

CARTEIRAS DE VARIÂNCIA MÍNIMA NO MERCADO DE
ACÇÕES PORTUGUÊS

Pedro Miguel Gião Folgado

Projecto de Mestrado em Finanças

Orientador:

Prof. Doutor Luís Oliveira, Prof. Auxiliar, ISCTE Business School, Departamento de
Finanças

Abril 2013

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Doutor Luís Oliveira, pela disponibilidade, simpatia e pela preciosa orientação ao longo da realização deste trabalho.

Ao Dr. Pedro Ferreira, da Euronext Lisboa, pela ajuda na obtenção dos dados necessários para a realização deste trabalho.

Aos meus pais, pelo apoio que sempre me deram e que em muito contribuiu para que conseguisse alcançar as minhas metas.

Resumo

O passado recente tem sido marcado por maiores níveis de volatilidade e instabilidade nos mercados financeiros em geral, com reflexo nos mercados accionistas, pelo que o interesse por estratégias alternativas e com maior preocupação com o risco ganham mais relevância.

Neste trabalho avalia-se a performance de várias carteiras que visam a minimização do risco no mercado accionista português. As carteiras em questão são determinadas utilizando o modelo de Markowitz e as características de risco dos títulos individualmente considerados. Recorre-se à metodologia de *shrinkage* para estimação dos parâmetros necessários à optimização.

Os resultados evidenciam que as carteiras que visam minimizar o risco, reduzem efectivamente a volatilidade face ao índice de mercado e, no longo prazo, podem mesmo obter rendibilidades idênticas ou superiores, constituindo, por isso estratégias de investimento a considerar.

Palavras Chave: Carteira Variância Mínima, Markowitz, Optimização, *Shrinkage*

Classificação JEL: G11, G17

Abstract

Financial markets in general and the stock market in particular have been hit by higher levels of instability and volatility levels, therefore the interest in alternative investment strategies that place emphasis in risk minimization has risen.

In this dissertation, the performance of several minimum risk portfolios in the Portuguese stock market is evaluated. These portfolios are constructed using Markowitz methodology as well as using the risk characteristics of the individual stocks. Shrinkage methodology is applied in order to estimate the parameters required for the optimization procedure.

The results show that the minimum risk strategies do in fact achieve lower volatility when compared with market indices and in the long run can achieve similar or even higher returns, which makes them a viable investment alternative.

Keywords: Minimum Variance Portfolio, Markowitz, Optimization, Shrinkage

JEL Classification: G11, G17

Índice

1 – Introdução.....	1
2 – Revisão de Literatura.....	3
2.1 – Modelo Selecção Carteiras de Markowitz.....	3
2.2 – Estudos Empíricos sobre Carteiras de Variância Mínima.....	4
3 – Estudo Empírico.....	8
3.1 – Dados e Metodologia.....	8
3.2- Metodologias de determinação das carteiras em análise.....	13
3.3 – Análise Resultados.....	18
3.3.1 – Análise Resultados no período 2005 a 2007.....	18
3.3.2 – Análise Resultados no período 2008 a Julho 2012.....	23
3.3.3 – Análise Resultados no período 2005-2012.....	26
3.4 – Características da Carteira Variância Mínima.....	28
3.5 – Alternativas à metodologia de Markowitz.....	34
3.6 – A carteira de semi-variância mínima.....	39
4 – Conclusões.....	43
5. Referências.....	45
6. Anexos.....	47
Anexo 1 – Performance do Fundo Carteira Variância Mínima DAX.....	48
Anexo 2 – Intensidade de Shrinkage.....	49
Anexo 2.1 – Intensidade de Shrinkage <i>Ledoit & Wolf (2004)</i>	49
Anexo 2.2 – Intensidade de Shrinkage <i>Bayes-Stein (1986)</i>	50
Anexo 3 – Resultados sem a restrição de <i>short selling</i>	51
Anexo 4 – Volatilidade, Perda Máxima e Rendibilidade período 2005-2012.....	52
Anexo 5 – Regressão Linear Carteiras mvp e PSI20.....	54
Anexo 6 – Alternativas à metodologia de Markowitz.....	55
Anexo 6.1 - Performance carteiras variância mínima baseadas no desvio padrão.....	55

Anexo 6.2 – Performance carteiras variância mínima baseadas no Beta	56
Anexo 7 – Resultados Regressão para os Factores Fama & French (SMB e HML)..	58
Anexo 8 – Resultados Carteiras Semi-Variância Mínima.....	59

Índice de Tabelas

Tabela 1 - Resultados diferentes métodos estimação parâmetros	14
Tabela 2 – Performance das Carteiras Variância Mínima.....	18
Tabela 3 - Performance carteiras baseadas no desvio padrão	36
Tabela 4 - Performance carteiras baseadas no Beta	37
Tabela 5 - Resultados carteiras Semi-variância mínima	42

Índice de Figuras

Figura 1 - Rendibilidades acumuladas de vários Mercados no período em análise	11
Figura 2 - Desvio Padrão Anualizado de vários Mercados no período em Análise	11
Figura 3 - Desvio Padrão anualizado das carteiras mvp.....	15
Figura 4 - Rendibilidade e Desvio Padrão anualizado das carteiras max_R/SD.....	17
Figura 5 - Desvio Padrão Anualizado Período 2005-2007	20
Figura 6 - Perda Máxima Período 2005-2007	22
Figura 7 - Rendibilidade Acumulada Período 2005-2007.....	22
Figura 8 - Desvio Padrão Anualizado Período 2008-2012.....	24
Figura 9 - Perda Máxima Período 2008-2012	25
Figura 10 -Rendibilidade Acumulada Período 2008-2012.....	26
Figura 11 – Histograma das Rendibilidades diárias no período 2005-2012	28
Figura 12 - Número de títulos incluídos nas carteiras mvp.....	29
Figura 13 - Composição da carteira mvp_shrink por sectores de actividade	29
Figura 14 - Composição da carteira mvp_shrink_cap10 por de sectores de actividade.	29
Figura 15 - Peso dos quintis baseados no D. Padrão na carteira mvp_shrink	31
Figura 16 - Peso dos quintis baseados no D. Padrão na carteira mvp_shrink_cap10.....	31
Figura 17 - Peso dos quintis baseados no Beta na carteira mvp_shrink.....	32
Figura 18 - Peso dos quintis baseados no Beta na carteira mvp_shrink_cap10	32
Figura 19 - Factor Dimensão na carteira mvp_shrink	34
Figura 20 - Factor Valor na carteira mvp_shrink	34

Siglas e Acrónimos

3m/6m – Período Janela estimação parâmetros de 3 meses ou 6 meses

1/N – Carteira Igualmente Ponderada

avg – Average

beta_x – Carteira formada pelo quintil x ordenado pelo Beta

CAPM – Capital Asset Pricing Model

mvp – Carteira(s) Variância(s) Mínima

mvp_shrink – Carteira Variância Mínima com aplicação da metodologia de *shrinkage*

mvp_shrink_cap10 - Carteira Variância Mínima com aplicação da metodologia de *shrinkage* e imposição limites de 10% por título

mvp_shrink_sv – Carteira Semi-Variância Mínima com aplicação da metodologia de *shrinkage*

mvp_shrink_sv_cap10 - Carteira Semi-Variância Mínima com aplicação da metodologia de *shrinkage* e imposição limites de 10% por título

max_R/SD – Carteira que maximiza o rácio Rendibilidade/Desvio Padrão

max_R/SD_shrink – Carteira maximiza o rácio Rendibilidade/Desvio Padrão com aplicação da metodologia de *shrinkage*

MTB – Market to Book

MV – Market Value

R – Rendibilidade

SD – Desvio Padrão

sd_x – Carteira formada pelos quintil x ordenado pelo Desvio Padrão

1 – Introdução

O conceito de carteira de variância mínima não é novo, de facto ele é parte integrante dos conceitos introduzidos por Markowitz em 1952, no seu trabalho sobre a selecção e construção de carteiras, cujo impacto foi significativo não só no meio académico mas também no mundo financeiro (Anexo 1 -exemplo Fundo DAX baseado no conceito de variância mínima).

Vários estudos recentes demonstram que uma simples estratégia com objectivo de redução de volatilidade consegue superiorizar-se aos índices representativos de mercado (índices ponderados pela capitalização), ao obter rendibilidades similares aos índices mas com uma substancial redução de volatilidade.

Tendo por base os resultados destes estudos, que incidiram sobre mercados de acções desenvolvidos, com destaque por exemplo para o mercado norte-americano, apesar de outros mercados internacionais apresentarem também resultados semelhantes, procurou-se no presente trabalho avaliar se a mesma estratégia obtinha resultados semelhantes no mercado português, um mercado de menor dimensão e menos desenvolvido que os referidos anteriormente.

Com este objectivo em mente, o trabalho foi estruturado nas seguintes etapas. Após uma breve descrição dos estudos empíricos já realizados sobre este tema, avaliaram-se diferentes métodos de estimação dos parâmetros, requisitos obrigatórios no modelo de selecção de carteiras de Markowitz, mas ao mesmo tempo, uma das principais dificuldades associadas a este modelo.

Após definido o modelo de estimação de parâmetros, avaliou-se a performance da carteira de variância mínima, face ao índice de mercado, uma carteira igualmente ponderada e também uma carteira cujo objectivo é a maximização do rácio de retorno ajustado pela volatilidade. Esta comparação foi dividida em dois períodos, um caracterizado por baixa volatilidade e rendibilidades positivas em todos os títulos (*Bull Market*) e outro com as condições opostas (*Bear Market*), com o intuito de avaliar as carteiras de variância mínima nestes dois cenários, bem como as suas características. Tendo por base outros estudos, procurou avaliar-se também a performance de carteiras de baixo risco, sem recorrer ao modelo de Markowitz, ou seja, determinar a composição

das carteiras apenas com base nas características individuais dos títulos, neste caso, o desvio padrão e o Beta. Por último, procurou-se encontrar uma forma de não penalizar a carteira de variância mínima com a volatilidade positiva, recorrendo para isso à semi-variância.

2 – Revisão de Literatura

2.1 – Modelo Seleção Carteiras de Markowitz

O modelo de selecção de carteiras, habitualmente designado por Teoria de Gestão de Carteiras, foi apresentado por Markowitz (1952) e uma vez que a sua aplicação constitui uma parte central neste trabalho, será feita nesta secção uma breve descrição desta metodologia.

A principal ideia da metodologia proposta por Markowitz, na qual o investidor está perante a escolha entre risco e rendibilidade, assenta no conceito de diversificação, através da qual é possível reduzir o risco de uma carteira (risco medido pelo desvio padrão) através da combinação de vários títulos nessa carteira, desde que a correlação entre os mesmos não seja perfeita. Enquanto que a rendibilidade de uma carteira é igual à media ponderada das rendibilidades dos títulos que a compõem, o mesmo já não acontece para a sua variância. Se a correlação entre os títulos for inferior a 1, é possível construir uma carteira com uma variância inferior à media dos mesmos.

Assim, esta metodologia permite definir a composição de uma carteira, através da selecção dos títulos e respectivos pesos, minimizando o risco para cada nível de rendibilidade pretendido. O conjunto de carteiras que minimiza o risco para cada nível de rendibilidade constitui o conjunto de carteiras eficientes. Do conjunto de carteiras eficientes, a que apresenta o menor risco (e também a menor rendibilidade), designa-se por carteira de variância mínima e será o objecto central do presente estudo.

As seguintes expressões permitem determinar o conjunto das carteiras eficientes:

$$\min \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \quad \text{s. a } \sum_{i=1}^n w_i = 1; \mu_p \geq \mu_{mvp} \quad (1)$$

$$\mu_p = \sum_{i=1}^n w_i E(r)_i \quad (2)$$

- σ_p^2 : Variância da carteira
 μ_p : Rendibilidade da carteira
 μ_{mvp} : Rendibilidade da carteira variância mínima
 w_i : Peso relativo do título i
 $E(r)_i$: Retorno esperado título i
 n : nº de títulos

A carteira de variância mínima tem a particularidade de apenas necessitar da matriz das variâncias-covariâncias para a sua determinação, enquanto que todas as outras, necessitam minimizar a variância sujeitas a uma determinada rendibilidade. A necessidade de estimar estes dois elementos é assim um requisito obrigatório e constitui uma das principais dificuldades desta metodologia, pois os parâmetros estimados podem apresentar resultados muito diferentes no período fora da amostra.

Sharpe (1964), utilizou e desenvolveu os conceitos da gestão de carteiras de Markowitz e iniciou um modelo de equilíbrio geral de preços, o CAPM, que suportado num conjunto alargado e exigente de pressupostos define o conceito de carteira de mercado, que em conjunto com um activo sem risco, será a escolha de um investidor racional e preferível à carteira de variância mínima.

2.2 – Estudos Empíricos sobre Carteiras de Variância Mínima

Nesta secção, serão apresentados de forma resumida os estudos que se centram especificamente na temática das carteiras de baixa volatilidade/risco.

O nome de Robert Haugen surge frequentemente associado ao tema das carteiras de baixa variância, em grande parte devido aos trabalhos publicados, onde por um lado questiona a eficiência de mercado mas sobretudo por evidenciar que o risco em muitos casos não é compensado por mais rendibilidade. Haugen et al. (1975) analisam alguns dos problemas comuns em diversos estudos empíricos em torno desta temática, com particular ênfase na selecção de títulos sujeita a “*survivor bias*” e que por esse motivo os resultados não são fiáveis. Neste estudo são comparadas as performances de 114 carteiras, com 25 títulos cada uma, no período 1926-1971 e obtém-se uma relação inversa entre risco e rendibilidade através da regressão entre estas duas variáveis (títulos cotados na Bolsa de Nova York).

Haugen et al. (1991), demonstram a ineficiência dos índices de capitalização bolsista recorrendo ao conceito de variância mínima. Para isso constroem uma carteira de variância mínima, seleccionando títulos de um universo dos 1000 maiores títulos em capitalização bolsista dos EUA e comparam esta carteira com o índice Wilshire 5000 bem como dois grupos de 1000 carteiras cada um (um com uma estrutura de pesos idêntica à da carteira de variância mínima e outro com uma estrutura de pesos

ponderada pela capitalização). Os resultados da carteira de variância mínima apresentam superioridade face aos três comparativos, com destaque para a performance face ao índice Wilshire 5000, com uma rendibilidade superior em 21% e redução de volatilidade de 14%, para a totalidade do período.

Jagannathan & Ma (2003), analisam os efeitos da introdução de restrições na optimização de carteiras, construindo carteiras com base em amostras de 500 títulos do mercado norte-americano e concluem que no período fora da amostra as carteiras de variância mínima obtêm rácios de Sharpe superiores às carteiras tangentes à fronteira eficiente, quer estas sejam construídas com ou sem restrições de *short selling*. Atribuem este resultado ao facto dos erros de estimação da rendibilidade serem tão significativos, que mesmo impondo restrições na composição das carteiras, estes não são suficientes para superar a performance das carteiras de variância mínima. As reduções de volatilidade obtidas neste estudo, situam-se entre os 30% e 20% face à carteira de tangência e carteira igualmente ponderada respectivamente (tendo como comparação a carteira variância mínima recorrendo aos estimadores propostos por Ledoit & Wolf).

Clarke et al. (2006) adoptam uma abordagem similar à de Haugen et al. (1991) e analisam a performance de uma carteira de variância mínima de 1968 a 2005 comparando-a com um índice cuja composição é semelhante ao *Russel 1000*. Para a construção da matriz das variâncias-covariâncias utilizam a metodologia de *shrinkage* bem como a de componentes principais. Os resultados confirmam os estudos efectuados anteriormente, sendo que a carteira de variância mínima obtém um rácio de Sharpe superior ao do índice de mercado em 50%, conseguindo uma redução da volatilidade de 25% e uma rendibilidade anualizada superior em 16%. O *Alpha de Jensen*, face ao índice de mercado é de 2,8% para a totalidade do período. Clarke et al. analisam também a exposição da carteira de variância mínima aos factores Fama & French e verificam que esta tende a seleccionar títulos de menor dimensão e com rácios *Market to Book* inferiores.

Shapiro et al. (2009), analisando os títulos que compõem o Russel 3000 durante o período 1986-2007, obtêm resultados similares. A carteira que visa a minimização da volatilidade tem como restrições para títulos individuais, sector e indústria

respectivamente, 1%, 10% e 25%. A performance da carteira de risco mínimo apresenta uma rendibilidade superior ao mercado em 5% e redução de volatilidade em 32%.

Ainda no espaço norte-americano, mas analisando o mercado Canadano de acções, Bodjov et al. (2010), obtêm resultados idênticos aos anteriores estudos mencionados. O período em estudo foi de 1989 a 2009 e constroem carteiras de variância mínima com restrições de alocações de 3% por título individual e 25% por sector, obtendo as carteiras de variância mínima um rácio de Sharpe de 0,54 face ao índice de mercado de 0,17 (volatilidade inferior ao mercado em 35% e rendibilidade superior em 39%). Decompondo a performance por meses, a carteira de variância mínima supera o mercado em 83% dos meses em que o mercado apresenta uma rendibilidade negativa e fica abaixo deste em 73% dos meses na situação inversa. A exposição face aos factores Fama & French é similar ao documentado por Clarke et al. (2006), ou seja, preferência pelo factor Valor (baixo rácio *Market to Book*) e factor Dimensão (menor capitalização bolsista).

Nielsen & Aylursubramanian (2008) estendem a análise do conceito de variância mínima a outros mercados, desenvolvendo para isso uma estratégia de baixa volatilidade envolvendo os componentes do índice MSCI World. O período em estudo foi de 1995 a 2007 e carteira de variância mínima (MSCI MV) obteve rácios de Sharpe superiores ao índice *benchmark* (MSCI World) em 46%, obtendo uma redução de volatilidade de 30% e rendibilidade superior em 17%. A carteira MSCI MV apresenta um Beta que oscila entre os 0,8 e 0,5 durante o período em análise.

Blitz & Vliet (2007) comparam diversas carteiras, construídas não com base no conceito de variância mínima de Markowitz, mas recorrendo apenas à volatilidade de cada título. Constroem 10 decis ordenados pela volatilidade histórica dos últimos 3 anos de observações semanais. O estudo recaiu sobre os componentes do índice FTSE World e o período em análise foi de 1985 a 2006. A carteira composta pelo decil de títulos com menores volatilidades, apresenta um rácio de Sharpe superior ao do índice de referência em 80%, com uma redução de volatilidade de 33% e uma rentabilidade anualizada superior em 22%. As carteiras de menor volatilidade exibem à semelhança dos outros estudos apresentados, baixo Beta, menores perdas máximas (*Maximum Drawdowns*) e performances superiores ao mercado nos períodos de descida do índice e o inverso nos períodos de subida. Os factores Dimensão e Valor estão igualmente presentes, mas não

são suficientes para explicar a totalidade da performance das carteiras de baixa volatilidade e como tal defendem que a volatilidade deve ser considerada como um factor adicional.

Ang et al. (2006, 2009) avaliam por seu turno a volatilidade idiossincrática (retorno não explicado pelo modelo dos três factores de Fama & French, ou seja, Beta, HML e SMB) e concluem quer para o mercado norte-americano quer para mercados internacionais, que também nesta dimensão, os títulos com maiores níveis de volatilidade não são compensados na dimensão rendibilidade. Considerando ainda o risco idiossincrático, Fu (2009) adverte no entanto, para que se as volatilidades consideradas forem as estimadas (de acordo com modelos GARCH) a relação positiva entre risco e rendibilidade se verifica.

3 – Estudo Empírico

3.1 – Dados e Metodologia

O presente estudo incide sobre os títulos que compõem o mercado de acções portuguesas restrito aos componentes do índice PSI20. Para este efeito foram obtidas, da base de dados da Thomson Reuters, os preços diários desde o início do ano 2005 até Julho de 2012, de todos os títulos e do próprio índice.

Com base nestes dados, foi construída trimestralmente uma carteira de variância mínima e como comparativos, uma carteira que maximiza o rácio Retorno/Volatilidade e também uma carteira com peso idêntico para todos os títulos.

Uma vez que a composição do índice sofreu alterações durante o período de estudo, os títulos que servem de base à determinação das carteiras eficientes têm esse facto em consideração de forma a não gerar enviesamentos nos resultados devido a informação que só estaria disponível depois dos factos (*data mining* e *survivor bias*). Assim, no último dia de cada período, são verificados quais os títulos que compõem o índice PSI20 e com base nessa informação são determinadas as respectivas carteiras de acordo com a metodologia de Markowitz. As carteiras são apenas determinadas no fim de cada trimestre e como tal, se existir alguma alteração ao PSI20 a meio do período, esta apenas será considerada no final. No entanto, sempre que um anúncio de alteração do PSI20 ocorra antes do final de um trimestre, este é tido em consideração para a resolução do respectivo problema de optimização, que determinará a carteira em vigor no período seguinte. Desta forma, garante-se que todas as carteiras constituídas neste estudo têm por base informação que estaria disponível no momento da sua determinação.

Relativamente às carteiras que funcionam como comparativo, a carteira igualmente ponderada ($1/N$) é relevante pois representa uma carteira que não é constituída com base em nenhuma critério de optimização ou eficiência e como tal seria de esperar, à partida, que tivesse um desempenho inferior. A carteira que procura maximizar o rácio Retorno/Volatilidade (\max_R/SD), apesar de não constar da generalidade dos estudos efectuados sobre as carteiras de variância mínima, é também um importante *benchmark* pois representa sempre uma carteira pertencente à fronteira eficiente. Por último e à

semelhança da generalidade dos estudos efectuados sobre este tema, o índice representativo do mercado português (PSI20) será também utilizado como comparativo face à carteira de variância mínima (mvp).

