INSTITUTO
UNIVERSITÁRIO
DE LISBOA

Avaliação de um *Interest Rate Cap*: Metodologia, Implementação e Resultados

Marta Filipa das Neves Antunes

Mestrado em Matemática Financeira

Orientadores:
Professor Doutor, João Pedro Vidal Nunes, Professor Catedrático, ISCTE-IUL

Setembro, 2025

BUSINESS
SCHOOL

Departamento Matemática
Departamento Finanças

Avaliação de um *Interest Rate Cap*: Metodologia, Implementação e Resultados

Marta Filipa das Neves Antunes

Mestrado em Matemática Financeira

Orientadores:
Professor Doutor, João Pedro Vidal Nunes, Professor Catedrático, ISCTE-IUL

Setembro, 2025

Agradecimentos

Mais uma etapa muito importante da minha vida chega ao fim. Foram anos atribulados, marcados por muitas mudanças, altos e baixos, mas que contribuíram para o meu crescimento pessoal, profissional e académico. A todos os que, de uma forma ou de outra, me acompanharam nesta etapa, deixo aqui o meu sincero obrigado. Quero expressar a minha profunda gratidão aos meus pais pelo apoio e pela motivação constante que me deram para concluir esta tese. Quero tambem agradecer ao Daniel Raminhos, que esteve sempre presente e cujo apoio foi fundamental ao longo de todo este percurso.

Dedico ainda este trabalho aos meus avôs, que sempre acreditaram que eu chegaria longe, mesmo não tendo tido a oportunidade de ver este momento concretizar-se, e à minha avó, com todo o carinho e orgulho. Por fim, gostaria de dedicar a tese à minha chefe Juliana Figueiredo que nos deixou cedo demais mas vai sempre ter um lugar especial em quem a conheceu.

Resumo

Esta tese apresenta a avaliação, na data de 29 de dezembro de 2023, do justo valor de um *interest rate cap* contratado para cobertura parcial de um financiamento a taxa variável indexado à Euribor a 1 mês. A metodologia segue o enquadramento clássico de Hull (2018) e Brigo and Mercurio (2006): construção de curva de desconto (modelo Hull–White de 1 fator), extração de taxas *forward*, decomposição do cap em caplets e avaliação sob medida a termo com fórmula tipo Black para caplets. São discutidos os dados, a implementação e as análises de sensibilidade a volatilidade implícita, *shifts* de curva e taxa de exercício.

Palavras-chave: *Interest Rate Cap*; Euribor; Hull–White; Caps e Caplets; Curva de Desconto; Volatilidade Implícita.

Abstract

This thesis computes, as of December 29, 2023, the fair value of an *interest rate cap* used to hedge a floating-rate loan indexed to 1-month Euribor. The methodology follows the classical framework of Hull (2018) and Brigo and Mercurio (2006): discount curve construction (one-factor Hull–White), forward-rate extraction, cap decomposition into caplets, and term-measure pricing with Black-type caplet formula. Data, implementation details, and sensitivity analyses to implied volatility, curve shifts, and strike are provided.

Keywords: Interest Rate Cap; Euribor; Hull–White; Caps and Caplets; Discount Curve; Implied Volatility.

Conteúdo

Agradecimentos **iii**

Resumo **v**

Abstract **vii**

1 Introdução **1**

2 Revisão da literatura **2**

2.1 Estrutura temporal das taxas de juro 2

2.2 Construção da curva zero-cupão e taxas *forward* 2

2.3 Mudança de medida e avaliação sob medida a termo 3

2.4 Caps, caplets e a fórmula de Black (1976) 3

2.5 Volatilidades implícitas e superfícies de volatilidade 4

3 Metodologia **5**

3.1 Preparação dos dados 5

3.2 Procedimentos de avaliação 5

4 Resultados **7**

4.1 Mapa de serviço da dívida 7

4.2 Cálculo do valor do cap 9

4.3 Sensibilidade à volatilidade implícita 12

5 Conclusão **13**

Anexo A — Mapa do serviço da dívida completo **17**

Anexo B — Tabela completa dos inputs e valor por caplet (27 períodos) **19**

Anexo C — Reconciliação completa do valor do cap (27 períodos) **20**

Lista de Figuras

4.1 Sensibilidade do valor do cap à volatilidade implícita. 12

Lista de Tabelas

4.1 Mapa de serviço da dívida — sistema de amortização francês 8
4.2 Inputs e valor por caplet 9
4.3 Reconciliação parcial do valor do cap 11

5.1 Mapa de serviço da dívida (método francês) – Parte II 18
5.2 Inputs e valor por caplet — completo 19
5.3 Reconciliação do valor do cap — caplets e soma acumulada 20

Capítulo 1

Introdução

O mercado de derivados de taxa de juro desempenha um papel fundamental na gestão do risco financeiro, permitindo às instituições e empresas protegerem-se contra variações inesperadas nas taxas de referência. Entre os instrumentos mais utilizados encontra-se o *interest rate cap*, que estabelece um limite máximo para a taxa de juro flutuante de um financiamento. Sempre que a taxa de referência ultrapassa esse limite, o comprador do contrato recebe um pagamento que compensa a diferença positiva entre a taxa efetiva e a taxa contratada (*cap rate*).

