrike Tillmann (Universidade de Oxford).

1. O ESPAÇO COM UM ÚNICO PONTO

Antes de motivar e enunciar o problema, e para conveniência do leitor, relembramos a definição de ação de um grupo e de espaço das órbitas. Para evitar demasiado formalismo, as definições serão introduzidas ao longo do texto consoante sejam necessárias, e sem preocupação de grande generalidade, mas apenas o estritamente necessário para a exposição.

Seja X um espaço topológico localmente compacto de Hausdorff. Seja G um grupo finito (naturalmente munido da topologia discreta). Uma *ação* (à esquerda) *contínua* de G em X é uma função contínua

$$\alpha : G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto \alpha(g, x)$$

que, para quaisquer $g, h \in G$ e $x \in X$, verifica as propriedades

(i) $\alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x)$

(ii) $\alpha(e, x) = x$,

onde e denota a identidade do grupo G. Como habitualmente, usaremos a notação abreviada que já mencionámos na introdução, $\alpha(g, x) = g \cdot x$.

Exemplo 1.1. *Um outro exemplo elementar é a ação do grupo multiplicativo* $\mathbb{K}^\times$ *de um corpo* $\mathbb{K}$ *no conjunto* $\mathbb{K}^n$ *(*$n \geq 1$*)*

$$\mathbb{K}^\times \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n,\ \ (\lambda, x) \mapsto (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n),$$

com $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. *Esta ação está na génese da definição da estrutura de* $\mathbb{K}^n$ *como espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$.

A *órbita* de um elemento $x \in X$ é o subconjunto de X definido por

$$G \cdot x = \{\gamma \cdot x : \gamma \in G\}.$$

O espaço quociente (ou espaço das órbitas) obtém-se fazendo colapsar cada órbita num ponto

$$X/G = \{G \cdot x : x \in X\}.$$

Exemplo 1.2. *Como ilustração, vamos identificar o espaço das órbitas do exemplo 1.1, no caso em que* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *e* $n = 2$. *O espaço das órbitas é o conjunto*

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^\times &= \{\mathbb{R}^\times \cdot (x_1, x_2) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2)\}\\ &= \{\{(\lambda x_1, \lambda x_2) : \lambda \in \mathbb{R}^\times\} : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}\\ &= \{(0,0)\} \sqcup \mathbb{P}^1(\mathbb{R}),\end{aligned}$$

onde $\sqcup$ *representa a união disjunta e* $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ *o espaço projetivo real, cujos pontos (ou órbitas) são as retas no plano que passam na origem. Escolhendo como representante de cada reta o ponto do círculo unitário, concluímos que o espaço das órbitas é homeomorfo à união disjunta formada por um ponto e o círculo unitário, que denotamos por* $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$:

$$\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^\times \cong \{(0,0)\} \sqcup \mathbb{T}.$$

Consideremos o caso mais elementar de ação de um grupo: o espaço formado por um único ponto, $X = \{\mathrm{pt}\}$, no qual atua um grupo discreto G. A questão fundamental, já colocada por Pierre Cartier no excelente artigo [5], é tentar perceber que informação podemos obter a partir do espaço das órbitas X/G. O quociente usual (ao longo do texto, usamos o adjetivo *usual* para destinguir de outros modelos de espaço quociente) é simplesmente

$$\{\mathrm{pt}\}/G = \{g \cdot \mathrm{pt} : g \in G\} = \{\mathrm{pt}\},$$

ou seja, o grupo G, e a informação que ele contém, desaparece no espaço das órbitas.

Armand Borel sugeriu em [4] substituir pt por um espaço contrátil EG (uma vez que todo o espaço contrátil é homotopicamente equivalente a um ponto), onde G atua livremente. O novo espaço das órbitas ou espaço quociente (usaremos a notação // para distinguir do quociente usual), nesse caso, seria

$$\{\mathrm{pt}\} /\!/ G = EG/G = BG, \tag{1}$$

onde BG é a base do espaço EG visto como fibrado principal de grupo G.

No caso geral em que G atua no espaço X, o espaço das órbitas é substituído pelo quociente

$$X /\!/ G = (X \times EG)/G, \tag{2}$$

com a ação diagonal. Claro que (2) se reduz a (1) quando $X = \{\mathrm{pt}\}$. Um exemplo concreto é

$$\{\mathrm{pt}\} /\!/ \mathbb{Z}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \mathbb{T}^n,$$

onde $\mathbb{T}^n$ denota o toro n-dimensional (abreviadamente, n-toro) dado pelo produto direto de n cópias do círculo unitário $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

2. O QUOCIENTE ESTENDIDO

Vamos agora introduzir o quociente estendido, de acordo com [3], e analisar o caso do espaço com um único ponto. Suponhamos que existe uma ação $G \curvearrowright X$. Para cada $x \in X$, denotamos por G_x o *estabilizador* de x

$$G_x = \{\gamma \in G : \gamma \cdot x = x\}.$$

É sabido que G_x é um subgrupo de G, também conhecido em certos contextos como o subgrupo de isotropia de x.

