Programação linear multi-objectivos e dualidade

ANA PAULA FRANCO MARQUES*
MARIA ROSA BORGES DE ANDRADE*
NELSON SANTOS ANTÓNIO*

«Muitas situações de decisão podem ser consideradas como problemas de programação linear com multi-objectivos (PLMO). Neste trabalho resolveremos um exemplo por nós construído utilizando o método Zeleny-yu. Alguns teoremas de dualidade em PLMO serão enunciados e aplicados ao exemplo. Realçaremos por fim a importância da dualidade no processo de tomada de decisões.»

A metodologia tradicional referente a problemas de optimização caracteriza-se pela existência de um único objectivo e todos os outros elementos relevantes da decisão são incluídos como restrições.

Em muitas das aplicações da programação é difícil formalizar as «aspirações» do decisor (ou decisores) num único objectivo.

Em muitos casos o(s) decisor(es) tem de escolher entre várias alternativas na base de objectivos múltiplos e conflituosos.

Estes diferentes objectivos, muitas vezes não podem ser convertidos num único objectivo, mesmo o tradicional «padrão mágico moeda» tem sido muito contestado pela sua inadequabilidade em integrar, de uma maneira significativa, todos os aspectos sociais relevantes da moderna teoria da decisão.

Por exemplo, nos nossos dias existe uma necessidade de poupança de combustível, muitos governos têm estudado possíveis métodos de afectação do gasóleo entre os sectores industrial e doméstico tentando simultaneamente maximizar o PNB, preservar o equilíbrio da balança de pagamentos e assegurar um alto nível de emprego.

Situações deste tipo originam problemas de optimização com mais de um objectivo. O problema geral em PMO com **p** objectivos, **m** restrições e **n** variáveis consiste em

$$\text{Max}\ \underline{\mathbf{Z}}\ [Z(\underline{\mathbf{x}}) \ldots\ldots\ldots\ldots Z_p(\underline{\mathbf{x}})]$$
$$\text{s.a.}$$
$$\text{Li}(\underline{\mathbf{x}}) \geqslant o$$
$$\underline{\mathbf{x}} \geqslant o$$

onde $\underline{\mathbf{Z}}$ é o vector dos objectivos.

O conceito de maximização toma aqui um significado especial já que estamos a trabalhar com várias funções objectivo, assim para qualquer solução admissível temos um vector dos respectivos valores das funções objectivo. O que se procura não é uma solução que maximize simultaneamente todas as funções objectivo, como os objectivos são contraditórios tal não é possível, mas sim todas as soluções que sejam não dominadas.

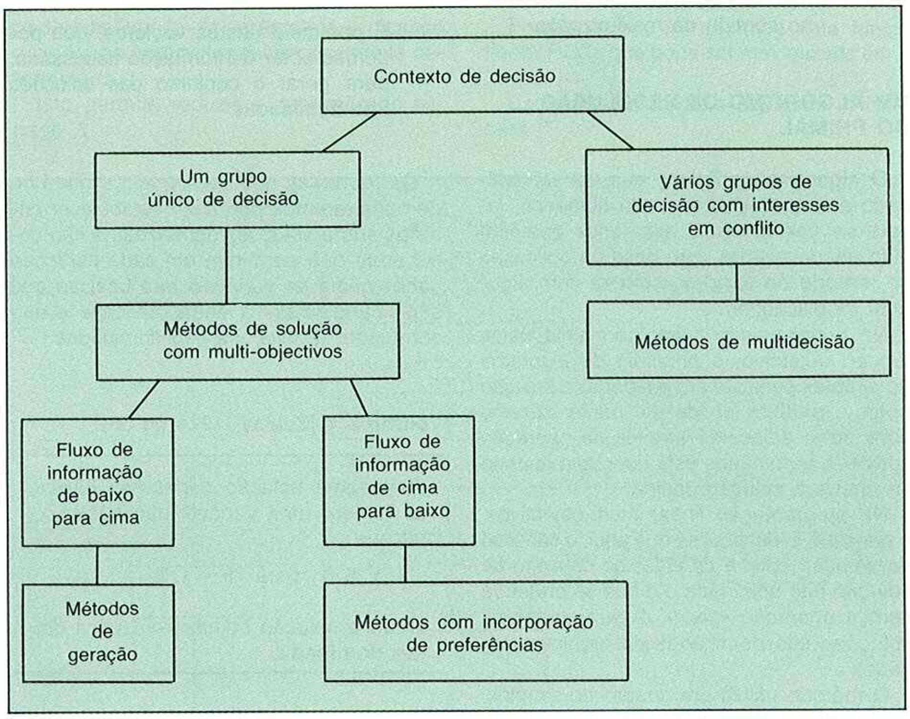
Entende-se por «solução não dominada», todo o $\underline{\mathbf{x}}^o$, pertencente ao conjunto das soluções admissíveis, para o qual não existe nenhum $\underline{\mathbf{x}}^i$ pertencente ao conjunto das soluções admissíveis, tal que

$$\underline{\mathbf{Z}}(\underline{\mathbf{x}}^i) \geqslant \underline{\mathbf{Z}}(\underline{\mathbf{x}}^o)$$

ou seja

$$\underline{\mathbf{Z}}(\underline{\mathbf{x}}^i) \geqq \underline{\mathbf{Z}}(\underline{\mathbf{x}}^o) \quad \text{e} \quad \underline{\mathbf{Z}}(\underline{\mathbf{x}}^i) \neq \underline{\mathbf{Z}}(\underline{\mathbf{x}}^o)$$

Existem diferentes métodos para encontrar soluções não dominadas, de problemas deste tipo. Podemos classificá-los de acordo com o seguinte esquema:



Nos métodos de geração procura-se definir o conjunto de todas as soluções não dominadas deixando ao grupo de decisão a escolha da melhor solução de compromisso.

Pertencem à categoria de métodos de geração os seguintes métodos:

1. método dos pesos;
2. método das restrições;
3. método de NISE;
4. método do simplex.

Todo o problema de programação linear com multi-objectivos (PLMO) está intimamente relacionado com outro problema PLMO denominado o seu dual. Esta afirmação não seria mais do que uma curiosidade matemática interessante se não fosse o facto da relação entre o dual e o primal (problema original) se mostrar de grande importância para o utilizador de modelos de PLMO.

A relação entre o problema original e o

* Docentes do ISCTE.

seu dual deve ser considerada como uma extensão natural da dualidade em P.L. tal como em P.L. os problemas primal e dual em PLMO são baseados no mesmo conjunto de dados e existe pelo menos um par de soluções associadas tais que os valores correspondentes dos objectivos multidimensionais são iguais.

O dual em PLMO fornece informações importantes ao decisor.

PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTI-OBJECTIVOS

FORMALIZAÇÃO DO PROBLEMA:

Considere-se o seguinte problema de PLMO:

«max» $\{\ \underline{Z}(\underline{x}) = c\,\underline{x} \,/\, \underline{x} \in X\ \}$ [1]

onde

X – é o conjunto das soluções admissíveis e $X = \{\ X \,/\, AX = b \quad \text{para} \quad x \in R_o^n\ \}$

A é uma matriz (mxn) cuja caract. é **m**
b é um vector de **m** componentes (b e R^n)
c é uma matriz (pxn) dos coeficientes das **p** funções objectivo

$\underline{Z}(\underline{x}) = [Z^1(\underline{x}), \ldots\ldots Z^P(\underline{x})]^T$

é o vector dos valores das funções objectivo.

«max» – indica que se devem encontrar todas as soluções não dominadas no sentido de maximização.

UM ALGORITMO DE RESOLUÇÃO DO PRIMAL

O algoritmo de Zeleny que vai ser aplicado num pequeno exemplo numérico, insere-se nos diversos algoritmos que têm sido desenvolvidos com base na aplicação do método do simplex, embora com algumas modificações.

Na programação linear com uma única função objectivo, o princípio do algoritmo do simplex consiste em encontrar a solução óptima, partindo-se de um ponto extremo para outro adjacente através da operação «pivot» e terminando esta operação quando se chega à solução óptima.

Na programação linear multi-objectivos, o princípio é idêntico, só que aqui, o conceito de solução óptima dá lugar ao conceito de solução não dominada e o que se pretende com a operação «pivot» é gerar todas as soluções não dominadas do problema em causa.

O método utiliza um quadro do simplex, construído à imagem do simplex utilizado na P.L. com uma única função objectivo, embora ampliado.

Seja um problema genérico em que se tem:

p objectivos
n = (k+m) variáveis, **m** das quais são «slack»
m restrições

O quadro do simplex apresenta a seguinte forma:

	c_j^1	$c_1^1\ c_2^1 \ldots\ldots c_k^1$	$0 \ldots\ldots 0$
	c_j^1	$c_1^2\ c_2^1 \ldots\ldots c_k^2$	$0 \ldots\ldots 0$
	.	.	
	.	.	
	c_j^p	$c_1^2\ c_2^p \ldots\ldots c_k^p$	$0 \ldots\ldots 0$
c_B^1	RHS	$x_1\ \ 2 \ldots\ldots x_k$	$x_{k+1}\ \ 2 \ldots\ldots x_{k+m}$
		COLUNAS NA BASE	
	Z^1	$(Z_1 - c_1)^1\ (Z_2 - c_2)^1 \ldots\ldots (Z_k - c_k)^1$	$(Z_{k+1} - c_{k+1})^1 \ldots\ldots (Z_{k+m} - c_{k+m})^1$
	.	.	
	.	.	
	Z^1	$(Z_p - c_1)^p\ (Z_2 - c_2)^p \ldots\ldots (Z_k - c_k)^p$	$(Z_{k+1} - c_{k+1})^p \ldots\ldots (Z_{k+m} - c_{k+m})^p$

As principais diferenças entre este quadro e o de um simplex na P.L. com uma única função objectivo são:

— Têm-se **p** objectivos, logo **p** linhas de coeficientes das funções objectivo designados pelo símbolo c_j^i que representa o coeficiente da variável de decisão j, no objectivo i.

— Para cada variável, tem-se um vector de custos reduzidos

$$f_j = \begin{bmatrix} (Z_j - c_j)^1 \\ \vdots \\ (Z_j - c_j)^p \end{bmatrix}$$

É por meio destes vectores, que podemos obter a informação necessária, para gerar o conjunto das soluções não dominadas.

Os teoremas que se seguem e que não demonstraremos permitem estabelecer critérios sobre soluções dominadas e não dominadas que permitem em cada iteracção saber quais as variáveis não básicas que são «candidatas» a entrar na base e que conduzem a soluções não dominadas.

Teorema 1 [Zeleny (1974 pg 66)]

Dada uma solução admissível básica, se houver uma variável não básica x_j, tal que

$f_j^k \leqslant o \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \cdots\cdots p$

então a solução admissível básica diz-se **dominada**.

Teorema 2 [Zeleny (1974 pg 66)]

Dada uma solução admissível básica, se houver uma variável não básica xj, tal que

$f_j^k \geqslant o \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \cdots\cdots p$

então a introdução de x_j na base, conduzir-nos-á a uma solução dominada.

Estes dois teoremas, permitem generalizar o critério de entrada de variáveis na base, que se utiliza num problema de maximização em P.L. com uma única função objectivo.

A necessária extensão que aqui é feita, deve-se ao facto de na PLMO se trabalharem com vectores coluna que em última análise, se têm de comparar.

Contudo, os dois teoremas que enunciámos são insuficientes, pois não contemplam todas as situações que surgem quando se comparam os vectores coluna associados às variáveis não básicas numa dada iteracção. Daí a necessidade de introduzir um outro teorema.

Teorema 3 [Zeleny (1974, pg 67)]

Dada uma solução admissível básica, se se tiverem duas variáveis não básicas x_i e x_j, tais que:

$\Theta_i f_i^k \leqslant \Theta_j f_j^k \quad (k = 1, 2, \cdots\cdots p)$

(onde Θ_i é o valor da variável x_i, se fosse introduzida na base).

Então a solução admissível resultante da introdução na base de x_j é dominada pela solução resultante da introdução na base da variável x_i.

Assim, se os vectores f_j^k das variáveis não básicas estiverem abrangidos pelas situações a que os teoremas anteriores se referem, temos o problema do critério de entrada na base resolvido.

Assim, os teoremas 1 - 3 não nos fornecem meios para determinar se uma solução admissível básica é **não dominada**.

Dada uma solução admissível básica que não seja contemplada pelo teorema 1, ela pode ser dominada ou não dominada.

Normalmente os dados que o quadro do simplex nos fornece são insuficientes para responder a uma questão como esta.

A única situação em que o quadro do simplex permite concluir que uma solução admissível básica é **não dominada**, é quando essa solução é um máximo único para um dos **p** objectivos.

Esta situação dá-se se os custos reduzidos para um determinado objectivo forem estritamente positivos.

Assim, se para um dado objectivo todas as variáveis não básicas têm custos reduzidos não negativos, com alguns nulos, a solução admissível básica é um máximo para aquele objectivo, mas não é única.

A existência de soluções óptimas alternativas, conduz ao facto desta solução poder ser dominada.

É necessário então, para dar eficácia ao algoritmo do simplex na PLMO, criar um método que permita determinar se uma dada solução admissível básica é **não dominada**.

Esse método consiste na resolução de um «sub-problema» que tenta encontrar uma solução admissível que melhore pelo menos um dos objectivos, sem piorar os outros.

Se tal solução for encontrada, conclui-se que a solução básica que estamos a testar é **dominada**. Se tal solução não existir, conclui-se que é **não dominada**.

