Instituto Universitário de Lisboa

Departamento de Matemática


# Exercícios de Extremos

# 1 Extremos Livres

1. Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$,

   (a) Qual a propriedade que $f(\boldsymbol{a})$ deve verificar para ser um máximo absoluto de $f$?

   (b) Qual a propriedade que $f(\boldsymbol{a})$ deve verificar para ser um máximo relativo de $f$?

2. Dada uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, para um ponto $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ encontre a direção $\boldsymbol{u}$ que torna a derivada direcional máxima $f'_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a})$ no ponto $\boldsymbol{a}$.

3. Esta pergunta pretende caracterizar uma propriedade necessária dos extremos relativos das funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

   (a) Comecemos por relembrar de álgebra linear que o produto interno de dois vetores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ é dado por

   $$\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v} = (u_1, \ldots, u_n)|(v_1, \ldots, v_n) = u_1v_1 + \ldots + u_nv_n$$

   . Dois vetores $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ dizem-se ortogonais quando $\boldsymbol{w}|\boldsymbol{h} = 0$. Qual o conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$ ortogonais ao vetor $(1, 1, 1)$?

   (b) Verifique que quando um vetor $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ é tal que $\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v} = 0$ para todo o $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$, então $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

   (c) A condição para $a$ ser um máximo relativo duma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável. Use as desigualdades obtidas na pergunta 1 para deduzir que

   - $\frac{g(a+\epsilon)-g(a)}{\epsilon} \leq 0$ para $\epsilon > 0$
   - $\frac{g(a+\epsilon)-g(a)}{\epsilon} \geq 0$ para $\epsilon < 0$

   conclua então que $h'(a) = 0$. Deduza analogamente esta condição para o caso de $a$ ser um mínimo relativo de $h$.

   (d) Suponha que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $f(x, y) = x^2 + y^2$. Comprove que $\boldsymbol{0}$ é um mínimo de $f$.

   (e) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a função $g(t) = \big(t, \sin(t)\big)$. Justifique porque razão $h = f \circ g$, função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, têm um mínimo em $t = 0$ e usando (c) conclua que $h'(0) = 0$.

   (f) Se a função $g$ da alínea anterior fosse $g(t) = t\boldsymbol{v} = (tv_1, tv_2)$, para um dado $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, verifique que podia tirar uma conclusão análoga.

(g) Usando o resultado de (f) e o teorema da função composta verifique que $\nabla f(\mathbf{0})|J_g(0) = 0$. Interprete.

(h) Conclua usando (b) que no ponto mínimo de $f$ se tem $\nabla f(\mathbf{0}) = 0$.

(i) * [1] Generalize o resultado da alínea anterior para qualquer função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável com um extremo relativo num ponto $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, concluindo que $\nabla f(\boldsymbol{a}) = 0$.

4. O estudo da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$ dá uma ideia da dificuldade em encontrar condições suficientes que garantam que um dado ponto crítico é um extremo.

   (a) Verifique que $(0, 0)$ é um ponto crítico de $f$.

   (b) Determine e classifique (quanto ao sinal) a matriz Hessiana de $f$ em $(0, 0)$ e numa vizinhança de $(0, 0)$. O que podemos concluir a partir das condições necessárias e suficientes discutidas na aula?

   (c) Mostre que $(0, 0)$ é um mínimo de $f$ ao longo de qualquer recta que passa na origem, i.e., que sendo $a, b \in \mathbb{R}$, com $a^2 + b^2 > 0$, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(t) = (at, bt)$, então $t = 0$ é um mínimo de $f \circ g$.

   (d) Verifique que, no entanto, $(0, 0)$ não é um mínimo de $f$.

5. Determine os extremos relativos das seguintes funções:

   (a) $f(x, y) = xy$

   (b) $f(x, y) = x^2 + y^2$

   (c) $f(x, y) = x^2 - y^2$

   (d) $f(x, y) = x + 2e^y - e^x - e^{2y}$

   (e) $f(x, y) = 2^y \log x^2$

   (f) $f(x, y) = x^3 + y^2 + 2xy - 8x$

   (g) $f(x, y) = -x^3 + 4xy - y^2$

   (h) $f(x, y) = -3y^2 + x^3 + 2xy$

   (i) $f(x, y) = \sin(xy)$

6. Calcule, caso existam, os extremos livres das seguintes funções:

   (a) $f(x, y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 36x - 54y + 90$

   (b) $f(x, y) = 2x^4 - 4x^2y^2 + 2y^4 + 34$

   (c) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 10x^2 - 10y^2 + 25$

   (d) $f(x, y) = 4x^2y - 4x^4 - y^2 + 1$

[1] Exercícios com * são exercícios considerados mais dificeis e que exigem mais tempo e dedicação para a sua resolução.