Construa-se o seguinte espaço topológico para a topologia produto

$$\widetilde{X} = \{(x, \gamma) \in X \times G : \gamma \cdot x = x\},$$

no qual existe uma ação natural de G à esquerda, $G \times \widetilde{X} \to \widetilde{X}$, definida por

$$g \cdot (x, \gamma) = (g \cdot x, g \cdot \gamma) = (g \cdot x, g\gamma g^{-1}). \qquad 3)$$

Ou seja, a ação de G em $\widetilde{X}$ na primeira coordenada é a ação $G \times X \to X$ original e na segunda coordenada é dada por automorfismos internos.

Para cada $\gamma \in G$, seja X^γ o conjunto de todos os *pontos* em X *fixos* pela ação de γ, dado por

$$X^\gamma = \{x \in X : \gamma \cdot x = x\},$$

e seja $\mathcal{Z}(\gamma)$ o *estabilizador* de γ em G. O estabilizador é, neste caso, o centro de γ em G (daí a notação)

$$\begin{aligned} Z(\gamma) &= \{g \in G : g\gamma = \gamma g\} \\ &= \{g \in G : g\gamma g^{-1} = \gamma\} \\ &= \{g \in G : g \cdot \gamma = \gamma\}. \end{aligned}$$

Definição 2.1. *O quociente estendido $X /\!/ G$ é o quociente usual $\widetilde{X}/G$ para a ação $G \times \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ definida em (3).*

O quociente estendido $X /\!/ G$ é um espaço topológico. Uma vez que a projeção $\widetilde{X} \to X$, $(x, \gamma) \mapsto x$ é G-equivariante, i.e, comuta com a ação do grupo, a projeção

$$X \times G \to X, \ \ (x, \gamma) \mapsto x$$

induz a projeção do quociente estendido no quociente usual

$$\rho : X /\!/ G \to X/G, \ \ g \cdot (x, \gamma) \mapsto g \cdot \gamma,$$

a qual desempenha um papel fundamental na conjetura ABPS referida na introdução.

Como o conjunto das órbitas de uma ação define uma partição do espaço X indexada nas classes de conjugação $C\ell(G)$, se representarmos a união disjunta de dois conjuntos disjuntos A e B por $A \sqcup B$, conclui-se que o quociente estendido é dado pela união disjunta

$$X /\!/ G = \bigsqcup_{[\gamma] \in C\ell(G)} X^\gamma / Z(\gamma). \qquad (4)$$

Esta caracterização do quociente estendido é particularmente útil nos cálculos. Tendo em conta a discussão na secção anterior, a questão natural é que informação sobre o grupo G é possível manter no caso trivial do quociente estendido $\{\mathrm{pt}\} /\!/ G$? O próximo exemplo responde a esta questão.

Exemplo 2.2. *Aplicando a definição 2.1, vem*

$$\begin{aligned} \{\mathrm{pt}\} /\!/ G &= \{g \cdot (\mathrm{pt}, \gamma) : \gamma.\mathrm{pt} = \mathrm{pt}\} \\ &= \{(g \cdot \mathrm{pt}, g \cdot \gamma) : g \in G\} \\ &= \{(\mathrm{pt}, g\gamma g^{-1}) : g \in G\} \\ &= C\ell(G). \end{aligned}$$

Portanto, o quociente estendido, $\{\mathrm{pt}\} /\!/ G$, permite-nos obter as classes de conjugação de G.

Recordemos que uma ação é *livre* se apenas a identidade $e \in G$ fixa algum ponto de X, isto é,

$$\exists\, x \in X : \gamma \cdot x = x \Rightarrow \gamma = e.$$

Estamos em condições de enunciar e demonstrar o seguinte resultado.

Proposição 2.3. *Dado o quociente estendido $X /\!/ G$, tem-se:*

(i) $X /\!/ G$ contém o quociente usual X/G;

(ii) Se a ação de G em X é livre, então $X /\!/ G = X/G$.

A demonstração é elementar atendendo a que, para $\gamma = e$, $X^\gamma / \mathcal{Z}(\gamma) = X/G$. Por outro lado, se a ação é livre, então

$$\widetilde{X} = \{(x, \gamma) \in X \times G : \gamma \cdot x = x\} = \{(x, e) \in X \times G\} \cong X.$$

Eis dois exemplos não elementares de quociente estendido. No primeiro exemplo, o grupo cíclico de ordem 2, $G = \mathbb{Z}_2 = \langle\gamma\rangle$, atua no círculo unitário $\mathbb{T}$ por conjugação. Para simplificar a notação, iremos representar o grupo cíclico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de ordem n por $\mathbb{Z}_n$.

Exemplo 2.4. *Seja $X = \mathbb{T}$, $G = \mathbb{Z}_2$ e considere-se a ação por conjugação, $\gamma \cdot z = \bar{z}$. Então, atendendo a (4), um cálculo simples permite concluir que*

$$\mathbb{T}/\!/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{T}/\mathbb{Z}_2 \sqcup \{\mathrm{pt}_1, \mathrm{pt}_2\} \cong [0,1] \sqcup \{\mathrm{pt}_1, \mathrm{pt}_2\},$$

onde $\{\mathrm{pt}_1, \mathrm{pt}_2\}$ *são dois pontos isolados.*

No segundo exemplo, o grupo $\mathbb{Z}_2$ atua no 2-toro por permutação das coordenadas.