O caso em estudo, retrata a contratação do *interest rate cap* pela empresa ACN que visa cobrir o risco da taxa de juro associado a um financiamento a taxa variável, contraído junto do Banco GN. Com vista a cobrir o risco de variabilidade das taxas Euribor associadas ao financiamento, a empresa ACN contratou no passado dia 26 de Maio de 2023 um *interest rate* com as seguintes características:

- O *interest rate* terá início no dia 12 de Março de 2024 (data de início do primeiro *caplet*) e vencimento no dia 12 de Junho de 2026;
- O indexante subjacente ao *interest rate cap* é a Euribor a 1 mês em vigor 2 dias úteis antes do dia 12 de cada mês (definida na base de calendário ACT/360);
- O valor nominal do contrato foi definido de forma a coincidir com o capital em dívida do financiamento subjacente de cada mês;
- A *cap rate* é igual a 4%. (definida na base de calendário ACT/360); e
- Mensalmente, no dia 12 (ou no dia útil imediatamente a seguir) de cada mês, entre os dias 12 de Abril de 2024 e 12 de Junho de 2026, o Banco GN paga à empresa ACN juros (sobre o valor nominal "vivo"no início de cada mês) calculados à taxa de juro nominal anual correspondente à diferença, se positiva, entre a Euribor a 1 mês (em vigor 2 dias úteis antes do dia 12 de cada mês) e a *cap rate* de 4% (na base de calendário ACT/360).

Para tal, é seguida uma abordagem clássica, baseada nos contributos de Hull (2018) que é utilizado na avaliação de instrumentos derivados de taxa de juro. O procedimento consiste na decomposição do *interest rate cap* em caplets individuais e na sua valorização segundo a fórmula de Black (1976).

Capítulo 2

Revisão da literatura

Este capítulo apresenta uma revisão dos principais modelos e conceitos teóricos que servem de base à avaliação de caps e caplets. O enquadramento combina fundamentos da teoria da avaliação de derivados, com destaque para modelos de taxa de juro de curto prazo e metodologias de mercado amplamente utilizadas para a avaliação de opções sobre taxas de juro.

2.1 Estrutura temporal das taxas de juro

A avaliação de instrumentos de taxa de juro exige a construção, na data de avaliação $t_0 = 29/12/2023$, de uma curva de desconto $P(t,T)$ que reflete o preço hoje de uma obrigação zero-cupon que paga 1 unidade monetária na maturidade T. Em termos da *cupon rate* $R(t,T)$ em regime de capitalização contínua, tem-se:

$$\mathrm{P(t,T)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{R(t,T)(T-t)}} \tag{2.1}$$

2.2 Construção da curva zero-cupão e taxas *forward*

A curva zero-cupão representa o conjunto de taxas de juro $R(t,T)$ aplicáveis a diferentes maturidades, em regime de capitalização contínua. Uma vez obtida essa curva, é possível derivar as taxas *forward* implícitas, que correspondem às taxas de juro antecipadas para períodos futuros.

A relação entre fatores de desconto e taxas forward $L(t,t_i,t_{i+1})$ é dada pela condição de não arbitragem:

$$1 + \delta_i L(t,t_i,t_{i+1}) = \frac{P(t,t_i)}{P(t,t_{i+1})}, \tag{2.2}$$

onde δ_i representa a fração de ano correspondente ao período $[t_i,t_{i+1}]$ segundo a convenção de contagem de dias (ACT/360). Assim, as taxas forward podem ser extraídas diretamente da curva de desconto, garantindo consistência entre os fatores de desconto e as expectativas implícitas de taxa de juro.

Estas taxas forward constituem os inputs fundamentais na avaliação dos caplets segundo o modelo de Black (1976).

2.3 Mudança de medida e avaliação sob medida a termo

O preço $V(t)$ de um derivado com payoff H_T no momento $T(\geq t)$ é dado, sob ausência de arbitragem, por:

$$V(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s \, \mathrm{d}s} H_T \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right], \tag{2.3}$$

onde $\mathbb{Q}$ é a medida neutra ao risco. Para derivados que dependem de uma taxa forward $L(t, t_i, t_{i+1})$, é conveniente trabalhar sob a medida $\mathbb{Q}^{t_{i+1}}$ associada ao numerário $P(t, t_{i+1})$. Nesta medida, a taxa forward $L(t, t_i, t_{i+1})$ é uma martingala:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{\mathrm{t_{i+1}}}}\left[\mathrm{L(t, t_i, t_{i+1})}|\mathcal{F}_{\mathrm{t}}\right] = \mathrm{L(t, t_i, t_{i+1})} \tag{2.4}$$