(e) $f(x,y,z) = x^2 + yz + 5xz - xy - x^3 + 2y$.

7. Diga, justificando, se a função $g(x,y) = e^{(x-y)}\left(x^2 - 2y^2\right)$ tem extremos locais.

8. Discuta, em função do parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$ a existência de extremos livres da seguinte função: $f(x,y) = xy(\alpha - x - y)$.

9. Um problema clássico da estatística é a partir dum conjunto de dados $\{(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)\}$ sobre duas variáveis $x$ e $y$, encontrar a recta $y(x) = a + bx$ que melhor resuma a relação observada entre as variáveis. Para definir esta relação é suposto uma das variáveis determinar o valor da outra, à primeira chama-se de variável independente e a segunda dependente. No caso em que $y(x) = a + bx$, $y$ é a variável dependente e $x$ independente. Um dos métodos mais comum para encontrar esta relação é o método dos *mínimos quadrados*, que minimiza a distância entre os valores realmente observados para a variável dependente $y_i$ e os valores estimados pela recta $\hat{y}_i = a + bx_i$. Deste modo os parâmetros que definem a reta são encontrados resolvendo o seguinte problema

$$min_{a,b} \sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (a + bx_i)\big)^2 \tag{1}$$

   (a) Para os dados $\{(1,1),(3,3),(2,1)\}$ encontre a recta dos mínimos quadrados.

   (b) * Encontre a expressão de $a$ e $b$ da recta dos mínimos quadrados para uma amostra abstrata $\{(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)\}$.

## 2 Extremos Condicionados

1. Pretendemos determinar quais das seguintes funções têm extremos no domínio definido. Deve sempre que possível usar o Teorema de Weierstrass dos valores extremos. Nos casos em que conclua pela inexistência de algum dos extremos identifique qual a(s) hipótese(s) deste teorema que falha(m).

   (a) $w : \{(x,y) : 0 \leq x + y \leq 1, x, y \geq 0\} \to \mathbb{R}$, $w(x,y) = xy$

   (b) $g : (1,2] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x$

   (c) $f : (0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{y}{x}$

   (d) $h : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{se } xy > 0 \\ x/2 & \text{if } xy = 0. \end{cases}$

(e) $w : \{(x, y) : 0 \leq x + y \leq 1\} \to \mathbb{R}$, $w(x, y) = xy$

(f) $z : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $z(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1/x & \text{if } 1 < x \leq 2. \end{cases}$

2. Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e um conjunto de pontos $S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : g(\boldsymbol{x}) = 0\}$ com $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. O que se entende por $f(\boldsymbol{a})$, para $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, ser um máximo relativo ou absoluto de $f$ condicionado a $S$.

3. Para encontrar os pontos extremos de $f(x, y) = x + y$ sujeitos à restrição $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ proceda da seguinte forma:

   (a) Comece por representar graficamente o círculo com os pontos que respeitam a restrição $g(x, y) = 0$ e a curva de nível $f(x, y) = 1$. Deduza em que sentido se deve deslocar a curva de nível de modo a aumentar/diminuir o valor de $f(x, y)$. Encontre os pontos extremos condicionados.

   (b) Use a Lagrangeana para encontrar os pontos críticos e a Hessiana orlada para analisar se são pontos extremos.

4. Determine, graficamente e através do uso da Lagrangeana, os extremos das seguintes funções:

   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4$, sujeita à condição $x + y = 3$.

   (b) $f(x, y) = 4x^2 + y^2 \;- 4xy$, sujeitos à condição $2y - x = 3$.

   (c) $f(x, y) = x^2y^2$, sujeitos à condição $x + y = 20$.

   (d) $f(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2$. restringindo o seu domínio aos pares ordenados $\{(x, y) : y = 2x + 1\}$.

   (e) $f(x, y) = x + y$ sujeita à condição $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$.

   (f) $f(x, y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$ sujeita à condição $xy + 1 = 0$.

5. (a) Uma empresa necessita de duas matérias primas $x$ e $y$. para a produção dum bem. A quantidade produzida deste bem é determinada pela seguinte função de produção $f(x, y) = xy$. A empresa detém 6 u.m para investir em matérias primas, e o custo de cada unidade de $x$ é 1 u.m. e de $y$ é de 2 u.m. Formule o problema da empresa de modo a encontrar a produção máxima. Resolva-o.