O sub-problema formaliza-se da seguinte forma:

$$\max V = \sum_{i=1}^{p} \delta_i$$

s.a.

$$Z_i(\underline{x}) - \delta_i = Z_i(\hat{\underline{x}}) \qquad (i = 1, 2, \cdots p)$$

$$\delta_i \geqslant o \qquad (i = 1, 2, \cdots p)$$

onde $\underline{x} \in X$ e onde $\hat{\underline{x}} = (\hat{x}_1, \cdots \hat{x}_{k+m})$ é a solução admissível básica que está a ser testada (1).

$\hat{\underline{x}}$ será não dominada se $\max V = o$, o que só é obtido quando todos os δ_i são iguais a zero.

Neste caso, $Z_i(\hat{\underline{x}}) = Z_i(\underline{x})$, ou seja, a solução encontrada não melhora nenhum dos objectivos em relação a $\hat{x}$.

Este sub-problema que acima se enunciou duma forma genérica, tem sido formalizado de diferentes maneiras de forma a ser adaptado aos inúmeros algoritmos que se desenvolveram, embora na essência seja o mesmo.

Obtida uma solução não dominada, recorre-se aos teoremas 2 e 3 para se procurarem novas soluções «candidatas» a serem **não dominadas**.

ALGORITMO DE DECOMPOSIÇÃO DO ESPAÇO PARAMÉTRICO

No exemplo numérico que se seguirá, utilizaremos um método, desenvolvido por M. Zeleny, denominado **método da decomposição do espaço paramétrico** e que se baseia na programação multiparamétrica.

O algoritmo permite gerar todas as soluções não dominadas, fazendo corresponder a cada solução não dominada $\mathbf{x}^o$, um sub-espaço gerado no espaço dos $\lambda\lambda$ (pesos que dão origem a todas as combinações lineares das funções objectivo) e que pode ser chamado a região de indiferença associada com o vector $\mathbf{x}^o$.

Definição 1

Seja Λ, o conjunto de todos os vectores λ definidos da seguinte forma:

$$\Lambda = \{ \lambda : \lambda \in \mathbb{R}^p, \lambda_i \geqslant o, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \}$$

Definição 2

Dado um $\lambda \in \Lambda$, seja $P(\lambda)$ o seguinte problema:

$$P(\lambda) = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i Z^i(\underline{x})$$

onde X é o conjunto das soluções admissíveis.

Pretende-se com este problema encontrar um ponto (vector) $\hat{\mathbf{x}} \in X$ tal que

$$\lambda \underline{\mathbf{Z}}(\hat{\underline{x}}) \geqslant \lambda Z(x) \quad \text{para qualquer } x \in X$$

Esta decomposição permite ainda resolver simultaneamente o «sub-problema» referido anteriormente por meio da combinação linear convexa que o problema $P(\lambda)$ impõe.

Com a condição de normalização do espaço dos objectivos, dada pela definição 1, podemos fixar (p-1) parâmetros λ_i, ficando o p-ésimo parâmetro automaticamente determinado.

Isto permite reduzir a dimensão do espaço Λ.

Para simplificar, comecemos por considerar (p+1) funções objectivo.

Seja $c^i x = c^i_1 x_1 + \cdots\cdots + c^i_k x_k$

$$(i = 1, 2, \cdots\cdots (p+1))$$

Então,

$$P(\lambda) = \lambda c x = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i c^i x$$

$$= (1 - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i) c^{p+1} x + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i c^i x$$

$$= [(i - \sum_{i}^{p} \lambda_i) c^{p+1} + \sum_{i}^{p} \lambda_i c^i] x$$

$$= [c^{p+1} + \sum_{i}^{p} \lambda_i (c^i - c^{p+1})] x$$

Designe-se $(c^i - c^{p+1})$ por $\bar{c}^i$ para $i = 1, 2, \cdots\cdots p$

Então vem:

$$P(\lambda) = (c^{p+1} + \sum_{i}^{p} \lambda_i \bar{c}^i) x$$

$$= \sum_{j}^{k} (c^{p+1} + \sum_{i}^{p} \lambda_i \bar{c}^i_j) x_j$$

Seja

$$(c^{p+1} + \sum_{i}^{p} \lambda_i \bar{c}^i) = \bar{c}(\lambda)$$

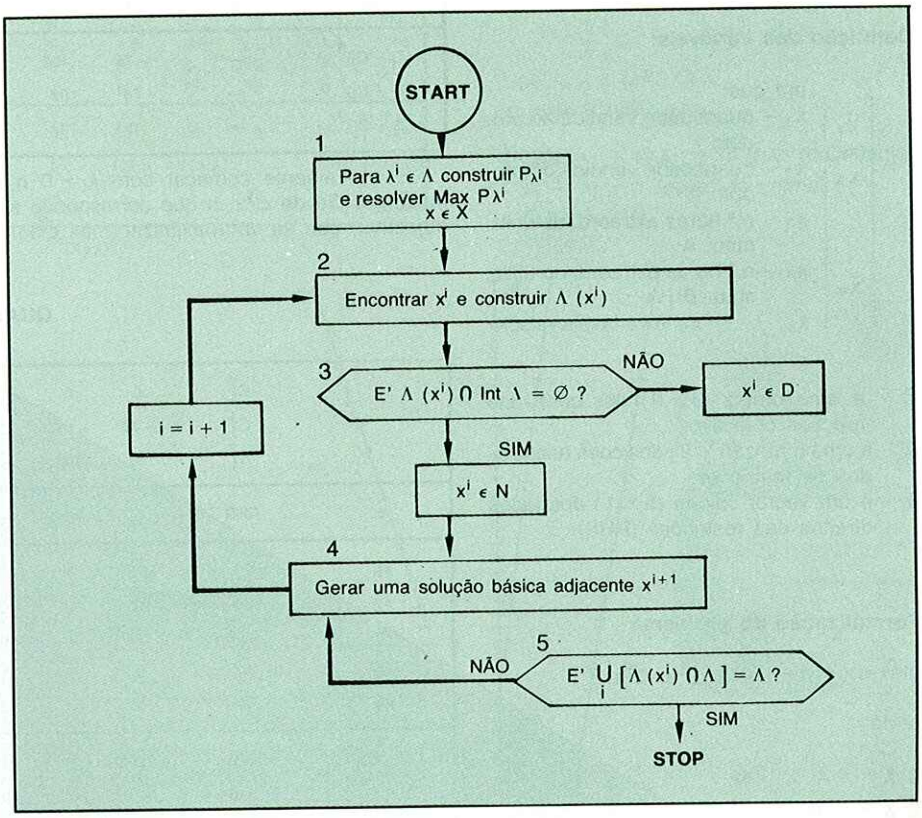
Então

$$P(\lambda) = c(\lambda) x = \sum_{j=1}^{k} c_j(\lambda) x_j$$

Repare-se que se obtém uma função $P(\lambda)$ definida no produto cartesiano $(X \times \Lambda)$.

Fixando $\lambda^* \in \Lambda$, obtemos uma função linear $P(\lambda^*)$ que pode ser maximizada em X.