Dada a elevada sensibilidade da constituição das carteiras, decorrente do processo de optimização dos parâmetros estimados (Chopra et al., 1993), para a construção da matriz das variâncias-covariâncias e para o vector dos retornos esperados, foram utilizadas duas abordagens distintas. A primeira foi a de considerar dois períodos diferentes como base da amostra, um de três meses de observações diárias e outro de seis meses também de observações diárias, para se poder avaliar se um maior número de observações conduz a parâmetros estimados com menos erros no período fora da amostra. Se por um lado, um maior período de observações tem o benefício de neutralizar o efeito de observações mais extremas e não representativas, por outro lado, pode também conduzir a que as condições mais recentes do mercado não fiquem espelhadas nos respectivos parâmetros a estimar. A segunda abordagem adoptada com o objectivo de minimizar os erros de estimação foi a determinação dos parâmetros a estimar, com base na metodologia *Bayesiana de shrinkage*. O método proposto por Ledoit & Wolf (1994) foi usado para estimar a matriz das variâncias-covariâncias e o método proposto por Jorion (1986) foi usado para estimar o vector das rendibilidades esperadas. Após a aplicação destas duas metodologias, estas são comparadas e a que apresente resultados superiores e mais consistentes será considerada como a referência para as restantes análises neste estudo, análises estas que incidem sobre a sua performance, bem como a sua comparação com os respectivos *benchmarks*.

Importa também referir que neste estudo não se considerou a possibilidade de *short selling* em qualquer título na determinação das várias carteiras, pelo facto de tal não ser sempre possível, ou mesmo sendo possível, por vezes existem algumas restrições a essa possibilidade. Para efeitos de comparação de performance da carteira de variância mínima, neste estudo foram impostas também restrições ao peso máximo (10%) que cada título pode ter na respectiva carteira, à semelhança da generalidade dos estudos sobre esta matéria, bem como pelo facto da realidade prática destas estratégias de investimento, incluir também estas restrições quer quanto ao peso individual de cada título bem como ao peso global de cada sector. No caso particular deste estudo, a restrição do peso global dos vários sectores não foi tida em consideração. Embora a introdução de restrições no problema de optimização que está subjacente à

determinação de carteiras eficientes, conduza por definição a um resultado sub-óptimo e como tal a carteira obtida não é a carteira com a variância mínima possível a existência de erros de estimação faz com que na prática estas restrições ao serem aplicadas, acabem por funcionar também como uma forma de minimizar os erros de estimação uma vez que impede a concentração num número reduzido de títulos cuja performance estimada contenha observações mais extremas e pouco representativas. Este fenómeno, em que a optimização conduz a uma alocação excessiva em títulos que obtiveram melhores performances no período da amostra e depois têm um desempenho inferior no período fora da amostra é habitualmente designado por maximização do erro (Michaud, 1989) e é precisamente este tipo de erros que pretende ser evitado ao colocar restrições na composição das carteiras no âmbito da metodologia de carteiras de Markowitz. É importante, no entanto, realçar o facto da restrição a *short selling* acabar por constituir por si só um importante travão a este fenómeno de maximização de erros, erros que acabam depois por penalizar a performance das diversas carteiras no período fora da amostra. Em particular, a carteira de variância mínima é a que apresenta os melhores resultados entre as carteiras da fronteira eficiente para o período fora da amostra, pois não necessita das estimativas dos retornos (Jagannathan & Ma, 2003 e DeMiguel et al., 2009).

A comparação dos resultados das diversas carteiras será dividida em dois períodos, um de Janeiro de 2005 até Dezembro de 2007 e o restante período de Janeiro de 2008 até Julho de 2012. Esta separação de períodos de análise, prende-se com a notória diferença de comportamento dos mercados financeiros em geral e do mercado accionista em particular, sobre o qual incide o presente estudo, diferença esta associada a diversos factores económicos e financeiros, com particular destaque para a crise das dívidas soberanas.

Na Figura 1 e Figura 2, está apresentada a rendibilidade acumulada bem como o desvio padrão anualizado de diversos índices representativos de diversos mercados europeus e do mercado norte-americano. Até 2008 o desvio padrão está na generalidade contido até cerca de 20% e a partir desse momento são diversos os períodos onde este valor é excedido nos diversos mercados. Em particular, o índice PSI20 apresenta os maiores níveis de volatilidade no período de Agosto a Dezembro de 2008 embora apresente também outros picos de volatilidade significativa, algo que no período de 2005 até meados de 2007 apenas ocorreu uma vez, em Abril de 2006. De salientar é também o

facto de o pico de volatilidade ocorrido em 2006 ser marcado por uma subida no valor do índice enquanto que as volatilidades a partir de 2007 estão marcadas pelo movimento inverso.

Figura 1 - Rendibilidades acumuladas de vários Mercados no período em análise

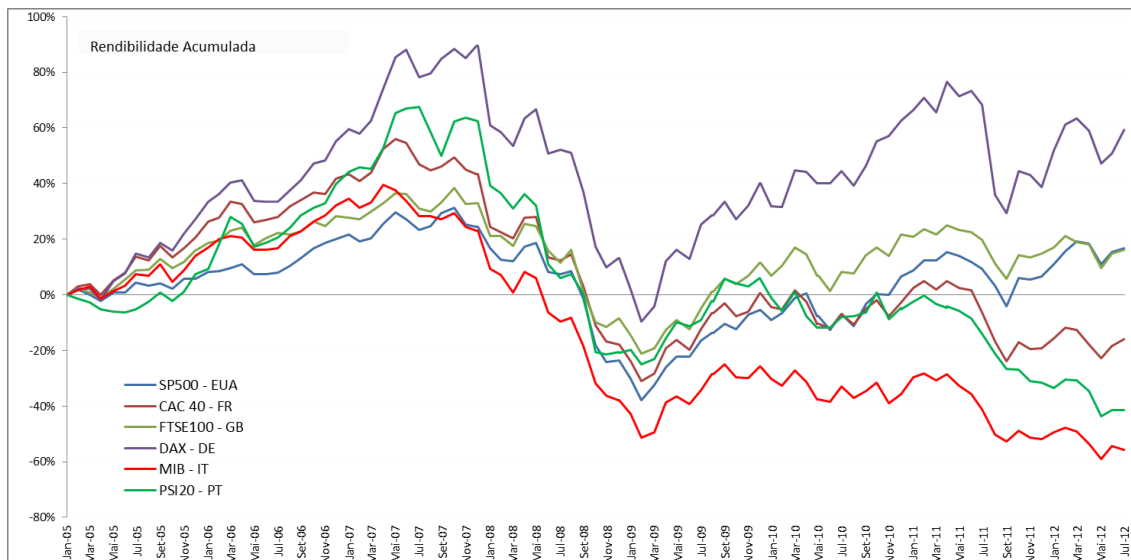
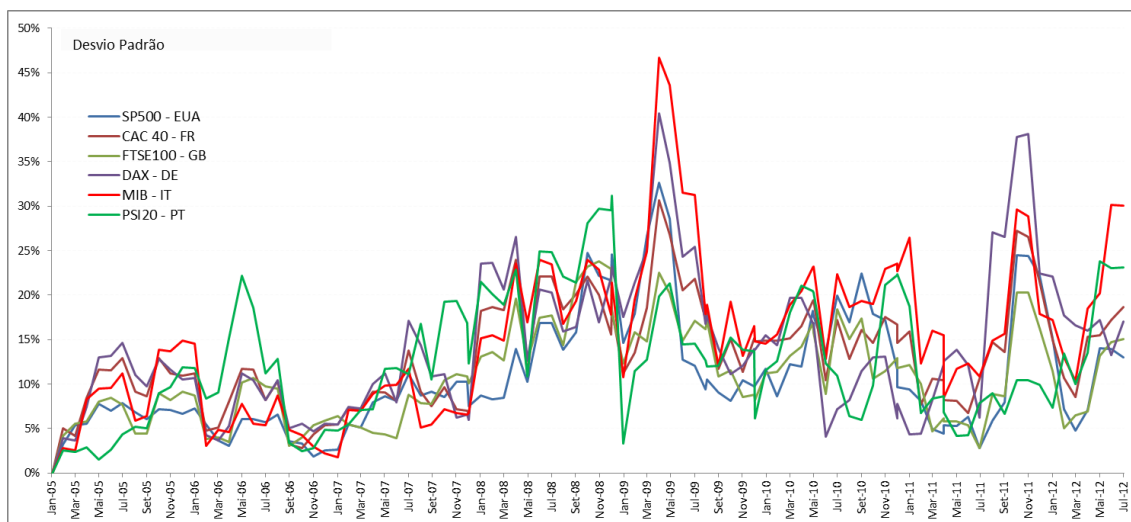


Figura 2 - Desvio Padrão Anualizado de vários Mercados no período em Análise



A comparação entre as diversas carteiras incidirá sobre o seu comportamento nas variáveis rendibilidade e risco. Na dimensão risco é considerada a variável tradicional, o desvio padrão, mas também a variável perda máxima, que representa a perda máxima a que um investidor está sujeito num investimento durante todo o período em análise (o termo perda máxima é também usado em determinadas figuras/gráficos, que mostram

em cada momento a perda corrente durante um determinado período em análise, embora em rigor, o termo perda máxima só deva ser utilizado para o valor máximo atingido durante esse período). Esta variável, em complemento com a volatilidade, tem particular relevância no presente estudo pelo facto de um dos principais objectivos numa carteira de variância mínima ser a minimização do risco e preservação de capital e portanto a informação da perda máxima surge como um complemento da informação fornecida pelo desvio padrão, pelo facto de este não distinguir volatilidade positiva ou negativa.

Dada a variabilidade dos resultados durante o período em análise, são utilizados testes estatísticos para verificação das hipóteses subjacentes a este estudo, ou seja, a verificação da redução da volatilidade sem uma correspondente penalização na rendibilidade. Assim serão efectuados dois testes de hipóteses para as várias carteiras em estudo. Um dos testes incidirá sobre a hipótese da igualdade das rendibilidades médias (para este teste utilizou-se a distribuição *t* de *student*) e outro referente à igualdade das variâncias (para este teste utilizou-se a distribuição *F*), tendo sempre como referência as carteiras de variância mínima (com e sem restrições).

Em resumo:

- Teste de hipóteses das rendibilidades médias:

$$\begin{aligned} H_0: R_{mvp} &\geq R_{comparativo} \\ H_A: R_{mvp} &< R_{comparativo} \end{aligned}$$

- Teste de hipóteses das volatilidades:

$$\begin{aligned} H_0: \delta_{mvp}^2 &\geq \delta_{comparativo}^2 \\ H_A: \delta_{mvp}^2 &< \delta_{comparativo}^2 \end{aligned}$$

No âmbito da comparação da performance global das diversas carteiras serão utilizadas duas métricas, o rácio Rendibilidade/Volatilidade, bem como o rácio Rendibilidade/Perda Máxima (também designado como Rácio de Calmar) para complementar a visão do risco além da tradicional métrica utilizada, o desvio padrão.

Será feita uma análise das características da composição das carteiras de variância mínima, em primeiro lugar, sobre a concentração ou dispersão do número de títulos que a compõem, a respectiva alocação aos sectores de actividade e em segundo lugar sobre as características desses mesmos títulos nas variáveis de risco específico (desvio

padrão) e risco não diversificável (Beta). Deste modo podemos avaliar a relação entre as duas variáveis e avaliar se o risco não diversificável (β) apresenta também um papel importante na definição das carteiras de variância mínima. Adicionalmente será avaliada a exposição da carteira de variância mínima aos factores Fama & French (Dimensão e Valor).

Por último serão construídas carteiras de semi-variância mínima, com o objectivo de a comparar com a métrica mais usual, a variância.

3.2- Metodologias de determinação das carteiras em análise

Construíram-se carteiras de variância mínima bem como as carteiras de maximização do rácio Rendibilidade/Desvio Padrão a cada trimestre com base nas amostras das observações diárias dos três e seis meses anteriores, quer com a aplicação do método de *shrinkage*, quer sem a aplicação deste método, para avaliar se a aplicação dos mesmos conduz à minimização dos erros de estimação, bem como avaliar se o comportamento das respectivas carteiras difere de forma significativa para assim podermos determinar qual o método escolhido para as subseqüentes análises neste estudo.

O método de *shrinkage*, baseado no princípio *Bayesiano*, foi utilizado quer para determinar a matriz das variâncias- covariâncias quer para a determinação do vector dos retornos esperados. A determinação da matriz das variâncias-covariâncias utilizou a metodologia proposta por Ledoit & Wolf (1994) cuja expressão está apresentada na equação (3) (o detalhe do cálculo da intensidade de shrinkage, w_{LW} , está disponível no Anexo 2).

$$\Sigma_{LW} = w_{LW} \cdot \Sigma_{cc} + (1 - w_{LW}) \cdot \Sigma_s \quad (3)$$

Σ_{LW} : Matriz Variâncias-Covariâncias utilizada na optimização

w_{LW} : Intensidade de shrinkage

Σ_{cc} : Matriz Variâncias-Covariâncias com Correlações Constantes

Σ_s : Matriz Variâncias-Covariâncias obtida directamente da amostra

Ainda segundo a metodologia de *Bayesian shrinkage*, mas no que à determinação do vector dos retornos esperados diz respeito, utilizou-se o estimador Bayes-Stein proposto

por Jorion (1986) de acordo com a equação (4) (o detalhe do cálculo da intensidade de shrinkage para o estimador Bayes-Stein, W_{BS} , está disponível no Anexo 2):

$$U_{BS} = w_{BS} \cdot U_{cvm} + (1 - w_{BS}) \cdot U_s \quad (4)$$

U_{BS} : Vector dos retornos esperados utilizado na optimização

w_{BS} : Intensidade de shrinkage

U_{cvm} : Vector dos retornos esperados da carteira variância mínima

U_s : Vector dos retornos esperados obtida directamente da amostra

Com base nos dois períodos de estimação e métodos atrás descritos obtiveram-se, para o período completo do estudo (2005-2012), os seguintes resultados apresentados na Tabela 1.

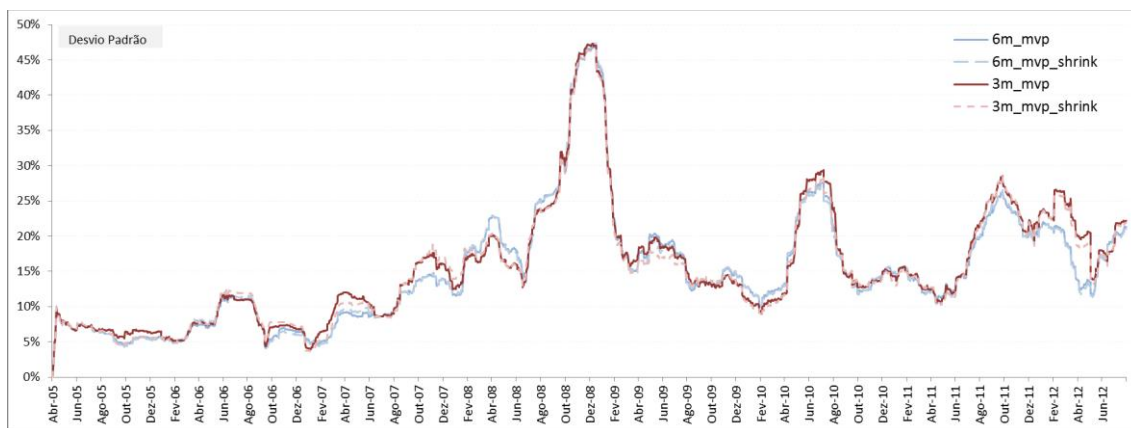
Tabela 1 - Resultados diferentes métodos estimação parâmetros

	Rendibilidade (R)	Desvio Padrão (SD)	R/SD
6m_mvp	-5,25%	17,49%	-
6m_mvp_shrink	-5,91%	17,49%	-
3m_mvp_shrink	-4,38%	17,75%	-
3m_mvp	-3,20%	18,02%	-
6m_maxR/SD_shrink	7,90%	30,17%	0,26
6m_maxR/SD	5,46%	27,53%	0,20
3m_maxR/SD	4,64%	29,26%	0,16
3m_maxR/SD_shrink	2,72%	30,44%	0,09
1/N	-7,24%	21,20%	-
PSI20	-6,66%	20,60%	-

Estes resultados apresentam a performance das várias carteiras para o período fora da amostra e estão ordenados por ordem decrescente relativamente ao objectivo que pretendem atingir, ou seja, as carteiras de variância mínima estão ordenadas pelo desvio padrão e as carteiras max_R/SD estão ordenadas pelo rácio R/SD. Podemos verificar que, quer no objectivo de redução da volatilidade quer no objectivo de maximização do rácio R/SD, as carteiras construídas com base em seis meses de observação apresentam os melhores resultados, não sendo no entanto claro os benefícios da aplicação do método de shrinkage nas carteiras de variância mínima. Para as carteiras de variância mínima, o melhor resultado obtido é aquele que se baseia apenas nas observações da amostra e apenas depois aparecem as carteiras definidas com base no método de

shrinkage, no entanto a diferença no desvio padrão, para todo o período considerado, é muito reduzida, não sendo detectada diferença até à centésima, como se pode ver por exemplo para as carteiras baseadas em seis meses de observações onde ambas apresentam um desvio padrão anualizado de 17,49%. Na Tabela 1 estão apresentados apenas os valores que resumem a performance para todo o período e por isso é conveniente analisar o comportamento das várias metodologias ao longo do período para verificar a consistência das mesmas durante períodos com diferentes características, principalmente a diferença dos níveis de volatilidade. Na Figura 3 podemos então verificar que o comportamento das várias metodologias é muito consistente durante todo o período em análise onde cada metodologia obtém resultados ligeiramente melhores nuns períodos e piores noutros obtendo por isso resultados muito idênticos para a globalidade do período em análise. Importa no entanto realçar o facto da maior diferença obtida se verificar na comparação entre as carteiras constituídas com base nos diferentes períodos da amostra (3 meses e 6 meses de observações) e um resultado praticamente idêntico entre a metodologia com e sem a aplicação de *shrinkage* à matriz das variâncias e covariâncias.

Figura 3 - Desvio Padrão anualizado das carteiras.mvp

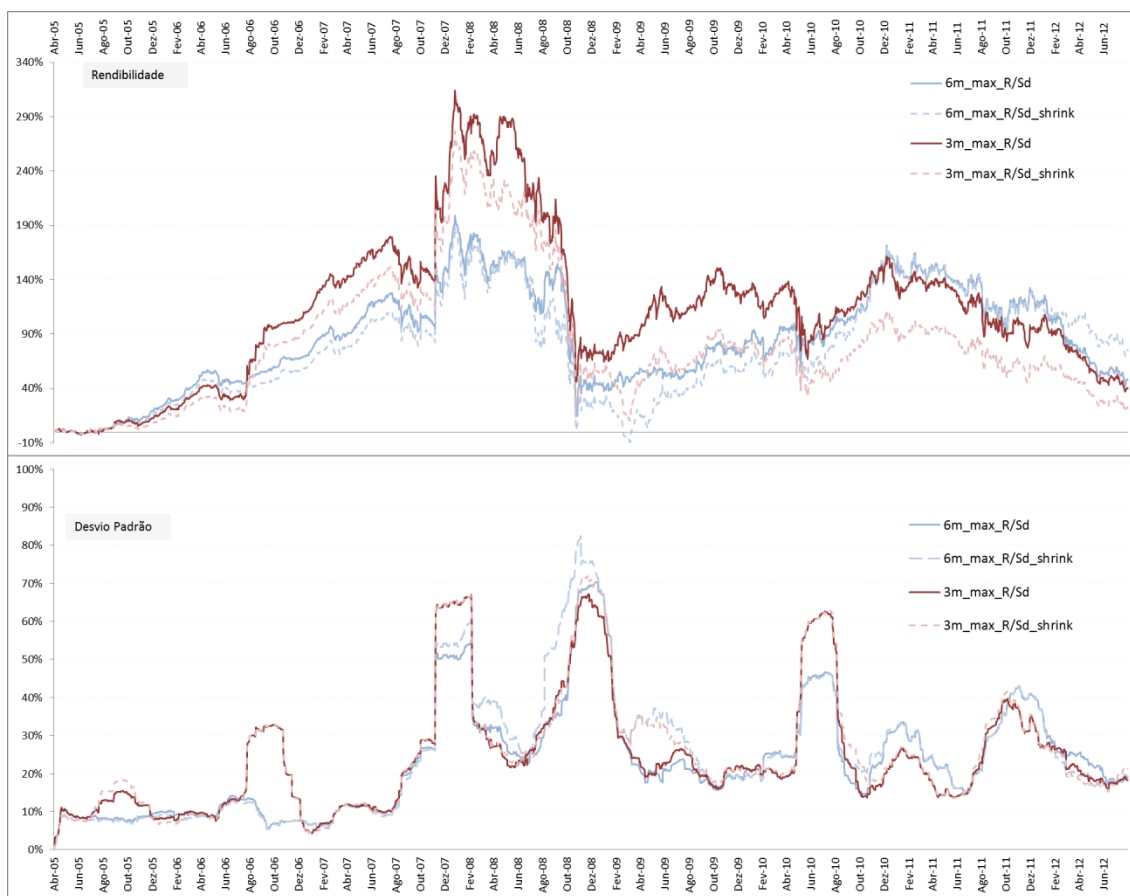


Uma vez que os erros de estimação têm maior impacto relativamente ao vector das rendibilidades esperadas (Chopra et al., 1993), seria expectável que o método de *shrinkage* apresentasse os melhores resultados para as carteiras que procuram maximizar o rácio R/SD, uma vez que apenas estas necessitam do parâmetro das rendibilidades esperadas para o processo de optimização. Se é verdade, que com base em seis meses de observações este método apresenta de facto os melhores resultados, já

não acontece o mesmo se considerarmos as carteiras baseadas em três meses de observações.