   (b) Suponha agora que a empresa tem $\kappa$ u.m. para investir em matérias primas. Resolva o novo problema da empresa, encontrando os valores de produção óptimos de $x$ e $y$ em função de $\kappa$, $x(\kappa)$ e $y(\kappa)$.

(c) Defina o valor máximo a produzir como função da quantidade disponível para investir em matéria prima, *i.e.* $f(\kappa) = f(x(\kappa), y(\kappa))$.

(d) Calcule a variação na produção óptima causada pela variação de $\kappa$, $\frac{\partial f}{\partial \kappa}$. Compare a alteração com o multiplicador de Lagrange da alínea anterior.

(e) Qual o preço mínimo que a empresa estaria disposta a receber pelo produto por si produzido para investir uma u.m. extra?

6. Um agente económico tem uma função de utilidade dada pela seguinte expressão $U(x, y) = (x + 2)(y + 1)$ onde $x$ e $y$ são dois bens por si consumidos. Os preços destes bens são $P_x$, $P_y$ e o rendimento disponível é $M$.

   (a) Escreva a restrição orçamental deste agente em função de $P_x$, $P_y$ e $M$.

   (b) Justifique porque razão a restrição orçamental vai estar saturada.

   (c) Escreva a Lagrangeana que permite encontrar a solução óptima do consumo.

   (d) Encontre os valores óptimos de $x$, $y$ e $\lambda$.

   (e) Verifique se a condição de segunda ordem é satisfeita.

   (f) Verifique o que acontece ao consumo de $y$ quando varia o preço de $x$.

7. Uma fábrica produz dois tipos de máquinas em quantidades $x$ e $y$. A função de custo-conjunto é dada pela função $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$. Para minimizar o custo, quantas máquinas dos dois tipos devem ser produzidas, se se pretender produzir um total de oito máquinas?

8. Seja $Q = 5x_1x_2$ (em toneladas) a função de produção de certo bem e $x_1$,$x_2$ os factores que entram na sua produção. Tomando para preço dos factores $p_1 = 2$, $p_2 = 4$(em milhares de euros), respectivamente, e pretendendo atingir o nível de produção $Q = 40$, calcule o custo mínimo associado a este nível de produção e os níveis dos factores necessários.

9. Encontre os extremos de:

   (a) $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$ sujeito a $2x + 3y + 5z = 24$

   (b) $f(x, y, z) = z$ sujeito a $x^2 + y^2 + z = 5$ e $x + y + z = 1$.

10. Qual o ponto do plano de $\mathbb{R}^3$ definido pela equação $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$ que está à distância mínima de $(-1, 0, 1)$?

11. Uma empresa tem uma função de produção $f(x, y, z) = 1000x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$, um orçamento de 1600 € e pode comprar cada unidade de $x$, $y$ e $z$ ao preço de 80 €, 10 € e 20 €. Qual a combinação de inputs que maximizam a produção? Se o preço do output for de 2€ por unidade é vantajoso para a empresa aumentar o investimento em inputs?

12. Calcule os extremos da função $f(x, y, z) = 2x^2 + y + z$ sujeita à condição: $\begin{cases} x + y + z = 1/4 \\ x - 2y = 3/4 \end{cases}$

13. Encontre o máximo da função $2\ln x + \ln y + \ln z$ sob a condição $x + y + z = 10$. Estime a alteração do valor óptimo quando se altera o termo independente para 11.

14. Como deve um agente económico dividir as suas poupanças em 3 tipos de possibilidades distintas que lhe garantem um retorno de 10 %, 10% e 15%, de modo a minimizar o risco mas mantendo um ganho médio de 12%. Se $x$,$y$ e $z$ forem as frações investidas no investimento 1, 2 e 3, respectivamente, com $x + y + z = 1$ a variância do retorno é $400x^2 + 800y^2 + 200xy + 1600z^2 + 400yz$. Assim sendo o problema do investidor é

$$\begin{aligned} \min\ & 400x^2 + 800y^2 + 200xy + 1600z^2 + 400yz \\ \text{s.a}\ & x + y + 1.5z = 1.2 \\ & x + y + z = 1 \end{aligned}$$

Usando a Lagrangeana encontre a solução óptima deste problema. Interprete os multiplicadores de Lagrange obtidos.