Exemplo 2.5. *O grupo* $\mathbb{Z}_2$ *atua no* 2*-toro por permutação das coordenadas,* $\gamma \cdot (z_1, z_2) = (z_2, z_1)$*. Como há apenas duas classes de conjugação,* $\{e\}$ *e* $\{\gamma\}$*, e como* $X^\gamma = \{(z,z) : z \in \mathbb{T}\} \cong \mathbb{T}$*, tem-se:*

$$\mathbb{T}^2/\!/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{T}^2/\mathbb{Z}_2 \sqcup \mathbb{T} = \mathbf{Mb} \sqcup \mathbb{T},$$

onde **Mb** *é a banda de Möbius. Podemos visualizar o quociente estendido através da figura 1.*

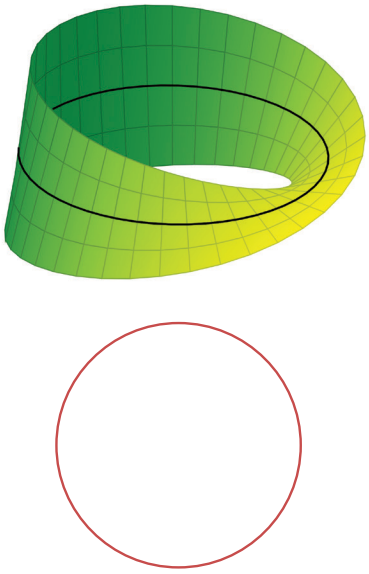


Figura 1. O quociente estendido $\mathbb{T}^2/\!/\mathbb{Z}_2$.

3. O QUOCIENTE ESTENDIDO $\mathbb{T}^n/\!/S_n$

O resto do artigo é dedicado à generalização do exemplo 2.5. Começamos com o grupo simétrico S_n, que atua no n-toro $\mathbb{T}^n$ por permutação das coordenadas:

$$\gamma \cdot (z_1, \ldots, z_n) = (z_{\gamma(1)}, \ldots, z_{\gamma(n)}),$$

com $\gamma \in S_n$ e $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{T}^n$.

É conhecida a existência de uma bijeção entre o *tipo* de uma permutação γ de S_n, caracterizado pelo números de ciclos de um certo comprimento, e as partições de n

$$\{[\gamma] \in C\ell(S_n)\} \leftrightarrow \{\text{partições de } n\}.$$

Cada classe de conjugação é caracterizada por um tipo.

Exemplo 3.1. *À partição*

$$12 = 3+3+2+2+2 = 2\times 3 + 3 \times 2,$$

associamos a permutação

$$\gamma = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)(7\ 8)(9\ 10)(11\ 12) \in S_{12},$$

cujo tipo é caracterizado por dois ciclos de comprimento 3 e três ciclos de comprimento 2. Qualquer outra permutação de S_{12} *com o mesmo tipo, ou seja, com dois ciclos de comprimento 3 e três ciclos de comprimento 2, pertence à mesma classe de conjugação.*

Seja $\gamma \in S_n$ a permutação associada à partição

$$n = r_1 n_1 + r_2 n_2 + \cdots + r_k n_k, \quad n \geq n_1 > n_2 > \cdots > n_k \geq 1, \tag{5}$$

onde r_i é o número de ciclos de comprimento n_i no tipo de γ. O conjunto dos pontos fixos pela ação de γ é dado por

$$X^\gamma = \{(\underbrace{a_{11}, \ldots, a_{11}}_{n_1}, \ldots, \underbrace{a_{1r_1}, \ldots, a_{1r_1}}_{n_1}, \underbrace{a_{21}, \ldots, a_{21}}_{n_2}, \ldots, \underbrace{a_{2r_2}, \ldots, a_{2r_2}}_{n_2},$$

$$\ldots, \underbrace{a_{k1}, \ldots, a_{k1}}_{n_k}, \ldots, \underbrace{a_{kr_k}, \ldots, a_{kr_k}}_{n_k}), \ a_{ij} \in \mathbb{T}\}.$$

O estabilizador do elemento γ associado à partição (5), que para esta ação é o mesmo que o centralizador, não é fácil de calcular. De acordo com [7, pp.295-296, o estabilizador de γ é dado pelo produto entrelaçado (*wreath product)*

$$Z(\gamma) = \mathbb{Z}_{n_1} \wr S_{r_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k} \wr S_{r_k}.$$

Pela definição de produto entrelaçado, cada $\mathbb{Z}_{n_i} \wr S_{r_i}$ é o produto semidireto $\mathbb{Z}_{n_i}^{r_i} \rtimes S_{r_i}$. O leitor interessado poderá consultar as páginas 66 e 269 de [7] para as definições, respetivamente, de produto semidireto e produto entrelaçado. Assim, o centralizador $Z(\gamma)$ é dado pelos produtos semidiretos

$$Z(\gamma) = \mathbb{Z}_{n_1}^{r_1} \rtimes S_{r_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}^{r_k} \rtimes S_{r_k}.$$