Na Figura 4 (cujo gráfico das rendibilidades está alinhado por períodos com o desvio padrão respectivo para as mesmas carteiras), é interessante observar que as carteiras definidas com base em três meses de observações apresentam uma rendibilidade muito superior às carteiras definidas com base em 6 meses de observações durante o período com volatilidades inferiores (até Dezembro 2007) com o respectivo aumento da volatilidade sobretudo entre Junho e Outubro de 2006 e entre Outubro e Dezembro 2007. Um dos factores que contribui para uma rendibilidade tão elevada em Novembro de 2007 foi o de uma das carteiras ser constituída a 100% pelo título da Galp que em apenas dois dias obteve uma rendibilidade de aproximadamente 40%. Neste caso o resultado é positivo, no entanto, o movimento em sentido inverso também pode acontecer, sendo por isso usual a aplicação de restrições aos pesos que cada título pode ter numa carteira. As rendibilidades superiores mantêm-se aproximadamente até Maio de 2010. A partir daqui o retorno acumulado das várias carteiras acaba por ficar mais nivelado, acabando inclusivamente pela rendibilidade acumulada, no final de todo o período, ser muito similar para as carteiras construídas com base em três e seis meses de observações mas sem a aplicação de *shrinkage* nos seus parâmetros estimados. É sobretudo a partir do final do ano de 2011, que a carteira construída com base em seis meses de observações e com a aplicação de *shrinkage* se destaca e acaba por ter uma redução da rendibilidade inferior às restantes carteiras.

Outro aspecto a destacar nesta comparação é o facto de as volatilidades terem alguns picos em momentos da melhoria da rendibilidade (essencialmente na carteira 3m_max_R/SD) no entanto no período em que esta apresenta a maior queda, aproximadamente de Dezembro de 2007 a Outubro de 2008, a volatilidade acompanha de perto as restantes carteiras, sublinhando assim a importância de analisar a perda máxima em conjunto com o desvio padrão para avaliar o risco efectivo.

Figura 4 - Rendibilidade e Desvio Padrão anualizado das carteiras max_R/SD

As metodologias anteriormente mencionadas têm como objectivo minimizar os erros de estimação, mas numa análise global aos valores obtidos neste caso de estudo em particular, um maior número de observações bem como o método de shrinkage não apresentam em todos os casos, resultados superiores de forma consistente para se poder concluir que um é claramente superior aos restantes. Não sendo evidente a conclusão de que um método se destaca de forma clara em nenhum dos cenários, a metodologia usada para a construção das carteiras de variância mínima e das carteiras max_R/SD no estudo empírico a seguir apresentado, é a que tem por base os seis meses de observações diárias com a aplicação do método de *shrinkage* (para a matriz das variâncias covariâncias bem como para o vector dos retornos esperados), uma vez que é esta que apresenta os melhores resultados nas carteiras max_R/SD e um resultado praticamente idêntico ao melhor obtido nas carteiras mvp. Como referido anteriormente, a aplicação deste método de *shrinkage* será também utilizado nas carteiras com restrições ao limite dos pesos que cada título pode ter na carteira. Uma das razões que pode contribuir para a minimização dos erros de estimação e para um resultado pouco claro quanto aos benefícios da aplicação da metodologia de *shrinkage* pode ser o facto de terem sido

utilizadas observações diárias na amostra em vez de observações mensais, que são usadas em muitos dos estudos que incluem a determinação de carteiras eficientes o que pode conduzir a parâmetros estimados da amostra com maior exactidão (Gosier et al., 2005), bem como o uso da restrição de *short selling* que por si só, diminui em grande medida impacto dos erros de estimação com base na amostra (Jagannathan & Ma, 2003).

3.3 – Análise Resultados

Nas secções seguintes serão apresentados e analisados os resultados tendo em conta a divisão por períodos referida anteriormente na secção da metodologia.

3.3.1 – Análise Resultados no período 2005 a 2007

O período de 2005 a 2007 é marcado por uma subida praticamente constante do índice PSI20 sem a ocorrência de picos significativos de volatilidade. É por isso importante avaliar o comportamento da carteira de variância mínima face aos restantes comparativos neste enquadramento, uma vez que sendo o seu objectivo a redução da volatilidade, este acaba também por penalizar a performance quando a volatilidade é positiva, algo que acontece em grande parte deste período.

Tabela 2 – Performance das Carteiras Variância Mínima

Painel A: 2005-2007	Rendibilidade Anualizada	Desvio Padrão Anualizado	Perda Máxima	R/SD	R/PM	teste <i>t</i> (vs <i>mvp</i>)	teste <i>F</i> (vs <i>mvp</i>)	teste <i>t</i> (vs <i>mvp cap 10</i>)	teste <i>F</i> (vs <i>mvp cap 10</i>)
mvp_shrink	15,96%	8,86%	10,56%	1,80	1,51				
mvp_shrink_cap10	20,59%	10,06%	12,61%	2,05	1,63	30,9%	0,0%		
max_R/SD_shrink	45,18%	19,87%	15,15%	2,27	2,98	3,4%	0,0%	6,9%	0,0%
1/N	19,21%	11,72%	17,69%	1,64	1,09	36,5%	0,0%	54,2%	0,0%
PSI20	20,49%	11,04%	14,15%	1,86	1,45	31,7%	0,0%	49,9%	0,6%
Painel B: 2008-2012	Rendibilidade Anualizada	Desvio Padrão Anualizado	Perda Máxima	R/SD	R/PM	teste <i>t</i> (vs <i>mvp</i>)	teste <i>F</i> (vs <i>mvp</i>)	teste <i>t</i> (vs <i>mvp cap 10</i>)	teste <i>F</i> (vs <i>mvp cap 10</i>)
mvp_shrink	-16,98%	20,99%	60,32%						
mvp_shrink_cap10	-14,60%	22,61%	55,14%			30,7%	0,5%		
max_R/SD_shrink	-9,68%	34,88%	67,61%			11,5%	0,0%	19,2%	0,0%
1/N	-20,19%	25,18%	67,22%			66,6%	0,0%	80,2%	0,0%
PSI20	-19,91%	24,56%	66,14%			66,2%	0,0%	80,0%	0,2%

Painel C: 2005-2012	Rendibilidade Anualizada	Desvio Padrão Anualizado	Perda Máxima	R/SD	R/PM	teste <i>t</i> (vs <i>mvp</i>)	teste <i>F</i> (vs <i>mvp</i>)	teste <i>t</i> (vs <i>mvp</i> <i>cap</i> <i>10</i>)	teste <i>F</i> (vs <i>mvp</i> <i>cap</i> <i>10</i>)
mvp_shrink	-5,91%	17,49%	61,90%						
mvp_shrink_cap10	-2,81%	18,93%	58,95%			35,6%	0,0%		
max_R/SD_shrink	7,90%	30,17%	68,59%	0,26	0,12	9,7%	0,0%	15,8%	0,0%
1/N	-7,24%	21,20%	72,44%			52,8%	0,0%	65,6%	0,0%
PSI20	-6,66%	20,60%	67,82%			50,9%	0,0%	64,1%	0,0%

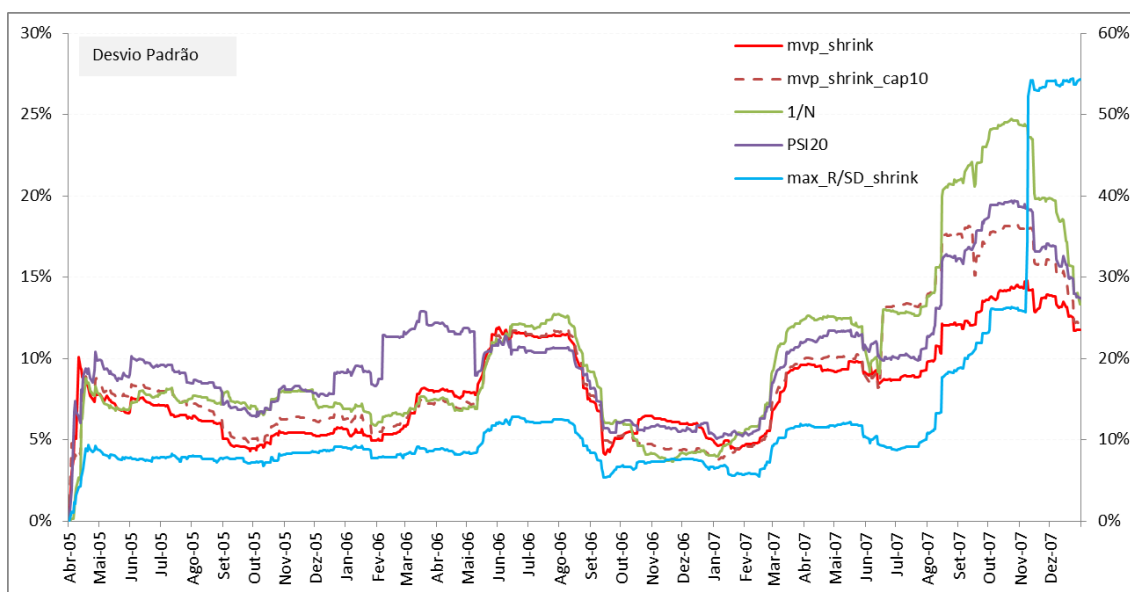
Na Tabela 2 (Painel A: 2005-2007), podemos observar que os resultados estão em linha com o objectivo das optimizações, uma vez que as carteiras *mvp* apresentam as volatilidades mais baixas, seguidas das carteiras PSI20 e 1/N e com a maior volatilidade a carteira *max_R/SD*. Estas volatilidades têm a correspondência esperada em termos de rendibilidades, excepção feita à carteira *mvp_cap10* que obtém rendibilidades superiores ao índice PSI20 e à carteira 1/N com uma diferença no desvio padrão de 1% e 1,7% respectivamente. Neste período a volatilidade da carteira *mvp_shrink* é de cerca de 80% da carteira de mercado, mas a rendibilidade cai para aproximadamente 77%. Já a carteira *mvp_shrink_cap10* obtém a mesma rendibilidade que o mercado mas com menos 10% do desvio padrão. De realçar é também o facto das perdas máximas terem uma correspondência com o desvio padrão, excepção feita à carteira *max_R/SD* que apesar de apresentar a maior volatilidade, esta não representa a maior perda, que é atingida pela carteira 1/N. No que respeita ao retorno por unidade de risco, quer este seja medido como volatilidade ou perda máxima, as carteiras sujeitas a optimização apresentam os melhores resultados, excepção feita à carteira *mvp_shrink*, que é superada pelo índice de mercado na métrica R/SD. Embora o objectivo da optimização seja alcançado pela carteira *mvp_shrink*, pois apresenta o menor desvio padrão possível, já quando ao retorno obtido, parece haver uma vantagem na introdução de restrições pois a carteira *mvp_shrink_cap10* apresenta melhores retornos por unidade de risco face à versão sem restrições.

Os resultados dos testes estatísticos, apresentam para cada carteira o *p value*, relativo ao teste de hipóteses descrito na secção da metodologia. No caso do teste *t*, apenas a carteira *max_R/SD* apresenta uma diferença de retorno média estatisticamente significativa a 95% (*p value* inferior a 5%), ou seja, apenas esta carteira apresenta rendibilidades médias estatisticamente superiores à carteira *mvp_shrink*. Quanto à

redução de volatilidade, medida neste teste caso como a variância dos retornos, os resultados dos testes são mais inequívocos, pois em todos os casos podemos rejeitar a Hipótese nula de que a variância das carteiras mvp não é inferior às restantes.

À semelhança do apresentado na secção 3.2, é conveniente analisar graficamente o comportamento das várias carteiras, para detectar possíveis variações não descortináveis apenas com os valores disponíveis na Tabela 2. Assim e quanto à redução de volatilidade, podemos verificar que este é atingido em praticamente todo o período de análise e face a todos os comparativos, como se pode observar na Figura 5^{1 2}. Os baixos níveis de volatilidade caracterizam grande parte deste período e de uma forma geral, até ao início de 2007, todas as carteiras em análise apresentam níveis de volatilidade muito semelhantes, apenas com um moderado aumento de volatilidade do índice PSI20 entre Fevereiro e Maio de 2006.

Figura 5 - Desvio Padrão Anualizado Período 2005-2007



Esta tendência é no entanto claramente interrompida quando as notícias da crise financeira (em particular do *subprime*) começam a ter eco nos mercados. Assim, a partir de Setembro de 2007 a diferença de volatilidade entre a carteira mvp_shrink e as

¹ Tendo em conta a diferença de valores relativos à carteira max_R/SD_shrink, esta está representada no eixo da direita para facilitar a comparação.

² A subida muito significativa ocorrida em Novembro de 2007 na carteira max_R/SD está relacionada com a rentabilidade do título Galp em apenas dois dias ter sido de 40%, título este que tem um peso relativo de 77% na mesma.

restantes começa a ser significativa. De realçar também, é o facto da imposição de limites de 10% na carteira *mvp* ter um efeito significativo, aproximando-se a volatilidade desta, mais ao índice PSI20 do que à carteira de variância mínima base (*mvp_shrink*). Durante este período de aumento de volatilidade, a carteira 1/N destaca-se também das restantes apenas superada pela carteira *max_R/SD_shrink*. Relativamente à variável perda máxima (Figura 6), o principal ponto de destaque é o facto de esta acompanhar de perto a volatilidade das diversas carteiras até Setembro de 2007 mas a partir daí divergir nas carteiras 1/N e *max_R/SD*, onde podemos observar que a grande subida no desvio padrão anualizado (Figura 5) na carteira *max_R/SD* é acompanhado pela recuperação desta para um ponto em que atinge um novo máximo na rendibilidade acumulada (ou seja, o valor da perda máxima corrente atinge novamente o zero). Nas restantes carteiras, a volatilidade acompanha também a variável perda máxima, com destaque para as carteiras *mvp* que apresentam também neste período a melhor performance em volatilidade e preservação de capital.

Em resumo, verificamos uma correspondência entre risco e rendibilidade em valores absolutos, com a carteira 1/N a ter o pior desempenho em termos de retorno ajustado pelo risco. A carteira *mvp_shrink* apresenta um rácio R/SD muito semelhante ao índice PSI20 e se considerarmos a carteira *mvp_shrink_cap10* esta apresenta mesmo uma rendibilidade superior ao índice mas com um nível de risco inferior, o que é um resultado particularmente relevante se tivermos em conta que este período é marcado por uma subida significativa do mercado accionista. Resultado este, idêntico aos restantes estudos efectuados sobre as carteiras de minimização de variância, embora a redução de volatilidade não seja tão significativa. Chegamos assim ao final de 2007 com rendibilidades acumuladas muito semelhantes para todas as carteiras, excluindo a carteira *max_R/SD* que apresenta para todo o período rendibilidades superiores e também a carteira *mvp_shrink* que acompanha o resultado do menor desvio padrão também na dimensão rendibilidade (Figura 7), ou seja os resultados das optimizações no período da amostra têm uma correspondência no período fora da amostra. A carteira *mvp_shrink* com o objectivo de minimização de volatilidade é assim claramente penalizada na dimensão rendibilidade, neste período que podemos caracterizar de *Bull Market*, o que não acontece em todos os estudos sobre esta temática. Por exemplo nos estudos de Clarke et al. (2006) ou Nielsen & Aylursubramanian (2008), durante períodos significativos de *Bull Markets*, as carteiras de variância mínima acompanham o

índice de mercado. Esta constatação pode estar relacionada com o facto de nesses estudos existirem sempre restrições aos pesos dos títulos (idêntico à carteira mvp_shrink_cap10) o que favorece a carteira de variância mínima em termos de rendibilidade.

Figura 6 - Perda Máxima Período 2005-2007

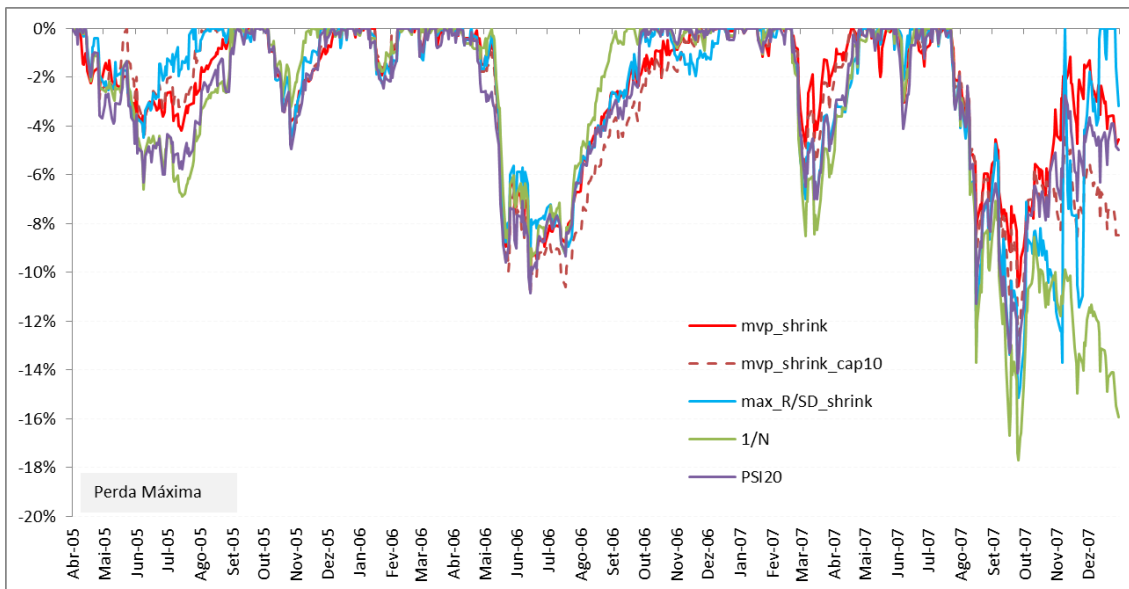
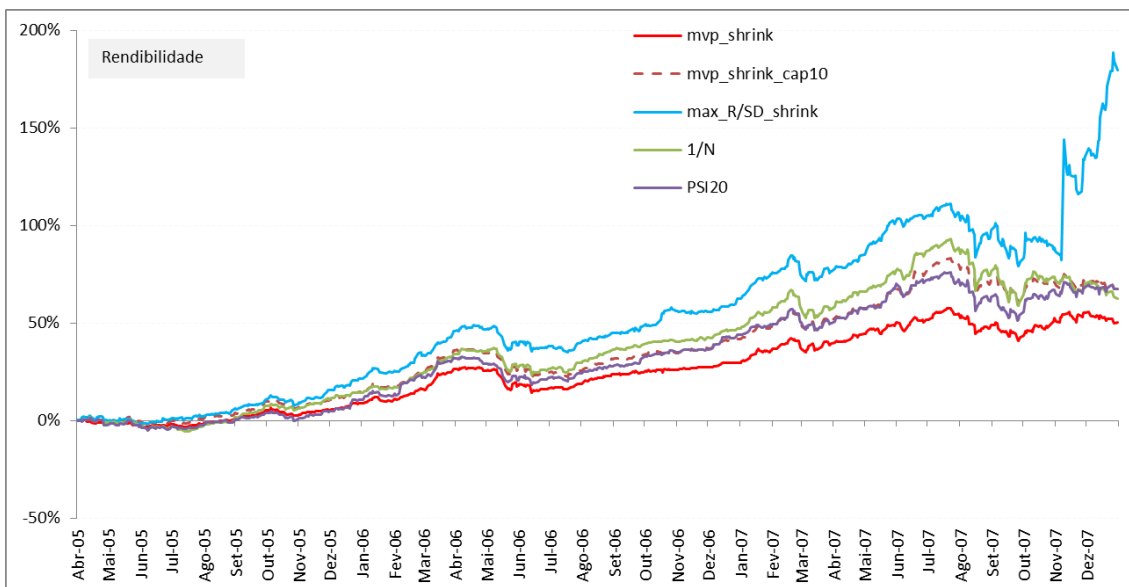


Figura 7 - Rendibilidade Acumulada Período 2005-2007



3.3.2 – Análise Resultados no período 2008 a Julho 2012

Este período é marcado por um aumento significativo da volatilidade bem como de rendibilidades negativas na totalidade do período, pelo que o comportamento das carteiras de variância mínima se reveste de particular interesse pois à partida, será neste tipo de condições de mercado que as suas performances serão mais compensadoras, dado que os elevados níveis de volatilidade estão por norma associados a períodos de quedas significativas nos mercados accionistas.

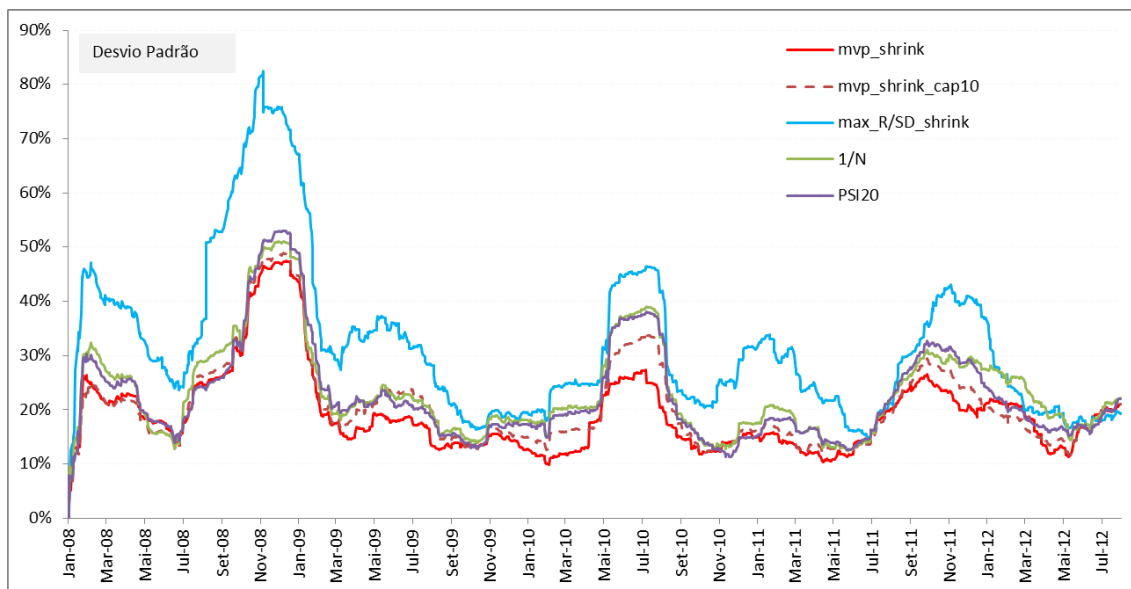
Na Tabela 2 (Painel B: 2008-2012), estão apresentados os resultados globais para todo este período, cujos rácios R/SD e R/PM não são apresentados dadas as rendibilidades negativas obtidas e como tal as comparações através destes indicadores não dão a informação pretendida uma vez que quanto maior a volatilidade (desvio padrão) ou perda máxima, melhores se tornam, o que é o contrário do pretendido. Analisando individualmente cada uma das rúbricas os resultados obtidos são semelhantes aos obtidos para o período 2005-2007.

