

MODELOS DE TAXA DE JURO APÓS A CRISE DE
CRÉDITO E LIQUIDEZ

Tiago Miguel Vargas Tavares

Tese de Mestrado
em Finanças

Orientador(a):
Prof. Doutor João Pedro Vidal Nunes, ISCTE Business School, Departamento de
Finanças

Novembro 2011

Abstract

The explosion of the basis spread observed during the credit and liquidity crisis (August 2007) lead the markets to a situation where multiple yield curves are required to estimate the different dynamics of the distinct forward rates. This paper presents an empirical analysis of the markets and models evolution across the credit crunch crisis. First, the Libor Market Model (LMM) is presented to price European At-the-Money (ATM) caps and floors, in its traditional form: “*Single-curve*”. Then the events that lead to a new market practice of pricing interest rate derivatives are explained. After that, the new LMM model is presented in its most recently form, based on multiple yield curves reflecting the different credit and liquidity risk of Libor rates with different tenors (“*Multi-curve*”). Then the two approaches are analyzed and compared the results in three distinct periods: the first one before the credit crunch (Jan/2007 to Jul/2007), the second one after the credit crunch (1/Aug/2007 until 30/Jun/2011), and the third one during the peak crisis, occurred in the period of Lehman Brothers bankruptcy (Set/2008 to Nov/2008). The results show a clear evidence that the market has abandoned since August 2007 the classical “*Single-curve*” pricing methodology, typical of the pre-credit crunch period and has adopted a modern “*Multi-Curve*” approach. The same analysis is applied to At-the-Money (ATM) European Swaptions using the Swap Market Model, and we arrive at the same evidences.

JEL Classifications: E43, G12, G13.

Keywords: crisis, liquidity, pricing, single-curve, multi-curve, basis, caps, swaptions.

Resumo

Neste documento é apresentada uma análise dos mercados financeiros e da evolução dos modelos de taxa de juro durante a crise de crédito e liquidez, ocorrida em Agosto 2007. Inicialmente é apresentado o *Libor Market Model* (LMM), utilizado na avaliação dos *European At-the-Money* (ATM) *caps* e *floors*, segundo a sua dinâmica lognormal e sob a forma de avaliação tradicional: “*Single-curve*”. Depois são explicados os acontecimentos que levaram ao alargamento do *basis spread* entre as diferentes maturidades subjacentes às taxas Libor e conduziram a uma nova prática de mercado para *pricing* dos instrumentos derivados de taxa de juro. Seguidamente é apresentado o LMM segundo uma nova metodologia, baseada na utilização de múltiplas *yield curves*, de modo a reflectir os diferentes prémios de risco e de liquidez associados às maturidades das taxas *forward* da Libor: abordagem “*Multi-curve*”. A análise empírica é dividida em dois períodos distintos, divididos pela crise financeira, ocorrida em Agosto de 2007. Os resultados evidenciam que o mercado abandonou a abordagem tradicional de *pricing* “*Single-curve*”, e adoptou uma mais actual “*Multi-curve*”. Os resultados obtidos são suportados pela mudança de comportamento dos agentes de mercado e reflectem as cotações das taxas observadas. Adoptou-se a mesma metodologia na avaliação de *European swaptions* pelo *Swap Market Model* (SMM), tendo-se obtido os mesmos resultados.

JEL Classifications: E43, G12, G13.

Keywords: crise, liquidez, pricing, single-curve, multi-curve, basis, caps, swaptions.

Índice

1.	Introdução	5
2.	Modelos de Mercado de Taxa de Juro.....	9
2.1	Mercado de Taxa de Juro.....	9
2.2	Descrição do Modelo (Xibor Market Model)	11
2.3	Avaliação de Caps/Floors	14
2.4	Avaliação de European Swaptions	15
3.	Modelos de Mercado de Taxa de juro “Multi-curve”	18
3.1	Basis Swap.....	19
3.2	Colateralização dos Derivados OTC vs Curva de Desconto OIS	23
3.3	Xibor – Taxa que Incorpora o Risco de Default e o Risco de Liquidez.....	24
3.4	Evolução dos modelos de taxa de juro	26
3.5	Xibor Market Model (XMM) – “Multi-curve”	27
3.6	“Multi-curve” - FRA	28
3.7	“Multi-curve” - IRS.....	28
3.8	“Multi-curve” - Caps/Floors	29
3.9	“Multi-curve” - Swaptions.....	29
4.	Implementação.....	31
4.1	Especificação de Volatilidade e Estimação de Parâmetros	31
4.2	Descrição dos Dados	32
4.3	Abordagem tradicional: “Single-Curve”	35
4.4	Abordagem pós “credit crunch”: ”Multi-curve”	36
4.5	Resultados Obtidos.....	39
4.6	Teste de Hipóteses.....	44
5.	Conclusões.....	47
A	Anexo: Tabelas	51

1. Introdução

Nos últimos anos tem-se verificado um crescimento exponencial no mercado de derivados financeiros de taxa de juro. Assim, a informação contida no preço destes instrumentos, em especial no preço dos activos financeiros derivados de taxa de juro, onde assenta grande parte desta dissertação, constitui uma ampla fonte de dados e indicadores sobre as expectativas de mercado relativamente a um conjunto de variáveis financeiras e indicadores de política monetária por parte dos bancos centrais, nomeadamente, taxas de juro e taxas de inflação.

Como conceito “base” relativo ao preço de um activo financeiro, podemos dizer que o preço de um qualquer activo financeiro é o valor actualizado dos seus *cash-flows* futuros, onde as taxas de actualização usadas, assim como os *cash-flows* futuros esperados, incorporam as expectativas dos agentes relativamente ao que eles esperam que vá acontecer no futuro, quer em termos das diferentes variáveis económicas prováveis de influenciar esses mesmos *cash-flows*, quer ao nível do chamado prémio de risco que traduz o grau de incerteza atribuído pelos agentes aos acontecimentos futuros.

Como resenha histórica, os primeiros modelos para estimar o formato da curva de taxas de juro futuras (“*forward rates*”) eram os chamados “*short rate models*”. Estes modelos, como o seu nome indica, serviram inicialmente para modelizar a taxa de juro de curto prazo que não é observável directamente no mercado.

Os modelos de taxa de juro “*short rate models*” com parâmetros *time-dependent* desenvolvidos, por exemplo, por Hull e White¹ (1990), eram utilizados inicialmente para estimar a dinâmica da curva de taxas de juro *forward*. Esta abordagem consistia em modelizar uma única variável (*short-rate*), designando-se por isso de modelo a um factor, e a partir desse ponto inferir toda a dinâmica da curva. O grande problema deste tipo de modelos prende-se com a calibração dos parâmetros, que tendem a ser bastante instáveis a pequenas variações dos *inputs* (dados observados no mercado). De referir que estes “*short rate models*” não eram utilizados para *pricing* dos *caps*, dos *floors* e dos *swaptions*. Para esse efeito era utilizada a fórmula de Black

¹ Em 1996, Hull e White introduziram o modelo a 2 factores.

(1976)² [5]. Através da fórmula de *Black* (1976) [5], a reprodução correcta dos preços de mercado não era por vezes conseguida, isto é, a avaliação destes instrumentos não era consistente com dados de mercado, o que levou a que houvesse uma grande pressão dos *players* de mercado para que fossem desenvolvidos novos modelos que tivessem em conta toda estrutura da curva de taxas de juro e não apenas um ponto, como acontecia até aqui.

Assim, *Brace*, *Gatarek* e *Musiela* (1997) [6] e *Jamshidian* (1997) [18], propuseram uma nova classe de modelos, os chamados *Market Models* (modelos de mercado), ou mais precisamente o *Libor Market Model* (LMM) e o *Swap Market Model* (SMM), respectivamente. Estes modelos, como o seu nome indica, modelizam as dinâmicas subjacentes às taxas cotadas no mercado, como são as taxas *Libor* ou as taxas *Euribor*, no caso do LMM e as taxas *Swap*, no caso do SMM. Estes modelos apresentam ainda a vantagem de incorporarem toda a dinâmica da curva dada pela estrutura de volatilidades e as correlações entre as taxas, calibrados a instrumentos de mercado, como são os *caps*, os *floors* e os *swaptions*. Por outro lado, apresentam alguns inconvenientes, nomeadamente, alguma complexidade, o elevado número de factores a estimar e o elevado número de graus de liberdade, que pode dificultar a melhor forma de parametrizar o modelo. Estes modelos apresentam como principal vantagem a caracterização de toda a estrutura de prazo das taxas de juro³, muitas vezes designada de “*yield curve*”, através de um número finito de *forward rates*. Como já tinha sido referido acima, estes modelos apresentam-se bastante flexíveis devido aos graus de liberdade disponíveis para parametrização dos mesmos. Nesta dissertação irão ser abordadas as propriedades dos modelos, tais como: o número de factores que o caracterizam, a volatilidade das taxas, e a sua forma de avaliação tradicional, assente em apenas uma *yield curve*.

A caracterização dos modelos⁴ feita por *Brace*, *Gatarek* e *Musiela*, foi válida durante um largo período de tempo, nomeadamente até ao início da crise do *subprime*, que ocorreu em Julho de 2007. Nesta dissertação descrevem-se os factos ocorridos no mercado de taxa de juro durante a crise, que levaram a alterações na especificação dos modelos, e consequentemente à alteração da

² Inicialmente foi criada para *equities* e mais tarde adaptada a derivados de taxa de juro.

³ Esta caracterização da curva, descreve a relação entre as taxas de cupão zero e o correspondente prazo até à maturidade.

⁴ A caracterização inicial do modelo assentava apenas numa *yield curve*, “*Single-curve*”. Esta curva era utilizada para caracterizar os factores de desconto e as taxas *forward*.

avaliação dos instrumentos, *caps*, *floors* e *swaptions*. Esta evolução dos modelos levou a que passasse a ser utilizada uma abordagem com curvas distintas: uma para caracterizar os factores de desconto e outra para caracterizar as taxas *forward*. Esta abordagem será designada nesta dissertação como “*Multi-curve*”.

O objectivo desta dissertação é avaliar a capacidade de previsão de diferentes abordagens do modelo LMM e do modelo SMM: a abordagem tradicional “*Single-curve*” e a mais recente “*Multi-curve*”. Assim, irá começar-se pela abordagem pré-crise de crédito, “*Single-curve*”, e posteriormente estender a avaliação destes instrumentos a uma abordagem “*Multi-curve*”. Esta nova abordagem ou forma de avaliação apareceu no mercado após a crise de liquidez, ocorrida em Agosto de 2007, que levou a que uma série de relações existentes entre as taxas do mercado monetário se tenham quebrado e levado à alterações dos modelos. Devido à utilidade destes modelos e à mais-valia que podemos obter na elaboração deste documento, pretende-se apresentar uma análise empírica para comprovar o que de mais recente está a ser utilizado no mercado de taxa de juro e comparar os resultados obtidos pelas diversas abordagens.

A dissertação está dividida em três capítulos: no capítulo 2 caracteriza-se o mercado de taxa de juro, explicitam-se os indexantes mais utilizados no mercado e as respectivas convenções; descrevem-se pormenorizadamente os modelos LMM e SMM (abordagem pré-crise) para a avaliação dos *caps*, dos *floors* e dos *swaptions*; no capítulo 3 descrevem-se os acontecimentos ocorridos no mercado no início da crise de crédito e liquidez e os impactos que tiveram no *pricing* e *hedging* dos instrumentos derivados de taxa de juro, e que levaram à reformulação dos modelos, abandonando a abordagem “*Single-curve*”, e adoptando a abordagem “*Multi-curve*”. Ainda no capítulo 3, explicita-se a generalização da colateralização dos contratos de derivados de taxa de juro, de forma a mitigar o risco de crédito e o risco de liquidez, e é apresentada a nova metodologia de avaliação, segundo duas variantes: uma assume que os contratos têm colateral associado e a outra assume que os contratos não têm colateral associado – ambas as variantes assumem uma abordagem “*Multi-curve*”. Por último, no capítulo 4 apresenta-se uma implementação prática dos modelos LMM e SMM para *pricing* dos *caps/floor*, e dos *swaptions*, respectivamente. Esta análise empírica tem como base uma série histórica, que representa o período desde Janeiro de 2007 a Junho de 2011. Neste capítulo descrevem-se os dados

utilizados e apresentam-se os resultados segundo diferentes metodologias de avaliação, “*Single-curve*”, “*Multi-curve*” sem colateralização e “*Multi-curve*” com colateralização. Por último, e de forma a testar a robustez dos resultados obtidos no capítulo 4, efectua-se um teste de hipóteses à igualdade das médias do erro obtido por cada metodologia, determinado em cada período, e no final, apresentam-se as conclusões.