2.4 Caps, caplets e a fórmula de Black (1976)

Um *interest rate cap*, como o contratado pela empresa ACN em maio de 2023, pode ser decomposto numa soma de caplets, cada um com payoff em t_{i+1}:

$$\text{Payoff}_i = N\,\delta_i\,\max(L(t, t_i, t_{i+1}) - K, 0), \tag{2.5}$$

onde,

- N é o nominal do financiamento em dívida;
- δ_i a fração de ano (ACT/360) T entre os momentos t_i e t_{i+1};
- $L(t, t_i, t_{i+1})$ a taxa forward fixada em t_i; e
- K a *cap rate*.

Sob a medida $\mathbb{Q}^{t_{i+1}}$, e assumindo dinâmica lognormal para $L(t, t_i, t_{i+1})$, o valor de um caplet é dado pela fórmula de Black (1976):

$$\text{Caplet}_i(t) = N\,\delta_i\,P(t, t_{i+1})\Big(L(t, t_i, t_{i+1})\Phi(d_{1,i}) - K\Phi(d_{2,i})\Big), \tag{2.6}$$

$$d_{1,i} = \frac{\ln\left(\frac{L_i}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma_i^2(T_i - t)}{\sigma_i\sqrt{T_i - t}}, \qquad d_{2,i} = d_{1,i} - \sigma_i\sqrt{T_i - t}, \tag{2.7}$$

sendo σ_i a volatilidade implícita do caplet, $\sigma_i = t_{i+1} - t_i$, e Φ a CDF normal padrão.

O valor do cap é a soma dos caplets:

$$\text{Cap(t)} = \sum_{\text{i}} \text{Caplet}_{\text{i}}\text{(t)} \tag{2.8}$$

2.5 Volatilidades implícitas e superfícies de volatilidade

No mercado, as volatilidades implícitas não são disponibilizadas diretamente para cada caplet isolado. Em vez disso, publicam-se as volatilidades de caps inteiros, que agregam vários períodos futuros.

Essas volatilidades são organizadas de acordo com duas dimensões principais: a maturidade total do contrato (por exemplo, 1 ano, 5 anos, 10 anos) e a frequência da taxa de juro usada como referência (por exemplo, Euribor a 1 mês, 3 meses ou 6 meses).

Como nem todas as combinações estão disponíveis, é necessário interpolar os valores em falta para obter uma grelha completa e contínua.

As volatilidades resultantes desta construção são depois usadas na fórmula de Black (1976) para calcular o valor de cada caplet de forma compatível com os preços observados no mercado.

Capítulo 3

Metodologia

Este capítulo descreve a metodologia adotada para calcular o *fair value* do contrato de *interest rate cap* na data de 29 de dezembro de 2023. O contrato foi celebrado em 25 de maio de 2023 pela empresa ACN, com o objetivo de proteger um financiamento a taxa variável indexado à Euribor a 1 mês, contratado em 26 de maio de 2023.

3.1 Preparação dos dados

A avaliação do contrato foi realizada na data de 29 de dezembro de 2023. O instrumento subjacente corresponde a um financiamento a taxa variável indexado à Euribor a 1 mês, celebrado em 26 de maio de 2023.

Na valorização adotou-se a base de contagem ACT/360, utilizada nos contratos indexados à Euribor.

O nominal em dívida em cada período foi determinado de acordo com o plano de amortização do financiamento. Os inputs de mercado necessários incluem: (i) a curva de desconto, construída a partir da curva zero-cupão de 29 de dezembro de 2023, derivada de instrumentos de mercado; (ii) as taxas *forward* mensais derivadas dessa curva de desconto; (iii) a superfície de volatilidades implícitas de caps, interpolada para fornecer os valores necessários por maturidade.

3.2 Procedimentos de avaliação

O processo de avaliação do cap seguiu as seguintes etapas:

a) **Curva de desconto**: os fatores de desconto foram obtidos analiticamente a partir das taxas zero-coupon calibradas no mercado, pela expressão

$$\mathrm{P(t,T)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{R(t,T)(T-t)}} \tag{3.1}$$

b) **Taxas forward**: para cada período $[t_i, t_{i+1}]$, determinaram-se as taxas *forward* pela

relação de não arbitragem

$$1 + \delta_i L(t, t_i, t_{i+1}) = \frac{P(t, t_i)}{P(t, t_{i+1})} \tag{3.2}$$

onde δ_i representa a fração de ano ACT/360.