Na dimensão rendibilidade, a ordem dos resultados é idêntica à do período 2005-2007, onde mais uma vez a introdução de restrições na carteira mvp, surge como factor que permite melhores rendibilidades, quando comparamos as carteiras com minimização de volatilidade como objectivo. Na volatilidade, a carteira mvp_shrink continua a apresentar os melhores resultados que estão em linha com os objectivos definidos na optimização. A carteira mvp_shrink é logo seguida da mvp_shrink_cap10 e novamente o índice PSI20 supera ligeiramente a carteira 1/N, com a carteira max_R/SD a destacar-se novamente com maiores volatilidades. As carteiras mvp apresentam novamente reduções de volatilidade inferiores ao índice PSI20, neste caso de 14% e 8% respectivamente para as carteiras sem e com restrições aos limites nos pesos dos títulos nessas carteiras.

Este comportamento é constante ao longo de todo o período em análise, conforme exibido na Figura 8, onde o desvio padrão das várias carteiras apresenta valores anualizados relativamente semelhantes, excepto nos picos de volatilidade onde estas diferenças ficam claramente visíveis e pela ordem acima referida. A carteira mvp_shrink tem no entanto, mesmo nos períodos de menor volatilidade, uma performance superior às restantes, algo que não acontece com a carteira

mvp_shrink_cap10, que nestes períodos de menor volatilidade acompanha de perto, quer o índice PSI20, quer a carteira 1/N.

Figura 8 - Desvio Padrão Anualizado Período 2008-2012



Relativamente à perda máxima, os resultados já não são um espelho da volatilidade, ao contrário do que acontece no período 2005-2007, onde a carteira mvp_shrink_cap10 apresenta resultados superiores à sua congénere sem restrições. O que é particularmente interessante de observar é que no primeiro momento de queda mais significativa do mercado (Jan-08 a Mar-09) a carteira mvp_shrink apresenta a menor perda máxima, mas nos períodos de recuperação do mercado (Mar-09 a Mai-10), a carteira mvp_shrink_cap10 recupera mais rapidamente e portanto parte de uma posição superior para a segunda queda mais significativa do mercado (Jan-11 a Jul-12), o que conduz no final deste período a uma perda máxima inferior, algo que acontece também com a carteira max_R/SD_shrink (Figura 9).

Deve ser tido em conta no entanto, que se o período de queda inicial tivesse sido mais prolongado, a carteira mvp_shrink poderia ter um perda máxima inferior às restantes que fosse suficiente, para que, mesmo não recuperando tão rapidamente nos períodos de subida de mercado, o resultado no final do período fosse mais positivo, à semelhança do que aconteceu no primeiro período analisado (2005-2007). Se olharmos para a

rendibilidade acumulada (Figura 10), podemos observar a carteira *max_R/SD_shrink*, que atinge uma perda máxima de quase 70% em Março de 2009 e contudo apresenta a melhor rendibilidade (menos negativa), na totalidade deste período. Este *trade-off* entre volatilidade e risco, deve ser tido em conta, quando se olham para os benefícios de introduzir ou não restrições na carteira *mvp*.

Esta relação entre risco e rendibilidade pode aliás ser observada nas carteiras *mvp* presentes neste estudo, uma vez que a introdução de restrições na carteira *mvp*, conduz de facto a maiores níveis de volatilidade, mas também à obtenção de melhores rendibilidades. Observamos que nos períodos de subida generalizada do mercado (período 2005-2007), a carteira com restrições supera a sua “concorrente”, conduzindo mesmo, neste exemplo concreto a uma perda máxima inferior, algo que é particularmente importante numa carteira cujo objectivo primordial é a minimização de riscos.

Figura 9 - Perda Máxima Período 2008-2012

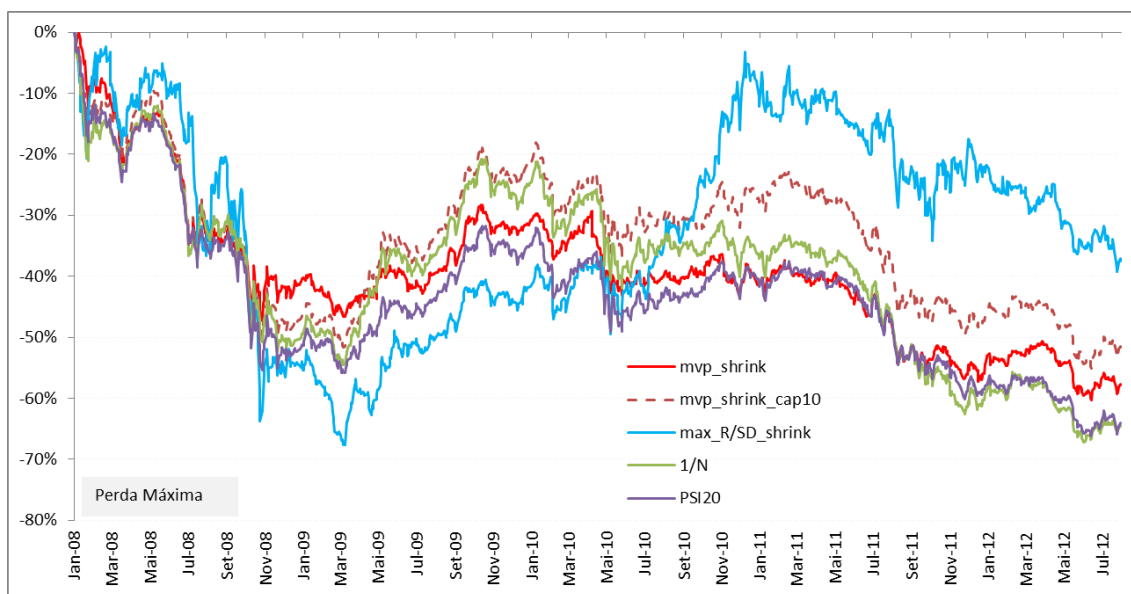
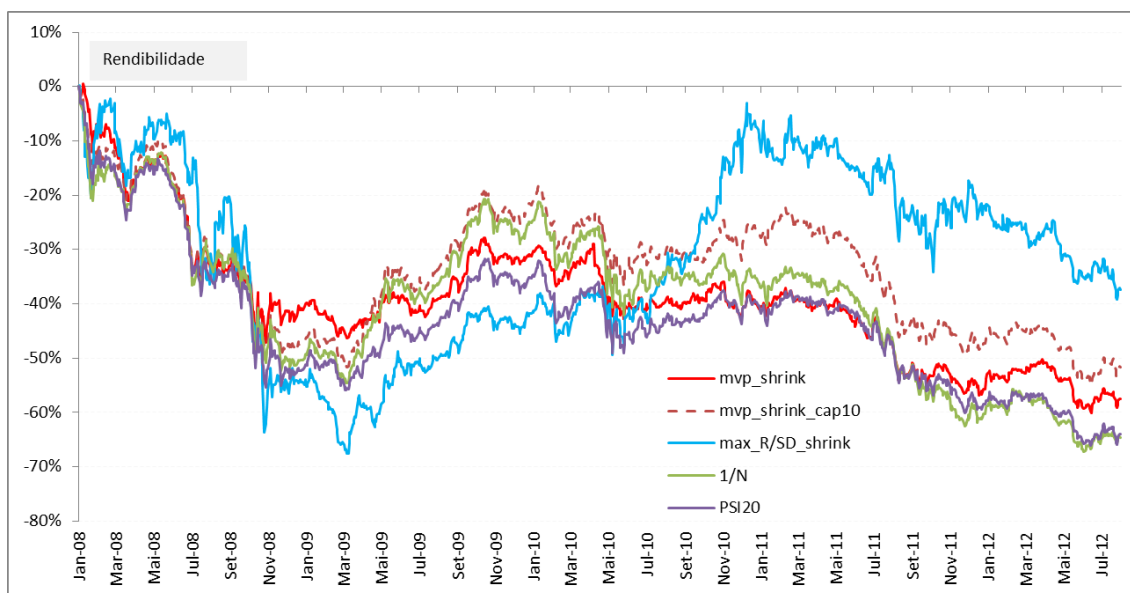


Figura 10 -Rendibilidade Acumulada Período 2008-2012

3.3.3 – Análise Resultados no período 2005-2012

A Tabela 2 (Painel C: 2005-2012) apresenta o resumo da performance das várias carteiras para a totalidade do período em estudo, sendo que apenas a carteira *max_R/SD_shrink* apresenta os rácios de desempenho R/SD e R/PM pois é a única que obtém uma rendibilidade positiva para este período (Anexo 4 apresenta igualmente as figuras da volatilidade, perda máxima e rendibilidade acumulada para este período).

Os resultados são idênticos aos observados nos períodos individualmente considerados, com destaque para a carteira *mvp_shrink_cap10*, que consegue obter rendibilidades superiores às do índice PSI20 em ambos os períodos analisados, atingindo uma rendibilidade anualizada superior em 3,85% com uma volatilidade na ordem dos 92% do índice de referência. Por seu turno a volatilidade da carteira *mvp_shrink* apresenta um valor na ordem dos 85% do índice PSI20 (Anexo Figura 5) e uma melhoria na rendibilidade no período 2005-2012 de 0,75%/ano face ao mesmo índice (tendo uma performance inferior no período 2005-2007). As reduções de volatilidade obtidas para as carteiras *mvp*, situam-se entre 15% e 8% face ao índice de mercado e são inferiores à generalidade dos estudos realizados, que se situam na casa dos 20%-30% (por exemplo Clarke et al., 2006; Jagannathan & Ma, 2003; Nielsen & Aylursubramanian, 2008; Bodjov et al. 2010). Destaque também para o facto da performance para o período fora da amostra das carteira *mvp* não ser superior à da carteira *max_R/SD_shrink*, algo que

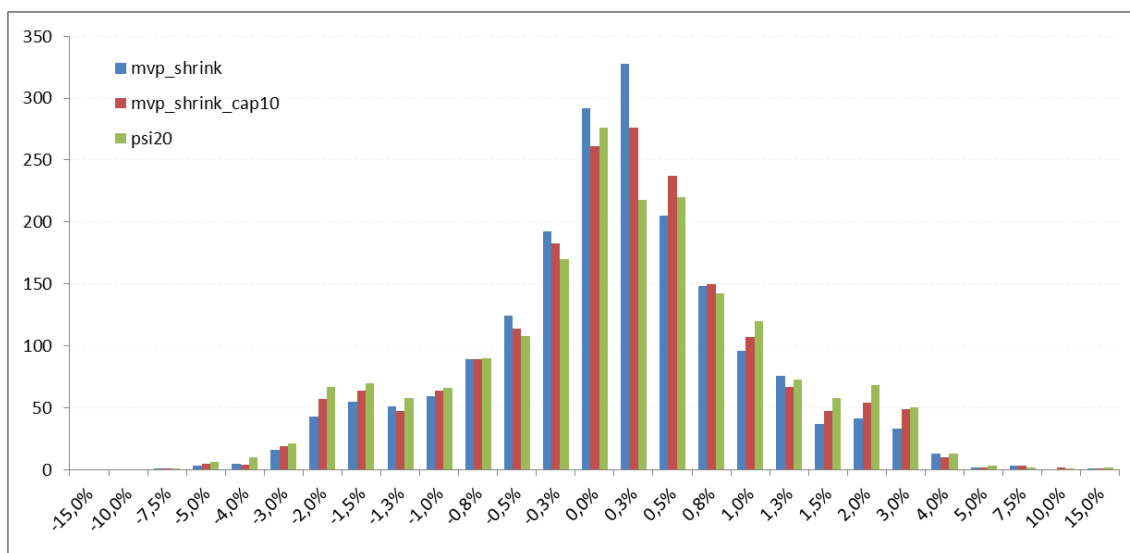
não acontece nos estudos de DeMiguel et al. (2009) e Jagannathan & Ma (2003), onde as carteiras de variância mínima obtêm rácios de Sharpe superiores às restantes carteiras pertencentes à fronteira eficiente. Este resultado pode estar relacionado com o facto de o presente estudo estar apenas restrito a 20 títulos e como tal os erros de estimação dos retornos serem menos penalizadores.

Para verificar a robustez dos resultados relativamente à carteira *max_R/SD_shrink* efectuou-se uma simulação sem considerar a restrição de *short selling* e com esta alteração a performance desta carteira é a mais negativa se considerarmos a totalidade do período, o que vem reforçar o que Michaud (1989) designou por maximização de erros, pois no período 2008-2012 a performance da referida carteira é muito negativa (Anexo 3), apesar de no período 2005-2007 a performance ser também a mais positiva. No entanto, em períodos de maior volatilidade e quedas de mercado, a optimização com a possibilidade de *short selling*, ao acentuar o peso em determinados títulos que fora da amostra obtêm resultados negativos, conduz a que a performance global desta carteira seja muito penalizada. Os resultados obtidos com a introdução da restrição de *short selling*, vem assim ao encontro dos resultados apontados por Jagannathan & Ma (2003). Destaque também para a ineficiência da carteira 1/N que apresenta os piores resultados na totalidade do período analisado, quer na dimensão volatilidade mas também quanto à rendibilidade. Este resultado é também contrário ao obtido por DeMiguel et al. (2009) onde nenhuma carteira consegue superiorizar-se à performance da carteira 1/N no período fora da amostra. DeMiguel et al. (2009) alerta no entanto para que quanto menor for o número de títulos analisado menor a vantagem da alocação 1/N, o que acontece neste estudo. Behr et al. (2012) reafirmam estes resultados, concluindo que nenhuma carteira se superioriza consistentemente à carteira igualmente ponderada.

Analisando o histograma das rendibilidades diárias (Figura 11) verificamos que os dias com quedas mais significativas são efectivamente eliminados com a estratégia de variância mínima, onde todas as ocorrências iguais ou inferiores a -0,8% são sempre em menor número do que o índice. Este é, aliás, um dos principais argumentos a favor das carteiras que procuram minimizar a variância, pois apesar de poderem obter rendibilidades inferiores nos períodos de subida do mercado (o índice PSI20 apresenta mais ocorrências para variações de +1% ou superior), o facto de serem menos penalizadas nos períodos de quedas mais acentuadas, pode até fazer com que o efeito combinado destes dois factores, conduza no final a uma rendibilidade acumulada

superior. Os dias que ocorrem com maior frequência, com rendibilidades entre 0% e 0,5% têm também a prevalência das carteiras.mvp. Naturalmente, os dias com variações mais positivas são também reduzidos com a optimização em função da redução da volatilidade, penalizando as carteiras.mvp em termos de rendibilidade. É assim de considerar a introdução de restrições à carteira de variância mínima, para que este *trade-off* entre volatilidade e rendibilidade seja menos penalizador por afastar os dias com maior rendibilidade. Um exemplo deste *trade-off*, é a carteira.mvp_shrink_cap10, que após a introdução da restrição de 10%, consegue uma performance em termos de rendibilidade superior ao índice de referência, quer nos períodos de subida, quer nos períodos de descida do mercado, com uma volatilidade inferior a este, mas um pouco superior à carteira.mvp_shrink.

Figura 11 – Histograma das Rendibilidades diárias no período 2005-2012



3.4 – Características da Carteira Variância Mínima

O primeiro elemento das carteiras de variância mínima a ser analisado foi o número de títulos que a compõem, incluindo ambas as variantes (com e sem restrições na sua composição). Na Figura 12, podemos constatar que a média do número de títulos que compõem a carteira.mvp_shrink é de 10 e, como seria de esperar dadas as restrições impostas, um número superior para a carteira.mvp_shrink_cap10, que se situa em 14.

De salientar também, é a diferença entre o período anterior e posterior a 2008, em que se pode constatar que o número de títulos em ambas as carteiras é superior à média, enquanto que a seguir a 2008, esse número é inferior. Este resultado é justificado pelos

maiores níveis de volatilidade, com especial enfoque em determinados sectores (por exemplo a Banca) que naturalmente conduz a que a composição da carteira de variância mínima fique mais concentrada num número inferior de títulos mais defensivos, do ponto de vista da volatilidade.

Figura 12 - Número de títulos incluídos nas carteiras mvp

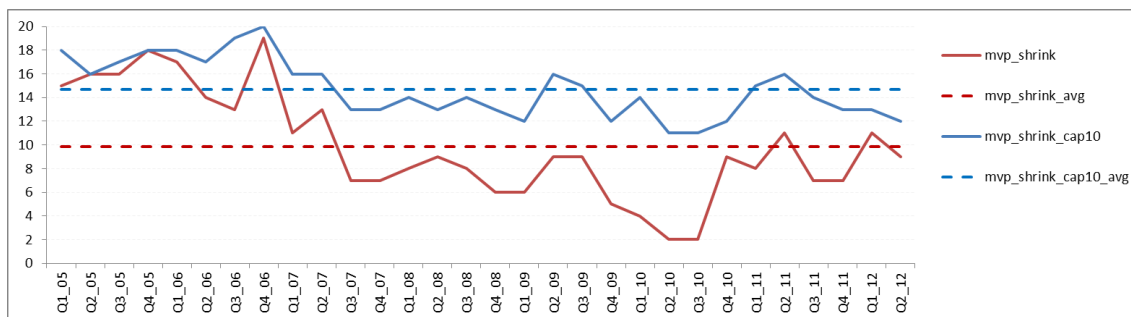


Figura 13 - Composição da carteira mvp_shrink por sectores de actividade

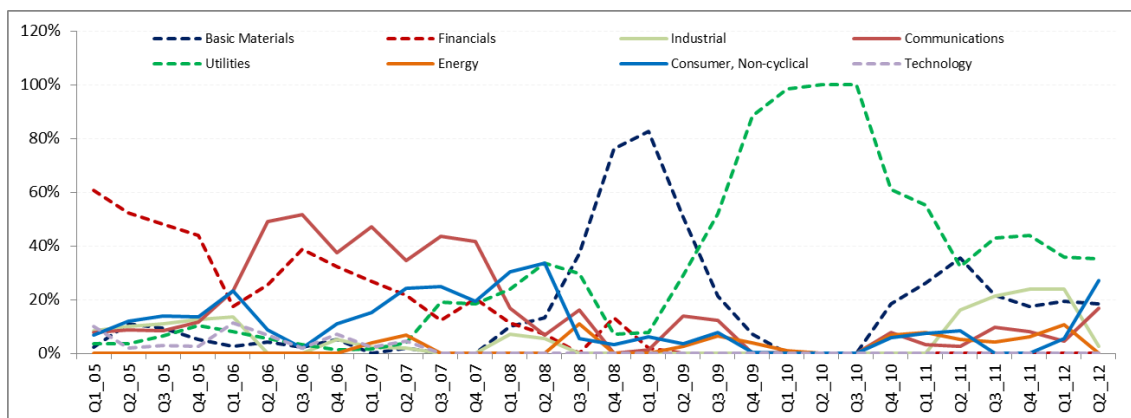
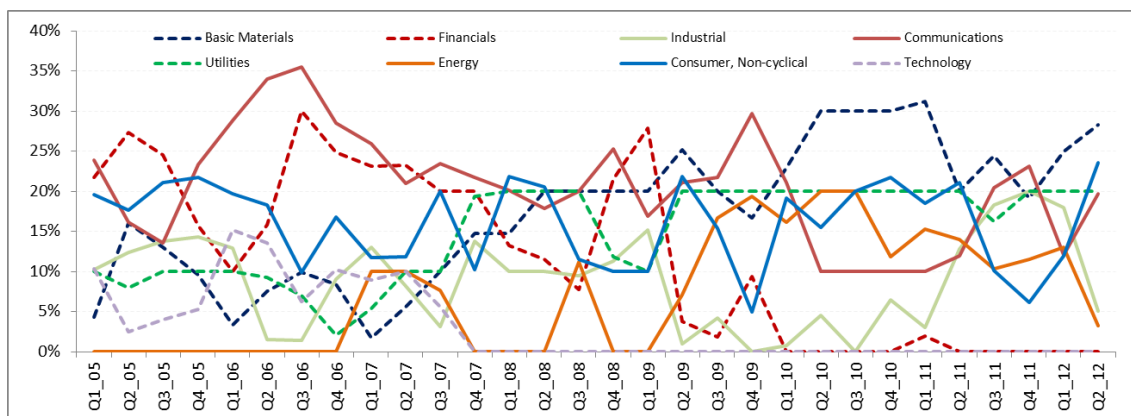


Figura 14 - Composição da carteira mvp_shrink_cap10 por de sectores de actividade



A concentração do número de títulos na composição das carteiras de variância mínima pode aliás ser visto em conjunto com a concentração da mesma relativamente aos sectores de actividade presentes no índice PSI20. Na Figura 13 e Figura 14 (que exibem a distribuição das carteiras.mvp por sector de acordo com a classificação ICB) podemos observar uma forte concentração, sobretudo visível na carteira.mvp_shrink sensivelmente a partir de 2008, nos sectores das Utilities e Basic Materials que por norma se tratam de sectores mais defensivos e menos penalizados nos momentos de queda dos mercados (sectores com Betas inferiores a 1). Estes sectores que prevalecem após 2008, substituíram, os sectores com mais peso no período anterior a 2008 e que são sobretudo os sectores de Financials, Communications e ainda Consumer Non-Cyclical. Esta tendência verifica-se em ambas as carteiras.mvp, embora de forma mais mitigada na carteira.mvp_shrink_cap10, que pela restrição imposta acaba por ter uma maior dispersão.