2. Modelos de Mercado de Taxa de Juro

2.1 Mercado de Taxa de Juro

Para definirmos o *pricing* de certos instrumentos derivados de taxa de juro, como são exemplo disso, os *caps*, os *floors* e os *swaptions* temos que começar por abordar alguns conceitos subjacentes a este mercado, nomeadamente, o *underlying* (Libor, Euribor e Eonia) dos instrumentos e o respectivo prazo, os *credit events* associados a cada contraparte, os mecanismos de liquidação que têm subjacente o risco do colateral e o risco de liquidez, e a calibração destes instrumentos a instrumentos *standard* de mercado, para ajustamento da volatilidade implícita.

Começamos por perceber a natureza das taxas que servem de referência ao mercado interbancário (indexantes), como são as taxas Euribor e as taxas Libor. Existe um painel de bancos que tem obrigatoriedade de cotar diariamente (todos os target *business days*), para 15 maturidades diferentes (até 12 meses) e para diferentes moedas⁵, a taxa a que estas instituições aceitam ceder fundos. À *offer rate* é chamada *London Interbank Offer Rate* ou Libor. O *fixing* da taxa é a média da contribuição dos diversos bancos a operar no mercado de Londres⁶, excluindo o 1º e o 4º quartil⁷, o *calculation agent* é a Reuters (pag. “LIBOR=”) e é uma taxa nominal anual de base ACT/360 (excepto para os GBP, cuja convenção é ACT/365). Foi publicada pela 1ª vez em 1986 e é a taxa de referência subjacente aos contratos de derivados de taxa de juro (ISDA⁸).

A taxa Euribor (Euro Interbank Offered Rate) foi publicada pela 1ª vez em 1998, e foi criada pela European Banking Federation (EBF) e pela Financial Markets Association (FMA). Paralelamente à taxa Libor, a taxa Euribor é uma *offer rate* a que um conjunto de bancos, com elevada qualidade creditícia, aceita ceder fundos na zona euro. O *fixing* desta taxa é calculado em cada target *business day* para cada maturidade, e é igual à média aparada das contribuições

⁵ AUD, CAD, CHF, DKK, EUR, GBP, JPY, NZD, SEK e USD.

⁶ BBA: British Banker's Association

⁷ Só são consideradas 50% das contribuições referente ao painel dos bancos (exclui-se 25% das contribuições mais baixas e 25% das contribuições mais elevadas).

⁸ Os ISDA são contratos standard subjacentes aos swaps e a outros derivados de taxa de juro criados pela International Swaps and Derivatives Association.

do painel de bancos, excluindo 15% das contribuições mais baixas e 15% das contribuições mais elevadas. O *calculation agent* é igualmente a Reuters (pag. “EURIBOR=”) e é uma taxa nominal anual de base ACT/360.

A taxa Eonia é a média a que um conjunto de bancos (os mesmos que contribuem para o *fixing* da Euribor) empresta dinheiro *overnight* sem colateral. Por este facto, e por ser efectivamente uma taxa de mercado (calculada a partir de transacções reais), esta contém informação sobre a política monetária do BCE e sobre as expectativas no curto prazo (*overnight*) associadas à liquidez existente no mercado. A natureza desta taxa, prazo de 1 dia sem colateral, é consensualmente aceite pelos intervenientes no mercado, como sendo a melhor *proxy* a uma taxa de juro sem risco (*risk free rate*).

Neste documento são apresentados outros instrumentos de mercado, como por exemplo os FRA (*Forward Rate Agreement*), que pela sua importância, serão exaustivamente explanados e detalhada a sua fórmula por replicação de dois depósitos. Em particular, convém perceber a divergência existente entre a taxa de mercado dos FRA e a correspondente taxa *forward* implícita nas taxas de depósito (*depos*).

Para apresentarmos o LMM não é apenas necessário modelizar a dinâmica das taxas de juro, mas também definir o *time-value* do dinheiro ao longo do tempo. Começemos por definir o conceito de conta bancária ou *money market account*. Para tal, começa por considerar-se que existe uma conta bancária que pode ser utilizada para depósitos ou empréstimos em *cash* a uma taxa continuamente composta $r(t)$ e que representa o comportamento estocástico de um instrumento financeiro abstracto, que remunera o seu detentor a uma taxa de juro sem risco “*risk free rate*”. Seja $B(t)$ o valor da conta bancária no momento t , que é expectável que evolua ao longo do tempo de acordo com a seguinte dinâmica:

$$dB(t) = r(t)B(t)dt, \quad (1)$$

com

$$B(0)=1$$

Do ponto de vista financeiro, a conta bancária é um derivado, tal que, se considerarmos o investimento de 1 unidade monetária no momento 0, então esta conta é remunerada a uma taxa

de juro continuamente composta e designada por $r(t)$, tal que no momento t o seu valor é dado por:

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r(u) du\right) \quad (2)$$

Com a definição de $B(t)$ podemos introduzir o conceito de factor de desconto do momento T para o momento t :

$$P(t, T) = E_Q \left[\frac{B(t)}{B(T)} \mid F_t \right], \quad (3)$$

sendo Q a medida de probabilidade martingala associada ao numerário $B(t)$. Esta conta bancária é particularmente útil no caso de se querer definir um numerário para a nossa economia em análise. Nesta economia em análise, o valor de um qualquer activo financeiro π , nos momentos de tempo t e T , com $t < T$, dado por $\pi(t)$ e $\pi(T)$ pode ser expresso em unidades de $B(t)$ e $B(T)$, através da expressão

$$\pi(t) = B(t) E_Q \left[\frac{\pi(T)}{B(T)} \mid F_t \right] \quad (4)$$

2.2 Descrição do Modelo (Xibor Market Model)

Apresentado o mercado de taxa de juro, as suas convenções, o conceito de conta bancária e o conceito de factor de desconto, neste ponto vai explicitar-se o *Libor Market Model*. Sem perda de nenhuma das suas propriedades vai designar-se este modelo como *Xibor Market Model (XMM)*, ao invés de *Libor Market Model*, visto que através dele podemos igualmente modelizar as taxas *forward* da Euribor e não apenas as taxas *forward* da Libor.⁹

O *Xibor Market Model* foi o primeiro modelo que estimou a dinâmica das taxas de juro, calibrada a dados observados no mercado (como são as volatilidades dos *caps* e dos *floors*). Estes modelos caracterizam-se por utilizar a evolução das taxas de juro observáveis no mercado, isto é, as taxas de juro *forward* com capitalizações discretas, as quais se assumem ter uma dinâmica lognormal.

⁹ Visto as taxas Euribor ainda não existirem no mercado na altura em que este modelo foi criado por Brace, Gatarek e Musiela (1997) [6].

As taxas subjacentes ao modelo (as taxas *Euribor* e as taxas *Libor*), são amplamente utilizadas e constituem uma referência de mercado. Estas taxas são geralmente superiores às *Bunds* alemãs porque incorporam risco crédito superior. Este risco advém da probabilidade (ainda que baixa) de a contraparte (Banco) entrar em *default*, e por essa via poder não cumprir as responsabilidades assumidas. Estas taxas são igualmente percebidas como sendo taxas que reflectem o custo de capital dos Bancos, pois os Bancos assumem ceder fundos a estas taxas.

Apesar do nome XMM se referir a um modelo, na verdade o XMM representa um conjunto de condições de não arbitragem sobre as *forward rates*. Estas condições de não arbitragem podem ser definidas sobre a função de volatilidade e sobre as correlações existentes entre as *forward rates* com diferentes maturidades. Este modelo surge devido a algumas imperfeições do modelo criado por Heath, Jarrow e Morton (1992) [14], nomeadamente, na dificuldade de calibrar o modelo a preços que efectivamente se verificam no mercado, isto é, as taxas *forward* retiradas do modelo não são aquelas que se observam no mercado, visto pressuporem capitalização contínua. Esta imperfeição levou a que fosse desenvolvido um modelo que replicasse as taxas de juro de mercado *forward*.

Considere-se a seguinte estrutura finita de prazos, também designada por conjunto discreto de datas de maturidade:

$$T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_N$$

onde T_0 representa a data actual e $\tau_k = T_k - T_{k-1}$ o intervalo de tempo¹⁰ em anos (*year fraction*) entre as datas T_k e T_{k-1} . A escolha do *refixing period*, τ_k , é determinada pela periodicidade da taxa spot da *Xibor* subjacente ao instrumento financeiro em análise. Na prática e considerando os *caps* e os *floors*, significa que o mercado considera τ_k aproximadamente igual a 3 meses para o USD e aproximadamente igual a 6 meses para o EUR. Refira-se a título exemplificativo que é expectável considerar em anos $T_1 - T_0 = 0.25$, $T_2 - T_0 = 0.5$, $T_3 - T_0 = 0.75$ em USD e $T_1 - T_0 = 0.5$, $T_2 - T_0 = 1$, $T_3 - T_0 = 1.5$ em EUR.

¹⁰ As quais podem variar para diferentes períodos de capitalização e segundo uma base de calendário específica.

Na definição do modelo assume-se que em cada data T_k $\{k=1, \dots, N\}$ expira uma obrigação de cupão zero,¹¹ de valor nominal unitário, cujo preço no momento t é representado por $P(t, T_k)$, que actualiza para o momento t um valor que ocorre no momento T_k , com $t < T_k$. Em termos financeiros, dizemos que o valor que ocorre em T_k é “descontado” para o momento t , com $t < T_k$. Logo $P(t, T_k)$ é considerado um factor de desconto para os *cash-flows* que ocorrem em T_k . Considere-se $F_k(t) = F(t; T_{k-1}, T_k)$ como sendo a taxa *forward* da *Xibor* contratada em t para o período $[T_{k-1}, T_k]$ com capitalização discreta. Recorrendo ao argumento de não arbitragem entre as N obrigações de cupão zero, e expressando $F_k(t)$ em obrigações de cupão zero¹², vem:

$$P(t, T_{k-1}, T_k) = \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_{k-1})} = \frac{1}{1 + F(t, T_{k-1}, T_k)\tau_k} \quad (5)$$

Seja $F(t, T_{k-1}, T_k)$ a taxa de juro a fixar para um *Forward Rate Agreement* (FRA) tal que:

$$F(t, T_{k-1}, T_k) = \frac{1}{\tau_k} \left[\frac{P(t, T_{k-1})}{P(t, T_k)} - 1 \right] \quad (6)$$

Da equação (6) retira-se facilmente que a correspondente taxa spot da *Xibor* no momento zero é $F(0, 0, T_k) \equiv L(0, T_k)$. Visto a equação (6) definir $\tau_k F_k(t)$ como sendo um rácio de activos negociáveis, então o processo $F_k(t)$ é uma martingala sob a *forward measure* Q^k quando o factor de desconto $P(t, T_k)$ é tido como numerário de economia subjacente ao modelo em análise. Além disso, e sendo consistente com a avaliação de mercado dos *caplets* através da fórmula de Black (1976) [5], o Log-normal *XMM* assume a seguinte dinâmica para as taxas *forward* $F_k(t)$, sob a *forward measure* Q^k :

$$dF_k(t) = F_k(t) \sigma_k(t) dZ_{k-1}^k(t) \quad (7)$$

para $t \leq T_{k-1}$ e $k=1, \dots, N$, onde $Z_{k-1}^k(t) \in \mathfrak{R}$ são movimentos Brownianos standardizados, independentes, sob a *forward measure* Q^k e com as seguintes correlações instantâneas:

$$\text{corr}(Z_{k-1}^k(t), Z_{j-1}^j(t)) = \rho_{k,j}(t) \quad (8)$$

¹¹ Todas as obrigações pertencem à mesma classe de risco de crédito que por sua vez terá de ser da mesma classe de risco das taxas de juro *Xibor*.

¹² Esta suposição não é demasiado forte, pois apesar das taxas swap (taxas de mercado) não serem taxas de cupão zero, estas podem ser convertidas para taxas cupão zero ou factores de desconto, usando por exemplo a metodologia *bootstrapping*.

Os parâmetros $\rho_{k,j}(t)$, com $k,j=1,\dots,N$, representam a correlação instantânea entre a k -ésima e a j -ésima taxa *forward* da Xibor num determinado momento t .

2.3 Avaliação de Caps/Floors

Um *cap/floor* é uma opção sobre uma taxa de juro cujo seu detentor tem o direito a receber no final de cada período T_k o diferencial, se positivo, entre a taxa Xibor $L(T_{k-1},T_k)$ e o seu strike L_X (ou taxa de *cap/floor*). Assim um *cap/floor* de taxa de juro pode ser visto como um portfolio de opções europeias (*calls/puts*) sobre a taxa *forward* da Xibor. O *payoff* associado a cada opção europeia (também designada por *caplet/floorlet*), com valor nominal unitário, é executado se e apenas se tiver valor positivo. Assim, a prática de mercado para avaliar a opção é assumir que a taxa *forward* subjacente tem uma distribuição lognormal com *drift* igual a 0. A Proposição 1 estabelece o modelo de *pricing* para os *caps* e *floors* através de fórmula fechada pelo modelo de Black (1976) [5].