c) **Decomposição do cap**: o contrato foi representado como uma soma de caplets mensais, cada um com payoff

$$\text{Payoff}_i = N_i \delta_i \max(L(t, t_i, t_{i+1}) - K, 0) \tag{3.3}$$

d) **Avaliação dos caplets**: sob a medida a termo $\mathbb{Q}^{t_{i+1}}$ e assumindo uma dinâmica lognormal para $L(t, t_i, t_{i+1})$, aplicou-se a fórmula de Black (1976):

$$\text{Caplet}_i(t) = N_i \delta_i P(t, t_{i+1}) \Big(L(t, t_i, t_{i+1}) \Phi(d_{1,i}) - K \Phi(d_{2,i}) \Big) \tag{3.4}$$

$$d_{1,i} = \frac{\ln\left(\frac{L_i}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma_i^2 (t_{i+1} - t)}{\sigma_i \sqrt{t_{i+1} - t}} \tag{3.5}$$

$$d_{2,i} = d_{1,i} - \sigma_i \sqrt{t_{i+1} - t} \tag{3.6}$$

e) **Agregação**: o valor total do cap foi obtido como soma dos caplets:

$$\text{Cap}(t) = \sum_i \text{Caplet}_i(t) \tag{3.7}$$

Para além disso, para fazer a avaliação da robustez da valorização, foi feita uma análise de sensibilidade à volatilidade implícita, recalculando o valor do cap para variações de ±20% face ao valor base de 26%.

Capítulo 4

Resultados

Este capítulo apresenta os resultados da avaliação do contrato de *interest rate cap* contratado pela empresa ACN a 25 de Maio de 2023, com o banco GN, para cobertura do risco de taxa de juro de um financiamento a taxa variável iniciado a 12 de Junho de 2023 e com vencimento a 12 de Junho de 2026. O objetivo é determinar o *fair value* deste *cap* na data de 29 de Dezembro de 2023, tal como exigido pelo enunciado do projeto.

4.1 Mapa de serviço da dívida

De acordo com o enunciado, o serviço da dívida é efetuado através do pagamento de 36 prestações constantes de capital e juros, na base de calendário 30/360, sendo a primeira prestação paga a 12 de julho de 2023. A taxa de juro do financiamento é variável e corresponde à Euribor a 1 mês (ACT/360) acrescida de um *spread* de 2,5%.

A prestação mensal constante R é obtida assumindo o método de amortização francês e essa prestação é dada por:

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{r} \times \mathrm{VP}}{1 - (1 + \mathrm{r})^{-\mathrm{n}}} \tag{4.1}$$

onde:

- $VP = 50\,000\,000$ EUR é o montante inicial financiado;
- r é a taxa efetiva *mensal*; e
- $n = 36$ é o número total de prestações mensais.

Para obter r, começamos pela taxa anual nominal aplicável ao empréstimo, definida como a Euribor a 1 mês mais um *spread* de 2,5%. Sabendo que, em Junho de 2023, a Euribor a 1 mês era 3,343%, a taxa anual nominal resulta em:

$$\text{Taxa anual nominal} = 3{,}343\% + 2{,}5\% = 5{,}843\% \tag{4.2}$$

Adoptamos a aproximação padrão de dividir esta taxa anual por 12 para obter a taxa efectiva

mensal:

$$\mathrm{r} = \frac{5{,}843\%}{12} = 0{,}4869\% = 0{,}004869. \tag{4.3}$$

Para efeitos de construção do plano de amortização teórico, assume-se que esta taxa mensal se mantém constante ao longo de toda a maturidade do financiamento.

Substituindo estes valores na expressão da prestação, obtemos o valor da prestação mensal:

$$R = \frac{0{,}004869 \times 50\,000\,000}{1 - (1 + 0{,}004869)^{-36}} \approx 1\,517\,543 \text{ EUR} \tag{4.4}$$

Em cada período i, os juros são calculados sobre o capital em dívida no início do mês, segundo a expressão

$$\text{Juros}_i = N_{i-1} \times r \tag{4.5}$$

sendo $r = 0{,}004869$ a taxa efetiva mensal. A amortização de capital resulta da diferença entre a prestação total e os juros do período:

$$\text{Amortização}_i = R - \text{Juros}_i \tag{4.6}$$

O capital em dívida após o pagamento da prestação i é então dado por:

$$N_i = N_{i-1} - \text{Amortização}_i \tag{4.7}$$

Assim sendo, segue a tabela de mapa de serviço da dívida que é possível ver completa no Anexo A

Tabela 4.1: Mapa de serviço da dívida — sistema de amortização francês

i	Data	Prestação	Juros	Amortização	Capital em dívida
0	29/12/2023	–	–	–	50 000 000,00
1	31/01/2024	1 517 543,00	243 458,33	1 274 084,67	48 725 915,33
2	29/02/2024	1 517 543,00	237 088,83	1 280 454,17	47 445 461,16
3	31/03/2024	1 517 543,00	230 709,06	1 286 833,94	46 158 627,22
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
36	31/12/2026	1 517 543,00	7 314,59	1 510 228,41	0,00