Esquematicamente, o algoritmo utilizado será: (*)



(*) Para mais pormenores ver Zeleny.

(1) Este sub-problema é equivalente a:

$$\text{Max } \underline{\mathbf{Z}}(\underline{x})$$
s.a.
$$x \in X$$
$$Z_i(\underline{x}) \geqslant Z_i(\hat{\underline{x}})$$

que é um problema de PLMO, resolúvel pelo método das restrições e que se pode transformar de forma a utilizar o método dos pesos [cohon – secção 6.2].

EXEMPLO NUMÉRICO

A empresa α dedica-se ao fabrico dos produtos I e II. No processo de fabrico, os dois produtos utilizam duas máquinas (máquina A e B).

O produto I requer, por unidade, 2 horas da máquina A e 1 hora da máquina B.

O produto II requer, por unidade, 1 hora da máquina A e 3 horas da máquina B.

A utilização «normal» da máquina A é de 120 h /mensais e da máquina B é de 150 h / /mensais.

Os preços de mercado do produto I e II são respectivamente 75 e 100 por unidade.

Até ao momento, a empresa tinha como único objectivo maximizar as suas vendas (receitas). Um estudo de «marketing» encomendado pela empresa, indicou que o mercado estava em expansão e que a empresa deveria proceder à comercialização dos seus produtos.

Com estes novos dados, a empresa contemplou a hipótese de aumentar a sua produção, recorrendo a horas extraordinárias.

A máquina A tem, como limite máximo, 40 horas mensais de utilização extraordinária e a máquina B de 60 horas mensais.

O custo unitário total da hora extraordinária na máquina A é de 5, e na máquina B é de 10 unidades monetárias.

No processo de comercialização, o custo médio é de 1 e 2 unidades monetárias por unidade, do produto I e II respectivamente, tendo a empresa estabelecido um «plafond» máximo de 4500 unidades monetárias.

Os objectivos que a empresa se propõe atingir são:

1.º – Maximizar as receitas;
2.º – Minimizar as despesas em horas extraordinárias;
3.º – Minimizar as despesas com o processo de comercialização.

Definição das variáveis:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_9 \end{bmatrix}$$

em que:

x_1 – quantidade vendida do produto I

x_2 – quantidade vendida do produto II

x_3 – n.º horas extraord. de utiliz. máq. A

x_4 – n.º horas extraord. de utiliz. máq. B

$x_5, \cdots\cdots x_9$ – variáveis «slack»

C – é uma matriz (3 × 9) dos coef. das funções objectivo;

A – é uma matriz (5 × 9) dos coef. associados às restrições;

b – é um vector coluna (5 × 1) dos lados direitos das restrições (RHS).

Formalização do problema

$$\max c x \equiv \max (\underline{c}^1 \underline{x}, \underline{c}^2 \underline{x}, \underline{c}^3 \underline{x})$$

onde:

$$\underline{c}^1 \underline{x} = -x_1 - 2x_2$$

$$\underline{c}^2 \underline{x} = -5x_3 - 10x_4$$

$$\underline{c}^3 \underline{x} = 75x_1 + 100x_2$$

s.a.

$$\begin{array}{lllllllllll}
2x_1 & + x_2 & - x_3 & & + x_5 & & & & & = 120 \\
x_1 & + 3x_2 & & - x_4 & & + x_6 & & & & = 150 \\
x_1 & + 2x_2 & & & & & + x_7 & & & = 4500 \\
 & & x_3 & & & & & + x_8 & & = 40 \\
 & & & x_4 & & & & & + x_9 & = 60
\end{array}$$

$$x_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots 9)$$

REDUÇÃO DA DIMENSÃO DO ESPAÇO DOS PARÂMETROS

$$P(\lambda) = [\, c^3 + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i (c^i + c^3) \,]\, x$$

$$= (75x_1 + 100x_2) + \lambda_1 (-76x_1 - 102x_2) + \lambda_2 (-5x_3 - 10x_4)$$

I QUADRO DO SIMPLEX

	c_j^2	0	0	−5	−10	0	0	0	0	0
	c_j^1	−76	−102	0	0	0	0	0	0	0
	c_j^3	75	100	0	0	0	0	0	0	0
B	RHS	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_5	120	2	1	−1	0	1	0	0	0	0
x_6	150	1	3	0	−1	0	1	0	0	0
x_7	4500	1	2	0	0	0	0	1	0	0
x_8	40	0	0	1	0	0	0	0	1	0
x_9	60	0	0	0	1	0	0	0	0	1
$(Z_j - C_j)^3$	—	−75	−100	0	0	0	0	0	0	0
$(Z_j - C_j)^1$	—	76	102	0	0	0	0	0	0	0
$(Z_j - C_j)^2$	—	0	0	5	10	0	0	0	0	0

É conveniente começar com $\lambda_i = 0$ e assim $\lambda_3 = 1$. O problema transforma-se na maximização de c^3x, o que corresponde a um problema de P.L. com uma única função objectivo, que se vai maximizar $(\max_{\{x \in X\}} c^3x)$.

QUADRO II

	c_j^2	0	0	−5	−10	0	0	0	0	0
	c_j^1	−76	−102	0	0	0	0	0	0	0
	c_j^3	75	100	0	0	0	0	0	0	0
B	RHS	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_5	70	5/3	0	−1	1/3	1	−1/3	0	0	0
x_2	50	1/3	1	0	−1/3	0	1/3	0	0	0
x_7	4400	1/3	0	0	2/3	0	−2/3	1	0	0
x_8	40	0	0	1	0	0	0	0	1	0
x_9	60	0	0	0	1	0	0	0	0	1
$(Z_j - C_j)^3$	5000	−125/3	0	0	−100/3	0	100/3	0	0	0
$(Z_j - C_j)^1$	−5100	42	0	0	34	0	−34	0	0	0
$(Z_j - C_j)^2$	0	0	0	5	10	0	0	0	0	0

QUADRO III

B	RHS	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_1	42	1	0	−3/5	1/5	3/5	−1/5	0	0	0
x_2	36	0	1	1/5	−2/5	−1/5	2/5	0	0	0
x_7	4386	0	0	1/5	3/5	−1/5	−3/5	1	0	0
x_8	40	0	0	1	0	0	0	0	1	0
x_9	60	0	0	0	1	0	0	0	0	1
$(Z_j - C_j)^3$	6750	0	0	−25	−25	25	25	0	0	0
$(Z_j - C_j)^1$	−6864	0	0	126/5	128/5	−126/5	−128/5	0	0	0
$(Z_j - C_j)^2$	0	0	0	5	10	0	0	0	0	0

