Instituto Universitário de Lisboa

Departamento de Matemática

Exercícios de primitivas, integrais e áreas

1 Primitivação

1.1 Exercícios de primitivas imediatas e quase-imediatas

1. Calcule uma família de primitivas de cada uma das seguintes funções, usando as fórmulas indicadas:

   (a) $f(x) = x^2 + x - 2, \quad \left(Pk = kx + c\,, \quad Pu^n u' = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c, n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\right)$

   (b) $f\,(x) = \sqrt{x}, \quad \left(Pu^n u' = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c, n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\right)$

   (c) $f(x) = \dfrac{2}{x}, \quad \left(P\dfrac{u'}{u} = \ln|u| + c\right)$

   (d) $f\,(x) = e^{-3x+1}, \quad (Pe^u u' = e^u + c)$

   (e) $f(x) = 10^x, \quad \left(Pa^u u' = \dfrac{a^u}{\ln a} + c\right)$

   (f) $f\,(x) = \sin(2x - 3), \quad (Pu' \sin u = -\cos u + c)$

   (g) $f(x) = \cos(5x), \quad (Pu' \cos u = \sin u + c)$

   (h) $f(x) = \sec^2\left(\dfrac{x}{2}\right), \quad \left(Pu' \sec^2 u = \tan u + c, \quad \sec u = \dfrac{1}{\cos u}\right)$

   (i) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2(2x)}, \quad \left(Pu' \csc^2 u = -\cot u + c, \quad \csc u = \dfrac{1}{\sin u}\right)$

   (j) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}, \quad \left(P\dfrac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + c\right)$

   (k) $f(x) = \dfrac{1}{9+4x^2}, \quad \left(P\dfrac{u'}{a^2+u^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{u}{a} + c\right)$

2. Calcule uma família de primitivas de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}}$

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$

(c) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-3x+8}$

(d) $f(x) = \left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2$

(e) $f(x) = 3^x e^x$

(f) $f(x) = e^x \sin e^x$

(g) $f(x) = \dfrac{7e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

(h) $f(x) = e^{x^2+4x+3}(x+2)$

(i) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

(j) $f(x) = \dfrac{1}{1+9x^2}$

(k) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$

(l) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-9x^2}}$

(m) $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}$

(n) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2+9}$

(o) $f(x) = \cos^2(x)$

(p) $f(x) = \cot(2x)$

(q) $f(x) = \sin(3x)\cos^4(3x)$

(r) $f(x) = \dfrac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}$

(s) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

(t) $f(x) = \tan^2 x$

(u) $f(x) = \dfrac{(\arctan x)^2}{1+x^2}$

(v) $f(x) = \tan x \sec^2 x$

(w) $f(x) = \dfrac{\cot x}{\sin^2 x}$

(x) $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

(y) $f(x) = \sin^3 x \cos^4 x$

1.2 Exercícios de primitivação de funções racionais

1. Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções racionais, sujeita à condição inicial indicada:

   (a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x-1)(x-2)}$, $(Pf(0) = \ln(8))$

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{4x^2-9}$, $(Pf(0) = 0)$

   (c) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x^2-5x+2}$, $(Pf(0) = \ln(2))$

   (d) $f(x) = \dfrac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}$, $(Pf(0) = 0)$

   (e) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x(x-1)^2}$, $(Pf(2) = -2)$

   (f) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)^3}$, $(Pf(0) = 0)$

1.3 Exercícios de primitivação por partes

1. Usando a fórmula:
$$P(u'v) = uv - P(v'u)$$
calcule uma família de primitivas de cada uma das seguintes funções:

   (a) $f(x) = x\ln(x)$, (considere $u' = x$ e $v = \ln(x)$).

   (b) $f(x) = (x+1)\sin(x)$, (considere $u' = \sin(x)$ e $v = x+1$).

   (c) $f(x) = xe^{2x}$, (considere $u' = e^{2x}$ e $v = x$).

   (d) $f(x) = \ln(x)$, (considere $u' = 1$ e $v = \ln(x)$).

   (e) $f(x) = \sin(\ln(x))$, (considere $u' = 1$ e $\sin(\ln(x))$).

