Instituto Universitário de Lisboa

Departamento de Matemática

Exercícios de Sucessões e Séries

1 Exercícios: sucessões

1. Estude quanto à monotonia cada uma das seguintes sucessões.
   (a) $\frac{1}{n}$
   (b) $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$
   (c) $\frac{n+1}{n+2}$
   (d) $(-1)^n$
   (e) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
   (f) $\frac{(-1)^n}{n}$
   (g) $\frac{n^2+n}{n+4}$
   (h) $\frac{1}{2^n}$
   (i) $(-1)^n(1-\frac{n}{\sqrt{n}})$
   (j) $(-1)^n-(-1)^{n+1}$
   (k) $1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$

2. Indique, justificando, as sucessões limitadas do exercício 1.

3. Averigue a existência do limite das seguintes sucessões. Calcule o seu valor nos casos em que existe.
   (a) $\frac{1}{n}$
   (b) $\frac{n+1}{n+2}$
   (c) $(-1)^n$
   (d) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
   (e) $\frac{(-1)^n}{n+1}$
   (f) $\frac{1}{2^n}$
   (g) $(2+\frac{1}{n})^n$
   (h) $\frac{2^{n+1}+3^n}{2^n+3^{n+1}}$
   (i) $\sin(n\frac{\pi}{2})$
   (j) $\cos(n\pi)+(-1)^{n+1}$
   (k) $\frac{n!}{(n-2)!(n^2+1)}$
   (l) $(\frac{n}{1+n})^{\frac{1}{n}}$
   (m) $\sqrt[n]{n}$
   (n) $\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}$
   (o) $\frac{3n^{7/2}+2n^2}{n+4\sqrt{n+n^7}}$
   (p) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$
   (*Sugestão: note que* $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$)
   (q) $a_1=1, a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+1, \forall n$
   (*Sugestão:*$(a_n)_n$ *é monótona e limitada?*)
   (r) $a_1=1, a_{n+1}=1+\sqrt{a_n}, \forall n$

4. Seja $a_n=1+2+\ldots+n=\sum_{k=1}^{n}k$. Por indução verifique que $a_n=\frac{(n+1)n}{2}$ seguindo os seguintes passos:

   (a) Comece por confirmar que $a_1=\frac{(1+1)1}{2}$.

   (b) Agora, supondo que $a_n=\frac{(n+1)n}{2}$, derive $a_{n+1}=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$, usando a igualdade $a_{n+1}=a_n+(n+1)$.

5. Seja $a_n = 1 + r + r^2 + r^n = \sum_{k=0}^{n} r^k$. Por indução verifique que $a_n = \dfrac{1-r^n}{1-r}$ seguindo os seguintes passos:

   (a) Comece por confirmar que $a_1 = \frac{1-r^1}{1-r}$.

   (b) Agora supondo que $a_n = \dfrac{1-r^n}{1-r}$ derive $a_{n+1} = \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$, usando a igualdade $a_{n+1} = a_n + r^{n+1}$.

6. Se $a_n > 0$ para todo o n e $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ verifique que:

   (a) quando $L > 1$ então $\lim a_n = \infty$.

   (b) quando $L < 1$ então $\lim a_n = 0$.

7. Usando, se necessário, sucessões enquadradas, mostre que se tem:

   (a) $\dfrac{a^n}{n!} \to 0$

   (b) $\dfrac{n^n}{n!} \to +\infty$

   (c) $\dfrac{n^\alpha}{a^n} \to 0$, para qualquer α e $a > 0$;

   (d) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n+n}} \to +\infty$

   (e) $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2} \to 0$

2 Exercícios: séries geométricas e de Mengoli

8. **Paradoxo de Zenão**

   (a) Uma determinada pessoa para ir do ponto A ao ponto B teria de passar pelo ponto médio A_1 entre estes dois pontos. Estando em A_1 teria de passar pelo ponto médio entre A_1 e B, o ponto A_2. E assim sucessivamente. Argumentava Zenão que nunca se chegaria a B. Utilizando a série geométrica mostre que Zenão estava errado.

   (b) Se o passo utilizado no argumento de Zenão for de $1/3$ em vez de $1/2$ acha que a conclusão da alínea anterior se mantém correcta? Comece por definir u_n como a distância percorrida após n passos e verifique que $u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{3}(1 - u_{n-1}) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}u_{n-1}$. Derive então por substituição sucessiva, (ou por indução), que $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{2^{k-1}}{3^k}$. Conclua.

(c) E se o passo utilizado fosse $0 < r < 1$?