Proposição 1: No XMM, o preço de um *cap* (*floor*) no momento t , com valor nominal unitário, com *strike* L_X , com a sua primeira data de periodificação no momento $T_1(>t)$ e com liquidação postecipada nos momentos T_k ($k=2,\dots,n$ e $n \leq N$), é igual a

$$V_t(T_n; L_X; \theta) = \sum_{k=2}^n v_t(T_{k-1}; T_k; L_X; \theta), \quad (9)$$

sendo que o mercado avalia cada *caplet* ($\theta=1$) e cada *floorlet* ($\theta=-1$), no momento $t < T_{k-1}$ pela seguinte expressão

$$v_t(T_{k-1}; T_k; L_X; \theta) = \tau_k P(t, T_k) \text{Black}[F_k(t); L_X; v(t; T_{k-1}); \theta], \quad (10)$$

sendo

$$\text{Black}[F_k(t); L_X; v(t; T_{k-1}); \theta] = \theta [F_k(t) \phi(\theta d_1^k) - L_X \phi(\theta d_2^k)] \quad (11)$$

$$d_1^k = \frac{\ln \left[\frac{F_k(t)}{L_X} \right] + \frac{1}{2} v(t; T_{k-1})}{\sqrt{v(t; T_{k-1})}}, \quad (12)$$

$$d_2^k = d_1^k - \sqrt{v(t; T_{k-1})}, \quad (13)$$

$$v(t; T_{k-1}) = \int_t^{T_{k-1}} \sigma_k^2(u) du, \quad (14)$$

e onde $\phi(\cdot)$ representa a função de densidade acumulada da distribuição normal *standardizada* univariada.

Demonstração: Ver secção 6.2 Brigo e Mercurio [7].

Constata-se facilmente que a variância utilizada na Proposição 1, $v(t; T_{k-1})$, e a tradicional $\sigma_{k-1}^2(t)$ são equivalentes, desde que $v(t; T_{k-1}) = \sigma_{k-1}^2(t)(T_{k-1} - t)$. Da igualdade conclui-se facilmente que $\sigma_{k-1}(t)$ é a volatilidade *forward* associada ao T_{k-1} *caplet* (ou *floorlet*), implícita no mercado de *caps* e *floors*. De notar que o mercado cota uma volatilidade única para todo o *cap* ou *floor*. Seja $\sigma(t, T_n)$ a “*single term volatility*”, cotada no momento t , para um *cap* ou *floor* com maturidade em T_n . O valor em unidades monetárias do *cap* ou *floor* é então dado pela Proposição 1, fazendo $v(t, T_{k-1}) = \sigma^2(t, T_n)(T_{k-1} - t)$, para $k=2, \dots, n$.

Da equação (14) é fácil concluir que os parâmetros de correlação $\rho_{k,j}(t)$ ($k, j=1, \dots, N$) não influenciam o valor dos *caps* e dos *floors*. Este facto sugere uma metodologia iterativa para estimar os parâmetros do modelo: volatilidade e correlação. Assim, começa-se por estimar as funções de volatilidade, $\sigma_{k-1}(t)$, ajustando a uma *cross-section* de *caps* e *floors*; e de seguida calibra-se a matriz de correlações entre as taxas *forward* $\rho_{k,j}(t)$, ($k, j= 1, \dots, N$) ao preço de mercado dos *At-the-Money* (ATM) *European swaptions*.

2.4 Avaliação de European Swaptions

Considere-se $S_{\alpha, \beta}(T_\alpha^S)$ como sendo a taxa spot do swap no momento T_α^S . Se considerarmos $T_\alpha^S > T_0$, podemos pensar neste swap como sendo um *forward start swap* com a sua primeira data de periodificação no momento T_α^S e com liquidação postecipada, dependendo do prazo, nas maturidades T_k^S ($k = \alpha+1, \dots, \beta$). Considerando um valor nominal unitário, então nas datas $\{T_{\alpha+1}^S, \dots, T_\beta^S\}$, a taxa de juro fixada será trocada pelas taxas spot da Xibor

$\{L(T_{\alpha}^S, T_{\alpha+1}^S), \dots, L(T_{\beta-1}^S, T_{\beta}^S)\}$. Fazendo a avaliação deste instrumento para o momento $t (\leq T_{\alpha}^S)$, a taxa associada a este *forward swap* é a taxa que torna nulo o valor do seguinte IRS:

$$S_{\alpha, \beta}(t) = \frac{P(t, T_{\alpha}^S) - P(t, T_{\beta}^S)}{\sum_{k=\alpha+1}^{\beta} \tau_k P(t, T_k^S)}, \quad (15)$$

sendo $\tau_k = T_k^S - T_{k-1}^S$. Um *European payer swaption* define-se como uma opção que dá o direito ao seu detentor de no momento T_{α}^S (data de exercício da opção) entrar num *interest rate swap* (IRS), com maturidade em T_{β}^S , a pagar o *strike* K numa perna, e a receber taxa variável Xibor, na outra perna. Assim, e considerando um valor nominal unitário, o *payoff* terminal de um *European payer swaption* é dado por:

$$Swaption_{T_{\alpha}^S}(T_{\alpha}^S; T_{\beta}^S; K) = [S_{\alpha, \beta}(T_{\alpha}^S) - K]^+ \sum_{k=\alpha+1}^{\beta} \tau_k^S P(T_{\alpha}^S, T_k^S) \quad (16)$$

Esta expressão representa uma opção sobre *plain-vanilla swap*, sendo possível a sua avaliação através de fórmula fechada com base no modelo Black (1976), modelo amplamente utilizado pelos *players* de mercado para fazer a avaliação deste tipo de instrumentos. A avaliação dos *swaptions* através da fórmula de Black (1976), assume que o processo *martingale* associado à taxa *swap forward* é lognormal (como demonstra Jamshidian (1997) [18]), sendo este o pressuposto inerente ao *Swap market model (SMM)*:

$$dS_{\alpha, \beta}(t) = S_{\alpha, \beta}(t) \sigma_{\alpha, \beta}(t) dZ_{\alpha, \beta}(t) \quad (17)$$

para $t \leq T_{\alpha}^S$, onde a volatilidade instantânea da taxa swap $\sigma_{\alpha, \beta}(t)$ é determinística e $Z_{\alpha, \beta}(t) \in \mathfrak{R}$ é um movimento Browniano standardizado sob a *equivalent forward measure* $Q^{\alpha, \beta}$ obtida quando a anuidade $A(t, T_{\beta}^S)$ é tomada como numerário, com

$$A(t, T_{\beta}^S) = \sum_{k=\alpha+1}^{\beta} \tau_k^S P(t, T_k^S) \quad (18)$$

Proposição 2: Sob a dinâmica do *Swap Market Model (17)*, o preço de um *European payer swaption*, no momento t , com *strike* K e data de maturidade $T_\alpha^S \geq t$, sob um *forward start swap* com valor nominal unitário e com liquidação postecipada nos momentos $\{T_{\alpha+1}^S, \dots, T_\beta^S\}$ é igual a

$$Swaption_t(T_\alpha; T_\beta; K) = Black[S_{\alpha, \beta}(t); K; v(t; T_\alpha; T_\beta)]A(t, T_\beta^S) \quad (19)$$

sendo

$$v(t; T_\alpha; T_\beta) = \int_t^{T_\alpha} \sigma_{\alpha, \beta}^2(u) du, \quad (20)$$

a variância associada à dinâmica lognormal da taxa *swap forward* $S_{\alpha, \beta}(t)$.

Demonstração: Ver secção 6.7 Brigo e Mercurio [7].

A prática de mercado consiste em assumir que $v(t; T_\alpha; T_\beta) = \sigma_{\alpha, \beta}^2(t)^2 (T_\alpha - t)$, sendo $\sigma_{\alpha, \beta}^2(t)$ o valor da volatilidade *flat* para a *European payer swaption* (α, β) . De salientar que para um ATM *European swaption*, o *strike* K é igual à taxa $S_{\alpha, \beta}(t)$.

3. Modelos de Mercado de Taxa de juro “Multi-curve”

Neste capítulo vão apresentar-se as principais alterações que ocorreram no mercado de taxa de juro durante a crise do *subprime* (Agosto 2007), e que levaram a abandonar a abordagem “*Single-curve*”. Nestes dias uma série de relações (condições de não arbitragem) existentes nas cotações das taxas de juro do mercado monetário foram repentinamente quebradas. Isto gerou uma tremenda agitação no mercado, uma vez que essas condições de não arbitragem eram a base das estratégias de *hedging* e também a base para a construção da *yield curve* utilizada pelos diversos bancos para avaliação de todos os instrumentos derivados de taxa de juro.

Antes do “credit crunch”, ocorrido em Agosto de 2007, as taxas de juro *forward* cotadas no mercado monetário apresentavam consistência com a fórmula (6), e as várias cotações de taxas de juro mostravam consistência com o que aprendíamos nos livros. Até essa altura, uma *floating rate bond* era avaliada ao par, independentemente do período de *refixing* da taxa Xibor tida como *underlying*. Segundo Hull, (2000) [16] “*The floating-rate bond underlying the swap pays Libor. As a result, the value of this bond equals the swap principal*”.

Analogamente, e de forma a mostrar a consistência existente entre as taxas, independentemente da sua natureza, as taxas FRA podiam ser obtidas através da replicação de dois depósitos consecutivos¹³, entrando numa posição longa e numa posição curta, com maturidades na data de pagamento e na data de *refixing* do FRA, respectivamente. Tomando como exemplo as taxas depo e as taxas *Overnight Indexed Swap* (OIS) para a mesma maturidade, estas registavam uma pequena diferença, mas negligenciável até essa altura, o *basis*. Da mesma forma, a diferença entre duas taxas swap para a mesma maturidade, mas considerando diferentes *underlying tenors*, eram cotadas com *basis spread* muito próximo de zero, mas igualmente negligenciável.

Com a crise financeira, este *basis spread* aumentou, deixando-se de verificar a compatibilidade existente entre as taxas até à altura. Assim, observando as taxas FRA cotadas no mercado e as obtidas por replicação de dois depósitos, estas tornaram-se bastante diferentes. Igualmente, as

¹³ Esta consistência entre as taxas permite construir uma curva de cupão zero a partir de uma qualquer curva (por exemplo a partir da curva swap dos 6M) para todo o espectro de maturidades, através de um conjunto de técnicas de *bootstrapping* e utilizando um método de interpolação apropriado.

taxas swap para uma dada maturidade, tomando como indexante a Euribor a 6 meses (M), eram bastante diferentes e apresentavam um nível superior, comparativamente às taxas swap, tomando como indexante a Euribor a 3M. Paradoxalmente e contrariamente ao afirmado no início deste ponto, não existiram no mercado oportunidades de arbitragem se considerados os riscos de crédito e os de liquidez, negligenciados até esta altura. Morini e Mercurio (2008) foram os primeiros que apresentaram teoricamente uma explicação para que taxas com a mesma maturidade mas obtidas de diferentes instrumentos de mercado, pudessem apresentar diferentes cotações, explicação essa, que está associada ao risco de default¹⁴ de uma determinada contraparte. Assim, através de modelo de crédito, assumiram que no momento t , um banco genérico incorre numa probabilidade de *default*, durante um prazo de τ_k .

Enquanto os agentes de mercado aguardavam por abordagem teórica que reflectisse os dois factores: crédito e liquidez, os intervenientes de mercado concordaram em utilizar múltiplas curvas para estimar os futuros *cash flows*, associadas a diferentes indexantes (1dia (d), 1M, 3M, 6M, 1 ano (y)), e descontá-los através de outra curva.

3.1 Basis Swap

Um Basis Swap é um contrato onde duas contrapartes acordam trocar entre si duas *floating legs*, ambas com o último pagamento em T, baseadas em 2 indexantes distintos (por exemplo Euribor a 3M e Euribor a 6M) representados por α e α' , com $\alpha < \alpha'$. A perna α tem uma maior frequência de pagamento e paga a taxa Euribor com periodicidade inferior à periodicidade da outra perna α' . Podemos representar $B(t; \alpha; \alpha'; T)$ como sendo o *basis spread* a adicionar à *floating leg* α , cotado no mercado no momento t , que coloca em equilíbrio o referido *swap*.