QUADRO IV

	c_j^2	0	0	−5	−10	0	0	0	0	0
	c_j^1	−76	−102	0	0	0	0	0	0	0
	c_j^3	75	100	0	0	0	0	0	0	0
B	RHS	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_1	66	1	0	0	1/5	3/5	−1/5	0	3/5	0
x_2	28	0	1	0	−2/5	−1/5	2/5	0	−1/5	0
x_7	4378	0	0	0	3/5	−1/5	−3/5	1	−1/5	0
x_3	40	0	0	1	0	0	0	0	1	0
x_9	60	0	0	0	1	0	0	0	0	1
$(Z_j - C_j)^3$	7750	0	0	0	−25	25	25	0	25	0
$(Z_j - C_j)^1$	−7872	0	0	0	128/5	−126/5	−128/5	0	−126/5	0
$(Z_j - C_j)^2$	−200	0	0	0	10	0	0	0	−5	0

QUADRO V

B	RHS	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_1	54	1	0	0	0	3/5	−1/5	0	3/5	−1/5
x_2	52	0	1	0	0	−1/5	2/5	0	−1/5	2/5
x_7	4342	0	0	0	0	−1/5	−3/5	1	−1/5	−3/5
x_3	40	0	0	1	0	0	0	0	1	0
x_4	60	0	0	0	1	0	0	0	0	1
$(Z_j - C_j)^3$	9250	0	0	0	0	25	25	0	25	25
$(Z_j - C_j)^1$	−9408	0	0	0	0	−126/5	−128/5	0	−126/5	−128/5
$(Z_j - C_j)^2$	−800	0	0	0	0	0	0	0	−5	−10

A solução obtida no QUADRO V, é um máximo único para a 3.ª função objectivo (maximização das receitas) e como anteriormente se referiu é uma solução não dominada — a que chamaremos $x^{(0)}$.

Tem-se que $x^{(0)} = (54, 52, 40, 60, 0, 0, 4342, 0, 0)$ a cada solução não dominada $x^{(j)}$, corresponde um sub-espaço dos $\Lambda\ (x^{(j)})$.

Quando todas as soluções não dominadas estiverem geradas, o espaço normalizado Λ estará completamente «preenchido» pela união dos sub-espaços correspondentes a cada solução $x^{(j)}$.

Para cada $x^{(j)}$, o correspondente poliedro $\Lambda\ (x^{(j)})$ tem de ter pelo menos um ponto em comum com Λ.

Dada uma solução não dominada $x^{(j)}$, o correspondente $\Lambda\ (x^{(j)})$ é definido:

$$\Lambda\ (x^{(j)}) = \{\lambda : \lambda \epsilon IR^2;\ (ck\text{-}zk)^3 \leqslant \sum_{c-1}^{2} \lambda_i\ (zk\text{-}ck)^i;\ k = 1, 2, \ldots 9\}$$

no nosso exemplo, $\Lambda\ (x^{(0)})$ é obtido resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 126/5\ \lambda_1 \leqslant 25 \\ 128/5\ \lambda_2 \leqslant 25 \\ 126/5\ \lambda_1 + 5\ \lambda_2 \leqslant 25 \\ 128/5\ \lambda_1 + 10\ \lambda_2 \leqslant 25 \end{cases}$$

O sistema anterior é equivalente a:

$$\begin{cases} \lambda_1 \leqslant \dfrac{125}{128} & (1) \\ \lambda_1 \leqslant \dfrac{125}{126} - \dfrac{25}{126}\lambda_2 & (2) \\ \lambda_1 \leqslant \dfrac{125}{128} - \dfrac{50}{128}\lambda_2 & (3) \end{cases}$$

A restrição não redundante é (3)

$$\Lambda\ (x^{(0)}) = \Lambda\ (x^{(0)}) \cap \Lambda$$

ou seja $\Lambda\ (x^{(0)}) =$

$$= \begin{cases} 128/5\ \lambda_1 + 10\ \lambda_2 \leqslant 25 \text{ (não redundante)} \\ \lambda_1 + \lambda_2 \leqslant 1 \text{ (cond. de normaliz.)} \\ \lambda_1,\ \ \lambda_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

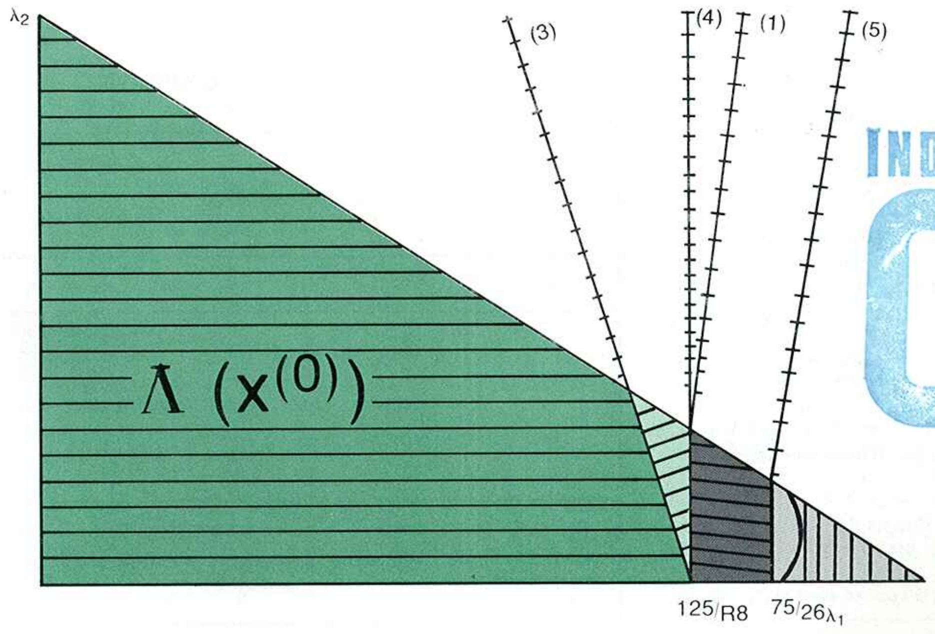


Fig. 1

A restrição não redundante (3), está associada à coluna não básica que domina todas as outras colunas não básicas (teorema 3) e portanto é a variável x_9 que deve ser introduzida na base, para nos conduzir à geração de uma nova solução não dominada (ver QUADRO V).

$x^{(1)} = (66,\ 28,\ 40,\ 0,\ 0,\ 0,\ 4378,\ 0,\ 60)$

$$\Lambda(x^{(1)}) = \begin{cases} 128/5\ \lambda_1 + 10\ \lambda_2 \geq 25 \\ 126/5\ \lambda_1 \leq 25 \\ 128/5\ \lambda_1 \leq 25 \\ 126/5\ \lambda_1 + 5\ \lambda_2 \leq 25 \end{cases}$$

E então,

$$\Lambda(x^{(1)}) = \begin{cases} 128\ \lambda_1 + 50\ \lambda_2 \geq 125 & (3')(\star) \\ 128\ \lambda_1 \leq 125 & (1) \\ \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1 & \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 & \end{cases}$$

Como $\Lambda(x^{(1)}) \cap \Delta \neq \emptyset$, então $x^{(1)}$ é solução não dominada. Veja-se figura 1.