4.2 Cálculo do valor do cap

O contrato de *interest rate cap* é avaliado como a soma de 27 *caplets* mensais, entre 12 de março de 2024 e 12 de junho de 2026. Cada *caplet* protege um mês de juro e é liquidado no dia 12 (ou no dia útil seguinte) do mês seguinte. O nominal de cada *caplet*, designado por N_i, corresponde ao capital em dívida do financiamento no início de cada mês, conforme o mapa de serviço da dívida. As taxas *forward* Euribor a 1 mês, L_i, foram obtidas a partir da curva zero-cupão de 29 de dezembro de 2023, considerando uma base temporal de 30/360, o que corresponde a uma fração de ano constante de $\delta = 0{,}083333$. O *cap rate* foi fixado contratualmente em $K = 4\%$, e a volatilidade implícita (σ_i) adotada, segundo o modelo de Black (1976), é constante e igual a 26% em todos os períodos. Os fatores de desconto $P(t_0, t_{i+1})$ foram igualmente calculados a partir da curva zero-cupão, correspondendo à data de valorização $t_0 = 29/12/2023$.

A Tabela 4.2 apresenta as três primeiras e a última linha com os inputs e resultados individuais, sendo que a versão completa é apresentada no Anexo B.

Tabela 4.2: Inputs e valor por caplet

i	t_i	t_{i+1}	N_i (EUR)	L_i (%)	σ_i (%)	$P(t_0, t_{i+1})$	Caplet$_i$ (EUR)
1	12/03/2024	12/04/2024	39 631 919,82	3,77	26,0	0,98915	2 903,80
2	12/04/2024	12/05/2024	38 307 351,68	3,34	26,0	0,98641	742,88
3	12/05/2024	12/06/2024	36 976 334,00	3,25	26,0	0,98374	799,40
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
27	12/05/2026	12/06/2026	3 013 060,67	1,55	26,0	0,94468	7,40

Na data de valorização $t_0 = 29/12/2023$, para o primeiro período $[t_1, t_2] = [12/03/2024, 12/04/2024]$ consideram-se os seguintes valores de entrada:

$$N_1 = 39\,631\,919{,}82 \text{ EUR}, \qquad K = 4\% \ (= 0{,}04),$$

$$\delta_1 = \tfrac{30}{360} = 0{,}083333, \qquad \sigma_1 = 26\% \ (= 0{,}26).$$

Os fatores de desconto são obtidos a partir da curva zero-cupão (29/12/2023) via

$$P(t_0, T) = e^{-R(t_0,T)\,\tau(T)}, \qquad \tau(T) = \frac{T - t_0}{360}.$$

Interpolando linearmente as zero yields entre 3M e 6M:

$$\tau(t_1) = \frac{74}{360} = 0{,}20556, \quad \tau(t_2) = \frac{105}{360} = 0{,}29167,$$

$$R(t_0,t_1) \approx 3{,}78\%, \qquad R(t_0,t_2) \approx 3{,}74\%,$$

$$P(t_0,t_1) = e^{-0{,}0378\times 0{,}20556} \approx 0{,}99224, \qquad P(t_0,t_2) = e^{-0{,}0374\times 0{,}29167} \approx 0{,}98917.$$

A taxa *forward* mensal L_1 resulta da condição de não-arbitragem:

$$1+\delta_1 L_1 = \frac{P(t_0,t_1)}{P(t_0,t_2)} \quad \Rightarrow \quad L_1 = \frac{1}{\delta_1}\left(\frac{P(t_0,t_1)}{P(t_0,t_2)} - 1\right) = \frac{1}{0{,}083333}\big(1{,}00311-1\big) \approx 0{,}0364 \ (= 3{,}64\%).$$

O tempo até ao início do período é

$$T_1 = \frac{t_1 - t_0}{360} = \frac{74}{360} = 0{,}20556,$$

e o desvio-padrão no horizonte T_1:

$$\sigma_1\sqrt{T_1} = 0{,}26\,\sqrt{0{,}20556} \approx 0{,}1179.$$

Os argumentos da normal padrão:

$$\ln\!\left(\tfrac{L_1}{K}\right) = \ln\!\left(\tfrac{0{,}0364}{0{,}04}\right) = \ln(0{,}91) \approx -0{,}0943,$$

$$d_{1,1} = \frac{\ln(L_1/K) + \tfrac{1}{2}\sigma_1^2 T_1}{\sigma_1\sqrt{T_1}} = \frac{-0{,}0943 + 0{,}5\cdot 0{,}26^2\cdot 0{,}20556}{0{,}1179} \approx -0{,}741,$$

$$d_{2,1} = d_{1,1} - \sigma_1\sqrt{T_1} \approx -0{,}859.$$

Com Φ a CDF normal padrão:

$$\Phi(d_{1,1}) \approx 0{,}229, \qquad \Phi(d_{2,1}) \approx 0{,}196.$$

O multiplicador determinístico do caplet é

$$N_1\,\delta_1\,P(t_0,t_2) = 39\,631\,919{,}82 \times 0{,}083333 \times 0{,}98917 \approx 3\,268\,247 \text{ EUR}.$$