Tomando como exemplo as taxas de depósito (depos) e as taxas Eonia OIS (*Overnight Indexed Swap*) com a mesma maturidade, estas eram praticamente iguais até à crise de crédito (Agosto de 2007), apenas com uma pequena diferença, o *basis*, que na altura era perfeitamente insignificante (representava no máximo 1 *basis points*). Analogamente, as taxas swap para a mesma maturidade mas com diferentes *underlying floating rates*, como são exemplo disso, as

¹⁴ Morini (2008) introduziu a probabilidade de *default* estocástica associada a um banco genérico.

taxas Euribor a 1M, Euribor a 3M e Euribor a 6M, eram também cotadas com um *basis spread* diferente de zero, mas igualmente desprezível.

Seja $F_k(t)$ a taxa FRA cotada no mercado no momento t , com *refixing* em T_{k-1} e data de pagamento em T_k , com $t < T_{k-1} < T_k$. E considere-se $F_k^L(t)$ como sendo a taxa FRA obtida através da decomposição de duas taxas de depósitos consecutivas, utilizando para isso a fórmula (6). Assim, Morini (2010) [4] representou o problema ocorrido no mercado da seguinte forma:

1) Antes da crise

$$F_k(t) \approx F_k^L(t)$$

$$B(t; \alpha; \alpha'; T) \approx 0$$

2) Depois da crise

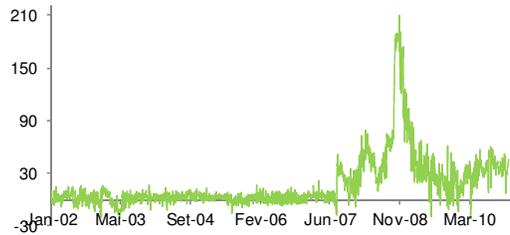
$$F_k(t) \ll F_k^L(t)$$

$$B(t; \alpha; \alpha'; T) \gg 0$$

onde “ \ll ” significa consideravelmente inferior e “ \gg ” significa consideravelmente superior.

De forma a ilustrar graficamente o problema apresentado por Morini (2010) [4], que teve na génese o desenvolvimento de novos modelos através de uma abordagem “*Multi-curve*”, apresentam-se, seguidamente, três gráficos onde fica explícita a explosão do *basis spread* ocorrida no mercado na altura da crise de crédito e de liquidez, através da representação de diferentes instrumentos de mercado (taxas FRA, Euribor 3M, Eonia OIS 3M, Euribor Deposit 6M, Eonia OIS 6M). Esta explosão do *basis* é por demais evidente no pico da crise, ocorrido após a falência da Lehman Brothers (Setembro de 2008). Assim, e à semelhança do trabalho efectuado por Morini (2009) [22], apresentam-se as diferenças entre as taxas FRA através da réplica de dois depósitos consecutivos ($F_k^L(t)$) e as taxas FRA de mercado ($F_k(t)$), entre Janeiro de 2002 e Dezembro de 2010.

Gráfico 3.1: Diferença entre as taxas FRA replicadas por dois depósitos consecutivos, $F_k^L(t)$, e as market FRA, $F_k(t)$



O gráfico 3.1 apresenta a diferença em pontos base, entre a taxa $F_k^L(t; t+6M; t+12M)$ replicada por dois depósitos e a taxa de mercado $F_k(t; t+6M; t+12M)$ (Jan. 2002 – Dez. 2010; fonte: Bloomberg; cálculos: autor).

As taxas FRA obtidas por replicação de duas taxas depósito e as taxas FRA observadas em mercado, historicamente nunca coincidiram, mas a diferença média entre elas era de cerca de 1.1 pb (0.00011), antes de Julho de 2007. Após o “credit crunch”, esta diferença média explodiu e passou para cerca de 42 pb, tendo atingindo o máximo de 210 pb por volta de Novembro de 2008 (período crítico da crise de crédito e liquidez).

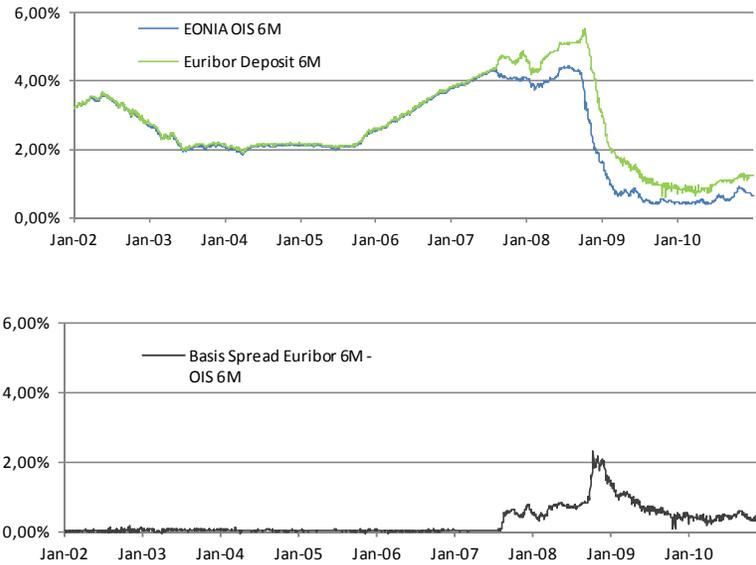
Analogamente e para demonstrar este aumento do *basis*, apresentam-se (gráfico 3.2 e gráfico 3.3) e comparam-se as séries históricas da Euribor a 3M e da taxa OIS a 3M, bem como da Euribor a 6M e da taxa OIS a 6M, respectivamente.

Gráfico 3.2: Diferença entre a Euribor 3M e taxa fixa do OIS 3M



A figura apresenta 2 gráficos: o gráfico de cima apresenta as curvas da Euribor 3M e da taxa OIS 3M; o gráfico da parte de baixo apresenta o basis spread entre elas, referente ao período de 2005 a 2010 (fonte: Bloomberg).

Gráficos 3.3: Séries históricas - taxa Euribor Deposit a 6M vs Eonia OIS 6M



A figura apresenta 2 gráficos: o gráfico de cima apresenta a série histórica da taxa Euribor Deposit 6M vs a taxa Eonia OIS 6M; o correspondente *spread* está representado no gráfico inferior (Jan. 2002 – Dez. 2010; fonte: Bloomberg; cálculos: autor).

Como se constata nos diversos gráficos e no trabalho efectuado por Mercurio (2009) [20], em Agosto 2007, ocorreu uma explosão do spread Euribor-OIS, que reflecte essencialmente o risco de crédito e de liquidez entre as taxas Euribor e as taxas Eonia. Através desta representação gráfica, pretende-se ilustrar que as relações existentes entre as taxas antes da crise eram consistentes com os resultados que obtínhamos assumindo que nos modelos de avaliação utilizados pelos vários intervenientes no mercado não incorporavam nem o risco de *default*, nem o risco de liquidez.¹⁵

No período anterior à crise, o valor médio do *basis* Euribor Deposit 6M – OIS 6M rondava os 4 bp (0.0004). No período subsequente este valor disparou para os 68 bp (0.0068), tendo atingido valores extremos no auge da crise de crédito e liquidez (após falência da *Lehman Brothers*, em Setembro de 2008), rondando na altura os 200 bp (0.0200). O facto de as relações entre as taxas se terem quebrado, sugeria que os modelos "Single-curve" já não eram válidos. Então foram desenvolvidos novos modelos com o objectivo de explicar as novas relações entre as taxas e em particular modelos que incorporassem o risco de *default* e o risco de liquidez.

¹⁵ O mercado assumia este modelo risk-free como o modelo *standard* na avaliação de instrumentos derivados de taxa de juro.

3.2 Colateralização dos Derivados OTC vs Curva de Desconto OIS

Um outro efeito da crise financeira foi a disseminação dos contratos de colateral¹⁶, como forma de mitigar o risco de contraparte (ou risco de *default*) no mercado interbancário. Assim, e através de um contrato de colateral (“*collateral agreement*”), CSA (*Credit Support Annex*) anexo ao ISDA¹⁷, as contrapartes acordam entre si, avaliar periodicamente (com uma frequência definida no contrato) as suas carteiras de derivativos e entregar ou devolver colateral de acordo com a *variation margin* (margem de variação do *portfolio*). Assim, e em cada data de avaliação, as duas contrapartes avaliam as suas carteiras de derivativos OTC e determinam o valor da margem a entregar ou a devolver à outra contraparte. Este valor de colateral pode ser trocado em *cash* ou noutros títulos transaccionáveis (pelo seu valor de mercado). Em cada momento, esta conta de colateral contém o *Net Present Value* (NPV) do *portfolio*, que é positivo e está disponível para uma das partes (entidade credora) e negativo para a outra (entidade devedora). A entidade devedora tem o direito de receber diariamente um montante de juros, calculado sob uma *overnight collateral rate*. Assim, este mecanismo de colateral pode ser visto como um mecanismo de depósito/financiamento, transferindo liquidez da contraparte devedora para a contraparte credora. A principal diferença deste tipo de *funding* e o financiamento/depósitos “tradicionais”, é que através dos derivativos podemos ter maturidades mais longas e saldo diário estocástico (positivo ou negativo). Este tipo de *collateral agreement* pode ser visto como uma cobertura de posição, face ao risco de *default* da contraparte. Uma consequência muito importante neste tipo de *collateral agreements* é que os preços de mercado dos derivativos podem ser encarados como não tendo risco de *default* (*risk-free contracts*). A outra consequência, igualmente importante, é que entre a CSA *overnight rate* e a taxa de desconto dos futuros *cash-flows*, não poderá existir oportunidade de arbitragem. Assim, a *yield curve* utilizada para avaliar este tipo de *portfolios* (sob um contrato de CSA) deve reflectir para cada maturidade o custo de *funding*, isto é, a taxa *overnight* utilizada no mercado interbancário para operações colateralizadas. Assim, os *Overnight Indexed Swap* (OIS) são os instrumentos naturais para a construção da nossa curva de desconto (conforme se irá especificar mais à frente).

¹⁶ Em Dezembro de 2010, 70% dos derivativos de taxa de juro tinham subjacente um contrato CSA.

¹⁷ OS ISDA (International Swaps and Derivatives Association) são contratos standard de mercado, utilizados para regular as transacções OTC.

Um *fixed/floating* OIS é um swap cuja *floating leg* está associada a uma taxa diária, *overnight*, como é exemplo disso a taxa Eonia no mercado do Euro. De acordo com a experiência dos operadores no mercado esta taxa *overnight* incorpora risco de liquidez e risco de crédito de forma desprezível. A taxa associada à perna fixa do OIS, com maturidade em T, pode ser encarada como a média geométrica das taxas diárias. Como tal, e segundo Morini (2010) [4], esta taxa pode ser encarada com uma “*risk free rate of credit or liquidity risk*”, para a maturidade T.

Segundo Bianchetti e Carlicchi (2011) [3], em Dezembro de 2010 o mercado estava numa fase de transição entre a abordagem clássica “*Libor Discounting Methodology*”- “*Multi-curve sem CSA*” - e a abordagem mais actual “*CSA Discounting Methodology*” – “*Multi-curve com CSA*”. Segundo Bianchetti, (2011) [3], actualmente as transacções de derivados com utilização de colateral (sendo a curva de desconto apropriada, a OIS *discounting curve*), como forma de mitigar o risco de contraparte, já representam cerca de 70% dos contratos OTC existentes no mercado. Em particular, e com bastante interesse nesta dissertação são exemplos disso, os FRA, os *swaps*, os *basis swaps*, os *caps/floors* e os *swaptions*, cotados pelos principais *brokers* utilizando a “*CSA Discounting Methodology*”.

3.3 Xibor – Taxa que Incorpora o Risco de Default e o Risco de Liquidez

Não se referindo especificamente a uma contraparte, a taxa *Xibor* pode ser vista como incorporando risco de *default* e o risco de liquidez?

Até Agosto de 2007, o mercado de taxa de juro funcionava como se não existisse risco subjacente às taxas *Xibor*, em particular o risco de *default*. Neste cenário, o risco subjacente a uma taxa *Xibor* era equivalente, mesmo na presença de inúmeras contrapartes. Com a crise financeira, muitas das considerações associadas às taxas tornaram-se imprecisas, em virtude da inclusão dos conceitos liquidez e crédito.

A natureza e os riscos subjacentes às taxas *Xibor* são cruciais para estabelecer o *pricing* dos derivados de taxa juro. Esta questão não tinha sido investigada até à crise do *subprime*, visto o mercado encarar estas taxas como *risk-free*, ou mesmo não sendo *risk-free*, o mercado encarava

o risco associado às taxas como sendo estável e homogéneo. Assim, vão tentar explicitar-se estes conceitos, incorporando-os nos modelos de taxa de juro.

