Instituto Universitário de Lisboa

Departamento de Matemática

Exercícios de Equações Diferenciais Ordinárias

1 Exercícios

1.1 EDO de Variáveis Separáveis

Diz-se que uma equação diferencial ordinária (EDO) é de variáveis separáveis quando é da forma

$$g(y)y' = f(t) \tag{1}$$

De facto, se f e g forem contínuas, admitem primitivas F e G e o problema pode, pelo teorema da função composta, ser reescrito como $\frac{d}{dt}\left(G(y(t)\right) = \frac{dF}{dt}$. Primitivando ambos os lados obtemos a seguinte solução

$$G(y(t)) = F(t) + K \text{ para todo o } K \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

1. Considere a equação $y' = y^2$.
   (a) Supondo $y^2 \neq 0$ mostre que é uma EDO de variáveis separáveis identificando $g(y)$ e $f(t)$.
   (b) Resolva a equação que se obteve após usar diferenciais para rescrever a equação como $y^{-2}dy = dt$.

2. Resolva os problemas que se seguem.
   (a) $yy' = t$, $y(3) = -2$.
   (b) $y^2y' = t^2$.
   (c) $y' = 2e^{-y}t$.
   (d) $2yy' = -\sin t$, $y(0) = \sqrt{2}$.
   (e) $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$.
   (f) $xdx = (3 + \dfrac{1}{y})dy$.
   (g) $(1 + e^x)yy' = e^x$, $y(0) = 1$
   (h) $(x + 1)ydx - 2x(y + 5)dy = 0$.
   (i) $(x^2 - yx^2)dy + (y^2 + xy^2)dx = 0$, $y(1) = 1$

3. A evolução duma população p pode ser determinada por uma equação diferencial. No modelo de Verhulst (1836) a taxa de crecimento duma população $\kappa = \kappa(p)$ depende linearmente da população $\kappa = \kappa(p) = a - bp$ onde a e b são constantes

positivas. Isto leva à equação de variáveis separáveis $p' = (a - bp)p$. Vamos assumir que $a = 2$ e $b = 1$, i.e., que a evolução da nossa população é dada por

$$p' = (2 - p)p. \tag{3}$$

(a) Comece por verificar que $p \equiv 0$ e $p \equiv 2$ são soluções. Interprete-as.

(b) Mostre agora que $\int \frac{1}{(2-p)p} dp = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{p}{2-p} \right| + C$

(c) A partir da alínea anterior conclua que a solução geral de (3) satisfaz $|p| = |2 - p| e^{2(t+C)}$.

(d) Generalize o resultado anterior ao caso geral com a e b constantes positivas arbitrárias.

1.2 EDO Lineares de 1ª Ordem

EDO lineares são equações da forma

$$y' + a(t)y = b(t) \ . \tag{4}$$

com $a(t)$ e $b(t)$ funções contínuas num intervalo. A equacão (4) pode ser resolvida de forma explícita. Para tal convém notar que $(ye^{Pa})' = (y' + ay)e^{Pa}$, com a, b, e P a denotar , respetivamente, as funções $a(t)$ e $b(t)$ e primitiva. Portanto, multiplicando ambos os lados da equação (4) por e^{Pa}, obtemos

$$(ye^{Pa})' = be^{Pa} \Rightarrow ye^{Pa} = P\Big(be^{Pa}\Big),$$

e concluímos que a solução geral de (4) é dada por

$$y = Ce^{-Pa} + e^{-Pa} P\Big(be^{Pa}\Big). \tag{5}$$

4. Vamos resolver o PVI

$$\begin{cases} y' = t(-2y + 1) \\ y(0) = 3 \ . \end{cases} \tag{6}$$

(a) Escrevendo o problema na forma (4). Identifique a e b e calcule Pa e conclúa que $P\Big(be^{Pa}\Big) = \frac{e^{t^2}}{2} + k$

(b) Deduza que a solução do PVI é dada por $y(t) = \frac{1}{2}\left(5e^{-t^2} + 1\right)$

(c) Verifique que de facto a solução anterior resolve o PVI.

5. Considere-se um reservatório com capacidade para 500 litros. Inicialmente com 100 litros de água limpa. No instante $t = 0$, continua a encher-se o reservatório abrindo uma torneira com um caudal de 4 litros por segundo e 50% de poluentes. Simultaneamente, com auxílio de uma bomba, retira-se do reservatório 3 litros por segundo da mistura de água e poluentes assim obtida, que se assume ser sempre homogénea. O objectivo deste problema é encontrar a concentração de poluentes no reservatório quando este transborda.

   Seja $q(t) =$ quantidade de poluentes no instante t. O caudal de entrada de poluentes é $v_e = 2$ litros por segundo. O caudal de saída é $v_s = 3\frac{q(t)}{V(t)}$, onde $V(t) = 100 + t$ é o volume de mistura no tanque no instante t. Temos então $q' = v_e - v_s = 2 - \frac{3q}{100+t}$. Assim sendo, visto que o tanque atinge a sua capacidade máxima no instante $t = 400$ (segundos), a situação em causa é modelado pelo PVI

$$\begin{cases} q' + \frac{3}{100+t}\, q = 2 \ \ , \ t \in]0, 400[\\ q(0) = 0 \ , \end{cases}$$

   (a) Encontre a solução do PVI.

   (b) Qual a concentração de poluentes quando transborda?

6. Resolva os seguintes PVIs

   (a) $y' + \sin(t)y = 0$, $y(0) = 3/2$.

   (b) $y' = te^{-t} - y$, $y(1) = 2$.

   (c) $y + 4\int_0^t y = 5t + 3$.

   (d) $\sqrt{1 + x^2}\; y' + y = 2x$, $y(0) = 2$.