Vejamos como determinar $X^\gamma/Z(\gamma)$ a partir da discussão anterior. O elemento γ permuta os blocos com o mesmo tamanho n_i, que estão repetidos r_i vezes, o que corresponde ao grupo simétrico S_{r_i}. Por outro lado, os elementos de cada bloco são permutados ciclicamente, o que corresponde ao grupo cíclico $\mathbb{Z}_{n_i}$. Tendo em conta que os vários grupos cíclicos $\mathbb{Z}_{n_1}, \ldots, \mathbb{Z}_{n_k}$ atuam trivialmente no conjunto dos pontos fixos X^γ, vem que

$$\begin{aligned} X^\gamma/Z(\gamma) &= \{(a_{11},\dots,a_{1r_1}) : a_{1i} \in \mathbb{T}\}/S_{r_1} \\ &\quad \cdots \times \{(a_{21},\dots,a_{2r_2}) : a_{2i} \in \mathbb{T}\}/S_{r_2} \\ &\quad \cdots \times \{(a_{k1},\dots,a_{kr_k}) : a_{ki} \in \mathbb{T}\}/S_{r_k} \\ &= \mathbb{T}^{r_1}/S_{r_1} \times \mathbb{T}^{r_2}/S_{r_2} \times \cdots \times \mathbb{T}^{r_k}/S_{r_k}. \end{aligned}$$

Denotaremos o quociente $\mathbb{T}^n/S_n$, que corresponde aos n-uplos não ordenados do círculo unitário, por $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{T})$, ao qual damos o nome apropriado de *n-ésimo produto simétrico*. No exemplo 2.5, a banda de Möbius é o produto simétrico (note que $S_2 = \mathbb{Z}_2$)

$$\mathbf{Mb} = \mathbb{T}^2/S_2 = \mathrm{Sym}^2(\mathbb{T}).$$

Assim, o quociente $X^\gamma/Z(\gamma)$ é precisamente um produto direto de produtos simétricos

$$X^\gamma/Z(\gamma) = \mathrm{Sym}^{r_1}(\mathbb{T}) \times \mathrm{Sym}^{r_2}(\mathbb{T}) \times \cdots \times \mathrm{Sym}^{r_k}(\mathbb{T}).$$

Acabámos de provar a seguinte fórmula para o quociente estendido:

Proposição 3.2. *Seja $\mathbb{T}^n$ o n-toro onde o grupo simétrico S_n atua por permutação das coordenadas. Então, o quociente estendido para essa ação é dado por*

$$\mathbb{T}^n /\!/ S_n = \bigsqcup_{[\gamma]\in C\ell(S_n)} \mathrm{Sym}^{r_1}(\mathbb{T}) \times \mathrm{Sym}^{r_2}(\mathbb{T}) \times \cdots \times \mathrm{Sym}^{r_k}(\mathbb{T}),$$

onde cada classe $[\gamma] \in C\ell(S_n)$ corresponde a uma partição $n = r_1 n_1 + r_2 n_2 + \cdots + r_k n_k$, com

$$n \geq n_1 > n_2 > \cdots > n_k \geq 1.$$

Para ilustrar o resultado anterior, vamos calcular os quocientes estendidos $\mathbb{T}^n /\!/ S_n$ para $n = 3$ e $n = 6$.

Exemplo 3.3. *Há três partições de $n = 3$*

$$3+0,\ \ 2+1,\ \ 1+1+1,$$

cujos quocientes $X^\gamma/Z(\gamma)$ são, respetivamente,

$$\mathbb{T},\ \ \mathbb{T}^2,\ \ \mathbb{T}^3/S_3 = \mathrm{Sym}^3(\mathbb{T}).$$

Portanto, o quociente estendido é, neste caso,

$$\mathbb{T}^3 /\!/ S_3 = \mathbb{T} \sqcup \mathbb{T}^2 \sqcup \mathrm{Sym}^3(\mathbb{T}).$$

Exemplo 3.4. *O inteiro $n = 6$ tem um total de 11 partições*

$$6+0,\ 5+1,\ 4+2,\ 4+1+1,\ 3+3,\ 3+2+1,\ 3+1+1+1,$$
$$2+2+2,\ 2+2+1+1,\ 2+1+1+1+1,\ 1+1+1+1+1+1,$$

donde se conclui que

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^6 /\!/ S_6 = &\mathbb{T} \sqcup \mathbb{T}^2 \sqcup \mathbb{T}^2 \sqcup \mathbb{T} \times \mathrm{Sym}^2(\mathbb{T}) \sqcup \mathrm{Sym}^2(\mathbb{T}) \\ &\sqcup \mathbb{T}^3 \sqcup \mathbb{T} \times \mathrm{Sym}^3(\mathbb{T}) \sqcup \mathrm{Sym}^3(\mathbb{T}) \sqcup \mathrm{Sym}^2(\mathbb{T}) \\ &\times \mathrm{Sym}^2(\mathbb{T}) \sqcup \mathbb{T} \times \mathrm{Sym}^4(\mathbb{T}) \sqcup \mathrm{Sym}^6(\mathbb{T}). \end{aligned}$$