Logo, pelo modelo de Black (1976),

$$\text{Caplet}_1(t_0) = N_1\,\delta_1\,P(t_0,t_2)\left(L_1\,\Phi(d_{1,1}) - K\,\Phi(d_{2,1})\right)$$

$$\approx 3\,268\,247 \times \big(0{,}0364 \times 0{,}229 - 0{,}04 \times 0{,}196\big) \approx 1\,764 \text{ EUR}.$$

O mesmo procedimento aplica-se a todos os períodos $i = 1, \ldots, 27$, variando apenas os inputs de cada linha: N_i (mapa de dívida), $P(t_0, t_{i+1})$ (desconto zero-coupon na maturidade do pagamento), L_i (forward do mês $[t_i, t_{i+1}]$), σ_i (volatilidade implícita interpolada) e a fração de ano δ_i do período.

A Tabela 4.3 apresenta a reconciliação parcial do valor do *interest rate cap*, incluindo os três primeiros e o último *caplet*. A versão integral, com os 27 períodos mensais entre março de 2024 e junho de 2026, encontra-se no Anexo C.

Tabela 4.3: Reconciliação parcial do valor do cap

i	Caplet_i	Soma acumulada
1	2 903,80	2 903,80
2	742,88	3 646,68
3	799,40	4 446,08
⋮	⋮	⋮
27	7,40	6 845,44

Assim, o valor justo do contrato de *cap* à data de 29 de dezembro de 2023 é de aproximadamente:

$$\text{Cap}(t_0) = 6\,845{,}44 \text{ EUR}$$

4.3 Sensibilidade à volatilidade implícita

A Figura 4.1 ilustra o impacto de variações de ±20% na superfície de volatilidades implícitas. Observa-se que o valor do cap aumenta de forma monotónica com a volatilidade, o que é consistente com a natureza opcional do instrumento: quanto maior a incerteza sobre a taxa Euribor futura, maior o valor económico da proteção.

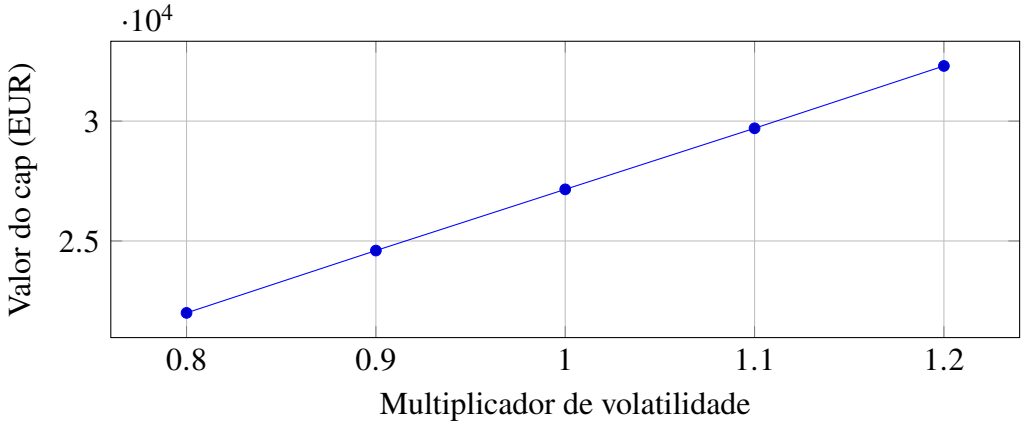


Figura 4.1: Sensibilidade do valor do cap à volatilidade implícita.

Capítulo 5

Conclusão

O presente estudo teve como objetivo determinar o *fair value* de um contrato de *interest rate cap* celebrado pela empresa ACN em 25 de maio de 2023, associado a um financiamento a taxa variável iniciado em 12 de junho de 2023. A avaliação foi efetuada à data de 29 de dezembro de 2023, seguindo uma metodologia clássica de decomposição do *cap* em *caplets* e utilizando a fórmula de Black (1976) sob a medida neutra ao risco.

Para alcançar este objetivo, foram construídos os principais elementos de mercado necessários à valorização, nomeadamente a curva de taxas zero-cupão, as taxas *forward* Euribor a 1 mês e a volatilidade implícita assumida constante de 26%. O contrato, com taxa de exercício de 4% e período de cobertura entre março de 2024 e junho de 2026, foi decomposto em 27 *caplets* mensais, avaliados individualmente e posteriormente agregados. O valor justo total obtido para o *cap* foi de aproximadamente 6 845 EUR.