2. Calcule uma família de primitivas de cada uma das seguintes funções:

   (a) $f(x) = x\sin(2x)$

   (b) $f(x) = xe^{-x}$

   (c) $f(x) = x^n \ln x$

   (d) $f(x) = \arctan\sqrt{x}$

   (e) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^3}$

   (f) $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$

   (g) $f(x) = \ln^2 x$

   (h) $f(x) = e^x \sin x$

   (i) $f(x) = \dfrac{x\cos x}{\sin^2 x}$

   (j) $f(x) = x^2\cos x$

1.4 Exercícios de primitivação por substituição

1. Calcule uma família de primitivas de cada uma das seguintes funções, usando a substituição indicada:

   (a) $y = e^{\sqrt{x}}$, (substituição: $x = t^2$)

   (b) $y = \dfrac{e^x}{e^x+1}$, (substituição: $x = \ln t$)

   (c) $y = \dfrac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}$, (substituição: $x = e^t$)

   (d) $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$, (substituição: $x = \sin(t)$)

   (e) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, (substituição: $x = \tan(t)$)

   (f) $y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}$, (substituição: $x = \sec(t)$)

2. Calcule uma família de primitivas de cada uma das seguintes funções:
   (a) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}$
   (b) $y = \dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$
   (c) $y = \dfrac{1}{1+e^x}$
   (d) $y = \sin\sqrt[3]{x}$
   (e) $y = \sqrt{e^x - 1}$
   (f) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$
   (g) $y = \dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}$
   (h) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{9-16x^2}}$
   (i) $y = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
   (j) $y = \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$

2 Integração

2.1 Exercícios sobre integral de Riemman

1. Considere a função $f(x) = 1 - x^2$ e o intervalo $[-1, 1]$. Para uma partição desse intervalo em 4 subintervalos, desenhe as somas de Riemann inferiores, superiores, à esquerda e à direita.

2. O objectivo deste exercício é o de verificar, usando somas de Riemann, que, para $b > 0$,

$$\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}\ .$$

   Para tal siga os seguintes passos:

   - Divida $[0, b]$ em n subintervalos

$$0 = \frac{0\times b}{n} < \frac{1\times b}{n} < \frac{2\times b}{n} < \cdots < \frac{(n-1)\times b}{n} < \frac{n\times b}{n} = b\ .$$

   - Considere somas à direita $c_i = x_{i+1}$ e verifique que, para essa escolha,

$$S_n = \frac{b^2}{n^2}\,(1+2+3+\cdots+n) = \frac{b^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\ .$$

   - Deduza a *Gauss' baby formula*

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}\ ,$$

e conclua.

3. Considere a função $f(x) = x^3$, o intervalo $[0, 1]$ e a partição desse intervalo em n subintervalos regulares:

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{(n-1)}{n} < 1 \,.$$

   (a) Verifique que as correspondentes somas inferiores e superiores satisfazem:

$$\underline{S_n} = \frac{1}{n^4}\left(1 + 2^3 + 3^3 \cdots + (n-1)^3\right)$$

   e

$$\overline{S_n} = \frac{1}{n^4}\left(1 + 2^3 + 3^3 \cdots + (n-1)^3 + n^3\right) \,.$$

   (b) Mostre que

$$\lim(\overline{S_n} - \underline{S_n}) = 0 \,.$$

   O que nos diz o limite anteior relativamente à integrabilidade de f?

   (c) Usando as fórmulas anteriores e uma máquina de calcular, determine valores aproximados por defeito e por excesso do

$$\int_0^1 x^3 dx \,,$$

   para $n = 2, 4$ e 6.