Relativamente às duas métricas de medição de risco (desvio padrão e Beta), foi avaliado o peso dos títulos na composição de ambas as carteiras de variância mínima, em função do seu risco individual. Ou seja, com base nos seis meses de observações que serviram de base para a construção de cada uma das carteiras de variância mínima, determinou-se o desvio padrão bem como o Beta de cada título e com base nos valores obtidos constituíram-se cinco grupos (quintis) (com quatro títulos cada um) ordenados pelo desvio padrão e outros cinco pelo Beta. No primeiro grupo aparecem os quatro títulos com menor desvio padrão/Beta, o segundo grupo contém os quatro títulos com os valores de desvio padrão/Beta imediatamente a seguir e assim sucessivamente. Após esta classificação dos títulos nos respectivos quintis, determinou-se o peso que cada quintil tem em cada carteira de variância mínima. O peso dos respectivos quintis construídos com base no desvio padrão dos títulos individuais está apresentado na Figura 15 e Figura 16, para a carteira.mvp_shrink e.mvp_shrink_cap10 respectivamente.

Figura 15 - Peso dos quintis baseados no D. Padrão na carteira mvp_shrink

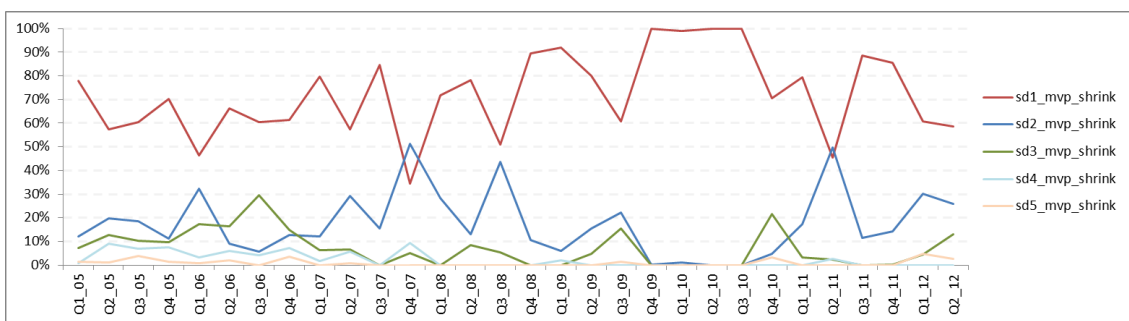
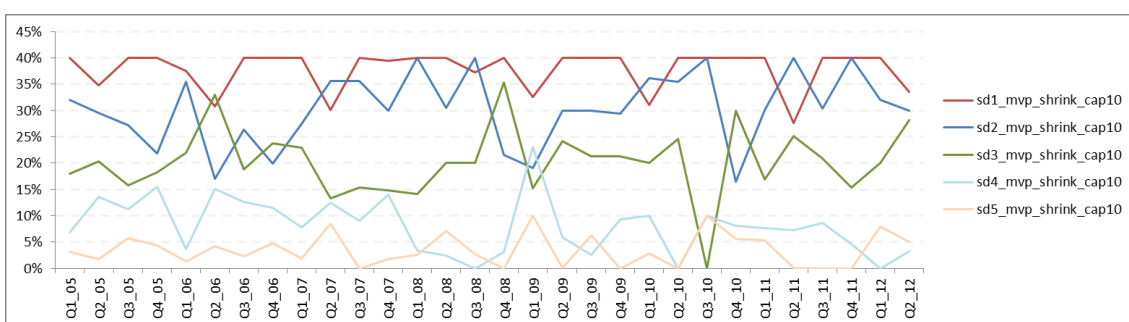


Figura 16 - Peso dos quintis baseados no D. Padrão na carteira mvp_shrink_cap10



Esta metodologia de separar os títulos do universo em estudo em grupos ordenados pelas suas métricas individuais coincide com a metodologia usada por Blitz & Vliet (2007) no estudo efectuado sobre este tema. Da observação das referidas figuras é clara uma forte predominância dos títulos pertencentes aos quintis com desvios padrão mais baixos, em especial na carteira mvp_shrink, em que o quintil de títulos com menor desvio padrão representam durante todo o período um peso mínimo que ronda os 70%, chegando mesmo a atingir os 100% no final de 2009 e parte de 2010. A carteira mvp_shrink_cap10, apresenta uma maior dispersão, mas é também visível uma clara predominância pelos títulos pertencentes aos dois quintis com menores desvios padrão. A mesma metodologia de separar os títulos em quintis, mas desta vez em função dos Betas, foi também utilizada e os resultados estão representados na Figura 17 e Figura 18.

Figura 17 - Peso dos quintis baseados no Beta na carteira mvp_shrink

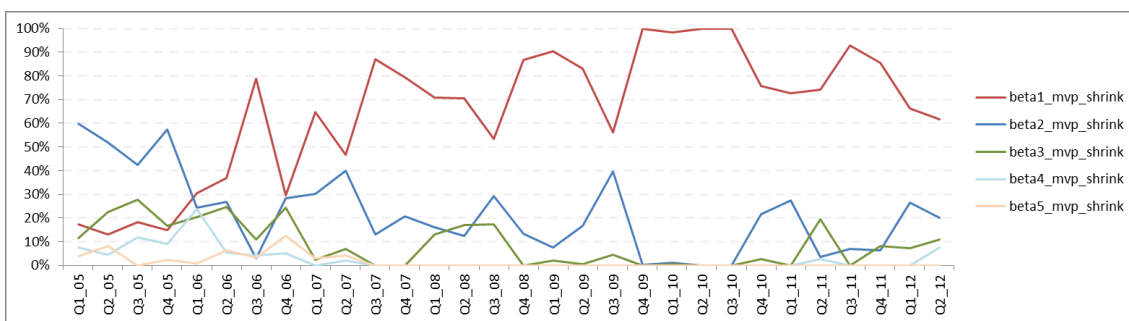
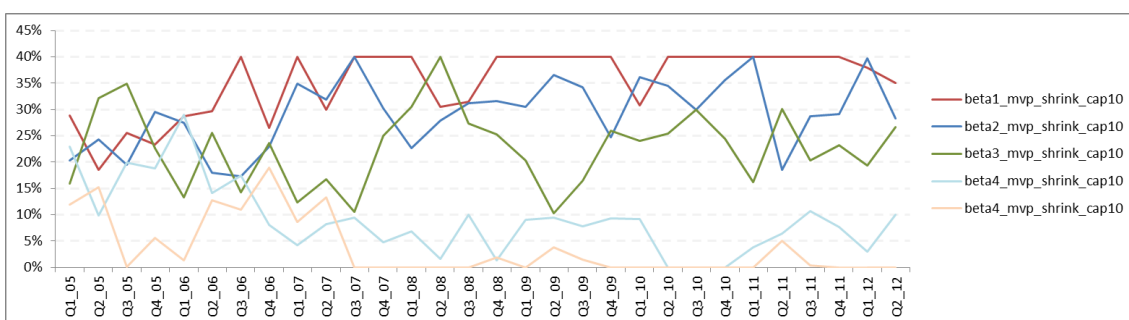


Figura 18 - Peso dos quintis baseados no Beta na carteira mvp_shrink_cap10



O maior peso dos títulos com Betas inferiores é também evidente em ambas as carteiras mvp e é similar ao peso dos quintis baseados no desvio padrão, exceptuando o período de 2005 até meados de 2006 onde o peso do quintil com os títulos com o menor Beta não é tão significativo, mas de uma forma global podemos verificar que as carteiras que procuram minimizar a variância privilegiam títulos com, baixo risco específico e baixo risco sistemático.

Quanto à relação das carteiras mvp globalmente consideradas, efectuou-se uma regressão linear com base nas rendibilidades destas duas carteiras deduzidas da taxa de juro sem risco e o índice PSI20 (Anexo 5) e ambas se caracterizam por Betas inferiores a 1. Como seria de esperar, a restrição imposta à carteira mvp_shrink_cap10 aproxima-a do índice PSI20 e como tal contribui para que nos períodos de subida de mercado a sua rendibilidade não seja tão prejudicada (face ao índice) quanto a carteira sem restrições. A explicação dos retornos das carteiras mvp pela variação do índice de mercado, situa-se entre os 74% e 88% (R^2) para as carteiras mvp_shrink e mvp_shrink_cap10 respectivamente.

Dois dos principais factores utilizados para explicar as rendibilidades e colmatar a insuficiência demonstrada pelo CAPM na explicação das mesmas são os factores Fama & French (1992). No presente estudo procurou avaliar-se o peso dos factores Dimensão e Valor na carteira de variância mínima, sendo a dimensão medida pela capitalização bolsista (Market Value = MV) e o factor valor através do rácio Valor de Mercado/Valor Contabilístico (Market to Book=MTB).

À semelhança do que foi feito com o peso dos sectores ou o peso dos Betas dos títulos individuais no total da carteira de variância mínima, seguiu-se a mesma metodologia mas desta feita avaliaram-se os títulos que constituem a carteira.mvp tendo por base os dois factores atrás referidos. Assim, dividiram-se os títulos em dois grupos em função destes dois factores, sendo o grupo 1 aquele que representa os títulos com menor valor no factor em análise (MV1 agrega os títulos com menor capitalização bolsista e MTB1 agrega os títulos com menor rácio Valor de Mercado/Valor Contabilístico³).

Os resultados obtidos estão ilustrados na Figura 19 e Figura 20 e não há uma clara predominância destes dois factores, ao contrário do que acontece por exemplo com o Beta. No período 2005-2007, por exemplo, o peso dos títulos com maior capitalização bolsista é claramente superior, situação que se inverte após este período. Na dimensão Valor, os resultados também não são claros e oscilam várias vezes no período em análise. Os resultados obtidos para o mercado norte-americano (Clarke et al., 2006 e Shapiro et al., 2009) apresentam resultados mais claros nestas duas dimensões. Os títulos classificados como sendo de Valor (*Value Stocks*) estão associados a Betas inferiores (Shapiro et al., 2009) e por isso seria de esperar uma relação mais clara nesta dimensão. No mercado Canadano o factor dimensão também não é tão evidente quanto no mercado norte-americano, no entanto o factor Valor é também evidente nas carteiras de variância mínima (Bodjov, 2010). Scherer (2011), indica que uma parcela das performances obtidas pelas carteiras de variância mínima são um reflexo destes já conhecidos factores, algo que não é claro para o caso do mercado português. Para avaliar a explicação adicional que estes dois factores adicionais poderiam trazer, efectuou-se uma regressão de acordo com o modelo proposto por Fama & French (Anexo 7) e os resultados da regressão confirmam os resultados da observação das figuras ao não acrescentar explicação adicional face ao factor Beta ($R^2=74\%$, idêntico à

³ O rácio aqui apresentado está invertido face ao que é usual, de modo a que o grupo 1 designe aquele que apresenta o menor valor tal como nas restantes variáveis

regressão sem a inclusão destes factores [Anexo 5]). Convém, no entanto, referir que o período em análise é marcado por volatilidades significativas, como anteriormente referido, pelo que os dados analisados podem distorcer uma eventual relação mais forte destes factores que poderia ser detectada através de análises com séries mais longas.

Figura 19 - Factor Dimensão na carteira mvp_shrink

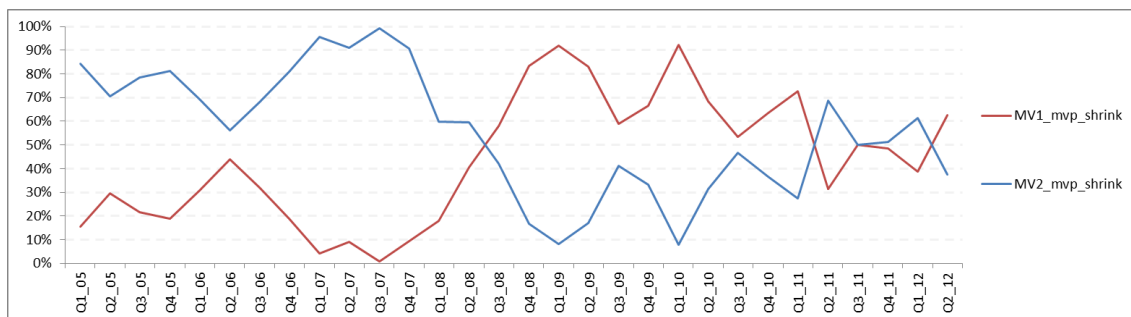
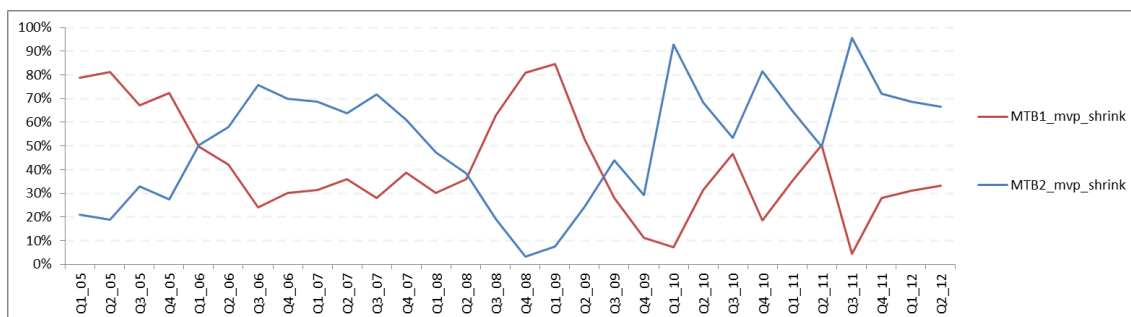


Figura 20 - Factor Valor na carteira mvp_shrink



3.5 – Alternativas à metodologia de Markowitz

Tendo por base os resultados apresentados na secção anterior, que evidenciam que os títulos que apresentam volatilidades e Betas mais baixos têm um peso significativo na carteira de variância mínima, construíram-se carteiras de variância mínima com base em quintis ordenados pelos desvios padrão/Beta dos títulos individuais (5 carteiras com quatro títulos cada uma), sendo esta metodologia idêntica à seguida por Blitz & Vliet (2007). Em rigor, a terminologia carteira de variância mínima não deveria ser utilizada para esta metodologia, pois não se está a solucionar um problema de optimização, no entanto o termo é utilizado pois o objectivo que se pretende atingir é em tudo idêntico ao que se procura atingir com a metodologia de Markowitz. Estas carteiras são igualmente ponderadas, ou seja, cada título tem sempre um peso de 25%. Assim a

primeira carteira é composta pelos quatro títulos que exibiram menores volatilidades/Betas nos seis meses anteriores, o rebalanceamento é feito trimestralmente, tal como aconteceu com as carteiras mvp. Os resultados estão apresentados na Tabela 3 e Tabela 4.

Considerando a totalidade do período (Painel C: 2005-2012), com esta metodologia obtém-se uma menor volatilidade face ao mercado para ambos os critérios e uma rendibilidade superior no caso das carteiras seleccionadas com base nos Betas, embora a carteira mvp_shrink seja a que consegue a redução máxima de volatilidade (17,49% face a 18,6% da carteira sd1), o que era de esperar tendo em conta que na optimização são tidas em conta as covariâncias/correlações.

Nas carteiras baseadas nos Betas é de realçar a performance da carteira beta_1 nos dois períodos distintos Painel A: 2005-2007 e Painel B: 2008-2012. Se no período globalmente considerado seria de esperar que as carteiras com Betas inferiores tivessem melhores performances, uma vez que o mercado com um todo se caracteriza por uma rendibilidade global negativa, o que é surpreendente é o facto da carteira beta_1 ser a que melhor performance apresenta no período 2005-2007 ($R/SD=2,22$ o valor mais elevado para carteiras com objectivo de redução de risco e claramente superior ao PSI20 com $R/SD=1,86$). Os resultados obtidos nas carteiras definidas através dos Betas, são bastante consistentes, se considerarmos a totalidade do período em análise, uma vez que ordenação dos resultados obtidos nas várias dimensões evolui de acordo com o quintil em que está inserido (evolução monotónica).

Considerando ainda a totalidade do período e se tivermos em conta as carteiras ordenadas pelo desvio padrão, o mesmo já não acontece, onde por exemplo a carteira sd_4 apresenta uma rendibilidade global superior à carteira sd_3. Analisando a performance tendo por base a divisão de períodos anteriormente referida, a relação entre risco (volatilidade ou Beta) e rendibilidade, não é clara, pois o aumento de rendibilidade nem sempre evolui em função do aumento de risco. No entanto, se apenas considerarmos a dimensão risco, os resultados estão ordenados com o que seria de esperar em função dos quintis definidos, quer estes se baseiam no desvio padrão ou Beta. O facto de a rendibilidade não evoluir de forma constante através dos quintis (evolução não monotónica) é também verificado por Vliet et al. (2011).

Tabela 3 - Performance carteiras baseadas no desvio padrão

Painel A: 2005-2007	Rendibilidade Anualizada	Desvio Padrão Anualizado	Perda Máxima	R/SD	R/PM	teste t (vs mvp)	teste F (vs mvp)	teste t (vs mvp cap 10)	teste F (vs mvp cap 10)
mvp_shrink	15,96%	8,86%	10,56%	1,80	1,51	-	-	-	-
mvp_shrink_cap10	20,59%	10,06%	12,61%	2,05	1,63	30,9%	0,0%	-	-
sd_1	15,36%	9,61%	10,90%	1,60	1,41	52,2%	1,5%	70,3%	88,9%
sd_2	8,27%	13,15%	22,65%	0,63	0,37	74,8%	0,0%	85,2%	0,0%
sd_3	22,48%	14,68%	23,82%	1,53	0,94	27,5%	0,0%	42,1%	0,0%
sd_4	19,00%	16,10%	22,21%	1,18	0,86	37,6%	0,0%	51,9%	0,0%
sd_5	18,12%	20,83%	27,68%	0,87	0,65	39,5%	0,0%	51,1%	0,0%
1/N	19,21%	11,72%	17,69%	1,64	1,09	36,5%	0,0%	54,2%	0,0%
PSI20	20,49%	11,04%	14,15%	1,86	1,45	31,7%	0,0%	49,9%	0,6%
Painel B: 2008-2012	Rendibilidade Anualizada	Desvio Padrão Anualizado	Perda Máxima	R/SD	R/PM	teste t (vs mvp)	teste F (vs mvp)	teste t (vs mvp cap 10)	teste F (vs mvp cap 10)
mvp_shrink	-16,98%	20,99%	60,32%	-	-	-	-	-	-
mvp_shrink_cap10	-14,60%	22,61%	55,14%	-	-	30,7%	0,5%	-	-
sd_1	-17,85%	22,35%	61,23%	-	-	54,9%	1,5%	72,7%	65,4%
sd_2	-11,04%	26,13%	50,25%	-	-	13,8%	0,0%	26,3%	0,0%
sd_3	-25,02%	27,74%	74,89%	-	-	85,2%	0,0%	91,7%	0,0%
sd_4	-20,60%	30,11%	71,11%	-	-	59,6%	0,0%	72,2%	0,0%
sd_5	-29,38%	36,76%	83,15%	-	-	86,2%	0,0%	91,3%	0,0%
1/N	-20,19%	25,18%	67,22%	-	-	66,6%	0,0%	80,1%	0,0%
PSI20	-19,91%	24,56%	66,14%	-	-	66,2%	0,0%	80,2%	0,2%
Painel C: 2005-2012	Rendibilidade Anualizada	Desvio Padrão Anualizado	Perda Máxima	R/SD	R/PM	teste t (vs mvp)	teste F (vs mvp)	teste t (vs mvp cap 10)	teste F (vs mvp cap 10)
mvp_shrink	-5,91%	17,49%	61,90%	-	-	-	-	-	-
mvp_shrink_cap10	-2,81%	18,93%	58,95%	-	-	35,6%	0,0%	-	-
sd_1	-6,70%	18,65%	62,59%	-	-	52,7%	0,2%	66,4%	74,3%
sd_2	-4,24%	22,18%	61,42%	-	-	39,9%	0,0%	53,1%	0,0%
sd_3	-9,88%	23,75%	80,87%	-	-	60,9%	0,0%	72,0%	0,0%
sd_4	-7,59%	25,79%	72,47%	-	-	50,1%	0,0%	61,7%	0,0%
sd_5	-14,36%	31,77%	87,65%	-	-	67,0%	0,0%	75,4%	0,0%
1/N	-7,24%	21,20%	72,44%	-	-	52,8%	0,0%	65,6%	0,0%
PSI20	-6,66%	20,60%	67,82%	-	-	50,9%	0,0%	64,1%	0,0%