Ao contrário de uma taxa *overnight*, a taxa *Xibor* é tida como incorporando risco de *default* e risco de liquidez no mercado interbancário. Não é fácil distinguir o risco de crédito e o risco de liquidez de uma determinada contraparte. Se observarmos com atenção o risco de liquidez, este pode ser visto como o custo de *funding* (o risco de ficar sem financiamento para fazer face às responsabilidades de muito curto prazo) de uma determinada instituição financeira, e está fortemente correlacionado com o risco de *default*, uma vez que o aumento do seu custo de financiamento está directamente relacionado com o aumento do risco da instituição poder incumprir (*default*) nas responsabilidades assumidas. O mercado subjacente a esta análise é o mercado de taxa de juro, a que se referem os depósitos e os empréstimos (tomadas e cedências de fundos de um banco para o outro sem colateral). Por sua vez, a liquidez neste mercado pode apresentar-se como sendo a dificuldade que uma instituição financeira tem de captar fundos e está muito correlacionado com o risco de *default* da mesma.

O painel de bancos contribuidores da *Xibor* é revisto periodicamente pelo *steering committee*, havendo a possibilidade de exclusão de um banco do referido painel, ou por se deteriorarem as condições creditícias de uma instituição financeira ou por entenderem que não estão a reflectir verdadeiramente a sua actividade no mercado monetário (cada instituição deve reflectir convenientemente o seu custo de *funding*, ao melhor preço para todas as maturidades). Apesar de não serem comuns exclusões do painel de bancos, esta taxa é considerada como reflectindo o risco de crédito e o risco de liquidez no mercado. Porém, durante a crise este facto alterou-se ligeiramente. Senão vejamos, sendo o *fixing* da *Xibor* uma média aparada das contribuições de um conjunto de bancos, as contribuições mais elevadas e mais baixas, não são consideradas para a média. Enquanto o risco de *default* permanece estável e homogéneo entre os bancos contribuidores, este facto era negligenciável. O mesmo já não acontece, no caso da qualidade creditícia de um subsegmento de bancos se deteriorar¹⁸. Neste caso, um banco pode já não contribuir para a *Xibor*, e permanecer do painel de bancos contribuidores. Este foi o caso de

¹⁸ Facto que aconteceu durante a crise.

muitos bancos durante a crise financeira. Para além disso, se um banco tem muita dificuldade em obter financiamento sem colateral no mercado interbancário, ou não consegue de todo, a sua contribuição para a *Xibor*, pode ser considerada como fictícia. Esta tese é defendida como estando na base numa subestimação por parte da *Xibor* do custo de financiamento no mercado interbancário, e conseqüentemente não ser indicada para caracterizar a *yield curve* subjacente às taxas *forward*, nos pontos mais curtos da curva (até 1 ano).

3.4 Evolução dos modelos de taxa de juro

Como já referido, o mercado interpretou o que aconteceu ao mercado de taxa de juro na altura do “*credit crunch*”, como sendo o alargamento do *basis spread* entre as diferentes maturidades das taxas *Xibor* (no mercado do Euro, tem-se a Eonia, a Euribor 1M, a Euribor 2M,...,Euribor 12M). Esta constatação leva a uma segmentação do mercado de forma a captar as diferentes dinâmicas e os diferentes prémios de risco e liquidez subjacentes aos indexantes, com prazos que vão desde 1 dia (para a taxa Eonia), a 1M, 3M, 6M e 12M (para as taxas Euribor) – abordagem “*Multi-curve*”. Esta assumpção de diversas curvas, associadas a diferentes maturidades dos indexantes, invalida a abordagem de *pricing standard* utilizada, que assentava numa única *yield curve*.

Para abordar o problema ocorrido na altura da crise, Bianchetti (2009) foi o primeiro a considerar simultaneamente os factores de crédito e liquidez, despoletados durante a crise financeira, enquanto Chibane and Sheldon (2009) apresentaram o problema fazendo a analogia com um *cross- currency swap*, considerando uma *single- currency curve*.

Considere-se a seguinte notação de forma a podermos caracterizar as formas de avaliação dos FRA, dos IRS e dos *caps/floors* e *swaptions*. Para isso, considere-se o seguinte conjunto de curvas cupão zero:

$$C_x = \{T_k \rightarrow P_x(0, T_k), T_k > 0\} \quad (21)$$

onde o índice x é utilizado para diferenciar as diferentes curvas subjacentes. Podemos designar o índice $x = \tau_k$, para identificar a forward curve da *Xibor* com periodicidade τ_k . Tipicamente, temos para os EUR $x \in \{d, 1M, 3M, 6M, 12M\}$, onde $x = d$ identifica a “*discounting curve*”.

Fazendo a analogia com os resultados apresentados na Proposição 1 e Proposição 2, de seguida apresentam-se as modificações introduzidas pelos *players* de mercado na avaliação dos instrumentos acima referidos, utilizando esta abordagem “*Multi-curve*”.

3.5 Xibor Market Model (XMM) – “Multi-curve”

O XMM “*Single-curve*” apresentado no ponto 2 assumia que as taxas *forward* da *Xibor* e os factores de desconto eram determinados sob a mesma *yield curve*. O modelo agora caracterizado, apresenta uma modificação face à anterior abordagem, em virtude de se utilizar uma curva para descontar os *cash-flows* futuros (pode-se utilizar uma curva sem risco se estivermos na presença de contratos com CSA associado, ou uma *yield curve* com risco no caso de serem operações OTC não colateralizadas – as 2 curvas de desconto serão apresentadas e especificadas no ponto 4.4.), e uma outra curva, com instrumentos distintos da primeira, para estimar as taxas de juro *forward*.

Considere-se a seguinte estrutura finita de prazos, também designada por conjunto discreto de datas de maturidade $T_0^x < T_1^x < \dots < T_N^x$, compatível com os períodos de *refixing* da curva x (τ_k^x), e seja $F_k^x(t) = F_k^x(t, T_{k-1}, T_{k-1+\tau_k^x})$ a taxa *forward* da *Xibor*, sob a abordagem “*Multi-curve*”, contratada no momento t , com período de capitalização τ_k^x . Assume-se que cada taxa $F_k^x(t)$ evolui de acordo com um movimento Browniano standardizado, sob a *forward measure* $Q_d^{T_k^x}$, o que significa que o factor de desconto $P_d(t, T_k)$ é tido como numerário de economia subjacente ao modelo em análise. Assim a dinâmica das *forward rates* é dada por:

$$dF_k^x(t) = F_k^x(t) \sigma_k^x(t) dZ_{k-1}^k(t) \quad (22)$$

para $t \leq T_{k-1}$ e $k=1, \dots, N$, onde $Z_{k-1}^k(t) \in \mathfrak{R}$ são movimentos Brownianos standardizados, independentes e com a seguinte matriz de correlações instantâneas $\rho_{k,j}(t)_{k,j=1, \dots, N}$ sendo $corr(Z_{k-1}^k(t), Z_{j-1}^j(t)) = \rho_{k,j}(t)$.

3.6 “Multi-curve” - FRA

O payoff de um FRA de valor nominal unitário estando já fixa a taxa $L^x(T_{k-1}, T_k)$ é dado no momento T_k , por:

$$FRA(T_k, T_{k-1}, T_k, K) = [L^x(T_{k-1}, T_k) - K] \tau_k^x \quad (23)$$

O preço deste FRA no momento $t < T_{k-1}$ é dado por:

$$FRA(t, T_{k-1}, T_k, K) = P_d(t; T_k) \{E^{Q_d^{T_k}} [L^x(T_{k-1}, T_k)] - K\} \tau_k^x \quad (24)$$

Então podemos definir a taxa de juro a fixar no momento t , para um *Forward Rate Agreement*, $F_k^x(t)$, como sendo:

$$F_k^x(t) = E^{Q_d^{T_k}} [L^x(T_{k-1}, T_k)] \neq F_k(t) \quad (25)$$

3.7 “Multi-curve” - IRS

Considere-se $S_{\alpha, \beta}^x(T_\alpha^S)$ como sendo a taxa spot do swap no momento T_α^S via abordagem “*Multi-curve*”. Se considerarmos $T_\alpha^S > T_0$, podemos pensar neste swap como sendo um *forward start swap* com a sua primeira data de periodificação no momento T_α^S e com liquidação postecipada, dependendo do prazo, nas maturidades T_k^S ($k = \alpha+1, \dots, \beta$). Considerando um valor nominal unitário, então nas datas $\{T_{\alpha+1}^S, \dots, T_\beta^S\}$, a taxa de juro fixada será trocada pelas taxas *spot* da Xibor $\{L^x(T_\alpha^S, T_{\alpha+1}^S), \dots, L^x(T_{\beta-1}^S, T_\beta^S)\}$. Fazendo a avaliação deste instrumento para o momento $t (\leq T_\alpha^S)$, a taxa associada a este *forward swap* é a taxa que torna nulo o valor do seguinte IRS:

$$S_{\alpha, \beta}^x(t) = \frac{\sum_{i=1}^m P_d(t, T_i) F_k^x(t) \cdot \tau_k^x}{A_d(t, T_\beta^S)} \quad (26)$$

onde

$$A_d(t, T_\beta^S) = \sum_{k=\alpha+1}^{\beta} \tau_k^S P_d(T_\alpha^S, T_k^S) \quad (27)$$

3.8 “Multi-curve” - Caps/Floors

Proposição 3: No Xibor Market Model “Multi-curve”, o preço de um cap (floor) no momento t , com valor nominal unitário, com strike L_X , com a sua primeira data de periodificação no momento $T_1(>t)$ e com liquidação postecipadamente nos momentos T_k ($k=2, \dots, n$ e $n \leq N$), é igual a

$$V_t(T_n; L_X; \theta) = \sum_{k=2}^n v_t(T_{k-1}; T_k; L_X; \theta) \quad (28)$$

sendo que o mercado avalia cada *caplet* ($\theta=1$) e cada *floorlet* ($\theta=-1$), no momento $t < T_{k-1}$ pela seguinte expressão

$$v_t(T_{k-1}; T_k; L_X; \theta) = \tau_k^x P_d(t, T_k) \text{Black}[F_k^x(t); L_X; v^x(t; T_{k-1}); \theta], \quad (29)$$

sendo

$$v^x(t, T_{k-1}) = \int_t^{T_{k-1}} \sigma_k^x(u)^2 du \quad (30)$$

a variância no momento t , associada à dinâmica lognormal da taxa *forward* determinada sob a curva x . Constata-se que $v^x(t, T_{k-1})$ e $\sigma_k^x(t)^2$ são equivalentes se e só se verificar a igualdade $v^x(t, T_{k-1}) = \sigma_k^x(t)^2 (T_{k-1} - t)$. Da igualdade conclui-se facilmente

$$\sigma_k^x(t) = \frac{\sqrt{v^x(t, T_{k-1})}}{T_{k-1} - t} = \frac{1}{T_{k-1} - t} \int_t^{T_{k-1}} \sigma_k^x(u)^2 du \quad (31)$$

onde $\sigma_k^x(t)$ é a *forward volatility* associada à taxa *forward*, sob a curva x , subjacente ao T_{k-1} *caplet/floorlet*, implícita no mercado de *caps* e *floors*.

3.9 “Multi-curve” - Swaptions

O SMM, sob a abordagem “Multi-curve” assume que o processo *martingale* associado à taxa *swap forward* $S_{\alpha, \beta}^x(t)$ é lognormal, sendo a sua dinâmica dada por:

$$dS_{\alpha, \beta}^x(t) = S_{\alpha, \beta}^x(t) \sigma_{\alpha, \beta}^x(t) dZ_{\alpha, \beta}(t) \quad (32)$$

para $t \leq T_{\alpha}^S$, onde a volatilidade instantânea da taxa *swap* $\sigma_{\alpha, \beta}^x(t)$ é determinística e $Z_{\alpha, \beta}(t) \in \mathfrak{R}$ é um movimento Browniano standardizado sob a *equivalent forward measure* $Q^{\alpha, \beta}$.

Proposição 4: Sob a dinâmica do *Swap Market Model* “*Multi-curve*”, dada pela equação (32), o preço de um *European payer swaption* no momento t com *strike* K e data de maturidade $T_\alpha^S \geq t$, sob um *forward start swap* com valor nominal unitário e com liquidação postecipada nos momentos $\{T_{\alpha+1}^S, \dots, T_\beta^S\}$ é igual a

$$Swaption_t(T_\alpha^S; T_\beta^S; K) = Black[S_{\alpha,\beta}^x(t); K; v^x(t; T_\alpha^S; T_\beta^S)]A_d(t, T_\beta^S) \quad (33)$$

sendo

$$v^x(t; T_\alpha^S; T_\beta^S) = \int_t^{T_\alpha^S} \sigma_k^x(u)^2 du, \quad (34)$$

a variância associada à dinâmica lognormal da taxa *swap forward* $s_{\alpha,\beta}^x(t)$, obtida sob a curva x .