4. Seja $f : [-2, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se} \quad -2 \leq x < -1 \,, \\ x & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \,, \\ -2x + 3 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \,. \end{cases}$$

   Usando a interpretação geométrica do integral, calcule

$$\int_{-2}^1 f(x) dx \,.$$

2.2 Exercícios sobre integral definido

1. Calcule os seguintes integrais usando a regra de Barrow e, em cada caso, determine o valor médio da função integranda no intervalo de integração:

(a) $\int_1^2 \left(x^2+2x+1\right) dx$

(b) $\int_1^e \dfrac{1}{x} dx$

(c) $\int_2^3 \dfrac{x+1}{x-1} dx$

(d) $\int_1^e \dfrac{\sin(\ln x)}{x} dx$

(e) $\int_3^4 \dfrac{1}{x^2-3x+2} dx$

(f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

(g) $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$

(h) $\int_1^4 \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} dx$

(i) $\int_4^9 \dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx$

(j) $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$

2. Usando a monotonia do integral, verifique as seguintes estimativas:

   (a) $\int_0^5 e^{-x^2} < 5$.

   (b) $2\, e^{-16} < \int_2^4 e^{-x^2} < 2\, e^{-4}$.

   (c) $\left|\int_1^e \frac{\sin x}{x}\right| < 1$.

3. (a) Mostre que se $f(0) = g(0)$ e $f'(x) \leq g'(x)$, $\forall x > 0$, então $f(x) \leq g(x)$, $\forall x > 0$.

   (b) Interprete o resultado anterior em termos de posições e velocidades.

4. Uma função diz-se par sse $f(-x) = f(x)$, $\forall x$. Mostre que se f é par e integrável, em $[-a, a]$, então

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx \ .$$

   Interprete o resultado anterior geometricamente.

5. Uma função diz-se impar sse $f(-x) = -f(x)$, $\forall x$. Mostre que se f é impar e integrável, em $[-a, a]$ então

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \ .$$

   Interprete o resultado anterior geometricamente.

6. Usando somas de Riemann conclua que o comprimento duma curva $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, com f diferenciável, é dado por

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2} dx \ .$$

   Usando a fórmula anterior determine o comprimento das seguintes curvas:

   (a) $y = -2x + 3$, $-1 < x < 3$.

(b) $y = x^{3/2}$, $0 < x < 1$.

(c) $y = \frac{x^2}{2}$, $0 < x < 1/2$.

7. Suponha que, ao longo dum ano, desejamos fazer empréstimos diários a uma taxa instântanea (velocidade) de $f = f(t)$ (euros/ano), $t \in]0, 1]$. Temos portanto que a

$$\text{quantidade emprestada no dia } i \approx f(i/365)\Delta t = f(i/365)\frac{1}{365} \ .$$

(a) Mostre que o valor total do empréstimo pode ser aproximado por

$$\int_0^1 f(t)dt \ .$$

(b) Sendo r a taxa de juro anual, de capitalização contínua, imposta pelo banco e assumindo que o plano de empréstimos vence no final do ano, mostre que o valor em dívida, no final do ano, é aproximado por

$$\int_0^1 f(t)e^{r(1-t)}dt \ .$$

8. Seja $p = p(t)$ (euros/ano), $t \in]0, T]$ (anos), a taxa de pagamentos a efectuar durante o período em causa. Mostre que o valor do depósito a efectuar, numa conta de capitalização contínua a uma taxa de juro anual r, para cobrir todos os pagamentos, é dado por

$$\int_0^T p(t)e^{-rt}dt.$$

2.3 Exercícios sobre integral indefinido

1. Calcule as derivadas dos seguintes integrais indefinidos, usando a fórmula:

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f(v(x)).v'(x) - f(u(x)).u'(x).$$

(a) $\dfrac{d}{dx}\int_5^{x^3} \cos t dt$

(b) $\dfrac{d}{dx}\int_4^{x} t^2 dt$

(c) $\dfrac{d}{dx}\int_1^{5x} e^{t^2} dt$

2. Calcule as derivadas dos seguintes integrais indefinidos

   (a) $\frac{d}{dx}\int_5^{3x}\left(t^2+5t+7\right)dt$

   (b) $\frac{d}{dx}\int_{2x}^{x^3}\frac{t^2+1}{t}dt$

   (c) $\frac{d}{dx}\int_3^{4x-1}\frac{t^3+1}{t^2-7}dt$

   (d) $\frac{d}{dx}\int_{5-x}^{2x^3}tdt$

   (e) $\frac{d}{dx}\int_{4x}^{x^2}\sin t^2dt$

   (f) $\frac{d}{dx}\int_{2x}^{x^2}t^3dt$

3. Determine e classifique os pontos críticos da função:

$$f(x,y)=\int_0^x(6t-t^2)dt+\int_0^y(t^3-3t^2)dt.$$

4. Considere a função:

$$f(x,y)=\int_0^x\sin^2 tdt+\int_0^y t^2dt.$$

   (a) Calcule os pontos críticos de f.