Ao analisarmos os exemplos anteriores, verificamos que a primeira componente é o círculo unitário, $\mathbb{T}$, que corresponde à identidade $\gamma = e$, ou seja, à partição $n + 0$, enquanto a última componente é o produto simétrico máximo $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{T})$. Esta última componente corresponde à classe de conjugação representada por um ciclo de ordem n, $\gamma = (1\ 2\ \dots\ n) \in S_n$. O centralizador desse ciclo, $Z(\gamma) = \mathbb{Z}_n$, atua trivialmente no conjunto dos pontos fixos $X^\gamma = \{(a, a, \dots, a) \in \mathbb{T}^n\}$. Portanto,

$$X^\gamma/Z(\gamma) \cong \mathbb{T}/\mathbb{Z}_n = \mathbb{T}.$$

Em resumo, se a ordem pela qual escrevemos as partições for a dos exemplos anteriores, qualquer quociente estendido $\mathbb{T}^n /\!/ S_n$ tem primeira e última componentes $\mathbb{T}$ e $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{T})$, i.e.,

$$\mathbb{T}^n /\!/ S_n = \mathbb{T} \sqcup \cdots \sqcup \mathrm{Sym}^n(\mathbb{T}).$$

4. O QUOCIENTE ESTENDIDO $\mathbb{T}^n /\!/ \mathbb{Z}_n$

Nesta secção consideramos a ação de $G = \mathbb{Z}_n$ em $X = \mathbb{T}^n$ por permutação cíclica das coordenadas. Sendo $\mathbb{Z}_n$ um grupo abeliano, cada elemento $\gamma \in \mathbb{Z}_n$ é uma classe de conjugação, isto é, $C\ell(\mathbb{Z}_n) = \{[\gamma] = \{\gamma\} : \gamma \in \mathbb{Z}_n\}$. Além disso, o centralizador de qualquer elemento γ é todo o grupo, $Z(\gamma) = \mathbb{Z}_n$. Naturalmente, tal como acontecia com $G = S_n$, $X^e/Z(e) = \mathbb{T}^n/\mathbb{Z}_n$.

Para calcular o quociente estendido, precisamos de determinar o conjunto dos pontos fixos X^γ, com $\gamma \neq 1$. Como a ação é a mesma de S_n em $\mathbb{T}^n$, a estratégia é ver $\mathbb{Z}_n$ como um subgrupo de S_n.

Para facilitar a análise, usaremos nesta secção a notação multiplicativa para o grupo cíclico de ordem n (naturalmente isomorfo ao grupo cíclico aditivo, e que se costuma representar por C_n, mas que, por comodidade, continuamos a representar por $\mathbb{Z}_n$):

$$\mathbb{Z}_n \cong \langle\gamma\rangle = \langle(1\ 2\ \dots\ n)\rangle = \{\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^{n-1}\}.$$

Deve notar-se que cada elemento γ^i atua em $\mathbb{T}^n$ movendo cada coordenada para a direita i posições (*right shift*). Esta abordagem traduz-se em considerar como gerador de $\mathbb{Z}_n$ o ciclo de ordem n, $\gamma = (1\ 2\ \dots\ n)$, que desloca cada coordenada de $\mathbb{T}^n$ uma posição para a direita.

Começamos por estudar a estrutura de $\mathbb{T}^n /\!/ \mathbb{Z}_n$ no

caso em que $n = p$ é um número primo. Cada elemento $\gamma_i \neq e$ do grupo $\mathbb{Z}_p$ é um ciclo de comprimento p. Portanto, o conjunto dos pontos fixos X^{γ_i} é igual para todo $\gamma_i \neq e$, sendo dado por:

$$X^{\gamma_i} = \{(a, a, \ldots, a) : a \in \mathbb{T}\} \cong \mathbb{T}.$$

Naturalmente, a ação de $Z(\gamma_i) = \mathbb{Z}_n$ em X^{γ_i} é trivial, pelo que $X^{\gamma_i}/Z(\gamma_i) \cong \mathbb{T}$, para qualquer $0 < i < p$. Conclui-se que os $p-1$ elementos $\gamma_i \neq e$ em $\mathbb{Z}_p$ contribuem com $p-1$ cópias de $\mathbb{T}$ para o quociente estendido.

Proposição 4.1. *Seja $n = p$ um número primo e $\mathbb{T}^p$ o p-toro onde o grupo cíclico $\mathbb{Z}_p$ atua por permutação das coordenadas. Então, o quociente estendido para essa ação é dado por*

$$\mathbb{T}^p /\!/ \mathbb{Z}_p = \mathbb{T}^p/\mathbb{Z}_p \sqcup \underbrace{\mathbb{T} \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{T}}_{p-1}.$$

É de notar que a ordem das várias componentes do quociente estendido neste caso, com $G = \mathbb{Z}_n$, é diferente do caso $G = S_n$, uma vez que as classes de conjugação são agora os n elementos de $\mathbb{Z}_n$.