9. **Paradoxo de São Petersburgo** Considere o seguinte jogo. Temos dois intervenientes a "casa" e o "jogador", o jogador investe K *u.m.* e a casa, paga um prémio g_k de acordo com a seguinte regra: uma moeda é atirada ao ar sequencialmente até que saia "cara", quando a primeira cara sai no k-ésimo lançamento o prémio recebido pelo jogador é de $g_k = 2^k$.

   (a) Qual a probabilidade p_k de receber o prémio no momento k, *i.e.* qual a probabilidade da primeira "cara"sair no k-ésimo lançamento?

   (b) Calcule o valor do jogo (*i.e.* o seu valor esperado, ou média) $E = \sum_{k=1}^{\infty} p_k g_k$.

   (c) Que conclusão pode retirar da pergunta (b)?

10. Sabendo que a taxa de juro de capitalização do dinheiro será de 5%/ano, de entre as seguintes opções qual escolheria?

    (a) Receber 100000 € imediatamente.

    (b) Receber 5000 €no príncipio de todos os anos para todo o sempre, *i.e.* receber a quantia indicada no início do ano t, para todo o t.

    (c) Receber $0,001 * (1,06)^t$ € no início do ano t, para todo o t.

11. Uma bola é deixada cair de uma altura h, cada vez que bate no chão ela volta a saltar até 2/3 da altura de onde caiu no momento anterior. Qual a distância total (para cima e para baixo) percorrida pela bola?

12. Calcule, em caso de convergência, o valor das seguintes séries:

    (a) $\sum_{n\geq 3}(\frac{1}{5})^n$

    (b) $\sum_{n\geq 1} 2^n$

    (c) $\sum_{n\geq 0} \frac{7}{2^{n+2}}$

    (d) $\sum_{n\geq 1}(\frac{2^{n+1}}{3^n} - \frac{5}{2^n})$

    (e) $\sum_{n\geq 1}(\frac{-3}{2^n} + \frac{2}{(-3)^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+2}})$

13. Considere as seguintes séries geométricas em função do parâmetro real x. Determine para cada uma a razão $r = r(x)$, o intervalo de convergência e a soma da série.

    (a) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{3^{n+1}}$

    (b) $\sum_{n\geq 0} \frac{(2x)^n}{4^{n-2}}$

    (c) $\sum_{n\geq 0} \frac{(x-1)^{n+1}}{2^{n+1}}$

    (d) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{n+1}}{2^n} - \frac{2^n}{3^{n+1}}$

    (e) $\sum_{n\geq 0} \frac{(2x)^n}{3^{n+1}} - \frac{7x^{n+1}}{4^n}$

    (f) $\sum_{n\geq 2} \frac{2^n}{x^{n+1}}$

    (g) $\sum_{n\geq 1}(\frac{x}{1-x})^n$

14. (a) Partindo das seguintes igualdades, para $0 < x < 1$:

    i. $\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} = \dfrac{1}{1-x}$

    ii. $\dfrac{\partial\Big(\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1}\Big)}{\partial x} = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\partial(x^{k+1})}{\partial x}$

    confirme que $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

    (b) Calcule $\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{k=p-1}^{\infty} x^k$.

    (c) O que pode concluir das igualdades obtidas anteriormente?

15. (a) Mostre que se tem $0,99999\cdots = 0,(9) = 1$.

    (b) Calcule o racional correspondente à dízima $3,666\cdots$.

    (c) Calcule o racional correspondente à dízima $1,181818\cdots$.

16. Considere o modelo autoregressivo em que os valores da variável y no momento t são determinados pelo valor de y no momento $t-1$ e pelo valor de uma outra variável x no momento t, assim temos

$$y_t = x_t + \alpha y_{t-1}$$

.

    (a) Determine que $y_t = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k x_{t-k}$.

    (b) Qual o efeito da variável x no momento j, x_j, no valor de y no momento t, y_t, *i.e.* $\dfrac{\partial y_t}{\partial x_j}$?

    (c) Determine o efeito cumulativo de longo prazo $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\partial y_t}{\partial x_j}$? O que mede efeito cumulativo de longo prazo?

    (d) Encontre um exemplo económico que possa ser modelado desta forma.

17. Determine para que valores de $a \in \mathbb{R}$ as seguintes séries convergem e determine o seu valor.

    (a) $\sum_{n\geq 0}(\frac{a}{a+1})^n$

    (b) $\sum_{n\geq 0}(1-|a|)^n$

    (c) $\sum_{n\geq 0} a$

    (d) $\sum_{n\geq 0}(\frac{1}{|a|-1/2})^n$

18. Considere a série de termo geral

$$\sum_{n\geq 1} a_n - a_{n+1}$$

 (a) Mostre que $S_n = a_1 - a_{n+1}$

 (b) Conclua que $\sum_{n\geq 1} a_n - a_{n+1} = a_1 - \lim a_{n+1}$.