   (b) Classifique os pontos críticos de f.

2.4 Exercícios de áreas

1. Calcule as áreas definidas por:

   (a) $0\le y\le 2x,\ \ x\le 4$

   (b) $0\le y\le\sqrt{x-1},\ \ x\le 5$

   (c) $0\le y\le x^2,\ \ 2\le x\le 4$

   (d) $x^2\le y\le 3x$

   (e) $0\le y\le\ln x,\ \ x\le e$

   (f) $0\le y\le e^{2x},\ \ 0\le x\le 1$

   (g) $y\le\frac{1}{x},\ \ 0\le y\le x, x\le 4$

   (h) $y=x^3,\ \ y=8,\ \ x=0$

   (i) $y=x^2-4,\ \ y=4-x^2$

   (j) $y^2=4x,\ \ x\le 2$

   (k) $x^2\le y\le\frac{1}{x},\ \ x\ge 0,\ \ y\le 2$

3 Soluções dos Exercícios Propostos

3.1 Primitivas imediatas e quase-imediatas

1. (a) $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x + c$

   (b) $\dfrac{2x\sqrt{x}}{3} + c$

   (c) $2\ln(x) + c$

   (d) $-\dfrac{e^{3x+1}}{3} + c$

   (e) $\dfrac{10^x}{\ln 10} + c$

   (f) $-\dfrac{\cos(2x-3)}{2} + c$

   (g) $\dfrac{\sin(5x)}{5} + c$

   (h) $2\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) + c$

   (i) $-\dfrac{\cot(2x)}{2} + c$

   (j) $\dfrac{1}{2}\arcsin 2x + c$

   (k) $\dfrac{1}{6}\arctan\dfrac{2}{3}x + c$

2. (a) $\dfrac{15}{2}x^{2/3} + c$

   (b) $\dfrac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + c$

   (c) $\ln\left|x^2 - 3x + 8\right| + c$

   (d) $x - \dfrac{1}{x} - 2\ln|x| + c$

   (e) $\dfrac{3^x e^x}{\ln 3 + 1} + c$

   (f) $-\cos(e^x) + c$

   (g) $14e^{\sqrt{x}} + c$

   (h) $\dfrac{1}{2}e^{x^2+4x+3} + c$

   (i) $\ln|1 + e^x| + c$

(j) $\frac{1}{3}\arctan 3x + c$

(k) $\frac{1}{2}\arcsin 2x + c$

(l) $\frac{1}{3}\arcsin \frac{3x}{2} + c$

(m) $\arcsin x - \sqrt{1-x^2} + c$

(n) $\frac{3}{2}\ln\left|x^2+9\right| - \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + c$

(o) $\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + c$

(p) $\frac{1}{2}\ln\left|\sin(2x)\right| + c$

(q) $-\frac{1}{15}\cos^5(3x) + c$

(r) $\frac{1}{2}\tan x + \frac{1}{2}x + c$

(s) $\arcsin(\ln x) + c$

(t) $\tan(x) - x + c$

(u) $\frac{(\arctan x)^3}{3} + c$

(v) $\frac{1}{2}\tan^2 x + c$

(w) $-\frac{\cot^2 x}{2} + c$

(x) $2\sqrt{1+\sin^2 x} + c$

(y) $\frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + c$

3.2 Primitivação de funções racionais

1. (a) $\ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right|$

   (b) $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right|$

   (c) $\ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln\left|x-\frac{1}{2}\right| + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

   (d) $x + 3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| - 3\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