A prática de mercado consiste em assumir que $v^x(t; T_\alpha^S; T_\beta^S) = \sigma_{\alpha,\beta}^x(t)^2 (T_\alpha^S - t)$, sendo $\sigma_{\alpha,\beta}^x(t)$ o valor da volatilidade *flat* para a *European swaption* (α, β) .

4. Implementação

4.1 Especificação de Volatilidade e Estimação de Parâmetros

Em virtude de não termos disponível toda a estrutura de volatilidades implícitas nos *caplets*, e de as que estão disponíveis, poderem não corresponder aos prémios de mercado de cada um dos *caps* e *floors*, optou-se por especificar uma função de volatilidade, de modo a controlar o desvio face ao seu valor de mercado. Neste capítulo será especificada a função de volatilidade a utilizar nesta dissertação. Na escolha da função a utilizar há um aspecto importante a realçar: na generalidade, os modelos contêm estruturas de volatilidade estacionárias, isto é, a volatilidade da taxa depende do tempo em falta para a maturidade e não de uma data de calendário específica.

Neste documento e em virtude de não haver um consenso nesta matéria sobre qual é a melhor especificação de volatilidade implícita a utilizar, irá utilizar-se um modelo estacionário paramétrico, introduzido por Rebonato (1999) [23], com função de volatilidade das taxas *forward* determinístico e $\eta_k = 1$.

Considere-se a especificação paramétrica simples da volatilidade instantânea de Rebonato (1999) [23], dada por

$$\sigma_k(t) = \eta_k \{ [a + b(T_k - t)] \exp(-c(T_k - t)) + d \} \quad (35)$$

com $\eta_k, a, b, c, d \in \mathfrak{R}$.

Os parâmetros a, b, c, d definem uma estrutura comum de volatilidade capaz de captar a curvatura da mesma e a volatilidade implícita associada a cada *cap/floor*. Conforme foi referido no 1º parágrafo deste ponto, esta função de volatilidade depende do intervalo de tempo até à maturidade e não de uma data de calendário específica. Conforme definido na equação (35), pretende-se determinar os parâmetros da função de volatilidade, minimizando os desvios face aos valores de mercado, dados pelos prémios, dos dez *caps* considerados. Assim, através da equação (14), obtém-se a especificação a utilizar no modelo, sendo os parâmetros $\eta_k = 1$ (modelo time homogeneous) e $a, b, c, d \in \mathfrak{R}$, sendo esta função designada de *Principal Volatility*, cuja expressão é dada por:

$$\begin{aligned}
 v(t;T_k) = & -\frac{\exp(-2c(T_k - t))}{2c} \left[(a + b(T_k - t))^2 + \frac{b}{c}(a + b(T_k - t)) + \frac{2bd}{c} \right] \\
 & -\frac{\exp(-2(T_k - t))}{c} \left[2d(a + b(T_k - t)) + \frac{2bd}{c} \right] \\
 & -\frac{2a^2c^2 + 8d a c^2 + 2abc + 8bcd + b^2}{4c^3} + d^2(T - t_k)
 \end{aligned} \tag{36}$$

De lembrar que após definida a função de volatilidade implícita e estimados os parâmetros da função de forma a minimizar os desvios, pretende-se testar qual dos modelos, *XMM “Single-curve”*, *XMM “Multi-curve sem CSA”* ou *XMM “Multi-curve com CSA”*, ajusta melhor ao valor de mercado de cada *cap/floor*, dado pelo valor do prémio em pontos base. O processo adoptado para se determinar a estimativa diária dos parâmetros (a , b , c , d), foi através de um processo iterativo, minimizando-se a soma do quadrado dos erros entre os preços de mercado dos *cap/floors* (retiradas as séries históricas da bloomberg) em % do *notional* e os preços implícitos retirados dos três modelos. O primeiro passo é calcular diariamente os parâmetros da função de volatilidade para cada modelo, através da minimização do somatório do quadrado dos erros (SQE) entre o prémio dado pelo modelo e do prémio de mercado para cada índice j ($j=1,\dots,10$ anos) associado à maturidade do j -ésimo *cap/floor*, dado pela seguinte expressão:

$$\min SQE_t^i = \sum_{j=1}^{10} (MKT_j - MDL_j^i)^2 \tag{37}$$

onde MKT_j representa o prémio de mercado para cada índice j ($j=1,\dots,10$ anos) associado à maturidade do j -ésimo *cap/floor*, e MDL_j^i , com $i \in \{ \text{“Single-curve”}, \text{“Multi-curve sem CSA”}, \text{“Multi-curve com CSA”} \}$, representa o prémio dado pelo modelo i para cada índice j ($j=1,\dots,10$ anos) associado à maturidade do j -ésimo *cap/floor*.

Seguidamente compararam-se os resultados obtidos por cada um dos modelos, e através de um teste de hipóteses à igualdade das médias, apura-se a sua significância estatística.

4.2 Descrição dos Dados

Neste ponto apresentam-se os dados utilizados na dissertação e a forma de construção das diferentes *yield curves*, subjacentes aos três modelos de avaliação. Os dados utilizados foram retirados da plataforma Bloomberg, através de série histórica de observações diárias, para o

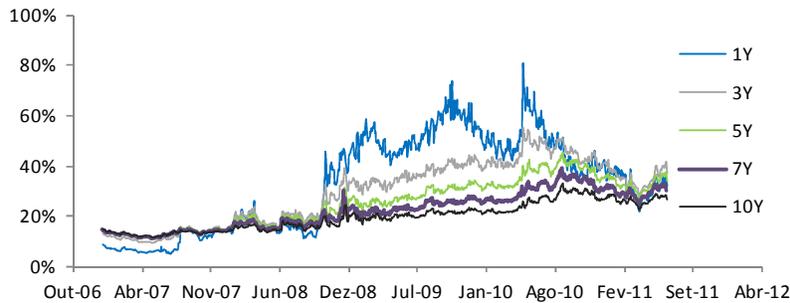
período de 2 de Janeiro de 2007 a 30 de Junho de 2011, as quais constituem uma amostra de 1.056 observações.

As séries históricas referidas no parágrafo anterior contêm basicamente dois tipos de informação: um tipo, referente a cotações de instrumentos utilizados para a caracterização das *yield curves*, e outro tipo de informação referente às cotações (volatilidades e prémios) dos *caps* e dos *swaptions*, utilizados para ajustar cada um dos modelos. Assim, para construção das curvas de desconto e das curvas *forward* foram consideradas as taxas de juro do mercado monetário (depos e FRAs) para maturidades mais curtas (até 2 anos) e as taxas swap para maturidades mais longas (dos 2 até aos 10 anos). A forma de construção das diversas curvas está explicitada nos pontos seguintes.

O segundo conjunto de dados contém cotações diárias do mercado do Euro (Composite da Bloomberg) para os *ATM forward start caps/floors* e para os *ATM straddle swaptions*. Nesta análise foram consideradas dez maturidades para os *ATM caps/floors*: 1 e 2 anos (cujo indexante é a Euribor a 3 meses), e 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 anos, tendo como *underlying* a Euribor a 6 meses. Para prazos até 2 anos, o *payoff* de cada *caplet/floorlet* é definido sob as taxas Euribor a 3 meses, e para prazos superiores a 3 anos, o *payoff* é definido sob a Euribor a 6 meses (*standard* para o mercado do Euros). Considerando por exemplo um *cap* a 2 anos, este consiste em avaliar 7 *caplets* com maturidades de 3, 6, 9, 12, 15, 18 e 21 meses. Se considerarmos por exemplo um *cap* a 10 anos, este consiste em avaliar 19 *caplets*, com maturidades desde os 6 meses até aos 9 anos e 6 meses. É importante lembrar que o termo *ATM* implica que o *strike* de cada *cap* é o correspondente à taxa *forward* com capitalização trimestral, no caso dos *caps* até aos dois anos e semestral para as restantes maturidades, no momento zero. As séries históricas dos Euro *ATM caps/floors* contêm para cada maturidade a seguinte informação: cotações de mercado dadas pelo prémio em pontos base (% do Notional) e o respectivo *strike*. De recordar que o valor de mercado de um *cap/floor* está directamente relacionado com o valor da volatilidade implícita de cada *caplet*. Não tendo disponível a estrutura de volatilidades associada a cada *caplet*, também designado de “cubo de volatilidades”, definiu-se uma especificação de volatilidade (36) de forma a replicar, ainda que aproximadamente essa matriz, que pode ser interpretada como a volatilidade implícita de cada *ATM caplet* ou *floorlet* e que

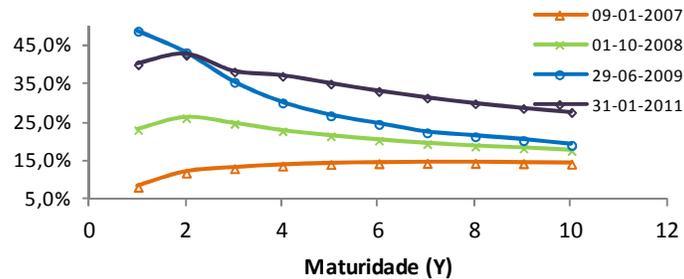
está directamente associado à volatilidade implícita das taxas *forward*. De seguida, apresentam-se graficamente as volatilidades implícitas *nos caps/floors* por prazo.

Gráfico 4.1: Série temporal do preço em volatilidade dos *caps/floors*



O gráfico 4.1 apresenta a série temporal com o preço em volatilidade dos *caps/floors* para as maturidades: 1, 3, 5, 7 e 10 anos (série diária de Janeiro de 2007 a Junho de 2011; fonte: Bloomberg; cálculos: autor).

Gráfico 4.2: Estrutura de volatilidades dos ATM *caps/floors*



O gráfico 4.2 apresenta quatro estruturas de volatilidade, referentes a quatro datas específicas, dos ATM *caps/floors* (fonte: Bloomberg; cálculos: autor).

Analisando as diferentes estruturas de volatilidade associadas aos ATM *caps/floors*, é notório o aumento da volatilidade nos prazos mais curtos da curva (até 2 anos), comparado o período antes da crise de crédito e após a crise de crédito. Assim, e apesar de se poder dizer que o formato da estrutura de volatilidades se mantém para as datas analisadas, existe um aumento da volatilidade para todos os prazos, sendo este aumento mais acentuado nos períodos mais curtos.

Na tabela seguinte encontram-se os indicadores estatísticos (média e desvio padrão) da volatilidade associada à maturidade de cada *cap/floor*.

Tabela 4.1: Indicadores estatísticos do preço em volatilidade, associados às diferentes maturidades dos ATM caps/floors

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pré-crise										
Média	6,5%	10,1%	11,3%	12,0%	12,3%	12,5%	12,6%	12,7%	12,7%	12,6%
Desvio padrão	0,76%	0,93%	0,91%	0,92%	0,90%	0,88%	0,87%	0,86%	0,84%	0,83%
Pós-crise										
Média	37,6%	38,0%	33,0%	30,3%	27,9%	25,9%	24,2%	22,9%	21,8%	20,9%
Desvio padrão	16,74%	14,46%	10,86%	9,60%	8,39%	7,39%	6,61%	5,98%	5,51%	5,13%

A tabela 4.1 apresenta os indicadores estatísticos, média e desvio-padrão, do preço em volatilidade dos caps/floors (Jan. 2007 – Jun. 2011; fonte: Bloomberg; cálculos: autor).

Depois de analisados os dados referentes aos caps/floors, vão apresentar-se os dados relativos aos swaptions. Relativamente aos swaptions, foram considerados dez instrumentos, tendo-se efectuado a seguinte selecção de combinações (maturidade da opção em anos (y)); maturidade do swap subjacente em anos (y): 1y2y, 1y5y, 2y2y, 2y5y, 3y2y, 3y5y, 4y2y, 4y5y, 5y2y e 5y2y. Assim, se considerarmos a compra de um swaption 2y5y, tal implica, em troca do pagamento de um prémio, entrar numa opção com maturidade de 2 anos e subjacente um swap de 5 anos. Sendo o prémio de um ATM straddle, dado pela soma de uma long call + long put, não é possível utilizar directamente o valor retirado da Bloomberg, uma vez que o modelo de avaliação considerado apenas incorpora uma long call (payer swaption). Recordar que apenas numa opção ATM o prémio de uma long call é igual ao prémio de uma long put. Logo, e por se tratar de uma se tratar de uma opção ATM, o valor do prémio a considerar para ajustamento dos diferentes modelos será dado por:

$$\text{Prémio ATM swaption} = \text{Prémio ATM straddle} / 2$$

4.3 Abordagem tradicional: “Single-Curve”

A construção da yield curve de cupão zero, através das cotações de instrumentos de mercado, utilizando a abordagem pré-crise de crédito e liquidez, “Single-Curve”, pode ser sistematizada nos seguintes passos:

- 1º) Escolher um conjunto de instrumentos de taxa de juro, preferencialmente os mais líquidos, transaccionados em mercado e com maturidades crescentes. Nesta dissertação

seleccionou-se o mercado monetário do Euro, e considerou-se os depósitos até 1 ano e os *vannila swaps* sob a Euribor 6M a partir dos 2 anos.