Tabela 4 - Performance carteiras baseadas no Beta

Painel A: 2005-2007	Rendibilidade Anualizada	Desvio Padrão Anualizado	Perda Máxima	R/SD	R/PM	teste t (vs.mvp)	teste F (vs.mvp)	teste t (vs.mvp cap 10)	teste F (vs.mvp cap 10)
mvp_shrink	15,96%	8,86%	10,56%	1,80	1,51	-	-	-	-
mvp_shrink_cap10	20,59%	10,06%	12,61%	2,05	1,63	30,9%	0,0%	-	-
beta_1	26,90%	12,13%	14,44%	2,22	1,86	15,1%	0,0%	28,7%	0,0%
beta_2	9,33%	13,41%	15,37%	0,70	0,61	71,1%	0,0%	82,4%	0,0%
beta_3	8,05%	16,27%	26,62%	0,49	0,30	70,8%	0,0%	81,1%	0,0%
beta_4	24,55%	18,43%	26,49%	1,33	0,93	24,6%	0,0%	36,3%	0,0%
beta_5	15,10%	15,99%	21,60%	0,94	0,70	49,5%	0,0%	63,4%	0,0%
1/N	19,21%	11,72%	17,69%	1,64	1,09	36,5%	0,0%	54,2%	0,0%
PSI20	20,49%	11,04%	14,15%	1,86	1,45	31,7%	0,0%	49,9%	0,6%
Painel B: 2008-2012	Rendibilidade Anualizada	Desvio Padrão Anualizado	Perda Máxima	R/SD	R/PM	teste t (vs.mvp)	teste F (vs.mvp)	teste t (vs.mvp cap 10)	teste F (vs.mvp cap 10)
mvp_shrink	-16,98%	20,99%	60,32%	-	-	-	-	-	-
mvp_shrink_cap10	-14,60%	22,61%	55,14%	-	-	30,7%	0,5%	-	-
beta_1	-16,71%	22,37%	59,44%	-	-	46,4%	1,4%	63,6%	64,2%
beta_2	-15,43%	26,89%	57,19%	-	-	33,3%	0,0%	49,5%	0,0%
beta_3	-15,51%	29,35%	61,27%	-	-	33,1%	0,0%	47,1%	0,0%
beta_4	-25,29%	30,78%	77,24%	-	-	79,7%	0,0%	87,1%	0,0%
beta_5	-30,88%	34,30%	84,59%	-	-	95,3%	0,0%	97,6%	0,0%
1/N	-20,19%	25,18%	67,22%	-	-	66,6%	0,0%	80,1%	0,0%
PSI20	-19,91%	24,56%	66,14%	-	-	66,2%	0,0%	80,2%	0,2%
Painel C: 2005-2012	Rendibilidade Anualizada	Desvio Padrão Anualizado	Perda Máxima	R/SD	R/PM	teste t (vs.mvp)	teste F (vs.mvp)	teste t (vs.mvp cap 10)	teste F (vs.mvp cap 10)
mvp_shrink	-5,91%	17,49%	61,90%	-	-	-	-	-	-
mvp_shrink_cap10	-2,81%	18,93%	58,95%	-	-	35,6%	0,0%	-	-
beta_1	-2,47%	19,22%	62,89%	-	-	34,2%	0,0%	48,4%	25,3%
beta_2	-6,88%	22,81%	63,05%	-	-	49,9%	0,0%	62,4%	0,0%
beta_3	-7,35%	25,26%	71,58%	-	-	49,6%	0,0%	61,5%	0,0%
beta_4	-9,52%	26,86%	81,15%	-	-	56,1%	0,0%	67,0%	0,0%
beta_5	-16,32%	28,87%	87,18%	-	-	76,8%	0,0%	83,9%	0,0%
1/N	-7,24%	21,20%	72,44%	-	-	52,8%	0,0%	65,6%	0,0%
PSI20	-6,66%	20,60%	67,82%	-	-	50,9%	0,0%	64,1%	0,0%

A análise torna-se no entanto, mais clara se analisarmos apenas os quintis extremos (sd_1 e sd_5; beta_1 e beta_5) e aqui podemos constatar que o aumento de risco, não

significa melhores rendibilidades nos períodos de subida de mercado, mas significam os piores desempenhos nos períodos de queda, contribuindo assim para o fenómeno dos títulos de maior risco não superarem a performance dos de baixo risco. Os resultados obtidos através desta metodologia (bastante mais simplificada, pois não requer a determinação da matriz das variâncias-covariâncias) conseguem superiorizar-se ao índice de mercado na dimensão volatilidade, apesar de, como seria de esperar, a metodologia de Markowitz ser mais eficaz na redução desta.

As carteiras formadas com base nos títulos com menores desvios padrão são no entanto sempre dominadas pelas carteiras mvp, algo que não acontece se o Beta for o critério de selecção. A metodologia dos quintis, como referido anteriormente, utiliza carteiras igualmente ponderadas o que pode resultar em alguma ineficiência e poder-se-iam testar outras formas de ponderação, por exemplo, uma relação inversa entre a volatilidade do título em questão e o seu peso nessa carteira. Esta comparação foi efectuada por Carvalho et al. (2012), mas a diferença obtida face à versão igualmente ponderada foi reduzida. De realçar, no entanto que a carteira constituída pelos títulos com Betas mais reduzidos apresenta resultados globais muito semelhantes à carteira mvp_shrink_cap10, o que reforça a ideia de que ambas as metodologias (Markowitz e Ordenação em quintis) são eficazes na redução de volatilidade e obtenção de rendibilidades iguais ou superiores ao índice de referência. Se por um lado, de acordo com o modelo CAPM, apenas o risco sistemático é compensado e por esse motivo as carteiras construídas com mais risco (medido pela volatilidade total) podem não apresentar as melhores performances em termos de retorno ajustado pelo risco, já se analisarmos apenas as carteiras construídas com base nos Betas, a anomalia dos títulos com menor risco apresentarem melhores resultados continua a verificar-se, mesmo nos períodos de subida generalizada do mercado.

Estes resultados vêm assim reforçar a controversa relação entre risco (medido por volatilidade ou Beta) e rendibilidade. Para além dos estudos já citados anteriormente e que se centram especificamente nesta “anomalia” da performance conseguida por títulos de baixo risco, inúmeros outros estudos abordam directa ou indirectamente nesta temática. Citando apenas alguns estudos mais recentes que evidenciam esta controvérsia, Fama & French (2004) documentam de forma sintetizada os vários testes empíricos que sustentam a dificuldade encontrada em explicar as rendibilidades em função do risco sistemático (Beta) e por isso títulos com Betas mais baixos obtêm por

vezes melhores desempenhos face aos títulos com Betas mais elevados, dada a relação mais “flat” entre risco e rendibilidade que a prevista pelo modelo CAPM. Encontramos no entanto e ainda relativamente ao poder explicativo do Beta, um estudo de Pettengill et al. (1995), que verificam para o mercado norte-americano uma relação positiva entre risco (Beta) e rendibilidade e justificam que a ausência de relação entre estas duas variáveis em muitos dos estudos empíricos efectuados sobre o CAPM, se deve ao facto de as análises não distinguirem os períodos onde o prémio de risco de mercado é maior e menor que zero. De facto, em períodos onde o prémio de risco é inferior a zero, os títulos ou carteiras com Betas mais altos, devem caracterizar-se por rendibilidades mais negativas e a generalidade dos estudos empíricos ao avaliar a relação entre Beta e rendibilidade sem esta distinção acaba por concluir que esta relação é fraca e o modelo CAPM insuficiente.

Pettengill et al. (1995), avaliam a relação dos Betas com a rendibilidade aplicando uma metodologia condicional (tem em conta o sinal do prémio de risco de mercado) e obtêm uma relação muito significativa entre risco sistemático e rendibilidade, sendo esta relação bastante superior à documentada na generalidade de estudos realizados sobre a validade dos Betas (que não têm em conta esta metodologia condicional). Elsas et al. (2003) e Tang et al. (2003), aplicando também a metodologia proposta por Pettengill et al. (1995), obtêm resultados idênticos desta vez para o mercado germânico e mercados internacionais respectivamente. No caso particular deste estudo aplicado ao mercado português, verificamos, como atrás referido, que a carteira constituída pelos títulos com Betas mais reduzidos apresenta as melhores rendibilidades, mesmo no período onde o prémio de risco de mercado é superior a zero (2005-2007).

Se tivermos em conta a volatilidade total como medida de risco, um estudo recente de Martellini (2008), aponta no sentido de maior risco estar associado a maiores rendibilidades. No entanto este estudo apenas incide sobre os títulos sobreviventes e segundo Vliet et al. (2011) esse enviesamento (usualmente designado por “*survivor bias*”) é determinante para a obtenção da relação positiva entre risco e rendibilidade.

3.6 – A carteira de semi-variância mínima

A utilização da variância na metodologia de Markowitz de optimização de carteiras é claramente a medida representativa de risco mais utilizada, embora a semi-variância

esteja provavelmente mais em sintonia com o perfil e características face ao risco de um investidor, pois a variação negativa (entendida como inferior a um determinado *benchmark*) é que é penalizadora. O próprio Markowitz reconhece que o investidor se preocupa com a performance negativa e não com a performance positiva e como tal a semi-variância é uma medida de risco mais apropriada. Estrada (2007), numa análise comparativa entre várias medidas de risco (variância, semi-variância, Beta e *downside* Beta), verifica uma maior explicação dos retornos tendo por base a utilização do *downside* Beta.

A generalizada utilização da variância, estará provavelmente relacionada com a maior facilidade de resolução do problema de optimização, tendo em conta que a matriz das variâncias-covariâncias, necessária para a resolução do mesmo, se determina de forma simples com a variância, algo que não acontece se a semi-variância for considerada. O problema essencial com a matriz das semi-covariâncias é que esta é em alguns casos, assimétrica o que inviabiliza a solução do problema de optimização sem recorrer a algoritmos complicados.

A metodologia heurística proposta por Estrada (2008) apresenta resultados muito próximos da matriz das semi-covariâncias exacta e a sua fórmula de cálculo é em tudo idêntica à covariância, o que simplifica bastante o problema de optimização de carteiras baseado nas semi-variâncias. Como foi visto anteriormente, as carteiras de variância mínima obtidas através do processo de optimização, acabam por ser penalizadas em termos de rendibilidade no caso de existirem títulos que apresentem volatilidades mais elevadas motivadas por maiores rendibilidades. Este facto é sobretudo mais penalizador quando o mercado de uma forma geral se encontra num período de subida, como é o caso do período 2005-2007 no presente estudo. Com o intuito de avaliar se a performance das carteiras de variância mínima pode ser melhorada em termos de rendibilidade, e tendo por base a metodologia proposta por Estrada (2008), construíram-se as carteiras de semi-variância mínima tendo por base as seguintes formulações:

$$S_{iB}^2 = \left(\frac{1}{T}\right) \cdot \sum_{i=1}^T [\text{Min}(R_{it} - B, 0)]^2 \quad (4)$$

$$S_{ijB} = \left(\frac{1}{T}\right) \cdot \sum_{i=1}^T [\text{Min}(R_{it} - B, 0) \cdot \text{Min}(R_{jt} - B, 0)] \quad (5)$$

$$S_{pB} \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j S_{ijB} \quad (6)$$

S_{iB}^2 : *Semi-variância de um título*

S_{ijB} : *Semi-covariância entre dois títulos*

S_{pB} : *Semi-variância de uma carteira*

B : *Benchmark considerado pelo investidor como retorno mínimo*

O *Benchmark* (B) considerado foi o retorno 0%, ou seja, apenas rendibilidades negativas foram tidas em conta para determinar as semi-variâncias bem como as semi-covariâncias. Os resultados para a totalidade do período (Painel C:2005-2012) em comparação com as carteiras de variância mínima anteriormente consideradas estão apresentados na Tabela 5. Podemos verificar que ambas as carteiras baseadas na semi-variância (representadas pelo sufixo sv), obtêm para a totalidade do período uma rendibilidade superior, sendo a carteira de variância mínima sem restrições que obtém uma diferença superior com a introdução deste conceito (-4,97% vs -5,91%).

Tendo em conta a volatilidade, mantendo-se esta a ser medida através do desvio padrão, a diferença entre a metodologia da variância e da semi-variância é mínima, não sendo mesmo possível rejeitar a Hipótese nula de que a variância da carteira de variância mínima (mvp_shrink) seja idêntica à da carteira mvp_shrink_sv (p value de 0,454).

O que é interessante observar é que na dimensão da rendibilidade, a carteira mvp_shrink_sv é consistentemente superior à carteira mvp_shrink (Anexo Figura 15), pelo que aplicação deste conceito de semi-variância à carteira sem restrições parece ser de facto eficaz na redução da penalização causada pela volatilidade positiva. Relativamente à carteira com restrições (mvp_shrink_cap10) e como seria de esperar, dadas os limites impostos aos pesos dos títulos, os benefícios da introdução da semi-variância já não são tão claros, pois se na dimensão rendibilidade podemos observar uma melhoria (-2,09% vs -2,81%), esta já não se traduz numa perda máxima inferior, o que acontece nas carteiras sem restrições.

Tabela 5 - Resultados carteiras Semi-variância mínima

Painel A: 2005-2007	Rendibilidade Anualizada	Desvio Padrão Anualizado	Perda Máxima	R/SD	R/PM	teste t (vs.mvp)	teste F (vs.mvp)	teste t (vs.mvp cap 10)	teste F (vs.mvp cap 10)
mvp_shrink	15,96%	8,86%	10,56%	1,80	1,51	-	-	-	-
mvp_shrink_cap10	20,59%	10,06%	12,61%	2,05	1,63	30,9%	0,0%	-	-
mvp_shrink_sv	17,83%	9,18%	10,98%	1,94	1,62	41,6%	17,1%	61,5%	99,3%
mvp_shrink_cap10_sv	19,65%	10,96%	16,48%	1,79	1,19	34,7%	0,0%	53,1%	1,1%
PSI20	20,49%	11,04%	14,15%	1,86	1,45	31,7%	0,0%	49,9%	0,6%
Painel B: 2008-2012	Rendibilidade Anualizada	Desvio Padrão Anualizado	Perda Máxima	R/SD	R/PM	teste t (vs.mvp)	teste F (vs.mvp)	teste t (vs.mvp cap 10)	teste F (vs.mvp cap 10)
mvp_shrink	-16,98%	20,99%	60,32%	-	-	-	-	-	-
mvp_shrink_cap10	-14,60%	22,61%	55,14%	-	-	30,7%	0,5%	-	-
mvp_shrink_sv	-16,47%	20,97%	58,42%	-	-	45,9%	51,5%	65,6%	99,5%
mvp_shrink_cap10_sv	-12,98%	22,74%	52,46%	-	-	23,1%	0,3%	40,5%	41,9%
PSI20	-19,91%	24,56%	66,14%	-	-	66,2%	0,0%	80,2%	0,2%
Painel C: 2005-2012	Rendibilidade Anualizada	Desvio Padrão Anualizado	Perda Máxima	R/SD	R/PM	teste t (vs.mvp)	teste F (vs.mvp)	teste t (vs.mvp cap 10)	teste F (vs.mvp cap 10)
mvp_shrink	-5,91%	17,49%	61,90%	-	-	-	-	-	-
mvp_shrink_cap10	-2,81%	18,93%	58,95%	-	-	35,6%	0,0%	-	-
mvp_shrink_sv	-4,97%	17,53%	59,37%	-	-	45,6%	45,4%	60,4%	100,0%
mvp_shrink_cap10_sv	-2,09%	19,21%	60,29%	-	-	32,7%	0,0%	46,8%	25,8%
PSI20	-6,66%	20,60%	67,82%	-	-	50,9%	0,0%	64,1%	0,0%

4 – Conclusões

Este trabalho estende o estudo da temática das carteiras de baixo risco ao mercado de acções português, que se caracteriza por ser um mercado menos desenvolvido e de menor dimensão e como tal com tendência a registar maiores níveis de volatilidade face a mercados mais desenvolvidos.

Os resultados obtidos, mostram em primeiro lugar, que a metodologia de Markowitz, sujeita à restrição de *short selling* apresenta os resultados esperados e consistentes no período fora da amostra não só para a carteira de variância mínima, mas também para outra carteira pertencente à fronteira eficiente, neste caso a carteira que maximiza o rácio Rendibilidade/Volatilidade e que requer estimação do retornos esperados, uma das principais fragilidades apontadas à utilização desta metodologia. O número reduzido de parâmetros a estimar face ao número de observações, bem como a utilização de observações diárias dos meses mais recentes podem ter contribuído para este resultado.

Neste estudo, as vantagens decorrentes da utilização da metodologia de *shrinkage* na estimação dos parâmetros não foram claras quando comparadas com a estimação histórica obtida directamente da amostra, quer para a carteira de variância mínima quer para a carteira que maximiza o rácio Rendibilidade/Volatilidade. Os resultados obtidos para os dois períodos de janela de estimação, são muito semelhantes nas carteiras de variância mínima, não sendo claro se um maior período de estimação melhora a performance nos períodos fora da amostra. Quanto às carteiras que maximizam o rácio Rendibilidade/Volatilidade, um período de estimação superior parece conduzir a uma performance com menor volatilidade e por isso com maior retorno ajustado pelo risco.

Se considerarmos as carteiras de variância mínima sem a imposição de limites na sua constituição, conseguimos de facto a maior redução na volatilidade no entanto a performance comparada com o índice de mercado, em termos de retorno ajustado pelo risco, é dependente do “regime” de mercado, inferior no regime “*Bull Market*” e superior no regime “*Bear Market*”. Se considerarmos a introdução de limites aos pesos dos títulos na sua constituição, apesar do aumento de volatilidade, conseguimos obter um retorno ajustado pelo risco superior ao índice de referência em ambos os regimes de mercado. Este resultado, vai assim ao encontro do que foi referido por Haugen (1991) de que a tentativa de replicar o índice de mercado não é uma estratégia eficiente. O

princípio subjacente à composição do índice de mercado é a representatividade e não a eficiência e como tal a sua utilização como *benchmark* pode não ser a mais indicada.

Se considerarmos a carteira construída em função da maximização do retorno ajustado pelo risco (\max_R/SD), a performance desta revela-se superior a todas as alternativas consideradas em ambos os regimes de mercado, ao contrário da generalidade dos estudos efectuados onde os erros de estimação inviabilizam a eficácia desta estratégia no período fora da amostra.

Considerando a alternativa mais simplificada de construção das carteiras que visam minimizar a volatilidade apenas baseadas na ordenação dos desvios padrão e Betas dos títulos, conseguimos igualmente obter uma redução de volatilidade face ao índice de referência, no entanto inferior à carteira de variância mínima obtida através do recurso à optimização de Markowitz. A alternativa baseada no desvio padrão é no entanto dominada pela carteira de variância mínima (sem restrições), pois apresenta sempre maior volatilidade e menor rendibilidade, algo, que não acontece quando utilizamos o critério dos Betas, pois apesar da maior volatilidade, a rendibilidade é também superior. Quando o *benchmark* é o índice de mercado, a utilização dos Betas mais reduzidos como critério de formação da carteira surge assim como uma alternativa à carteira de variância mínima determinada de acordo com a metodologia de Markowitz.

Os resultados obtidos com a utilização da semi-variância como critério de risco, seguindo a metodologia proposta por Estrada (2007), apresentam resultados interessantes. Observamos que a carteira de semi-variância mínima não é tão penalizada na dimensão rendibilidade quanto a carteira de variância mínima (sobretudo nos regimes “*Bull Market*”), obtendo mesmo uma perda máxima inferior no período em estudo, surgindo assim como uma válida alternativa à carteira de variância mínima.

A estratégia baseada na minimização da volatilidade surge assim com uma interessante alternativa, sobretudo para investidores que se focam em retornos absolutos ajustados pelo risco (por exemplo Fundos de Pensões). Já os investidores que têm como *benchmark* o índice de mercado, continuarão certamente a ignorar esta estratégia, tendo em conta o risco de sub-performance sobretudo nos regimes “*Bull Market*”, apesar da eficiência desse *benchmark* ser, como vimos, questionável.