Exemplo 4.2. *Para $n = 3$,*

$$\mathbb{T}^3 /\!/ \mathbb{Z}_3 = \mathbb{T}^3/\mathbb{Z}_3 \sqcup \mathbb{T} \sqcup \mathbb{T}.$$

Geometricamente, o quociente usual $\mathbb{T}^3/\mathbb{Z}_3$ é homeomorfo ao produto de um círculo unitário $\mathbb{T}$ com uma 2-esfera (isto é, a fronteira de uma esfera em $\mathbb{R}^3$), ou seja, $\mathbb{T}^3/\mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{T} \times S^2$, pelo que o quociente estendido pode ser visualizado através da figura 2.

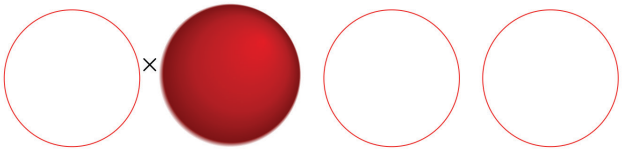


Figura 2. O quociente estendido $\mathbb{T}^3 /\!/ \mathbb{Z}_3$.

Exemplo 4.3. *No caso $n = 7$, o quociente estendido é dado por*

$$\mathbb{T}^7 /\!/ \mathbb{Z}_7 = \mathbb{T}^7/\mathbb{Z}_7 \sqcup \mathbb{T} \sqcup \mathbb{T} \sqcup \mathbb{T} \sqcup \mathbb{T} \sqcup \mathbb{T} \sqcup \mathbb{T}.$$

Antes de considerarmos o caso geral $G = \mathbb{Z}_n$, é elucidativo analisar um número composto. Vejamos o caso $n = 6$.

Exemplo 4.4. *Podemos representar o grupo cíclico $\mathbb{Z}_6$ como o subgrupo de S_6 gerado pelo ciclo $\gamma = (1\,2\,3\,4\,5\,6)$:*

$$\mathbb{Z}_6 = \{\, e\,,\, (1\,2\,3\,4\,5\,6),\, (1\,3\,5)\,(2\,4\,6),$$
$$(1\,4)\,(2\,5)\,(3\,6),(1\,5\,3)\,(2\,6\,4),\, (1\,6\,5\,4\,3\,2)\}.$$

A contribuição de cada elemento (neste caso, cada elemento corresponde a uma classe de conjugação) é a seguinte:

- *Naturalmente, $\gamma^0 = e$ contribui com o quociente usual $\mathbb{T}^6/\mathbb{Z}_6$.*

Por outro lado, para cada $0 < i \leq 5$, os elementos γ^i com ciclo do mesmo tipo têm o mesmo comportamento.

- *Os elementos γ^1 e γ^5 são do mesmo tipo, $6 = 6 + 0 = 1 \times 6$, correspondendo a um ciclo de comprimento 6. Note que as potências, que podemos ver como índices, $i = 1, 5$, são primos relativos com 6. Ambos contribuem com duas cópias de $\mathbb{T}$.*

- *γ^2 e γ^4 são do mesmo tipo, $6 = 3 + 3 = 2 \times 3$, estando associados a dois ciclos de comprimento 3. Os índices não são primos relativos com 6, uma vez que $\text{m.d.c.}(2, 6) = \text{m.d.c.}(4, 6) = 2$. Um simples cálculo mostra que os pontos fixos são dados por*

$$X^{\gamma^2} = X^{\gamma^4} = \{(a, b, a, b, a, b) : a, b \in \mathbb{T}\}.$$

Portanto, contribuem cada um com uma cópia de $\mathbf{Mb} = \mathbb{T}^2/\mathbb{Z}_2$ (a banda de Möbius) para o quociente estendido

$$X^{\gamma^2}/Z(\gamma^2) = X^{\gamma^4}/Z(\gamma^4) = \{(a, b, a, b, a, b) : a, b \in \mathbb{T}\}/\mathbb{Z}_6$$
$$\cong \{(a, b) : a, b \in \mathbb{T}\}/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{T}^2/\mathbb{Z}_2.$$

- *γ^3 é o único elemento com ciclo do tipo $6 = 2 + 2 + 2 = 3 \times 2$, isto é, três ciclos de comprimento 2, contribuindo com*

$$X^{\gamma^3}/Z(\gamma^3) = \{(a, b, c, a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{T}\}/\mathbb{Z}_6$$
$$\cong \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{T}\}/\mathbb{Z}_3 = \mathbb{T}^3/\mathbb{Z}_3.$$

Assim, o quociente estendido para $n = 6$ é dado por

$$\mathbb{T}^6 /\!/ \mathbb{Z}_6 = \mathbb{T}^6/\mathbb{Z}_6 \sqcup \mathbb{T}^3/\mathbb{Z}_3 \sqcup \mathbb{T}^2/\mathbb{Z}_2 \sqcup \mathbb{T}^2/\mathbb{Z}_2 \sqcup \mathbb{T} \sqcup \mathbb{T}.$$