2º) Após a escolha dos instrumentos, e através de um método de interpolação¹⁹ apropriado e de um processo *bootstrapping*, constrói-se a *yield curve* de cupão zero.

3º) Sob a mesma curva definida no passo 2) calculam-se as *forward rates* e os factores de desconto.

4º) Determinar o preço de um derivado como sendo a soma dos *cash-flows* futuros descontados para o momento presente, utilizando as curvas definidas no passo 2).

Tomando como exemplo um EUR *caplet* com maturidade a 7 anos, o seu preço é determinado através da Proposição 1, calculando a *forward rate* de 6,5 a 7 anos e os factores de desconto sob a mesma curva “*Euribor Single-curve*” (cf. definida nos passos anteriores e caracterizada no próximo parágrafo). A curva subjacente ao modelo de avaliação “*Single-curve*” foi designada como “*Euribor Single-curve*” e é caracterizada da seguinte forma:

Euribor “*Single-curve*”: Esta curva é utilizada para estimar as taxas *forward* da Euribor a 3M e as taxas *forward* da Euribor a 6M, bem como os factores de desconto associados aos futuros *cash-flows*. Através de um processo de *bootstrapping* dos instrumentos descritos na Tabela A.1 (em anexo) foi construída uma série histórica de *yield curves* (de Janeiro 2002 a 30 Junho de 2011). A Tabela A.2 (em anexo) apresenta os diferentes instrumentos de mercado, utilizados na caracterização desta curva.

4.4 Abordagem pós “credit crunch”: ”Multi-curve”

Após a crise de crédito e de liquidez ocorrida no mercado, a abordagem tradicional “*Single-curve*”, explicitada no ponto anterior, deixou de ser válida e consistente entre todos os instrumentos de mercado de taxa de juro. Primeiro é fácil de constatar que a abordagem tradicional não incorpora o *Basis Spread* existente entre as diversas maturidades associadas aos indexantes mais usuais de mercado, com são a Eonia, a Euribor 1M, a Euribor 3M e a Euribor

¹⁹ O processo de interpolação a utilizar tem alguma relevância, no aspecto final da nossa *yield curve*. Seguiu-se Ametrano e M. Bianchetti (2009) [1], quando sugerem o processo de interpolação mais adequado é o *Cubic Splines* aplicado sob os log *discount factors*, aplicando posteriormente o filtro de Hyman (1983) [17].

6M. Se até ao início da crise, e como já explicado anteriormente, este *basis* era negligenciável, a partir do Verão de 2007 deixou de o ser. Isto significa que a anterior abordagem não tem em consideração a segmentação definida pelo prazo da taxa de juro subjacente aos instrumentos em análise, prazo este que tem implícito um prémio de risco e um prémio de liquidez. Em resumo podemos afirmar que as taxas Eonia, Euribor 1M, Euribor 3M e Euribor 6M são caracterizadas por diferentes dinâmicas, tendo por isso que ser estimadas por diferentes conjuntos de instrumentos disponíveis no mercado.

A abordagem “*Single-curve*” pode levar a que o *pricing* e o *hedging* dos instrumentos derivados de taxa de juro, tendo por base uma mistura de diferentes *underlying tenors*, possa resultar bastante desviado do valor de mercado e tornar o *hedge* bastante instável e difícil de interpretar.

Segundo Ametrano and Bianchetti (2009) [20], quanto mais semelhante for a periodicidade do indexante subjacente aos derivados e a periodicidade do indexante subjacente aos instrumentos utilizados na construção da *forward curve*, mais ajustado será o seu *pricing* relativo e o seu *hedging*.

Por último e para não existirem oportunidades de arbitragem, os factores de desconto têm que ser únicos, isto é, se considerarmos dois *cashflows* futuros e muito semelhantes, independentemente da sua origem, têm que representar o mesmo valor actual, o que faz com que a curva de desconto obrigatoriamente, seja única.

No processo de construção das novas *yield curves*, um elemento fundamental na correcta estimação das taxas *forward* é a selecção inicial dos instrumentos de mercado que servirão de *input* ao procedimento de *bootstrapping*. Assim, foram considerados os instrumentos de mercado definidos na Tabela **A.1** (em anexo), com a respectiva expressão que permitirá definir a *yield curve* C_x .

Neste cenário “*Multi-curve*” e para efeitos de *pricing* e *hedging* dos instrumentos derivados de taxa de juro, foram definidas as seguintes *yield curves*:

Euribor 3M standard: Esta curva é utilizada para estimar as taxas *forward* da Euribor a 3M. Através de *bootstrapping* dos instrumentos considerados na Tabela **A.3** (em anexo) foram determinadas as *yield curves* diárias.

Euribor 6M standard: Esta curva é utilizada para estimar as taxas *forward* da Euribor a 6M. Através de *bootstrapping* dos instrumentos considerados na Tabela **A.4** (em anexo) foram determinadas as *yield curves* diárias.

OIS Discounting curve: Esta curva é utilizada para determinar os factores de desconto dos derivados OTC colateralizados. Através de um processo de *bootstrapping* dos instrumentos considerados na Tabela **A.5** (em anexo) foram determinadas as *yield curves* diárias.

Após definidas as diferentes *yield curves* utilizadas na dissertação, foram testadas as três abordagens de avaliação/*pricing* dos instrumentos:

1º “**Single-Curve**”: Neste tipo de abordagem os factores de desconto e as *forward rates* são determinadas sob a curva “*Euribor Single-curve*”.

2º “**Multi-curve sem CSA**”: Neste tipo de abordagem, as taxas *forward* são determinadas sob a curva da “*Euribor 3M standard*” e da “*Euribor a 6M standard*”, para a Euribor 3M e para a Euribor a 6M, respectivamente. Os factores de desconto são determinados sob a curva “*Euribor Single-curve*”.

3º “**Multi-curve com CSA**”: Esta é a abordagem mais recente e considerada a mais adequada na avaliação dos instrumentos derivados de taxa de juro OTC colateralizados (ao abrigo de um contrato CSA, com colateralização perfeita) que como explicado anteriormente, incorpora o risco de crédito e liquidez nas taxas *forward* e o *discounting* é através de uma *risk-free yield curve*. Neste tipo de abordagem, as taxas *forward* são determinadas sob a curva da “*Euribor 3M standard*” e “*Euribor a 6M standard*”, para a Euribor 3M e para a Euribor a 6M, respectivamente. Os factores de desconto são determinados sob a curva “*OIS Discounting curve*”.

4.5 Resultados Obtidos

4.5.1 Resultados obtidos - *caps/floors*

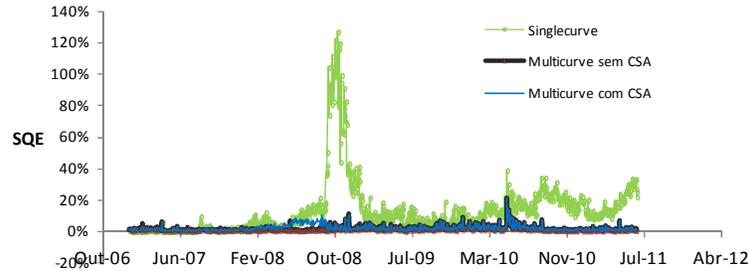
Neste ponto apresentam-se e analisam-se os resultados empíricos obtidos pelas três abordagens ou também chamados de “modelos” de valorização: “*Single-curve*”, “*Multi-curve sem CSA*” e “*Multi-curve com CSA*” na avaliação dos *ATM caps/floors*, com o objectivo de se apurar qual dos “modelos” ajusta melhor o preço de mercado, dado em pontos base, dos referidos instrumentos. A escolha destes instrumentos teve em consideração a sua elevada liquidez no mercado de taxa de juro e também porque o *XMM* faculta uma fórmula fechada de avaliação, onde o *payoff* dos *caps/floors*, depende apenas das taxas *forward*, dos factores de desconto associados aos *cash-flows* futuros e das volatilidades das taxas *forward* implícitas em cada *caplet* (neste documento foi utilizada a especificação de volatilidade “*Principal Volatility*”). No ponto 4.6, apresenta-se um teste comparativo entre os três “modelos”, para dois períodos distintos, antes e depois da crise de crédito e liquidez. O teste pretende verificar qual dos modelos aproxima melhor o valor de mercado para os instrumentos de taxa de juro, *caps* e *swaptions*. De forma a evidenciar as alterações referidas anteriormente, analisou-se o período após a falência da Lehman Brothers (Setembro a Novembro de 2008), considerado como o pico da crise financeira, e onde os *basis spread* registaram os valores mais elevados.

Os cálculos apresentados nesta análise foram determinados através da aplicação Excel do Microsoft Office, tendo-se também recorrido à programação em Visual Basic para definição de algumas funções e optimização do processo de calibração diário dos “modelos”. O método de optimização utilizado é o método *Quasi-Newton*, onde através de um processo iterativo minimizou-se a soma do quadrado dos erros (SQE), conforme já referido anteriormente.

Individualmente para cada modelo, começou por determinar-se as séries diárias das curvas de cupão zero e das taxas *forward*, conforme explicitado no ponto 4.4. Seguidamente foram estimadas as séries temporais diárias dos parâmetros de volatilidade, para cada um dos “modelos”, utilizando a especificação de volatilidade “*Principal Volatility*”. De salientar que o processo de optimização adoptado é um processo estacionário, pois após a escolha aleatória dos parâmetros do primeiro dia, os valores iniciais dos restantes dias foram os que resultaram do processo de optimização do dia anterior.

Na figura abaixo, encontra-se a série temporal dos erros quadráticos (% do *notional*) do ajustamento de cada um dos modelos aos preços de mercado dos *ATM caps/floors*.

Gráfico 4.3: Série temporal do somatório do quadrado dos erros (SQE), dado por cada um dos “modelos” de avaliação (*ATM caps/floors*)



O gráfico 4.3 apresenta o somatório do quadrado dos erros (SQE), dado por cada um dos “modelos” de avaliação (série diária de Janeiro de 2007 a Junho de 2011), para ajustamento ao preço de mercado dos *ATM caps/floors*.

Da análise à série temporal constata-se que o formato da série dos erros do modelo “*Single-curve*” tem um *fit* perfeito ao apresentado nos gráficos 3.1, 3.2 e 3.3, referentes ao *basis spread* entre os diversos indexantes (Eonia, Euribor 3M, Euribor 6M) e ao *spread* entre as taxas FRA de mercado e aquelas obtidas por replicação de dois depósitos. Isto significa que até à crise de crédito, o modelo “*Single-curve*” produz um melhor ajustamento, ainda que não muito significativo, em relação aos outros 2 modelos. Após o “*crunch*” é notório o disparar do valor do erro quadrático no modelo “*Single-curve*”, sendo este valor mais notório no pico da crise de crédito, após a falência da Lehman Brothers em Setembro 2008, onde chegou a atingir o valor de 127%. Os outros dois modelos têm um comportamento muito mais suave, sendo que o modelo “*Multi-curve sem CSA*” apresenta um melhor ajustamento no período subsequente à crise (Agosto de 2007), e está em linha com os procedimentos adoptados pelos *players* de mercado na avaliação dos derivados de taxa de juro.

Para efeitos de uma análise segmentada e face a acontecimentos ocorridos no mercado, consideraram-se os seguintes períodos: pré “*credit crunch*”, período anterior à crise, de Janeiro de 2007 a Julho de 2007; pós “*credit crunch*”, período posterior à crise, de Agosto de 2007 a Junho de 2011; e período pós “*falência da Lehman*”, pico da crise de crédito, de Setembro a Novembro de 2008. Após esta segmentação temporal e para efeitos de análise, determinou-se a média do somatório do quadrado dos erros em cada período, dado por cada modelo, e o

somatório do total dos erros quadráticos, estando os valores apurados representados no quadro abaixo.

Tabela 4.2: Média (mean) e total do somatório do quadrado dos erros (SQE) diários de cada “modelo”/período (caps/floors)

	SC	MC s/ CSA	MC c/ CSA
Pré credit crunch			
Mean SQE (μ_1)	0,7%	1,1%	0,9%
Total SQE (Σ)	74%	120%	92%
Desvio padrão	0,7%	1,0%	0,8%
Pós credit crunch			
Mean SQE (μ_2)	15,3%	1,6%	2,1%
Total SQE	14.468%	1.494%	2.021%
Desvio padrão	18,2%	1,7%	1,9%
Pico da crise			
Mean SQE (μ_3)	62,7%	4011%	38,3%
Total SQE	4011%	113%	1,5%
Desvio padrão	38,32%	223%	2,4%

A tabela 4.2 apresenta a média e o total do somatório do quadrado dos erros (SQE) diários, de cada modelo, apurados em cada período. SC designa a abordagem “*Single-curve*”; MC s/CSA designa a abordagem “*Multi-curve* sem CSA” e MC c/ CSA designa a abordagem “*Multi-curve* com CSA”.