# 3 Programação Linear

1. Resolva graficamente os seguintes problemas de Programação Linear:

(a)
$$\begin{aligned} \text{Max Z} =\ & 4x + 3.5y \\ \text{s.a}\quad & x + y \leq 5 \\ & x \leq 3 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \text{Max Z} =\ & 7x + 3y \\ \text{s.a}\quad & 2x + 5y \geq 20 \\ & x + y \leq 8 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} \text{Max Z} =\ & 2x + 3y \\ \text{s.a}\quad & x + 2y \leq 2 \\ & 6x + 4y \geq 24 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \text{Max Z} = &6x + 5y \\ \text{s.a} \quad &5x + 6y \leq 40 \\ &12x + 9y \leq 144 \\ &x = 4y \\ &x, y \geq 0 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} \text{Max Z} = &40x + 30y \\ \text{s.a} \quad &x \leq 16 \\ &y \leq 8 \\ &x + 2y \leq 24 \\ &x, y \geq 0 \end{aligned}$$

2. Recorrendo ao Método do Simplex, resolva os problemas de Programação Linear 1$a$) e 1$e$).

3. Considere o conjunto de soluções admissíveis definido pelas seguintes restrições:

$$\begin{aligned} &2x - y \geq -2 \\ &x + 2y \leq 8 \\ &x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Para esse conjunto, determine graficamente:

Max Z= $y$ Min Z=$2x - 2y$ Max Z= $2x - 2y$

4. (P1)

$$\begin{aligned} \text{Max Z} = &20x_1 + 6x_2 + 8x_3 \\ \text{s.a} \quad &8x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 200 \\ &4x_1 + 3x_2 \leq 150 \\ &x_3 \leq 20 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(P2)

$$\begin{aligned} \text{Min Z} = &2x_1 - 3x_2 - 4x_3 \\ \text{s.a} \quad &x_1 + 5x_2 - 3x_3 \leq 15 \\ &x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ &5x_1 - 6x_2 + 4x_3 \leq 10 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) Resolva os problemas de Programação Linear recorrendo ao Método do Simplex:

(b) Identifique e interprete o valor os multiplicadores de Lagrange/preço sombra.

5. Considere os seguintes problemas de Programação Linear:

(P1)

$$
\begin{aligned}
\text{Max Z} =& 2x_1 + 4x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
& x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

(P2)

$$
\begin{aligned}
\text{Max Z} =& 3x_1 + 7x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 - x_2 \geq 0 \\
& -3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

(P3)

$$
\begin{aligned}
\text{Max Z} =& x_1 + x_2 \\
\text{s.a} \quad & 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\
& 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\
& x_1 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

(a) Resolva os problemas P1, P2 e P3.

(b) Identifique o tipo de solução obtida para cada um dos problemas. Justifique.

(c) Para os problemas com soluções óptimas múltiplas, apresente outra solução óptima.

6. Uma firma produz e comercializa dois tipos de alcatifa. Na produção, são utilizadas duas máquinas, A e B, que funcionam 12 e 14 horas por dia, respectivamente. Para fabricar 100 m2 do primeiro tipo de alcatifa, são necessárias 3 horas de trabalho na máquina $A$ e 7 horas na máquina $B$. A mesma quantidade de alcatifa do tipo 2 requer 4 horas e 2 horas, respectivamente nas máquinas $A$ e $B$. Sabe-se ainda que o lucro obtido com a produção de $100m^2$ do primeiro tipo de alcatifa é de 4 $u.m.$ e que o correspondente valor para o tipo 2 é de $3u.m.$ Qual deve ser o plano diário de produção de alcatifas, de modo a garantir um lucro máximo? Qual a utilização diária das máquinas? Formule o problema, resolva-o e interprete a solução obtida.

7. Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$
\begin{aligned}
\text{Max Z} =& 7x + 3y \\
\text{s.a} \quad & 2x + y \leq 10 \\
& 8x + y \leq 20 \\
& 3x - y \leq 9/2 \\
& x, y \geq 0
\end{aligned}
$$

(a) Resolva-o graficamente.

(b) Determine o intervalo de variação para o coeficiente de x na função objectivo (c1), de modo a que o ponto óptimo se mantenha.

(c) Determine o intervalo de variação para o coeficiente de y na função objectivo (c2), de modo a que o ponto óptimo se mantenha.

(d) Determine as variações possíveis para os termos independentes das restrições, de modo a que a base óptima se mantenha.

8. Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\begin{aligned} \text{Max Z} = & x_1 + x_2 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & 5x_1 + 4x_2 \leq 20 \\ & 4x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

(a) Resolva-o graficamente.

(b) Efectue a análise de sensibilidade de $x_1$ na F.O. e do termo independente associado à primeira restrição.

# 4 Soluções dos Exercícios Propostos

## 4.1 Extremos Livres

1.

2.

3.

4.

5. Temos os seguintes pontos de extremo:

   (a) $\bar{\mathbf{0}}$ ponto de sela

   (b) $\bar{\mathbf{0}}$ mínimo.

   (c) $\bar{\mathbf{0}}$ é ponto de sela.

   (d) $\bar{\mathbf{0}}$ é máximo.

   (e) A função não tem extremos relativos.

   (f) $(2,-2)$ mínimo e $(-4/3, 4/3)$ é ponto de sela.

   (g) ${}^{8}/_{3}\,(1,2)$ máximo e $\mathbf{0}$ é ponto de sela.

   (h) $-{}^{2}/_{9}\left(1,3^{-1}\right)$ máximo e $\mathbf{0}$ é ponto de sela.

   (i) Temos que $\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{y}, y\right)$, $y \in ]-\infty,-1\,[\cup]\,1,+\infty[$ representa uma família de pontos de máximo e $\left(\dfrac{-\frac{\pi}{2}+k\pi}{y}, y\right)$, $y \in ]-\infty,-1\,[\cup]\,1,+\infty[$ representa uma família de pontos de mínimo.

6. Temos as seguintes famílias de extremos:

   (a) $\left(\frac{3y-9}{2}, y\right)$, $y \in \mathbb{R}$ família de pontos de mínimo situados na recta de equação $2x-3y+9=0$ (função sempre positiva)

   (b) $(\pm y, y)$, $y \in \mathbb{R}$ família de pontos de mínimo situados nas rectas $x = \pm y$

   (c) $\left(\pm\sqrt{5-y^2}, y\right)$, $y \in \,]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$ família de pontos de mínimo situados na circunferência de equação $x^2+y^2=5$

(d) $\left(x, 2x^2\right)$, $x \in \mathbb{R}$ família de pontos de máximo situados na parábola de equação $y = 2x^2$.

(e) $\left(-2-\sqrt{2/3}, -10+5\sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3}\right)$ e $\left(-2+\sqrt{2/3}, 10-5\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}\right)$ pontos de sela.

7. $(2,-4)$ é máximo e $\mathbf{0}$ é um ponto de sela.

8. $(0,0), (\alpha,0), (0,\alpha)$ não são máximos nem mínimos. $(\alpha/3, \alpha/3)$ é mínimo se $\alpha < 0$, é um máximo quando $\alpha > 0$.

9.

## 4.2 Extremos Condicionados

1. (a) A função $w$ tem máximo e mínimo pelo teorema de Weirstrass.

   (b) A função $g$ tem máximo mas não tem mínimo. O domínio da função $g$, $D_g$ não é fechado.

   (c) A função tem mínimo mas não tem máximo. $D_f$ não é fechado, (mas $f$ é contínua em $D_f$).

   (d) A função $h$ tem máximo e mínimo. $h$ não é contínua.

   (e) A função tem máximo, mas não tem mínimo. $D_w$ é ilimitado.

   (f) A função tem máximo e mínimo pelo teorema de Weirstrass.

2.

3. $(x,y) = 2^{\frac{1}{2}}(1,1)$ é máximo e $(x,y) = -2^{\frac{1}{2}}(1,1)$ é mínimo

4. (a) $(3/2, 3/2)$ é um mínimo condicionado

   (b) $(1,2)$ é um mínimo condicionado.

   (c) $(10,10)$ máximo condicionado, $(0,20)$ e $(20,0)$ mínimos condicionados

   (d) $(2/3, -1/3)$ é um mínimo condicionado

   (e) $\sqrt{2/3}\,(-1,-2)$ mínimo condicionado e $\sqrt{2/3}\,(1,2)$ máximo condicionado

   (f) Mínimos condicionados em $(-1,1)$ e $(1,-1)$

5. (a)

$$\begin{aligned} \text{Max Z} = & xy \\ \text{s.a} \quad & x + 2y \leq 6 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

$(x,y)=3(1,\frac{1}{2})$

(b) $\big(x(\kappa),y(\kappa)\big)=\big(\frac{\kappa}{2},\frac{\kappa}{4}\big)$

(c) $f(\kappa)=f\big(x(\kappa),y(\kappa)\big)=x(\kappa)y(\kappa)=\frac{k^2}{8}$

(d) $\frac{\partial f(\kappa)}{\partial\kappa}=\frac{\kappa}{4}=\lambda$

(e) $p>\frac{1}{\lambda}$.