5. Referências

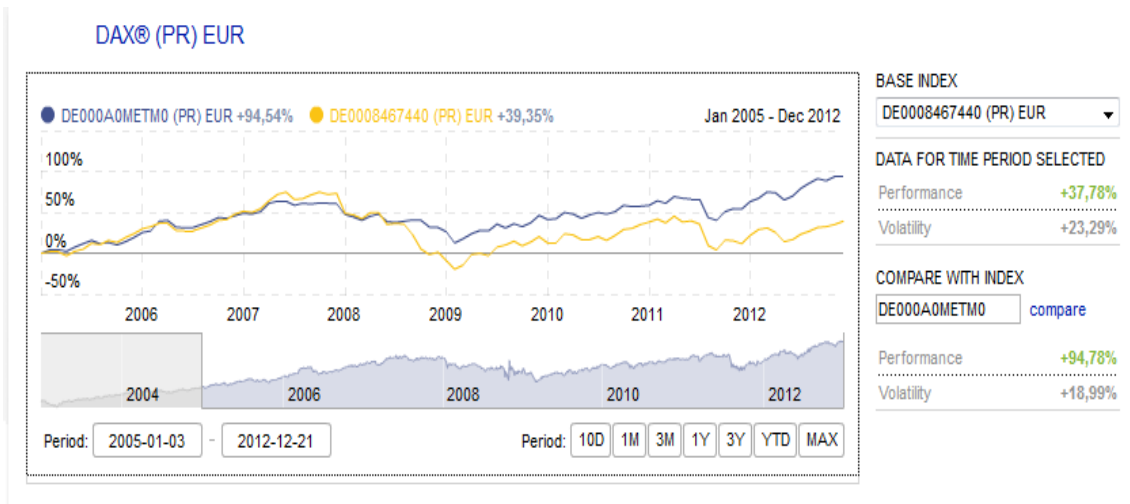
- Ang, Andrew, Hodrick, Robert J., Xing, Yuhang, Zhang, Xiaoyan. 2006. The cross-section of volatility and expected returns. **Journal of Finance**, 1: 259–299.
- Ang, A., R. J. Hodrick, Y. Xingx, and X. Zhang. 2009. High Idiosyncratic Volatility and Low Returns: International and Further U.S. Evidence. **Journal of Financial Economics**, 91: 1-23.
- Behr, Patrick, Guetler, Andre and Felix Miebs. 2012. On portfolio optimization: Imposing the right constraints. **Journal of Banking & Finance**, 37: 1232-1242.
- Blitz, David C., and Pim van Vliet. 2007. The Volatility Effect: Lower Risk without Lower Return. **The Journal of Portfolio Management**, 34: 102-113.
- Bodjov, Yuri and Masson, Legg. 2010. Low Volatility Portfolios in the Canadian Marketplace. **TD Asset Management Research**.
- Carvalho, Raul Leote de, Xiao Lu and Pierre Moulin. 2012. Demystifying Equity Risk-Based Strategies: A Simple Alpha plus Beta Description. **Journal of Portfolio Management**, 38: 56-70.
- Clarke, Roger, Harindra de Silva, and Steven Thorley. 2006. Minimum-Variance Portfolios in the U.S. Equity Market. **The Journal of Portfolio Management**, 33: 10-24.
- Chopra, V. K. and W. T. Ziemba. 1993. The effects of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice. **The Journal of Portfolio Management**, 19: 6-11.
- DeMiguel, V., Garlappi, L., Uppal, R. 2009. Optimal versus Naive Diversification: how inefficient is the 1/N portfolio strategy. **The Review of Financial Studies**, 22: 1915–1953.
- Elsas, Ralf, El-Shaer, Mahmoud and Theissen, Erik. 2003. Beta and Returns Revisited: Evidence from the German Stock Market. **Journal of International Financial Markets, Institutions and Money Journal**, 13: 1-18.
- Estrada, Javier. 2007. Mean-Semivariance Behavior: Downside Risk and Capital Asset Pricing. **International Review of Economics and Finance**, 16: 169-185.
- Estrada, Javier. 2008. Mean-Semivariance Optimization: A Heuristic Approach. **Journal of Applied Finance**, 18: 57-72.
- Fabozzi, Frank J., Sergio M. Focardi, Petter N. Kolm. 2010. **Quantitative Equity Investing: Techniques and Strategies**, Wiley.
- Fama, E., and French, K. 1992. The Cross-Section of Expected Returns. **Journal of Finance**, 47: 427–465.

- Fama, E. F., and K. R. French. 2004. The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence. **The Journal of Economic Perspectives**, 18: 25-46.
- Fu, F. 2009. Idiosyncratic Risk and the Cross-Section of Expected Returns. **Journal of Financial Economics**, 91: 24-37.
- Gosier, Kenneth, Ananth Madhavan, Vitaly Serbin and Jian Yang. 2005. Toward Better Risk Forecasts. **The Journal of Portfolio Management**, 31: 82-91.
- Haugen, Robert A., Heins A. J. 1975. Risk and the Rate of Return on Financial Assets. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, 10: 775-784.
- Haugen, Robert A., and Nardin L. Baker. 1991. The Efficient Market Inefficiency of Capitalization Weighted Portfolios. **The Journal of Portfolio Management**, 17: 35-40.
- Jagannathan R. and T. Ma. 2003. Risk Reduction in Large Portfolios: Why Imposing the Wrong Constrains Helps. **The Journal of Finance**, 58: 1651-1684.
- Jorion, P. 1986. Bayes-Stein Estimation for Portfolio Analysis. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, 21: 279-292
- Ledoit, O. and M. Wolf. 2004. Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix. **Journal of Portfolio Management**, 30: 110-119
- Markowitz, Harry. 1952. Portfolio Selection. **The Journal of Finance**, 7: 77-91.
- Martellini, L. 2008. Toward the Design of Better Equity Benchmarks: Rehabilitating the Tangency Portfolio from Modern Portfolio Theory. **Journal of Portfolio Management**, 34: 34-41.
- Nielsen, Frank and Raman Aylursubramanian. 2008. Far From the Madding Crowd – Volatility Efficient Indices. **MSCI BARRA Research**.
- Pettengill, G.N., Sundaram, S., Mathur, I. 1995. The conditional relation between beta and returns. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, 30: 101-116.
- Scherer, Bernd. 2011. A Note on the Returns from Minimum Variance Investing. **Journal of Empirical Finance**, 18: 652-660.
- Sharpe, W. F. 1964. Capital Asset Prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. **The Journal of Finance**, 19: 425-442
- Tang, Gordon Y.N. ; Shum, Wai C. 2003. The conditional relationship between beta and returns: recent evidence from international stock markets. **International Business Review**, 12: 109-126.
- Thomas, Ric, and Robert Shapiro. 2009. Managed Volatility: A New Approach to Equity Investing. **The Journal of Investing**, 18: 12-23.
- Vliet, Pim van., Blitz, David C., Grient, Bart. 2011. Is the Relation Between Volatility and Expected Stock Returns Positive, Flat or Negative? **Working Paper**, <http://ssrn.com/abstract=1881503>.

6. Anexos

Anexo 1 – Performance do Fundo Carteira Variância Mínima DAX

Anexo Figura 1 - Performance Carteira Variância Mínima DAX vs. Índice DAX



Legenda:

- DE000A0METM0: DAXplus® Minimum Variance Germany EUR
- DE0008467440: DAX® EUR

Fonte: <http://www.dax-indices.com/EN/index.aspx?pageID=25&ISIN=DE000A0METM0>

Anexo 2 – Intensidade de Shrinkage

Anexo 2.1 – Intensidade de Shrinkage *Ledoit & Wolf (2004)*

$$W_{lw} = \max \left\{ 0, \min \left\{ \frac{k}{T}, 1 \right\} \right\} \quad \text{sendo} \quad k = \frac{\hat{\pi} - \hat{c}}{\hat{\gamma}}$$

$$\hat{\pi} = \sum_{i,j=1}^N \hat{\pi}_{ij} \quad \text{com} \quad \hat{\pi}_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left((r_{i,t} - \bar{r}_i)(r_{j,t} - \bar{r}_j) - \hat{\sigma}_{ij} \right)^2$$

$$\hat{c} = \sum_{i=1}^N \hat{\pi}_{ii} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \frac{\hat{\rho}}{2} \left(\sqrt{\hat{\rho}_{jj}/\hat{\rho}_{ii}} \hat{\vartheta}_{ii,jj} + \sqrt{\hat{\rho}_{ii}/\hat{\rho}_{jj}} \hat{\vartheta}_{jj,ii} \right)$$

$$\hat{\vartheta}_{ii,jj} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^T \left[\left((r_{i,t} - \bar{r}_i)^2 - \hat{\sigma}_{ii} \right) \left((r_{i,t} - \bar{r}_j)(r_{j,t} - \bar{r}_j) - \hat{\sigma}_{ij} \right) \right]$$

$\hat{\gamma} = \|C - C_{cc}\|_F^2$ onde $\|\cdot\|_F$ representa a norma de Frobenius:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^N a^2_{ij}}$$

- $r_{i,t}$ representa o retorno do título i durante o período t , com $1 \leq i \leq N, 1 \leq t \leq T$

$$\bar{r}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{i,t} \quad e \quad \hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_{i,t} - \bar{r}_i)(r_{j,t} - \bar{r}_j)$$

- C representa a matriz das correlações da amostra e C_{cc} a matriz das Correlações Constantes. A correlação constante, aqui designada por $\hat{\rho}$, é a correlação média entre todos os títulos, ou seja, $\hat{\rho} = \frac{2}{(N-1)N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \hat{\rho}_{ij}$.

- A matriz Σ_{cc} referida na equação (3) obtém-se da seguinte forma:

- Decompor Σ_s (matriz variâncias covariâncias da amostra) em $\Lambda C \Lambda$ sendo Λ , a matriz diagonal com os desvios padrão na diagonal e C a matriz das correlações da amostra.

- Substituir C por C_{cc}

Fonte: Adaptado de "Quantitative Equity Investing: Techniques and Strategies" (Março 2010), Wiley.

Anexo 2.2 – Intensidade de Shrinkage *Bayes-Stein* (1986)

$$W_{BS} = \frac{N + 2}{(N + 2) + (Y - Y_0\underline{1})'T\Sigma_s^{-1}(Y - Y_0\underline{1})}$$

N : N° de títulos

Y_0 : Vector de Retornos da carteira de variância mínima

Y : Vector de Retornos da amostra

Σ_s : Matriz variâncias covariâncias da amostra

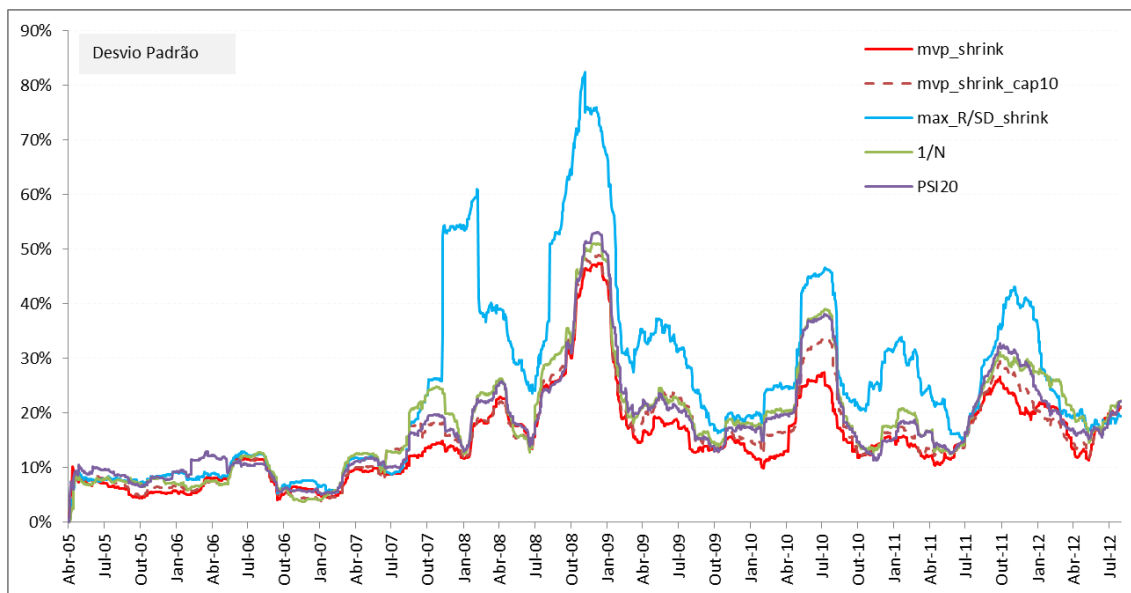
$\underline{1}$: Vector de 1's

Anexo 3 – Resultados sem a restrição de *short selling*Anexo Tabela 1 - Performance das carteiras sem restrição *short selling* no Período 2008-2012

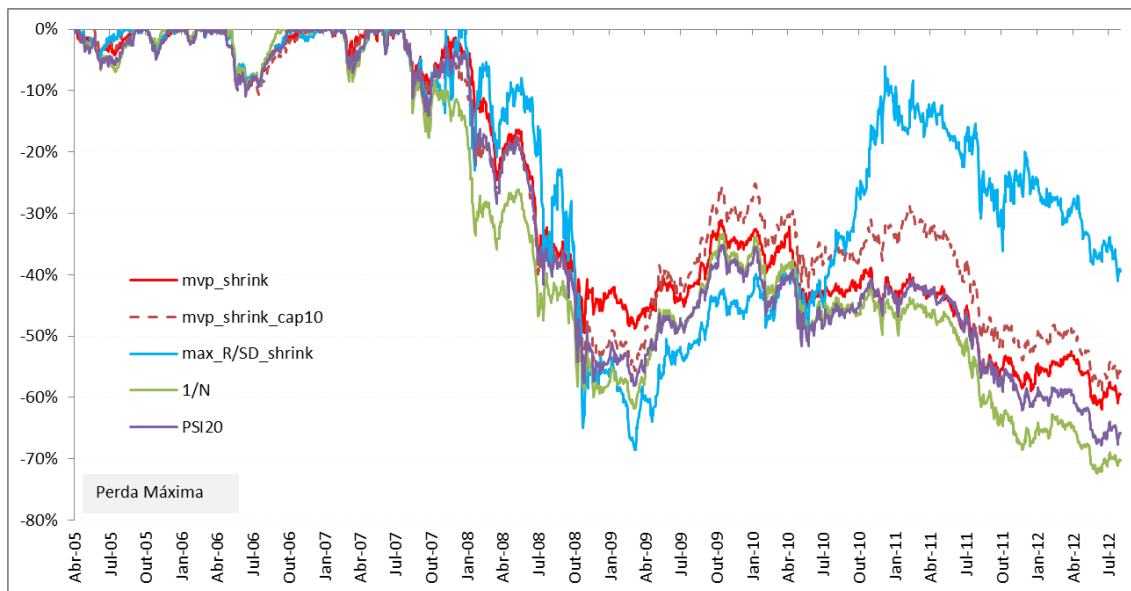
Painel A: 2005-2012	Rendibilidade Anualizada	Desvio Padrão Anualizado	Perda Máxima	R/SD	R/PM	teste t (vs.mvp)	teste F (vs.mvp)	teste t (vs.mvp cap 10)	teste F (vs.mvp cap 10)
mvp_shrink	-1,98%	17,58%	50,37%	-	-	-	-	-	-
mvp_shrink_cap10	-1,74%	18,89%	57,22%	-	-	49,0%	0,1%	-	-
max_R/SD_shrink	-10,62%	133,06%	99,89%	-	-	56,9%	0,0%	57,1%	0,0%
1/N	-7,24%	21,20%	72,44%	-	-	69,8%	0,0%	70,0%	0,0%
PSI20	-6,66%	20,60%	67,82%	-	-	68,1%	0,0%	68,4%	0,0%
Painel B: 2005-2007	Rendibilidade Anualizada	Desvio Padrão Anualizado	Perda Máxima	R/SD	R/PM	teste t (vs.mvp)	teste F (vs.mvp)	teste t (vs.mvp cap 10)	teste F (vs.mvp cap 10)
mvp_shrink	18,46%	8,98%	10,43%	2,06	1,77	-	-	-	-
mvp_shrink_cap10	20,75%	10,37%	11,93%	2,00	1,74	39,1%	0,0%	-	-
max_R/SD_shrink	119,75%	52,72%	34,20%	2,27	3,50	0,1%	0,0%	0,1%	0,0%
1/N	19,21%	11,72%	17,69%	1,64	1,09	46,7%	0,0%	56,5%	0,1%
PSI20	20,49%	11,04%	14,15%	1,86	1,45	40,6%	0,0%	51,1%	4,5%
Painel C: 2008-2012	Rendibilidade Anualizada	Desvio Padrão Anualizado	Perda Máxima	R/SD	R/PM	teste t (vs.mvp)	teste F (vs.mvp)	teste t (vs.mvp cap 10)	teste F (vs.mvp cap 10)
mvp_shrink	-12,50%	21,09%	50,37%	-	-	-	-	-	-
mvp_shrink_cap10	-13,16%	22,47%	52,61%	-	-	54,1%	1,4%	-	-
max_R/SD_shrink	-47,88%	163,25%	99,89%	-	-	91,8%	0,0%	91,3%	0,0%
1/N	-20,19%	25,18%	67,22%	-	-	86,5%	0,0%	83,0%	0,0%
PSI20	-19,91%	24,56%	66,14%	-	-	86,6%	0,0%	82,9%	0,1%

Anexo 4 – Volatilidade, Perda Máxima e Rendibilidade período 2005-2012

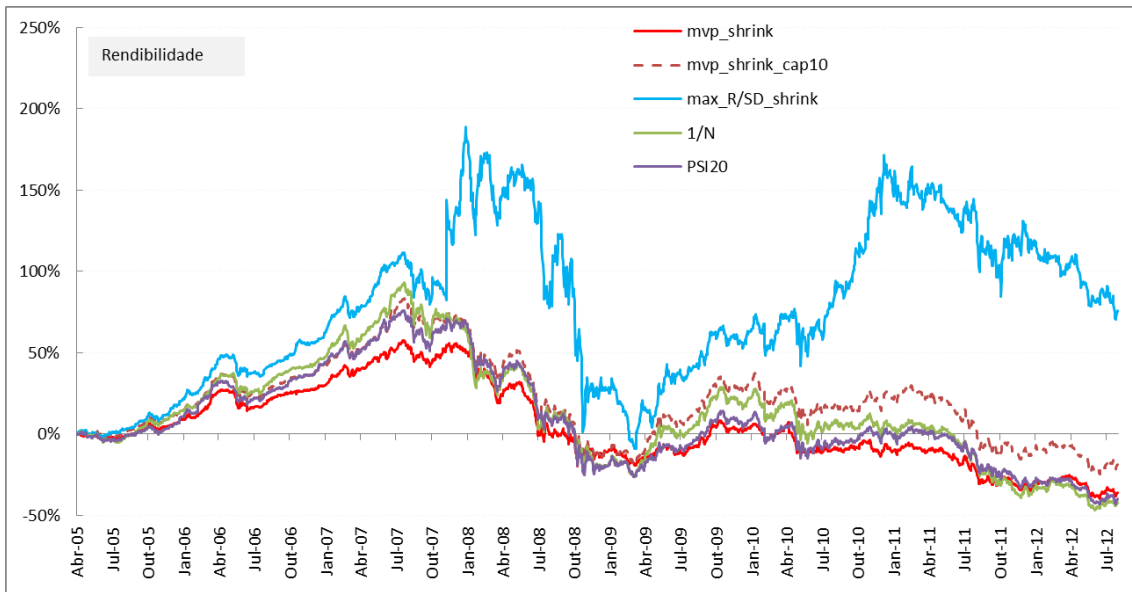
Anexo Figura 2 - Desvio Padrão Anualizado Período 2005-2012



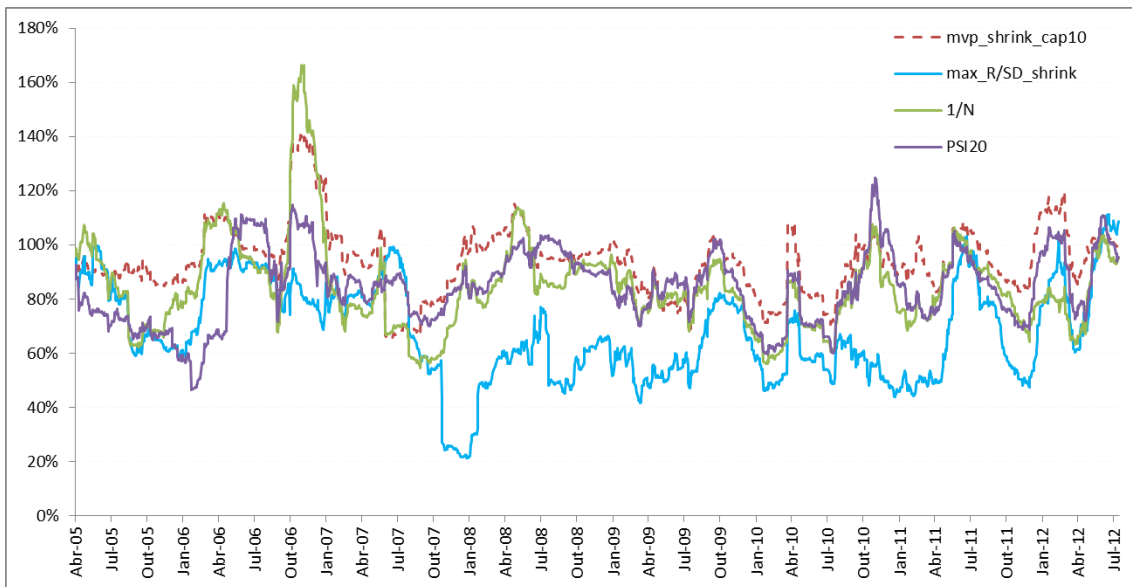
Anexo Figura 3 - Perda Máxima Período 2005-2012



Anexo Figura 4 - Rendibilidade Acumulada Período 2005-2012

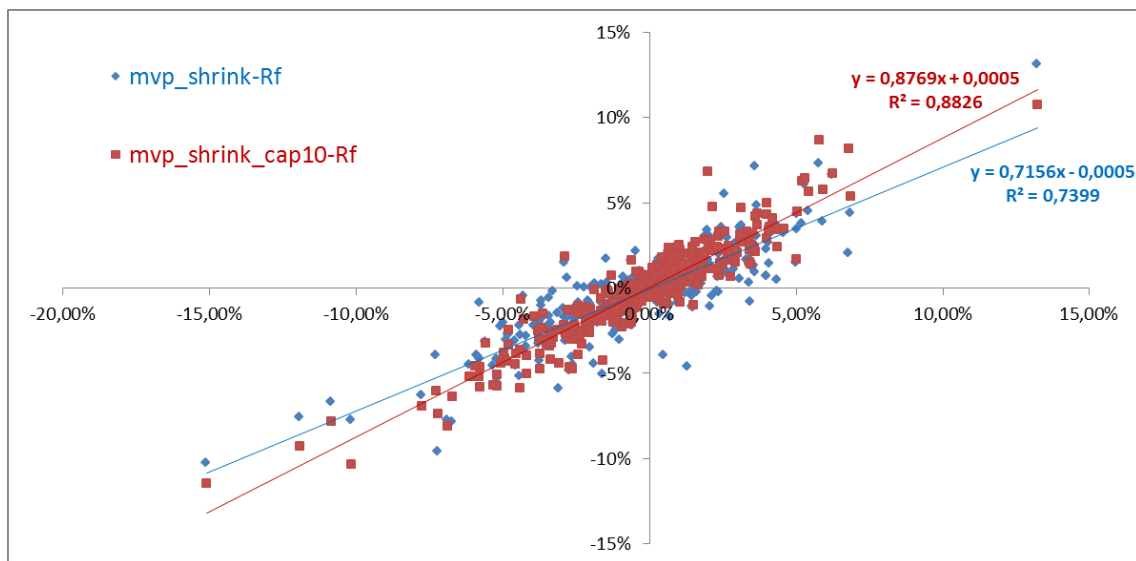


Anexo Figura 5 - Desvio Padrão da carteira mvp_shrink em % das restantes carteiras no período 2005-2012