Neste momento, podem entrar na base x_4 ou x_6. Se entrasse x_4 sairia x_9 e voltaríamos ao ponto $x^{(0)}$ e a $\Lambda(x^{(0)})$.

Assim, vai introduzir-se na base a variável x_6.

QUADRO VI

	c_j^2	0	0	−5	−10	0	0	0	0	0
	c_j^1	−76	−102	0	0	0	0	0	0	0
	c_j^3	75	100	0	0	0	0	0	0	0
B	RHS	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_1	66	1	0	0	1/5	3/5	−1/5	0	3/5	0
x_2	28	0	1	0	−2/5	−1/5	2/5	0	−1/5	0
x_7	4378	0	0	0	3/5	−1/5	−3/5	1	−1/5	0
x_3	40	0	0	1	0	0	0	0	1	0
x_9	60	0	0	0	1	0	0	0	0	1
$(Z_j - C_j)^3$	7750	0	0	0	−25	25	25	0	25	0
$(Z_j - C_j)^1$	−7872	0	0	0	128/5	−126/5	−128/5	0	−126/5	0
$(Z_j - C_j)^2$	−200	0	0	0	10	0	0	0	−5	0

QUADRO VII

	c_j^2	0	0	−5	−10	0	0	0	0	0
	c_j^1	−76	−102	0	0	0	0	0	0	0
	c_j^3	75	100	0	0	0	0	0	0	0
B	RHS	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_1	80	1	1/2	0	0	1/2	0	0	1/2	0
x_6	70	0	5/2	0	−1	−1/2	1	0	−1/2	0
x_7	4420	0	3/2	0	0	−1/2	0	1	1/2	0
x_3	40	0	0	1	0	0	0	0	1	0
x_9	60	0	0	0	1	0	0	0	0	1
$(Z_j - C_j)^3$	6000	0	−125/2	0	0	75/2	0	0	75/2	0
$(Z_j - C_j)^1$	−6080	0	64	0	0	−38	0	0	−38	0
$(Z_j - C_j)^2$	−200	0	0	0	10	0	0	0	−5	0

$x^{(2)} = (80,\ 0,\ 40,\ 0,\ 0,\ 70,\ 4420,\ 0,\ 60)$

$$\Lambda(x^{(2)}) = \begin{cases} 64\ \lambda_1 \geq 125/2 \\ 38\ \lambda_1 \leq 75/2 \\ 38\ \lambda_1 + 5\ \lambda_2 \leq 75/2 \\ 10\ \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Lambda(x^{(2)}) = \begin{cases} \lambda_1 \geq 125/128 & (1') \\ 10\ \lambda_2 + 76\ \lambda_1 \leq 75 & (4) \\ \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1 & \text{(cond. de normaliz.)} \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 & \end{cases}$$

Veja-se figura 1; como $\Lambda(x^{(2)}) \cap \Lambda \neq \emptyset$, então $x^{(2)}$ é solução não dominada.

Podem entrar na base, ou variáveis x_2 e x_8. Se entrasse x_2 sairia x_6 e voltaríamos ao ponto $x^{(2)}$. Assim, vai introduzir-se na base a variável x_8.

Tem-se $x^{(3)} = (60,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 90,\ 4440,\ 40,\ 60)$

$$\Lambda(x^{(3)}) = \begin{cases} 64\ \lambda_1 \geq 125/2 \\ 38\ \lambda_1 + 5\ \lambda_2 \geq 75/2 \\ 38\ \lambda_1 \leq 75/2 \\ 10\ \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Lambda(x^{(3)}) = \begin{cases} \lambda_1\ 75/76 \leq & (5) \\ 38\ \lambda_1 + 5\ \lambda_2 \geq 75/2 & (4') \\ \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1 & \\ \lambda_1\ \lambda_2 \geq 0 & \end{cases}$$

Veja-se figura 1. Como $\Lambda(x^{(3)}) \cap \Lambda \neq \emptyset$, então $x^{(3)}$ é solução não dominada.

QUADRO VIII

	c_j^2	0	0	−5	−10	0	0	0	0	0
	c_j^1	−76	−102	0	0	0	0	0	0	0
	c_j^3	75	100	0	0	0	0	0	0	0
B	RHS	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_1	60	1	1/2	−1/2	0	1/2	0	0	0	0
x_6	90	0	5/2	1/2	−1	−1/2	1	0	0	0
x_7	4440	0	3/2	1/2	0	−1/2	0	1	0	0
x_8	40	0	0	1	0	0	0	0	1	0
x_9	60	0	0	0	1	0	0	0	0	1
$(Z_j - C_j)^3$	4500	0	−125/2	−75/2	0	75/2	0	0	0	0
$(Z_j - C_j)^1$	−4560	0	64	38	0	−38	0	0	0	0
$(Z_j - C_j)^2$	0	0	0	5	10	0	0	0	0	0

($\star$) Designámo-la por (3') pois só difere de (3) pelo sinal da desigualdade.

QUADRO IX

	c_j^2	0	0	−5	−10	0	0	0	0	0
	c_j^1	−76	−102	0	0	0	0	0	0	0
	c_j^3	75	100	0	0	0	0	0	0	0
B	RHS	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_5	120	2	1	−1	0	1	0	0	0	0
x_6	150	1	3	0	−1	0	1	0	0	0
x_7	4500	1	2	0	0	0	0	1	0	0
x_8	40	0	0	1	0	0	0	0	1	0
x_9	60	0	0	0	1	0	0	0	0	1
$(z_j - c_j)^3$	0	−75	−100	0	0	0	0	0	0	0
$(z_j - c_j)^2$	0	76	102	0	0	0	0	0	0	0
$(z_j - c_j)^1$	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0

Tem-se:
$x^{(4)} = (0, 0, 0, 0, 120, 150, 4500, 40, 60)$

$$\Lambda(x^{(4)}) = \left\{ \begin{array}{l} 76\lambda_1 \geqslant 75 \\ 102\lambda_1 \geqslant 100 \\ 5\lambda_2 \geqslant 0 \\ 10\lambda_2 \geqslant 0 \end{array} \right.$$

$$\Lambda(x^{(4)}) = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \geqslant \dfrac{75}{76} \quad (5') \\ \lambda_1 + \lambda_2 \leqslant 1 \\ \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0 \end{array} \right.$$

Como $\Lambda(x^{(4)}) \cap \Lambda \neq \emptyset$, então $x^{(4)}$ é solução não dominada. Veja-se figura 1.

Obtiveram-se todas as soluções não dominadas do nosso exemplo numérico, pois verifica-se que:

$$\Lambda = \Lambda(x^{(0)}) \cup \Lambda(x^{(1)}) \cup \Lambda(x^{(2)}) \cup \Lambda(x^{(3)}) \cup \Lambda(x^{(4)})$$

Os valores das funções objectivo no nosso problema inicial, correspondentes a cada solução não dominada aparecem no quadro seguinte:

	$x^{(0)}$	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$
Z^1	−158	−122	−80	−60	0
Z^2	−800	−200	−200	0	0
Z^3	9250	7750	6000	4500	0

O algoritmo que aplicámos, faz parte do grupo de algoritmos conhecidos pelos métodos de geração da PLMO.