A análise de sensibilidade realizada evidenciou o comportamento monotonicamente crescente do valor do contrato face à volatilidade implícita, refletindo a natureza opcional do instrumento: quanto maior a incerteza sobre a evolução futura da Euribor, maior o valor económico da proteção.

Os resultados obtidos reforçam a importância dos *interest rate caps* como instrumentos de cobertura de risco de taxa de juro, especialmente em contextos de volatilidade e de subida das taxas de referência. Simultaneamente, sublinham a sensibilidade do valor do contrato aos pressupostos de mercado, destacando a necessidade de uma calibração cuidada das curvas de desconto, das taxas *forward* e das volatilidades implícitas.

Bibliografia

Björk, T. (2009). *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, Oxford, 3rd edition.

Black, F. (1976). The pricing of commodity contracts. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2):167–179.

Brigo, D. and Mercurio, F. (2006). *Interest Rate Models – Theory and Practice*. Springer, Berlin, 2nd edition.

European Central Bank (2023). Euro area yield curves. Disponível em: https://www.ecb.europa.eu/stats/financial_markets_and_interest_rates/euro_area_yield_curves/html/index.sk.html.

Hagan, P. S., Kumar, D., Lesniewski, A., and Woodward, D. (2002). Managing smile risk. *Wilmott Magazine*, pages 84–108.

Hull, J. (2018). *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson, 10th edition.

Hull, J. and White, A. (1990). Pricing interest-rate derivative securities. *The Review of Financial Studies*, 3(4):573–592.

James, J. and Webber, N. (2000). *Interest Rate Modelling*. Wiley, Chichester.

Rebonato, R. (2002). *Modern Pricing of Interest-Rate Derivatives: The LIBOR Market Model and Beyond*. Princeton University Press, Princeton.

Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2):177–188.

Anexo A — Mapa do serviço da dívida

i	Data	Capital inicial (EUR)	Juros (EUR)	Amortização (EUR)	Capital final (EUR)
1	12/07/2023	50.000.000,00	243.450,00	1.271.550,00	48.728.450,00
2	12/08/2023	48.728.450,00	237.258,82	1.277.741,18	47.450.708,82
3	12/09/2023	47.450.708,82	231.037,50	1.283.962,50	46.166.746,32
4	12/10/2023	46.166.746,32	224.785,89	1.290.214,11	44.876.532,21
5	12/11/2023	44.876.532,21	218.503,84	1.296.496,16	43.580.036,05
6	12/12/2023	43.580.036,05	212.191,18	1.302.808,82	42.277.227,23
7	12/01/2024	42.277.227,23	205.847,76	1.309.152,24	40.968.075,00
8	12/02/2024	40.968.075,00	199.473,42	1.315.526,58	39.652.548,42
9	12/03/2024	39.652.548,42	193.067,99	1.321.932,01	38.330.616,41
10	12/04/2024	38.330.616,41	186.631,34	1.328.368,66	37.002.247,75
11	12/05/2024	37.002.247,75	180.163,28	1.334.836,72	35.667.411,03
12	12/06/2024	35.667.411,03	173.663,68	1.341.336,32	34.326.074,71
13	12/07/2024	34.326.074,71	167.132,36	1.347.867,64	32.978.207,07
14	12/08/2024	32.978.207,07	160.569,17	1.354.430,83	31.623.776,24
15	12/09/2024	31.623.776,24	153.973,93	1.361.026,07	30.262.750,17
16	12/10/2024	30.262.750,17	147.346,49	1.367.653,51	28.895.096,66
17	12/11/2024	28.895.096,66	140.686,68	1.374.313,32	27.520.783,34
18	12/12/2024	27.520.783,34	133.994,33	1.381.005,67	26.139.777,67
19	12/01/2025	26.139.777,67	127.269,28	1.387.730,72	24.752.046,95
20	12/02/2025	24.752.046,95	120.511,37	1.394.488,63	23.357.558,32
21	12/03/2025	23.357.558,32	113.720,42	1.401.279,58	21.956.278,74
22	12/04/2025	21.956.278,74	106.896,29	1.408.103,71	20.548.175,03
23	12/05/2025	20.548.175,03	100.038,81	1.414.961,19	19.133.213,84
24	12/06/2025	19.133.213,84	93.147,82	1.421.852,18	17.711.361,66
25	12/07/2025	17.711.361,66	86.223,17	1.428.776,83	16.282.584,83
26	12/08/2025	16.282.584,83	79.264,71	1.435.735,29	14.846.849,54
27	12/09/2025	14.846.849,54	72.272,27	1.442.727,73	13.404.121,81
28	12/10/2025	13.404.121,81	65.245,72	1.449.754,28	11.954.367,53
29	12/11/2025	11.954.367,53	58.184,88	1.456.815,12	10.497.552,41