Impõe-se um comentário sobre o exemplo anterior. Quando i varia nos divisores de $n = 6$, os quocientes usuais $\mathbb{T}^i/\mathbb{Z}_i$ surgem no quociente estendido $\mathbb{T}^6 /\!/ \mathbb{Z}_6$. Além disso, cada quociente $\mathbb{T}^i/\mathbb{Z}_i$ aparece repetido k vezes, onde k é tal que $1 < k \leq n - 1$ e $i = \text{m.d.c.}(k, n)$. Dito de outra forma, os quocientes $\mathbb{T}^i/\mathbb{Z}_i$ correspondem aos elementos que têm o mesmo ciclo $n = i \times c$, onde c é o

comprimento dos ciclos disjuntos que aparecem no tipo do elemento (todos com ciclo de igual comprimento).

A análise anterior leva-nos a considerar a seguinte questão: dado o subgrupo cíclico $\langle (i_1\ i_2\ \dots\ i_r)\rangle$ de $\mathbb{Z}_n$, qual a estrutura cíclica dos seus elementos, isto é, qual a estrutura cíclica de uma potência

$$(i_1\ i_2\ \dots\ i_r)^m \in \langle (i_1\ i_2\ \dots\ i_r)\rangle?$$

A resposta é dada pelo seguinte resultado.

Lema 4.5. ([6]) *Para cada número natural m, à potência $(i_1\ i_2\ \dots\ i_r)^m$ correspondem exatamente* $\mathrm{m.d.c}\,(r,m)$ *fatores cíclicos disjuntos, todos eles de comprimento* $\frac{r}{\mathrm{m.d.c.}(r,m)}$.

Antes de enunciar o resultado principal desta secção, recordemos a *função totiente de Euler*, denotada por ϕ. Dado um inteiro positivo n, o valor $\phi(n)$ corresponde ao número de inteiros entre 1 e n que são primos relativos com o inteiro n:

$$\phi(n) = |\{k \in \mathbb{Z} : 1 \leq k \leq n, \mathrm{m.d.c.}\,(k,n) = 1\}|.$$

Numa interpretação mais algébrica, a função ϕ conta o número de elementos invertíveis no anel $\mathbb{Z}_n$, ou seja, a ordem do *grupo das unidades* $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$ do anel $\mathbb{Z}_n$

$$\phi(n) = |\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)|.$$

Por exemplo, considerando os representantes 1, 2, 3, 4, 5, 6 de $\mathbb{Z}_6$, com $6 \equiv 0 \pmod 6$, apenas 1 e 5 são primos relativos com 6. Portanto $\phi(6) = 2$.

Estamos em condições de enunciar e demonstrar o resultado que dá a estrutura do quociente estendido $\mathbb{T}^n /\!/ \mathbb{Z}_n$.

Proposição 4.6. *Seja $\mathbb{T}^n$ o n-toro onde o grupo cíclico $\mathbb{Z}_n$ atua por permutações cíclicas das coordenadas. Então, o quociente estendido para essa ação é dado por*

$$\mathbb{T}^n /\!/ \mathbb{Z}_n = \mathbb{T}^n/\mathbb{Z}_n \bigsqcup_{1<k<n} \mathbb{T}^i/\mathbb{Z}_i \bigsqcup \underbrace{\mathbb{T} \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{T}}_{\phi(n)},$$

onde ϕ é a função totiente de Euler e $i = \mathrm{m.d.c.}(k,n) \neq 1$, com $1 < k < n$.

A demonstração segue, de certo modo, os passos do exemplo 4.4.

Demonstração. Começamos por notar que os elementos de

$$\mathbb{Z}_n = \{\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^{n-1}\}$$

aparecem com ciclo correspondente às partições do tipo

$$n = n_k + n_k + \cdots + n_k = r_k n_k,$$

onde n_k é o tamanho do ciclo e r_k o número de repetições desse ciclo. Há a considerar três casos distintos.

- O caso $n_k = 1$ e $r_k = n$ corresponde a $\gamma^0 = e$. Neste caso, obtemos o quociente usual $\mathbb{T}^n/\mathbb{Z}_n$.

- O caso $n_k = n$ e $r_k = 1$, que corresponde as elementos γ^k onde k é primo relativo com n, isto é, $\mathrm{m.d.c.}(k,n) = 1$. Os pontos fixos são

$$X^{\gamma^k} = \{(a, a, \dots, a) \in \mathbb{T}^n : a \in \mathbb{T}\} \cong \mathbb{T}.$$

Existem exatamente $\phi(n)$ elementos γ^k deste tipo. O centralizador destes elementos, $Z(\gamma^k) = \mathbb{Z}_n$, atua trivialmente no conjunto dos pontos fixos X^{γ^k}, o que significa que obtemos exatamente $\phi(n)$ cópias de $\mathbb{T}$.