19. Considere a série de termo geral

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

 (a) Mostre que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

 (b) Mostre que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

 (c) Conclua que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

20. Generalize o exercício anterior e, para um dado inteiro $k \geq 1$, calcule o valor da série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+k)}$$

3 Séries de termos não negativos

21. Série de Dirichelet

 (a) Usando a desigualdade

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} &= 1 + (\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}) + (\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}) + (\frac{1}{8^\alpha} + \dots \\
&\leq 1 + (\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}) + (\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}) + (\frac{1}{8^\alpha} + \dots \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{(\alpha-1)}}\right)^n
\end{aligned}$$

 Verifique que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge para $\alpha > 1$.

(b) Usando o mesmo género de técnica mas com a desigualdade

$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{2^\alpha}+\big(\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}\big)+\big(\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}\big)+\ldots\geq\\&1+\frac{1}{2^\alpha}+\big(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}\big)+\big(\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}+\frac{1}{8^\alpha}\big)+\ldots\end{aligned}$$

verifique que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ diverge para $\alpha\leq 1$.

22. Estude a natureza das seguintes séries de termos não negativos:
    (a) $\sum\dfrac{1}{\sqrt{n}+2}$
    (b) $\sum\dfrac{1}{n^2+n}$
    (c) $\sum\dfrac{1}{2^n+n}$
    (d) $\sum\dfrac{n}{2^n+1}$
    (e) $\sum\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$
    (f) $\sum n\sin\dfrac{1}{n}$

    (*Obs:* $\frac{\sin(a_n)}{a_n}\to 1$ *se* $a_n\to 0$.)
    (g) $\sum\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$
    (h) $\sum\dfrac{1}{(3n-2)(2n+1)}$

23. Usando o critério da razão, determine a natureza das seguintes séries numéricas:
    (a) $\sum\dfrac{2}{n!}$
    (b) $\sum\dfrac{10^n}{n!}$
    (c) $\sum\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$
    (d) $\sum\dfrac{n!}{n^n}$
    (e) $\sum\dfrac{3^n n!}{n^n}$

24. Usando o critério da raíz, determine a natureza das seguintes séries numéricas:
    (a) $\sum\dfrac{1}{n^n}$
    (b) $\sum\dfrac{n^2}{3^n}$
    (c) $\sum\big(1-\dfrac{1}{n}\big)^{n^2}$
    (d) $\sum\dfrac{1}{n^{\frac{n}{2}}}$
    (e) $\sum\dfrac{1}{(\log n)^{\frac{n}{2}}}$

4 Convergência absoluta

25. Verfique se as seguintes séries convergem e, em caso afirmativo, classifique a convergência enquanto simples ou absoluta:

(a) $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+\log n}$

(b) $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

(c) $\sum \dfrac{\sin n}{n^2+1}$

(d) $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

(e) $\sum (-1)^n \dfrac{\log n}{n}$

(f) $\sum (-1)^n \dfrac{n}{\sqrt{n}+n^2}$

(g) $\sum \dfrac{\sin n}{n^3+1}$

(h) $\sum \sin(\dfrac{\pi}{2} n)$

(i) $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$

(j) $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+\log n}$

(k) $\sum \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$

(l) $\sum (-1)^n \dfrac{\log n}{n}$

(m) $\sum (-1)^n (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n})$

26. Mostre que se $\sum a_n$ é uma série convergente de termos estritamente positivos e se $(b_n)_n$ é uma sucessão limitada, então $\sum a_n b_n$ é absolutamente convergente.

27. Mostre que $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ é convergente, para qualquer $\alpha > 0$.

5 Séries de potências

28. Estude as seguintes séries quanto à convergência:

(a) $\sum 2^{-n} x^n$

(b) $\sum n!\, x^n$

(c) $\sum x^n$

(d) $\sum_{n\geq 2} \frac{3^n x^{n-1}}{2^{n+1}}$

29. Usando o desenvolvimento em série de Taylor conclua que

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \ , \quad \forall x \in \mathbb{R} \ ,$$

e que

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \ , \quad \forall x \in]-1,1] \ .$$

30. Usando o desenvolvimento em sérei de Taylor do logaritmo, determine o valor da série harmónica alternada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \ .$$

31. Determine as séries de Taylor do seno e do co-seno e os respectivos raios de convergência.

32. Sabendo que

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n \quad , \quad x \in]-1, 1[\ .$$

   (a) Verifique a validade do desenvolvimento anterior.