Estes métodos de geração, não incorporam as preferências do decisor ou grupo de decisores.

O quadro acima seria fornecido ao decisor que, segundo um critério definido por ele, optaria por uma daquelas soluções.

DUALIDADE

FORMALIZAÇÃO DO DUAL DO PROBLEMA [1]

«min» $\{ \mathbf{g}(u) = ub \mid u \in Su \}$

onde:

$Su = \{ U / UAw \leqslant Cw$ para nenhum $w \in \mathbb{R}_0^n \}$

ou seja o conjunto das soluções admissíveis.

U - é uma matriz (pxm) das variáveis duais.
A - é uma matriz (mxn) cuja característica é **m**.
C - é uma matriz (pxn) dos coeficientes das **p** funções objectivo do primal.
g (u) é o vector dos valores das funções objectivo do dual.

«min» indica que se devem encontrar todas as soluções não dominadas no sentido de minimização.

A formalização do dual, num problema de P.L. com uma só função objectivo pode considerar-se como um caso particular da formalização do dual em PLMO.

Em P.L. tem-se:

PRIMAL

$\max \{ Z(x) = c^t\underline{\mathbf{x}} / x \in X \}$

em que $X = \{ x / Ax = b \}$

DUAL

$\min \{ g(u) = u^t b / u \in Su \}$

em que $Su = \{ u / u^t Aw < C^t w$
para nenhum $w \in \mathbb{R}_0^n \}$

O sinal que aparece na restrição é estritamente menor, pois em vez de se ter um vector com várias componentes (de cada lado do sinal), tem-se um escalar e assim a desigualdade terá de ser estrita e corresponderá a $\geqq$ para qualquer $w \in \mathbb{R}_0^n$ e vem:

$Su = \{ u^t . A . w \geqq C^t . w$
para qualquer $w \in \mathbb{R}_0^n \}$

assim sendo, podem transformar-se as restrições em:

$Su = \{ (u^t . A - c^t) w \geqslant 0$
para qualquer $w \in \mathbb{R}_0^n \}$

Isto só é garantido se:

$u^t A - c^t \geqq 0$

e portanto vem

$u^t . A \geqq c^t$

Assim, a noção de não dominância em PLMO, corresponde à de optimalidade em P.L. Os problemas duais obtidos pelas regras da dualidade em PLMO, correspondem aos problemas obtidos em P.L.

ALGUNS ASPECTOS DA RELAÇÃO ENTRE O DUAL E O PRIMAL EM PLMO

LEMA 1

Se $\underline{\mathbf{x}}$ é uma solução admissível para o primal e u é uma solução admissível para o dual, então a desigualdade $\underline{\mathbf{g}}(u) \leqslant \underline{\mathbf{Z}}(\underline{\mathbf{x}})$ não se verifica.

Este lema significa que, quaisquer que sejam as soluções admissíveis do primal e do dual, o vector de valores das funções objectivo do primal nunca domina o vector de valores das funções objectivo do dual.

LEMA 2 - CONDIÇÃO SUFICIENTE PARA UM PAR DE SOLUÇÕES ADMISSÍVEIS SEREM SOLUÇÕES NÃO DOMINADAS.

Seja $\underline{\mathbf{x}}$ uma solução admissível do primal e seja u uma solução admissível do dual de tal forma que: $\underline{\mathbf{Z}}(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{g}}(u)$ então $\underline{\mathbf{x}}$ é uma solução não dominada do primal e u é uma solução não dominada do dual.

TEOREMA 1 - CONDIÇÕES NECESSÁRIAS E SUFICIENTES PARA A EXISTÊNCIA DUMA SOLUÇÃO NÃO DOMINADA PARA AMBOS OS PROBLEMAS.

Considerado o par de problemas, primal e dual, as seguintes proposições são equivalentes:

i) cada problema tem uma solução admissível.

ii) cada problema tem uma solução não dominada e existe pelo menos um par $(x^{(0)}, u^{(0)})$ de soluções não dominadas de tal forma que:

$$\underline{Z}(\underline{x}^{(0)}) = \underline{g}(u^{(0)})$$

Este teorema significa que nem o problema primal, nem o problema dual têm solução não dominada se e só se pelo menos um dos problemas não tem solução admissível.

TEOREMA 2

$\underline{x}^{(0)} \in X$ é solução não dominada para o primal, se e só se, existe uma solução admissível, $u^{(0)}$, para o dual, de tal forma que:

$$\underline{Z}(\underline{x}^{(0)}) = \underline{g}(u^{(0)})$$

assim, $u^{(0)}$ é também uma solução não dominada para o dual.

Tal como nos problemas de P.L. com uma só função objectivo, o quadro do simplex apresenta conjuntamente com a solução «óptima» do primal, a solução «óptima» do dual.

Neste caso, associada a cada solução não dominada do primal $(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})$, aparece no quadro do simplex uma solução não dominada do dual $(\mathbf{u}^{(0)})$ de tal forma que:

$$\underline{Z}(x^{(0)}) = \underline{g}(u^{(0)})$$

Considere-se a seguinte notação:

$$A = (\rightarrow^{-} \neq]$$

onde I é uma matriz identidade de ordem **m.**

$$C = (C, O)$$

onde O é uma matriz nula (pxm).

B é uma matriz (mxm) dos vectores na base.

C_B é uma matriz (pxm) dos coeficientes das funções objectivo correspondente aos vectores na base.

X_B é um vector m-dimensional, das variáveis na base.

X_N é um vector (n-m)-dimensional, das variáveis não básicas.

O quadro inicial do simplex em PLMO vem:

$\bar{A}$	I	b
$-C$	O	O

após algumas iteracções, este quadro vem:

$B^{-1}.\bar{A}$	B^{-1}	$B^{-1}.b$
$C_B B^{-1}\bar{A} - C$	$C_B B^{-1}$	$C_B . B^{-1} . b$

Seja $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$ uma solução admissível básica para o primal, em que:

$$x_B^{(0)} = B^{-1}.b$$

$$x_N^{(0)} = 0$$

que também é admissível para o dual:

$$u^{(0)} = C_B . B^{-1} \in Su$$

Como

$$Cx^{(0)} = C_B X_B^{(0)} = C_B . B^{-1}. b = u^{(0)}. b,$$

ambas as soluções são **não dominadas** para os respectivos PLMO, e o quadro apresenta-se:

$B^{-1}.\bar{A}$	B^{-1}	$x_B^{(0)}$
$U^{(0)}.\bar{A} - \bar{C}$	$U^{(0)}$	$Z^{(0)}$

(com $Z^{(0)} = Cx^{(0)} = U^{(0)}.b$

Partindo deste quadro, podemos mostrar que a admissibilidade do primal implica imediatamente que esta solução é não dominada.