- O último caso está entre os dois casos extremos anteriores, ou seja, corresponde aos elementos γ^k com o mesmo ciclo de tipo $n = r_k n_k$, com $r_k \neq 1$ e $n_k \neq 1$. O conjunto dos pontos fixos nesse caso é

$$X^{\gamma^k} = \{\underbrace{(a_1, a_2, \dots, a_{r_k} \dots, a_1, a_2, \dots, a_{r_k})}_{n_k} \in \mathbb{T}^n : a_i \in \mathbb{T}\}$$

e portanto

$$X^{\gamma^k}/Z(\gamma^k) \cong \{(a_1, a_2, \dots, a_{r_k}) \in \mathbb{T}^n : a_i \in \mathbb{T}\}/\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{T}^{r_k}/\mathbb{Z}_{r_k}.$$

De acordo com o lema 4.5, o número de repetições deste quociente no quociente estendido corresponde ao número de elementos γ^k com ciclo $n = r_k n_k$ e $r_k = \mathrm{m.d.c.}(k,n)$. Escrevendo $r_k = i_k = i$, o resultado segue. □

Exemplo 4.7. Calculemos o quociente estendido $\mathbb{T}^{12} /\!/ \mathbb{Z}_{12}$. Dos representantes de $\mathbb{Z}_{12}$,

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,$$

apenas 1, 5, 7, 11 são primos relativos com 12. Assim, $\phi(12) = 4$. Aplicando a proposição 4.6 anterior, concluímos que

$$\begin{aligned}\mathbb{T}^{12} /\!/ \mathbb{Z}_{12} = {} & \mathbb{T}^{12}/\mathbb{Z}_{12} \sqcup \mathbb{T}^2/\mathbb{Z}_2 \sqcup \mathbb{T}^3/\mathbb{Z}_3 \sqcup \mathbb{T}^4/\mathbb{Z}_4 \sqcup \mathbb{T}^6/\mathbb{Z}_6 \\ & \sqcup \mathbb{T}^4/\mathbb{Z}_4 \sqcup \mathbb{T}^3/\mathbb{Z}_3 \sqcup \mathbb{T}^2/\mathbb{Z}_2 \sqcup \mathbb{T} \sqcup \mathbb{T} \sqcup \mathbb{T} \sqcup \mathbb{T}.\end{aligned}$$

Para terminar, observe-se que a proposição 4.1 é um corolário imediato da proposição 4.6. Efetivamente, se $n = p$ é primo, então não existe $i = \mathrm{m.d.c.}(k,p) \neq 1$, com $1 < k < p$. Além disso, $\phi(p) = p - 1$ ($\mathbb{Z}_p$ tem a estrutura

algébrica de corpo, pelo que o único elemento não invertível de $\mathbb{Z}_p$ é a classe do p).

Agradecimentos
Os autores foram parcialmente apoiados pela FCT através do centro CMA-UBI (project UIDB/00212/2020).

REFERÊNCIAS

[1] A.-M. Aubert, P. Baum, R. J. Plymen, M. Solleveld, "Conjectures About *P*-Adic Groups and Their Noncommutative Geometry", in: *Around Langlands Correspondences*, Contemp. Math. 691, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2017), 15-51.

[2] P. Baum, "The Extended Quocient", *L'Enseign. Math*. (2) 54 (2008), 23-26.

[3] P. Baum, A. Connes, *Chern Character for Discrete Groups, A Fête of Topology*, Academic Press, Boston, (1988), 163-232.

[4] A. Borel, Sur La Cohomologie des Espaces fibrés Principaux et des Espaces Homogènes de Groupes de Lie Compacts, *Ann. Math.* (2) 57 (1953), 115-207.

[5] P. Cartier, "A Mad Day's Work: From Grothendieck to Connes and Kontsevich. The Evolution of Concepts of Space and Symmetry", *Bull. (New Series) of the Amer. Math. Soc.*, Volume 38, Number 4 (2001), 389-408.

[6] A. Kerber, *Algebraic Combinatorics Via Finite Group Actions*, Wissenschafts-verlag, Zurich, 1991.

[7] M. Suzuki, *Group Theory I*, Springer-Verlag, New York, 1982.

SOBRE OS AUTORES

Gastão Bettencourt é professor auxiliar da UBI – Universidade da Beira Interior e membro do CMA – UBI – Centro de Matemática e Aplicações da Universidade da Beira Interior. Licenciado em Física pela FCUL e mestre em Matemática Aplicada pelo IST, doutorou-se em Matemática na UBI. As suas áreas de interesse em investigação incluem sistemas dinâmicos, teoria ergódica e compactificação de espaços métricos.

Sérgio Mendes é professor associado do Iscte – Instituto Universitário de Lisboa e membro do CMA – UBI – Centro de Matemática e Aplicações da Universidade da Beira Interior. Licenciado pela FCUL e mestre em Matemática Aplicada pelo IST, doutorou-se na Universidade de Manchester, Reino Unido. As suas áreas de interesse em investigação incluem a teoria dos números, representações de grupos e a teoria dos operadores.