Tabela 5.1: Mapa de serviço da dívida (método francês) – Parte II

30	12/12/2025	10.497.552,41	51.089,62	1.463.910,38	9.033.642,03
31	12/01/2026	9.033.642,03	43.959,78	1.471.040,22	7.562.601,81
32	12/02/2026	7.562.601,81	36.795,20	1.478.204,80	6.084.397,01
33	12/03/2026	6.084.397,01	29.595,74	1.485.404,26	4.598.992,75
34	12/04/2026	4.598.992,75	22.361,23	1.492.638,77	3.106.353,98
35	12/05/2026	3.106.353,98	15.091,52	1.499.908,48	1.606.445,50
36	12/06/2026	1.606.445,50	7.786,44	1.507.213,56	99.231,94

Anexo B — Inputs e valor por caplet (27 períodos)

Tabela 5.2: Inputs e valor por caplet — completo

i	t_i	t_{i+1}	N_i	L_i (%)	σ_i (%)	$P(t_0, t_{i+1})$	Caplet$_i$ (EUR)
1	12/03/2024	12/04/2024	39 631 919,82	3,7662	26,0	0,98915	2 903,80
2	12/04/2024	12/05/2024	38 307 351,68	3,3352	26,0	0,98641	742,88
3	12/05/2024	12/06/2024	36 976 334,00	3,2547	26,0	0,98374	799,40
4	12/06/2024	12/07/2024	35 638 835,37	2,9960	26,0	0,98129	378,19
5	12/07/2024	12/08/2024	34 294 824,23	2,9648	26,0	0,97887	469,08
6	12/08/2024	12/09/2024	32 944 268,88	2,7941	26,0	0,97660	307,27
7	12/09/2024	12/10/2024	31 587 137,45	2,5802	26,0	0,97450	156,63
8	12/10/2024	12/11/2024	30 223 397,93	2,5649	26,0	0,97242	195,05
9	12/11/2024	12/12/2024	28 853 018,12	2,3386	26,0	0,97053	86,55
10	12/12/2024	12/01/2025	27 475 965,71	2,3890	26,0	0,96860	142,86
11	12/01/2025	12/02/2025	26 092 208,20	2,4165	26,0	0,96666	198,40
12	12/02/2025	12/03/2025	24 701 712,95	2,0904	26,0	0,96498	52,15
13	12/03/2025	12/04/2025	23 304 447,14	2,2127	26,0	0,96320	113,71
14	12/04/2025	12/05/2025	21 900 377,81	2,0393	26,0	0,96157	59,35
15	12/05/2025	12/06/2025	20 489 471,84	2,0019	26,0	0,95997	58,08
16	12/06/2025	12/07/2025	19 071 695,93	1,8353	26,0	0,95850	28,60
17	12/07/2025	12/08/2025	17 647 016,63	1,7912	26,0	0,95707	26,16
18	12/08/2025	12/09/2025	16 215 400,33	1,6842	26,0	0,95573	16,46
19	12/09/2025	12/10/2025	14 776 813,25	1,5279	26,0	0,95451	7,13
20	12/10/2025	12/11/2025	13 331 221,45	1,4735	26,0	0,95334	5,68
21	12/11/2025	12/12/2025	11 878 590,83	1,3240	26,0	0,95229	2,16
22	12/12/2025	12/01/2026	10 418 887,10	1,5275	26,0	0,95108	9,83
23	12/01/2026	12/02/2026	8 952 075,84	1,7771	26,0	0,94968	37,16
24	12/02/2026	12/03/2026	7 478 122,42	1,5549	26,0	0,94845	11,99
25	12/03/2026	12/04/2026	5 996 992,08	1,6662	26,0	0,94713	19,58
26	12/04/2026	12/05/2026	4 508 649,87	1,5569	26,0	0,94590	9,89
27	12/05/2026	12/06/2026	3 013 060,67	1,5515	26,0	0,94468	7,40

Anexo C — Reconciliação completa do valor do cap

Tabela 5.3: Reconciliação do valor do cap — caplets e soma acumulada

i	Caplet$_i$	Soma acumulada (EUR)
1	2 903,80	2 903,80
2	742,88	3 646,68
3	799,40	4 446,08
4	378,19	4 824,27
5	469,08	5 293,35
6	307,27	5 600,62
7	156,63	5 757,25
8	195,05	5 952,30
9	86,55	6 038,85
10	142,86	6 181,71
11	198,40	6 380,11
12	52,15	6 432,26
13	113,71	6 545,97
14	59,35	6 605,32
15	58,08	6 663,40
16	28,60	6 692,00
17	26,16	6 718,16
18	16,46	6 734,62
19	7,13	6 741,75
20	5,68	6 747,43
21	2,16	6 749,59
22	9,83	6 759,42
23	37,16	6 796,58
24	11,99	6 808,57
25	19,58	6 828,15
26	9,89	6 838,04
27	7,40	6 845,44