   (e) $\dfrac{1}{2}y' = y\tan(2x) + 1 + \sec(2x)$, $y(\pi/2) = 1$.

7. Resolva as seguintes EDO lineares:

   (a) $(x + 1)\, y' - y = 3x^4 + 3x^3$

   (b) $y' - \dfrac{y}{x} = x$.

   (c) $y^2 dx - (2xy + 3)\, dy = 0$.

   (d) $y' + y\cos(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x)$.

   (e) $y' = y\tan(x) + \cos(x)$.

8. Seja $p = p(t)$ (euros/ano), $t \in]0, T]$ (anos), a taxa de pagamentos a efectuar durante o período em causa. Mostre que o valor do depósito a efectuar, numa

conta de capitalização contínua a uma taxa de juro anual r, para cobrir todos os pagamentos, é dado por

$$\int_0^T p(t)e^{-rt}dt.$$

1.3 EDO de Bernoulli

Uma EDO de 1ª ordem diz-se *de Bernoulli* se pode ser escrita como

$$y' + A(x)y = B(x)y^n.$$

Efectuando a divisão por y^n, supondo que $y \neq 0$, a EDO é equivalente a $\frac{1}{y^n}y' + A(x)\frac{1}{y^{n-1}} = B(x)$. Pela mudança de variável $z = y^{1-n}$, uma EDO de Bernoulli pode ser escrita como a equação linear

$$\frac{1}{1-n}z' + A(x)z = B(x).$$

9. Considere a EDO de 1ª ordem seguinte

$$y' + xy = x^3y^3.$$

   (a) Divida a EDO por y^3.

   (b) Efectue a mudança de variável $y^{-2} = z$ e classifique a EDO obtida quanto ao tipo.

   (c) Resolva a EDO obtida.

10. Resolva as seguintes EDO de Bernoulli, fazendo primeiro a mudança de variável e depois resolvendo a EDO linear obtida:

    (a) $3y^2y' - ay^3 = x + 1$.

    (b) $yx' + x = x^2 \ln(y)$.

    (c) $xy' = y + 2xy^2$.

    (d) $y' \cos(x) + y \sin(x) + y^3 = 0$.

11. Resolva os seguintes PVI:

    (a) $y - \cos(x)y' = (1 - \sin(x))y^2 \cos(x)$, $y(0) = 1$.

    (b) $y'\left(x^2y^3 + xy\right) = 1$,$y(1) = 0$.

2 Soluções

2.1 EDO de Variáveis Separáveis

1. (a) $y^{-2}y' = 1$, $g(y) = y^{-2}$ e $f(t) = 1$.
   (b) $-y^{-1} = t + k$, para todo o $k \in \mathbb{R}$.

2. (a) $y^2 = t^2 - 5$.
   (b) $y^3 = t^3 + k$.
   (c) $e^y = t^2 + k$, para todo o $k \in \mathbb{R}$.
   (d) $y^2 = \cos(t) + 1$.
   (e) $\arctan(y) = t$.
   (f) $x^2 - 3y - \ln|y| = k$, para todo o $k \in \mathbb{R}$.
   (g) $y^2/2 = \ln(1 + e^x) + 1/2 - \ln 2$.
   (h) $x + \ln|x| - 2y - 10\ln|y| = k$, para todo o $k \in \mathbb{R}$.
   (i) $\ln|x/y| - (1/x + 1/y) = -2$.

3. (a)
   (b)
   (c)
   (d)

2.2 EDO Lineares de 1^{a} Ordem

4.

5. (a) $q(t) = 1/2\Big(100 + t - \frac{10^8}{(100+t)^3}\Big)$
   (b) $q(400)/400 = 0,624$, $q(400) = 2\frac{5^4-1}{5} = 249.6(litros)$.

6. (a) $y = \frac{3}{2}e^{\cos(t)-1}$.
   (b) $y = \frac{t^2}{2}e^{-t} + ke^{-t}$, para $k \in \mathbb{R}$.
   (c) $y = 1/4(5 + 7e^{-4t})$.
   (d) $(x + \sqrt{1+x^2})y = x\sqrt{1+x^2} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + x^2 + 2$.
   (e) $y = \tan(2x) + 2x\sec(2x) + (-1-\pi)\sec(2x)$.

7. (a) $y = 3(x+1)(x^3/3 - x^2/2 + x - \ln(x+1)) + C(x+1)$, $k \in \mathbb{R}$.
   (b) $y = x^2 + kx$, $k \in \mathbb{R}$.
   (c) $x = -1/y + ky^2$, $C \in \mathbb{R}$.
   (d) $y = \sin(x) - 1 + ke^{-\sin(x)}$, $C \in \mathbb{R}$.
   (e) $y = \sec(x)(x/2 + \sin(2x)/4) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

8.

2.3 EDO de Bernoulli

9. (a) $(1/y^3)y' + x/y^2 = x^3$.
   (b) EDO linear, $z' - 2xz = -2x^3$.
   (c) $1/y^2 = x^2 + 1 + ke^{x^2}$, $k \in \mathbb{R}$.

10. (a) $y^3 = -(x+1)/a - 1/a^2 + ke^{ax}$, $k \in \mathbb{R}$.
    (b) $1/x = \ln y + 1 + ky$, $k \in \mathbb{R}$.
    (c) $1/y = -x + k/x$, $k \in \mathbb{R}$.
    (d) $y = 1/\sqrt{2\tan(x)\sec(x) + k\sec^2(x)}$, $k \in \mathbb{R}$.

11. (a) $y = \left(\sec(x) + \tan(x)\right) / \left(\sin(x) + 1\right)$
    (b) $1/x = -y^2 + 2 - e^{-y^2/2}$