6. (a)

$$\begin{aligned}\text{Max Z} =&(x+2)(y+1)\\ \text{s.a} \quad & P_x x+P_y y\leq M\\ & x,y\geq 0\end{aligned}$$

(b) $\nabla f(x,y)\geq 0$

(c)

(d)

$$\begin{cases} x^* = & \frac{M-2P_x+P_y}{2P_x}\\ y^* = & \frac{M+2P_x-P_y}{2P_y}\\ \lambda^* = & \frac{M+2P_x+P_y}{2P_xP_y}\end{cases}$$

(e)

(f) $\frac{\partial x^*}{\partial P_y}=\frac{1}{2P_x}$

7.

8. Custo mínimo para $(x,y)=(5,3)$.

9. Mínimo em $(4,2)$ e o custo mínimo é 16000.

(a) $(2,1,1)$ é mínimo.

(b) $(-1,-1,3)$ mínimos e (2,2,3) máximo.

10. $(-{}^{15}/_{14},-{}^{1}/_{7},{}^{11}/_{4})$.

11. $(x,y,z;\lambda)=(10,40,20;200)$ máximo.

12. $(x,y,z;\lambda_1,\lambda_2)=(1/4,-1/4,1/4;1,0)$ é mínimo.

13. $(x,y,z;\lambda)=(4,2,2;32)$ máximo.

14. $(x,y,z)=(1/2,1/10,2/5)$ é mínimo.

## 4.3 Programação Linear

1. (a) Solução óptima: $x = 3$, $y = 2$; valor óptimo: $z = 19$.
   (b) Solução óptima: $x = 20/3$, $y = 4/3$; valor óptimo: $z = 152/3$.
   (c) Problema impossível.
   (d) Solução óptima: $x = 80/13$, $y = 20/13$; valor óptimo: $z = 580/13$.
   (e) Solução óptima: $x = 16$, $y = 4$; valor óptimo: $z = 760$.

2.

3. (a) Solução óptima: $x = 4/5$, $y = 18/5$; valor óptimo: $z = 18/5$.
   (b) Solução óptima: $x = 4/5$, $y = 18/5$; valor óptimo: $z = -28/5$.
   (c) Solução óptima: $x = 8$, $y = 0$; valor óptimo: $z = 16$.

4. (a) (P1) Solução óptima: $x_1 = 15/2$, $x_2 = 40$, $x_3 = 20$, $s_1 = s_2 = s_3 = 0$; valor óptimo: $z = 550$;
   (P2) Solução óptima: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$, $s_1 = 22$, $s_2 = s_3 = 0$; valor óptimo: $z = -19$
   (b)

5. (a) Soluções óptimas múltiplas; Solução óptima: $(x_1, x_2) = \alpha(0, 5/2) + (1 - \alpha)(3, 1)$ para $\alpha \in [0, 1]$
   (b) Problema impossível.
   (c) Solução ilimitada.

6.

$$\begin{aligned}
\text{Max Z} = & 4x + 3y \\
\text{s.a} \qquad & 3x + 4y \leq 12 \\
& 7x + 2y \leq 14 \\
& x, y \geq 0
\end{aligned}$$

Solução óptima: $x = 16/11$; $y = 21/11$; valor óptimo: $z = 127/11$ (ou seja, produção óptima diária de alcatifas dos tipos 1 e 2: $16/11m^2$ e $21/11m^2$ , respectivamente; lucro máximo diário: $127/11$ $u.m.$; diariamente, as horas disponíveis nas máquinas são consumidas na totalidade).

7. (a) Valor óptimo: $z = 95/3$; Solução óptima: $x = 5/3$ e $y = 20/3$;

(b) $c_1 \in [6, 24]$

(c) $c_2 \in [7/8, 7/2]$

(d) $b_1 \in [73/11, 20]$, $b_2 \in [10, 137/5]$ e $b_3 \in [-5/3, +\infty[$

8. (a) Valor óptimo: $z = 40/9$; Solução óptima: $x_1 = 20/9$ e $x_2 = 20/9$;

   (b) $c_1 \in [4/5, 5/4]$