Para a solução do dual $U^{(0)}$ ser admissível é necessário que:

$U^{(0)} Aw \leqslant Cw$ se não verifique para nenhum $w \in IR_o^n$

Fazendo $U^{(0)} = C_B . B^{-1}$ vem:

$C_B . B^{-1} b . \leqslant Cx$ para nenhum $x \in X$ (*)

Assim como

$Cx^{(0)} \leqslant Cx$ para nenhum $x \in X$

e esta não é mais do que a definição de solução não dominada para o primal.

A forma invulgar como o dual aparece formalizado, advém da definição de solução não dominada do primal.

Tal formulação tem por fim garantir a não dominância da solução do primal, quando se tem uma solução admissível do dual a que corresponde uma solução admissível do primal.

Pode assim dizer-se, que o método do simplex em PLMO, procura antes de mais a admissibilidade do dual, enquanto mantém a admissibilidade do primal.

Assim que se obtém uma solução admissível para o dual, tem-se um par inicial de soluções não dominadas $(x^{(0)}, U^{(0)})$ de tal forma que:

$$\underline{Z}(x^{(0)}) = g(U^{(0)})$$

A partir daqui, o método seguido apoia-se na manutenção da admissibilidade do dual, enquanto se procuram todas as soluções admissíveis do primal.

EXEMPLO NUMÉRICO

FORMALIZAÇÃO DO DUAL

$$\text{«MIN» } Ub = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & u_{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120 \\ 150 \\ 4500 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix}$$

s.a.

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & u_{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ w_9 \end{matrix} \leqslant$$

$$\leqslant \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 75 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_9 \end{bmatrix} \text{ para nenhum } \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_9 \end{bmatrix}^{3} \geqslant^{9}_{0}$$

INTERPRETAÇÃO ECONÓMICA DAS VARIÁVEIS DUAIS

O problema de decisão com que a empresa se depara conduz a dois tipos de problemas:

i) Um problema multi-objectivos de **afectação de recursos** que procura todas as soluções não dominadas para os níveis de actividade (PRIMAL).

ii) Um problema multi-objectivos de **valorização dos recursos** que procura determinar todas as matrizes não dominadas dos preços duais associadas a cada unidade de recurso disponível (DUAL).

(*) Nota: Substitui-se w por X pois o domínio de variação de w é IR_0^n e o de x, é um subconjunto $X \subset IR_0^n$.

Para ilustrar, a interpretação das variáveis duais (em termos económicos), escolha-se a solução não dominada $x^{(1)}$.

$$x^{(1)} = (66, 28, 40, 0, 0, 0, 4378, 0, 60)$$

a que corresponde a solução

$$cx = [7750 - 122 - 200]$$

associada a $x^{(1)}$, nem a solução não dominada $u^{(1)}$ do respectivo dual.

$$u^{(1)} = \begin{bmatrix} 25 & 25 & 0 & 25 & 0 \\ -1/5 & -3/5 & 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

a matriz dos preços duais, não corresponde exactamente à $C_B \cdot B^{-1}$ do QUADRO VI, pois o algoritmo utilizado, modificou a matriz original.

Foi necessário corrigir $C_B \cdot B^{-1}$ para obter a matriz das variáveis duais do primal do exemplo numérico.

O elemento genérico $\{u^1_{ij}\}$ (com i = 1, 2, 3 e j = 1, ... 5) da matriz $u^{(1)}$ indica o acréscima da i-ésimo função objectivo quando a disponibilidade do recurso j varia de uma unidade (preço sombra).

Utilizando os resultados de $u^{(1)}$, poder-se-á referir alguns factos, nomeadamente:

i) Considere-se a 1.ª linha da matriz que corresponde ao objectivo «maximizar as receitas». Podemos dizer que para «maximizar as receitas», os preços sombra dos recursos:

— «plafond» máximo de unid. monetárias disponíveis para o processo de comercialização;

— n.º horas extraordinárias de utilização da máquina B;

são recursos livres — os preços sombra que lhes estão associados são nulos, pois as receitas máximas obtidas não aumentarão, se aumentarem as disponibilidades dos ditos recursos em uma unidade.

Para este mesmo objectivo, o aumento numa unidade das disponibilidades de qualquer um dos outros recursos:

— utilização «normal» da máquina A

— utilização «normal» da máquina B

— utilização extraordinária da máquina A;

fará aumentar o valor óptimo deste objectivo em 25 unidades.

A empresa, estaria disposta a pagar até este quantitativo, por uma unidade adicional de qualquer um destes três recursos.

De notar, que ao fazer esta análise, não se entra em linha de conta com os efeitos obtidos nos outros dois objectivos.

De referir o facto de que apesar de a utilização «normal» da máquina B estar completamente esgotada, no óptimo, as horas extraordinárias de utilização da mesma máquina são um bem livre.

ii) Os recursos:

— «plafond» máximo das despesas em comercialização;

— horas extraordinárias da máquina B;

são bens livres para qualquer um dos objectivos.

iii) A 3.ª linha de $u^{(1)}$, corresponde ao objectivo «minimizar as despesas em horas extraordinárias».

Apenas o recurso «horas extraordinárias da máquina A» tem associado um preço dual significativo — ou seja, se se aumentar de uma unidade tal recurso, o valor óptimo deste objectivo piora em 5 unidades.

iv) Uma unidade adicional do recurso «utilização normal da máquina A», tem os seguintes efeitos em relação aos três objectivos:

— objectivo 1 – melhora em 25;

— objectivo 2 – é bem livre;

— objectivo 3 – piora em 1/5.

Chama-se ao vector $\begin{bmatrix} 25 \\ -1/5 \\ 0 \end{bmatrix}$ um vector de «trade-offs»

Em resumo:

Toda esta análise da interpretação das variáveis duais, fornece ao decisor informações importantes para o processo de tomada de decisão.

Em cada solução não dominada, aparece um vector de «trade-offs» associado a cada um dos recursos.

É com base na análise dos vários vectores «trade-offs» associados a cada uma das soluções não dominadas e de acordo com a função de preferência do decisor, que este tomará a sua decisão.

BIBLIOGRAFIA:

Cohon, Jareh L. and Marks, David H.
A review and evaluation of multiobjective programming techniques — Water resources research — Vol. II n.º 2 Abril 75

Cohon, Jareh L.
Multiobjective Programming and Planning — Academic Press — New York (1978)

Hannan, Edward L.
Using duality theory for identification of primal efficient points and for sensitivity analysis in multiple objective linear programming — Journal of operational research society — Vol. 29 n.º 7

Isermann, Heinz
The relevance of duality in multiple objective linear programming — Tims studies in the management sciences 6, (1977)

Nijkamp, P.
Theory and application of environmental economics, (1977)

Zeleny, M.
Linear multiobjective programming — Springer-verlag, Berlin North Holland P. Co (1974)