Anexo 5 – Regressão Linear Carteiras mvp e PSI20

Anexo Figura 6 - Regressão Linear Carteiras mvp e PSI20



Anexo Tabela 2 - Estatísticas Resumo Regressão mvp_shrink, mvp_shrink_cap10 e PSI20

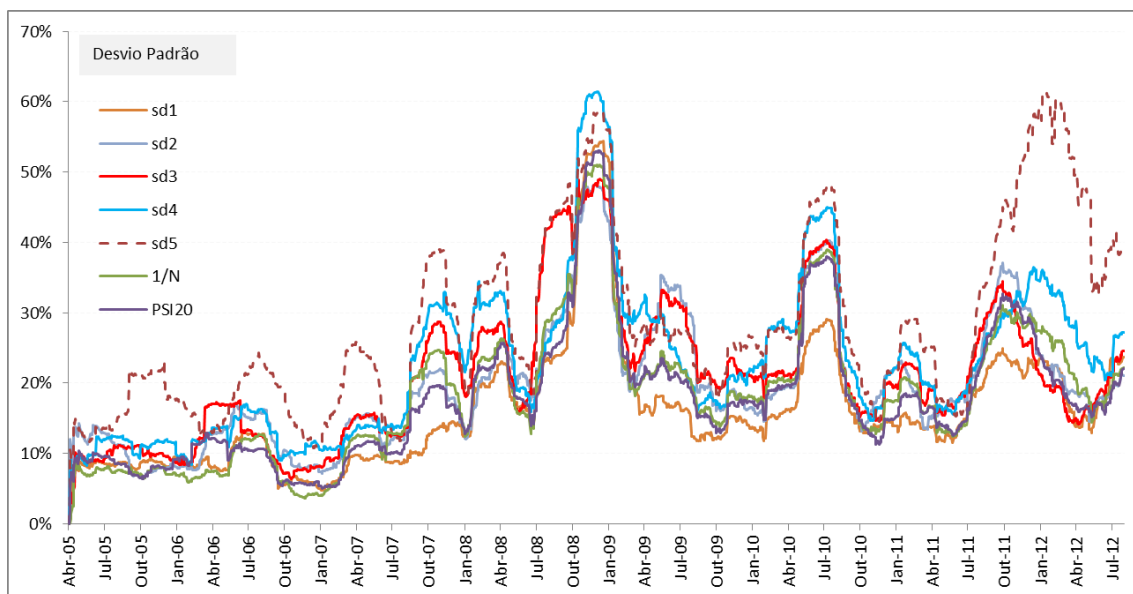
Painel A: mvp_shrink e PSI20	<i>Coefficients</i>	<i>Standard Error</i>	<i>t Stat</i>	<i>P-value</i>
<i>Alpha</i>	-0,00053	0,000626527	-0,8508	0,39541
psi20-Rf	0,71561	0,02165387	33,0478	0
Painel B: mvp_shrink_cap10 e PSI20	<i>Coefficients</i>	<i>Standard Error</i>	<i>t Stat</i>	<i>P-value</i>
<i>Alpha</i>	0,00048	0,00047216	1,02254	0,30717
psi20-Rf	0,87694	0,00163189	53,7374	0

Nota: Utilizou-se a Yield das Obrigações a 10 anos como referência à taxa de juro sem risco (Rf)

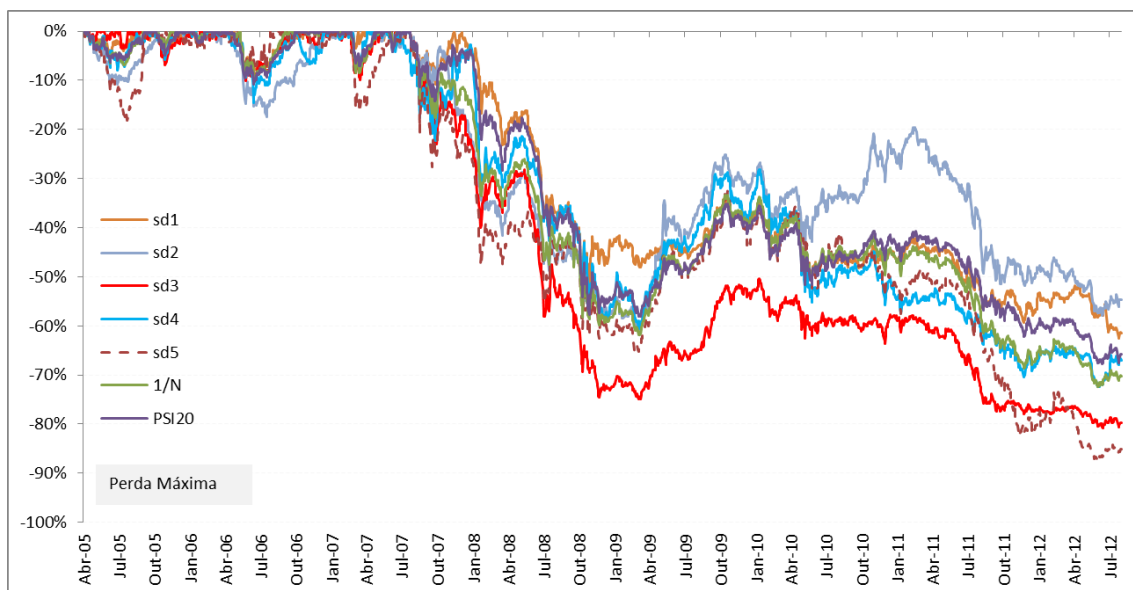
Anexo 6 – Alternativas à metodologia de Markowitz

Anexo 6.1 - Performance carteiras variância mínima baseadas no desvio padrão

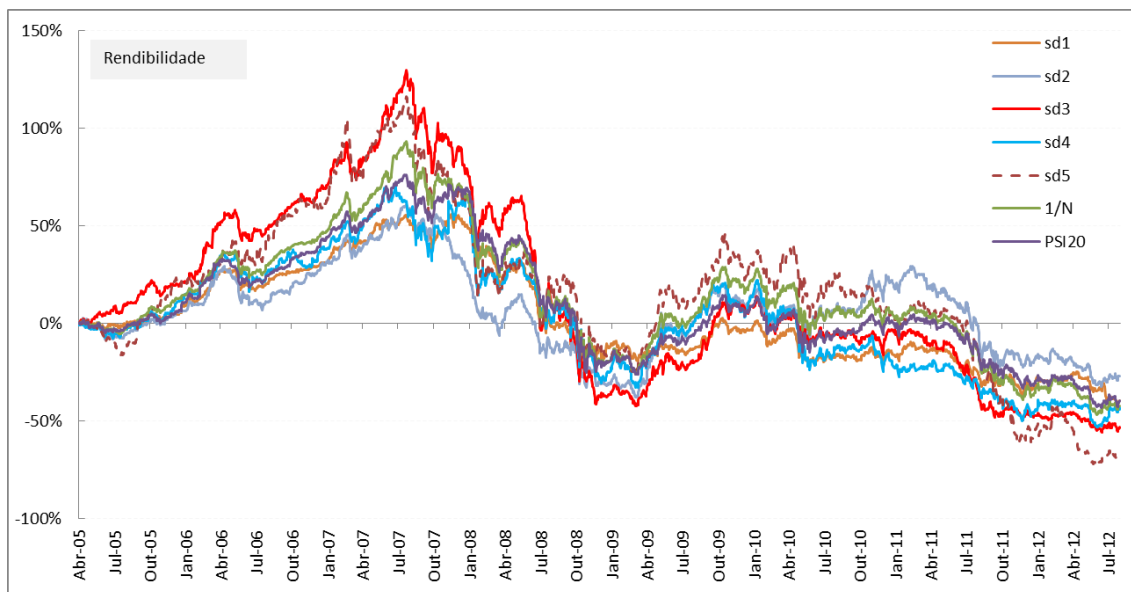
Anexo Figura 7 -Desvio Padrão anualizado carteiras variância mínima baseadas no desvio padrão



Anexo Figura 8 - Perda Máxima carteiras variância mínima baseadas no desvio padrão

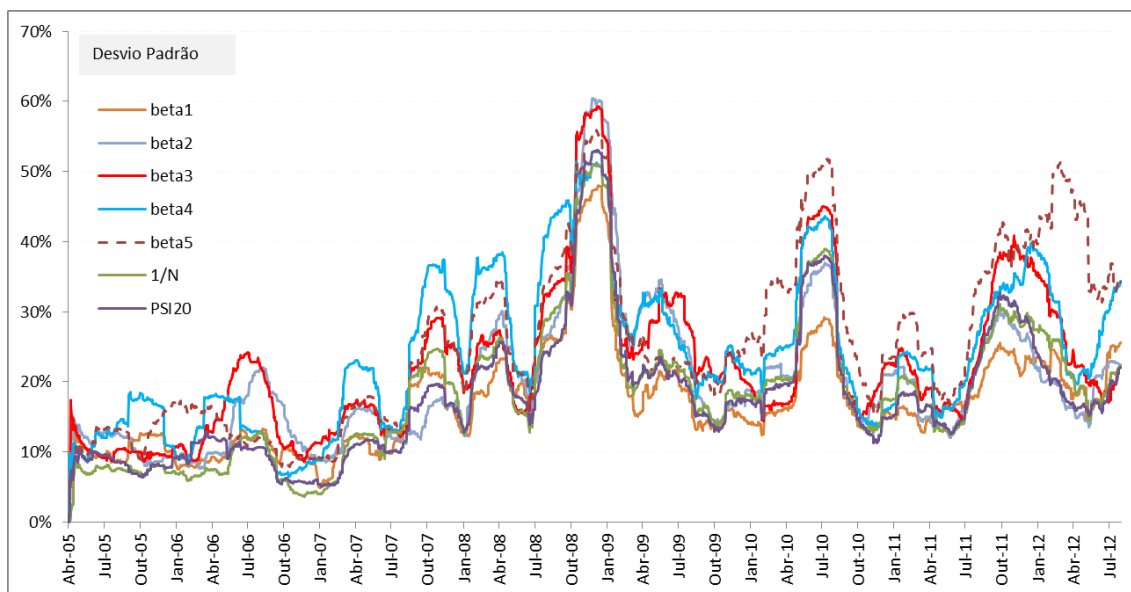


Anexo Figura 9 - Rendibilidade carteiras variância mínima baseadas no desvio padrão

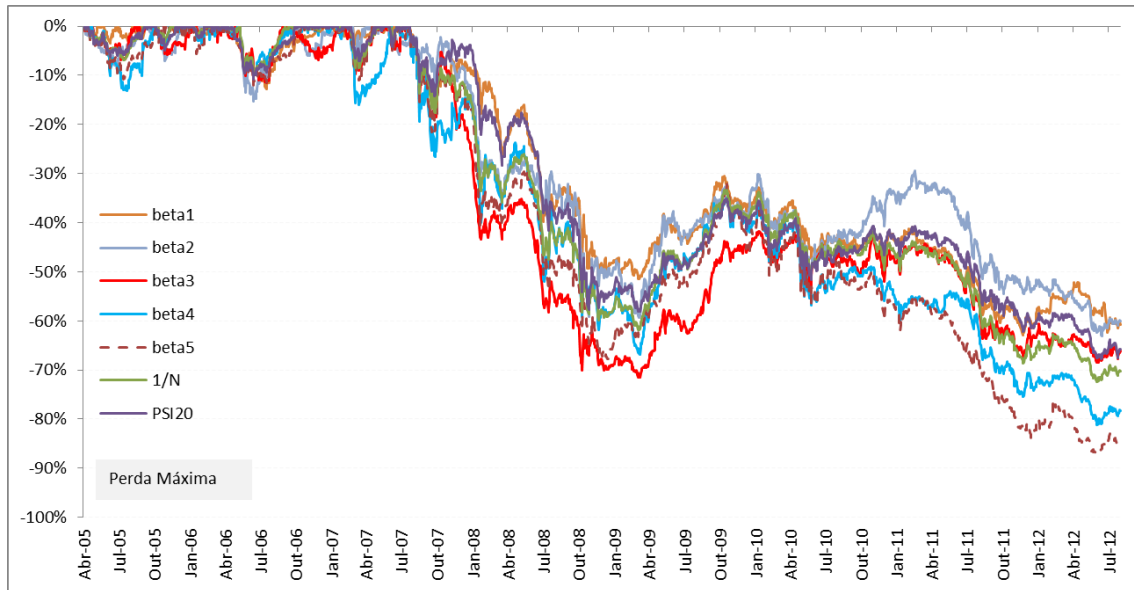


Anexo 6.2 – Performance carteiras variância mínima baseadas no Beta

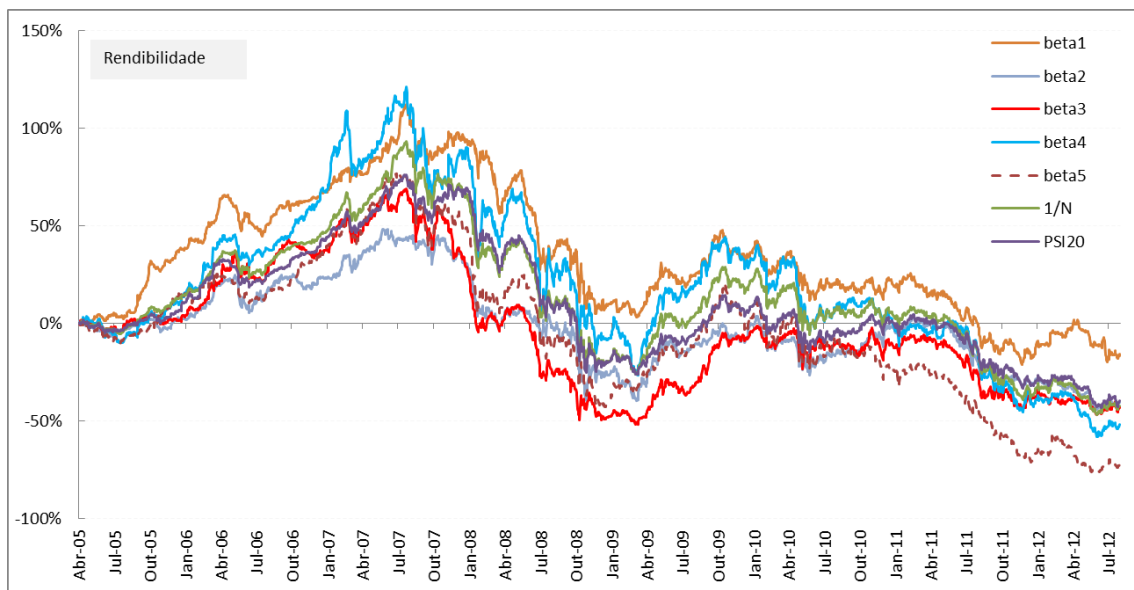
Anexo Figura 10 - Desvio Padrão anualizado carteiras variância mínima baseadas no Beta



Anexo Figura 11 - Perda Máxima carteiras variância mínima baseadas no Beta



Anexo Figura 12 - Rendibilidade carteiras variância mínima baseadas no Beta



Anexo 7 – Resultados Regressão para os Factores Fama & French (SMB e HML)

Anexo Tabela 3 - Estatísticas Resumo Regressão Factores Fama & French

	<i>Coefficients</i>	<i>Standard Error</i>	<i>t Stat</i>	<i>P-value</i>
Intercept (a)	-0,000538922	0,000627598	-0,85871	0,391041
PSI20-Rf	0,703040212	0,023659245	29,71524	2,3E-101
SMB	-0,018283119	0,027186389	-0,67251	0,501666
HML	0,021250153	0,021116236	1,006342	0,314888

Anexo Tabela 4 – Correlação com Factores Fama & French

<i>Correlação Variáveis</i>	<i>RM-Rf</i>	<i>SMB</i>	<i>HML</i>	<i>MVP-Rf</i>
RM-Rf	100%			
SMB	-35%	100%		
HML	29%	-31%	100%	
MVP-Rf	86%	-33%	28%	100%

Notas:

$$(R_{mvp} - Rf) = a + \beta(R_{PSI20} - Rf) + s_aSMB + s_bHML + \varepsilon_i$$

Utilizou-se a Yield das Obrigações a 10 anos como referência à taxa de juro sem risco (Rf)

O cálculo das rendibilidades dos grupos SMB e HML foi determinado da seguinte forma:

SMB=1/3(Small Value + Small Neutral + Small Growth) – 1/3(Large Value + Large Neutral+ Large Growth)

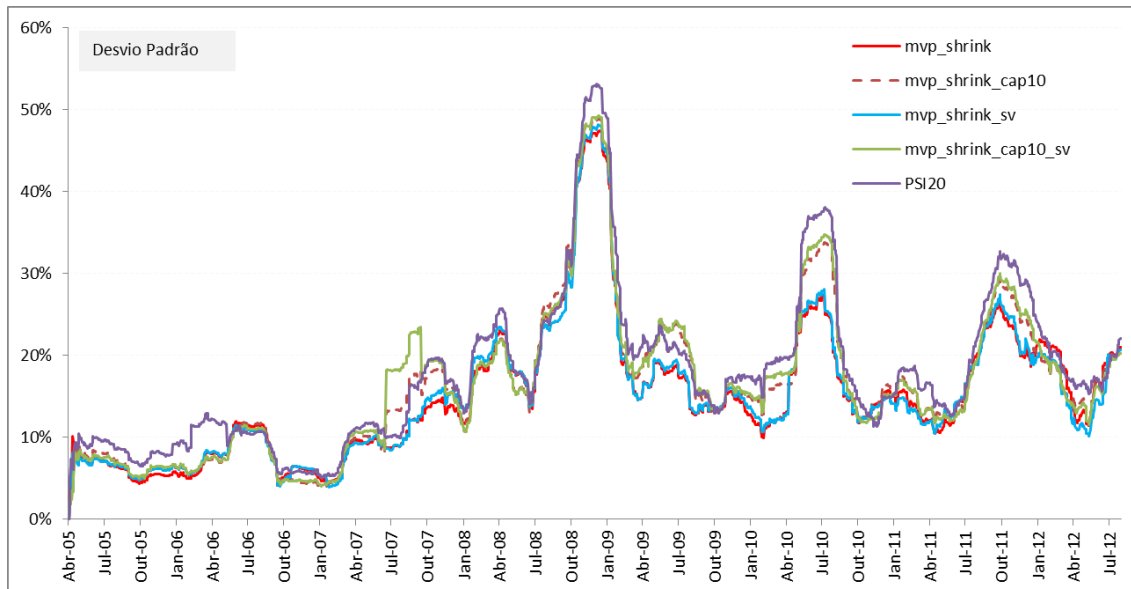
HML=1/2(Small Value + Large Value) -1/2 (Small Growth + Large Growth)

Os grupos *Value*, *Neutral* e *Growth* pertencem aos percentis [0,30], [30,70] e [70,100] respectivamente, na variável *Market to Book (Factor Valor)*.

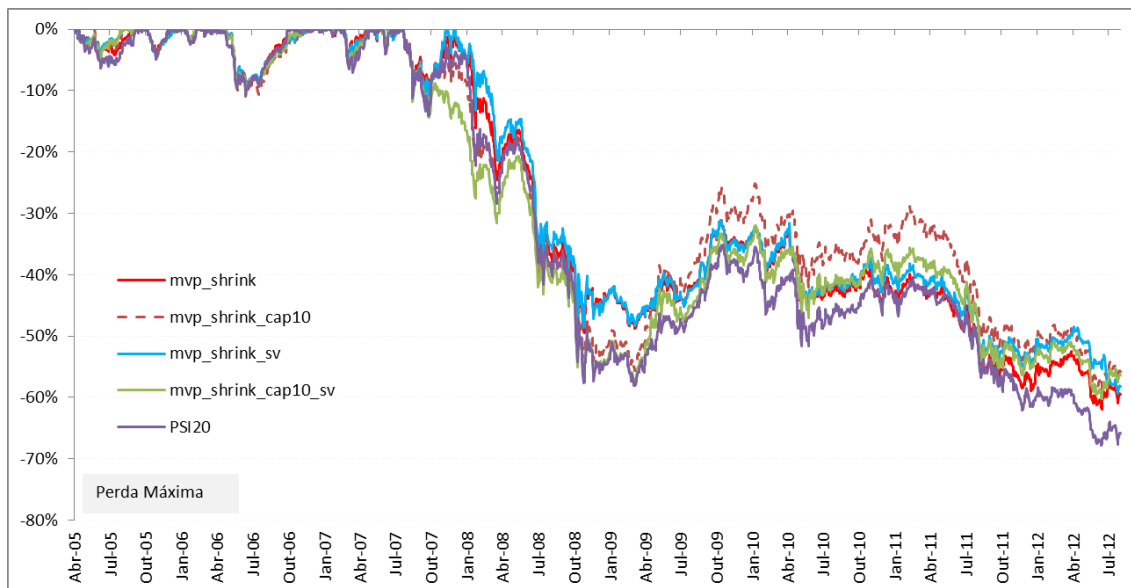
Os grupos *Small* e *Large* pertencem aos percentis [0,50] e [50,100] respectivamente, na variável *Market Equity (Factor Dimensão)*.

Anexo 8 – Resultados Carteiras Semi-Variância Mínima

Anexo Figura 13 - Desvio Padrão anualizado carteiras semi-variância mínima



Anexo Figura 14 - Perda Máxima carteiras semi-variância mínima



Anexo Figura 15 - Rendibilidade carteiras semi-variância mínima