(e) $\ln|x| - \dfrac{2}{x-1} - \ln(2)$

(f) $-\dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x-1}$

3.3 Primitivação por partes

1. (a) $\dfrac{x^2}{2}\left(\ln x - \dfrac{1}{2}\right) + c$

   (b) $-(x+1)\cos x + \sin x + c$

   (c) $e^{2x}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\right) + c$

   (d) $x(\ln(x) - 1) + c$

   (e) $\dfrac{x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))}{2} + c$

2. (a) $\dfrac{1}{4}\sin 2x - \dfrac{1}{2}x\cos 2x + c$

   (b) $-e^{-x}(x+1) + c$

   (c) $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \dfrac{1}{n+1}\right) + c$

   (d) $x \arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x} + c$

   (e) $-\dfrac{1}{2x^2}\ln\left(x\sqrt{e}\right) + c$

   (f) $x\ln\left(x^2+1\right) - 2x + 2\arctan x + c$

   (g) $x\left(\ln^2 x - 2\ln x + 2\right) + c$

   (h) $\dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + c$

   (i) $-\dfrac{x}{\sin x} + \ln|\csc x - \cot x| + c$

   (j) $x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$

3.4 Primitivação por substituição

1. (a) $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right) + c$

   (b) $\ln(e^x + 1) + c)$

   (c) $\left(-\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\ln x\right)\sqrt{1 + \ln x} + c$

   (d) $-\arcsin x - \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c$

(e) $\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+c$

(f) $\dfrac{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}{3x^3}+c$

2. (a) $\dfrac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3}-\ln\left(\sqrt[4]{x^3}+1\right)\right)+c$

   (b) $2\sqrt{x+1}-2\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)+c$

   (c) $\ln\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)+c$

   (d) $-3\sqrt[3]{x^2}\cos\sqrt[3]{x}+6\sqrt[3]{x}\sin\sqrt[3]{x}+6\cos\sqrt[3]{x}+c$

   (e) $2\left(\sqrt{e^x-1}-\arctan\sqrt{e^x-1}\right)+c$

   (f) $\dfrac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}+c$

   (g) $-\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{4x}+c$

   (h) $\dfrac{9}{128}\left(\arcsin\dfrac{4x}{3}-\dfrac{4x\sqrt{9-16x^2}}{9}\right)+c$

   (i) $\arctan\sqrt{x^2-1}+c$

   (j) $2\arctan\sqrt{x}+c$

4 Integração

4.1 Exercícios sobre integral de Riemman

1.

2.

3.

4.

4.2 Integral definido

1. (a) $\dfrac{19}{3}$
   (b) 1
   (c) $1 + 2\ln 2$
   (d) $1 - \cos 1$
   (e) $\ln(4/3)$
   (f) $\dfrac{\pi}{2} - 1$
   (g) $\dfrac{e^{\pi} + 1}{2}$
   (h) $2 + \ln \dfrac{4}{9}$
   (i) $23/3$
   (j) $\ln(3/2)$
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.

4.3 Integral indefinido

1. (a) $3x^2 \cos(x^3)$
   (b) x^2
   (c) $5e^{25x^2}$
2. (a) $27x^2 + 45x + 21$
   (b) $\dfrac{3x^6 - 4x^2 + 2}{x}$

(c) $4\dfrac{(4x-1)^3+1}{(4x-1)^2-7}$

(d) $12x^5 - x + 5$

(e) $2x\sin x^4 - 4\sin\left(16x^2\right)$

(f) $2x^7 - 16x^3$

3. $(3,0)$ é um ponto de máximo local de f e $(3,2)$ é um ponto de sela.

4. (a) Os pontos críticos de f são $(k\pi, 0)$, $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{N}$.

   (b) $(k\pi, 0)$ são pontos de mínimo, $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0)$ são pontos de sela de f.

4.4 Áreas

1. (a) $A = 16$

   (b) $A = \dfrac{16}{3}$

   (c) $A = \dfrac{56}{3}$

   (d) $A = \dfrac{9}{2}$

   (e) $A = 1$

   (f) $A = \dfrac{e^2-1}{2}$

   (g) $A = \dfrac{1}{2} + \ln 4$

   (h) $A = 12$

   (i) $A = \dfrac{64}{3}$

   (j) $A = \left(16\sqrt{2}\right)/3$

   (k) $A = 2/3 - \ln(1/2)$