   (b) Determine a série de Taylor de $f'(x) = (1-x)^{-2}$ e o respectivo raio de convergência.

6 Soluções

1. (a) Decrescente
   (b) Crescente
   (c) Crescente
   (d) Não monótona
   (e) Decrescente
   (f) Não monótona
   (g) Crescente
   (h) Decrescente
   (i) Não monótona
   (j) Não monótona
   (k) Decrescente
2. (a) Limitada
   (b) Não limitada
   (c) Limitada
   (d) Limitada
   (e) Limitada
   (f) Limitada
   (g) Não limitada
   (h) Limitada
   (i) Não limitada
   (j) Limitada
   (k) Limitada
3. (a) 0
   (b) 1
   (c) Divergente
   (d) 0
   (e) 0
   (f) 0
   (g) Divergente
   (h) 1
   (i) 1
   (j) $\frac{1}{2}$
   (k) $\frac{1}{3}$
   (l) Divergente
   (m) 0
   (n) 1
   (o) $\frac{3}{4}$
   (p) 1
   (q) 2
   (r) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$
4.
5.
6.
7.
8. (a)
   (b)
   (c) Para qualquer r o total caminhado é 1.
9. (a) $p_k = 2^{-}-k$.
   (b) $E = \infty$.
   (c) Para entrar neste jogo o "jogador"estaria disposto a investir toda a sua riqueza M, dado que $E > M$.
10. (c)
11. 5

12. (a) $\frac{1}{100}$
    (b) $+\infty$
    (c) $\frac{7}{2}$
    (d) -1
    (e) $\frac{-39}{12}$

13. (a) $r(x) = \frac{x}{3}$; $]-3,3[$; $\frac{x}{9-3x}$.
    (b) $r(x) = \frac{x}{2}$; $]-2,2[$; $\frac{32}{2-x}$.
    (c) $r(x) = \frac{x-1}{2}$; $]-1,3[$; $\frac{x-1}{3-x}$.
    (d) $r(x) = \frac{x}{2}$; $]-2,2[$; $\frac{x^2}{2-x} - \frac{2}{3}$.
    (e) $r_1(x) = \frac{2x}{3}, r_2(x) = \frac{x}{4}$; $]-\frac{3}{2},\frac{3}{2}[$; $\frac{1}{3-2x} - \frac{28x}{4-x}$.
    (f) $r(x) = \frac{2}{x}$; $]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$; $\frac{4}{x^2(x-2)}$.
    (g) $r(x) = \frac{x}{1-x}$; $]-\infty,\frac{1}{2}[$; $\frac{x}{1-2x}$.

14.

15. (a)
    (b) $\frac{11}{3}$
    (c) $\frac{13}{11}$

16.

17. (a) $a > \frac{-1}{2}$
    (b) $-2 < a < 2 \wedge a \neq 0$
    (c) $a = 0$
    (d) $a < \frac{-3}{2} \vee a > \frac{3}{2}$

18.

19.

20.

21.

22. (a) Divergente
    (b) Convergente
    (c) Convergente
    (d) Convergente
    (e) Divergente
    (f) Divergente
    (g) Divergente
    (h) Convergente

23. (a) Convergente
    (b) Convergente
    (c) Convergente
    (d) Convergente
    (e) Divergente

24. (a) Convergente
    (b) Convergente
    (c) Convergente
    (d) Convergente
    (e) Convergente

25. (a) Converge simplesmente
    (b) Converge absolutamente
    (c) Converge absolutamente
    (d) Converge simplesmente
    (e) Converge simplesmente
    (f) Converge simplesmente
    (g) Converge absolutamente
    (h) Diverge
    (i) Converge simplesmente
    (j) Converge simplesmente
    (k) Diverge
    (l) Converge simplesmente

(m) Diverge

26.

27.

28. (a) Absolutamente convergente em $x \in [-2, 2]$, divergente caso contrário.

    (b) Absolutamente convergente em $x = 0$, divergente caso contrário.

    (c) Absolutamente convergente em $x \in]-1, 1[$, divergente caso contrário.

    (d) Absolutamente convergente em $x \in]-2/3, 2/3[$, divergente caso contrário.

29.

30. $-\log 2$

31. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $r = \infty$

    $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, $r = \infty$.

32. (a)

    (b) $\sum_{n \geq 0} n\, x^{n-1}$, $r = 1$.