Fazendo uma análise preliminar aos resultados obtidos e apresentados no quadro acima, é evidente que após o “*crunch*” ocorrido em Agosto de 2007, o ajustamento produzido pelo modelo “*Single-curve*” é pior do que qualquer um dos outros. Assim, após a crise de crédito, o modelo que melhor ajusta aos valores de mercado é o “*Multi-curve* sem CSA”, sendo que o erro médio diário deste modelo (1,58%) é ligeiramente inferior ao erro médio diário do modelo “*Multi-curve* com CSA” (2,67%). No período crítico da crise (Setembro a Novembro 2008), altura onde a *basis spread* entre as diversas maturidades das taxas *underlying* dos derivados foi a mais elevada, o modelo “*Single-curve*” apresenta um erro médio diário de 60,7% face aos prémios de mercado, o que representa uma média do quadrado dos erros diários trinta vezes superior aos outros dois modelos (1,7% e 3,7%). Em resumo, os resultados apresentados evidenciam que o modelo “*Single-curve*” tem um melhor ajustamento aos prémios de mercado até à crise de crédito²⁰ (Agosto 2007), não revelando até essa altura um grande afastamento face aos outros dois modelos.²¹ Após a crise de crédito, o modelo “*Single-curve*” apresenta um pior

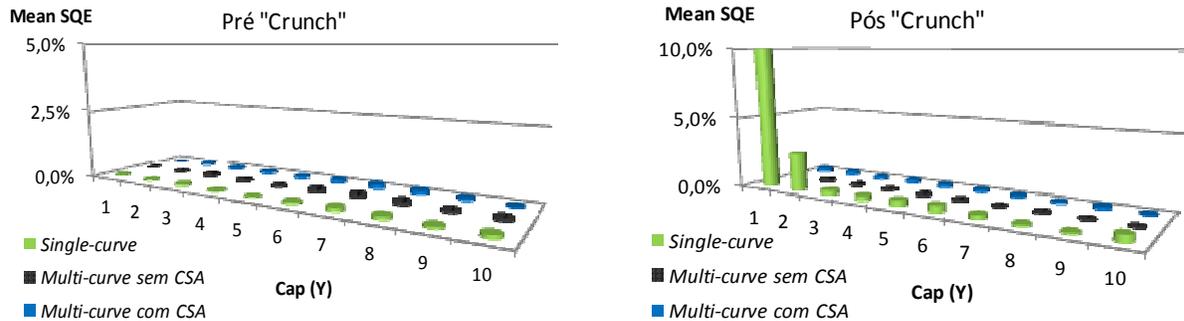
²⁰ Não havendo por isso necessidade de utilizar-se múltiplas *yield curves*, dependentes da maturidade do indexante.

²¹ Estes resultados coincidem com a prática de mercado na altura.

ajustamento aos valores de mercado, sendo este resultado mais nítido no período crítico da crise, após falência da Lehman.

Após esta análise “macro” e em virtude dos *caps/floors* terem diferentes *underlying tenors* (3M para *caps* até 2 anos e 6M nos restantes), efectuou-se uma análise mais fina, por maturidade do *underlying tenor*, para se mensurar o efeito do **basis** no ajustamento de cada modelo aos preços de mercado. Assim, determinou-se a média do quadrado dos erros por maturidade de cada *cap/floor* em 2 períodos distintos e dados pelos diferentes “modelos”. Os resultados estão ilustrados graficamente abaixo, e na Tabela A.6 (em anexo).

Gráficos 4.4: Média do somatório do quadrado dos erros (mean SQE), por maturidade do *cap/floor*, dado por cada um dos “modelos” de avaliação



Os gráficos 4.4 apresentam a média do somatório do quadrado dos erros (mean SQE), face ao ajustamento entre o preço de mercado, e o preço dado por cada um dos “modelos” de avaliação, para os períodos pré e pós “*credit crunch*”, por maturidade do *cap/floor*.

Fazendo uma análise comparativa dos dois períodos representados (pré e pós “*credit crunch*”), é notório que no período pós “*crunch*” o erro é substancialmente maior nos *caps* com maturidade inferior a dois anos. Este resultado é explicado essencialmente pelo **basis** entre os 3 e os 6 meses, visto os instrumentos que compõem a “*Single-curve*”, terem subjacente um período de *refixing* 6M. Recordando que os *caps* com maturidade até dois anos, têm como *underlying* a taxa Euribor a 3M e os restantes *caps* a taxa Euribor a 6M, qualquer dos modelos “*Multi-curve*” ajusta melhor o preço dos *caps*, comparativamente com o modelo “*Single-curve*”.

Analisando os resultados do modelo “*Single-curve*”, e em particular os resultados associados aos *caps* com maturidade de 1 ano (*underlying* Euribor 3M) a média do quadrado dos erros antes da crise de crédito era de 0,03%, ao passo que após a crise este valor passou para 10%, tendo

atingido o valor máximo de 50% no pico da crise. Os *caps* com maturidade superior a três anos apresentam antes da crise, uma média do quadrado dos erros de 0,08%, passando depois para 0,32%. Daí se ter afirmado que o no modelo “*Single-curve*” o valor do erro explodiu para os *caps/floors*, com a Euribor a 3M como taxa subjacente ao instrumento, resultante da não utilização de múltiplas curvas no período subsequente à crise.

4.5.2 Resultados obtidos - *swaptions*

Com o objectivo semelhante ao apresentado no ponto anterior, neste capítulo apresentam-se e analisam-se os resultados empíricos de cada um dos três “modelos”, na avaliação dos ATM *swaptions*. Assim, e contrariamente ao procedimento adoptado para os *caps/floors*, utilizaram-se as volatilidades de mercado associadas a cada uma das taxas *swap*, para ajustar o prémio de mercado, dado em pontos base, em cada um dos “modelos”. A forma de avaliação é igualmente por fórmula fechada, dependendo o *payoff* dos *swaptions* da taxa *swap forward*, dos factores de desconto associados aos *cash-flows* da opção e da volatilidade implícita da taxa *swap forward*. O erro do ajustamento apurado está representado no quadro seguinte por período.

Tabela 4.3: Média e total do somatório do quadrado dos erros (SQE) diários de cada “modelo”/período (*swaptions*)

	SC	MC s/ CSA	MC c/ CSA
Pré credit crunch			
Mean SQE (μ_1)	0,4%	1,6%	1,5%
Total SQE (Σ)	45%	168%	163%
Desvio padrão	0,8%	1,1%	1,2%
Pós credit crunch			
Mean SQE (μ_2)	5,6%	3,4%	3,9%
Total SQE	5277%	3213%	3718%
Desvio padrão	8,6%	3,8%	3,6%
Pico da crise			
Mean SQE (μ_3)	26,2%	2,4%	2,6%
Total SQE	1549%	141%	153%
Desvio padrão	17,1%	1,8%	2,0%

A tabela 4.3 apresenta a média e o total do somatório do quadrado dos erros (SQE) diários de cada modelo, apurados em cada período. SC designa a abordagem “*Single-curve*”; MC s/CSA designa a abordagem “*Multi-curve* sem CSA” e MC c/ CSA designa a abordagem “*Multi-curve* com CSA”.

No período anterior à crise, e à semelhança dos resultados obtidos para os *caps* e *floors*, a média do somatório do quadrado dos erros (SQE) no modelo “*Single-curve*” (0,4%) é ligeiramente inferior à média do somatório do quadrado dos erros de qualquer um dos modelos “*Multi-curve*”

(1,6% e 1,4%, sem e com CSA, respectivamente). Comparando os períodos posteriores à crise, e em particular, o período pós falência da Lehman, o erro médio do modelo “*Single-curve*” (26%) é aproximadamente 10 vezes superior a qualquer um dos modelos “*Multi-curve*” (2,4% e 2,6%, sem e com CSA, respectivamente). Os resultados obtidos evidenciam um melhor ajustamento do modelo “*Single-curve*” ao preço de mercado dos *swaptions* no período anterior à crise (até Julho de 2007), e posteriormente, o modelo “*Single-curve*” apresenta uma média dos erros superior a qualquer um dos modelos “*Multi-curve*”, o que indicia que os agentes de mercado começaram a utilizar uma nova abordagem na avaliação destes instrumentos.

De forma a avaliar a significância estatística dos resultados apresentados acima, realizaram-se teste de hipóteses à igualdade da média dos erros nos diferentes períodos, para os *caps/floors* e *swaptions*.

4.6 Teste de Hipóteses

Para testar a robustez dos resultados apresentados nos pontos 4.4 e 4.5, foram formulados testes de hipóteses à igualdade das médias, para os três períodos considerados. O teste de hipóteses utilizado é o teste t Student bilateral à igualdade das médias para amostras emparelhadas, estando os valores dos *caps/floors* apresentados na tabela 4.4 e os dos *swaptions* na tabela 4.5:

Tabela 4.4: Hipótese nula (H_0) e hipótese alternativa (H_1) do teste *t-student*, para testar a igualdade das médias em amostras emparelhadas (*caps/floors*)

	Pré “ <i>Credit Crunch</i> ”	Pós “ <i>Credit Crunch</i> ”	Falência da Lehman
Nº Obs	109	948	64
Single Curve vs Multi-curve sem CSA			
H_0	$\mu_{11} = \mu_{12}$	$\mu_{12} = \mu_{22}$	$\mu_{13} = \mu_{23}$
H_1	$\mu_{11} \neq \mu_{12}$	$\mu_{12} \neq \mu_{22}$	$\mu_{13} \neq \mu_{23}$
p-value	0,0%	0,0%	0,0%
Decisão I.C 99%	Rejeitar H_0	Rejeitar H_0	Rejeitar H_0
Multi-curve s/ CSA vs Multi-curve c/ CSA			
H_0	$\mu_{21} = \mu_{31}$	$\mu_{22} = \mu_{32}$	$\mu_{23} = \mu_{33}$
H_1	$\mu_{21} \neq \mu_{31}$	$\mu_{22} \neq \mu_{32}$	$\mu_{23} \neq \mu_{33}$
p-value	0,0%	0,0%	0,0%
Decisão I.C 99%	Rejeitar H_0	Rejeitar H_0	Rejeitar H_0

A tabela 4.4 apresenta hipótese nula (H_0) e a hipótese alternativa (H_1) do teste *t-student*, para testar a igualdade da média do somatório do quadrado dos erros (SQE) de cada “modelo” por período (*caps/floors*).

Tabela 4.5: Hipótese nula (H_0) e hipótese alternativa (H_1) do teste *t-student*, para testar a igualdade das médias em amostras emparelhadas (*swaptions*)

	Pré "Credit Crunch"	Pós "Credit Crunch"	Falência da Lehman
Nº Obs	109	948	64
Single Curve vs Multi-curve sem CSA			
H_0	$\mu_{11} = \mu_{12}$	$\mu_{12} = \mu_{22}$	$\mu_{13} = \mu_{23}$
H_1	$\mu_{11} \neq \mu_{12}$	$\mu_{12} \neq \mu_{22}$	$\mu_{13} \neq \mu_{23}$
p-value	0,0%	0,0%	0,0%
Decisão I.C 99%	Rejeitar H0	Rejeitar H0	Rejeitar H0
Multi-curve s/ CSA vs Multi-curve c/ CSA			
H_0	$\mu_{21} = \mu_{31}$	$\mu_{22} = \mu_{32}$	$\mu_{23} = \mu_{33}$
H_1	$\mu_{21} \neq \mu_{31}$	$\mu_{22} \neq \mu_{32}$	$\mu_{23} \neq \mu_{33}$
p-value	0,2%	0,0%	43,0%
Decisão I.C 99%	Rejeitar H0	Rejeitar H0	Não Rejeitar H0

A tabela 4.5 apresenta hipótese nula (H_0) e a hipótese alternativa (H_1) do teste *t-student*, para testar a igualdade da média do somatório do quadrado dos erros (SQE) de cada modelo por período (*swaptions*). Os valores dos testes *t-student*, bem como a decisão a tomar para um nível de significância de 1%, encontram-se nas tabelas acima e as conclusões são as que se apresentam a seguir.

Sendo este teste de hipóteses um teste bilateral, compara-se directamente o valor do *p-value* com o nível de significância $\alpha=1\%$. O *p-value* é o menor valor de significância a partir do qual rejeitamos H_0 . Logo rejeitamos H_0 se $p\text{-value} < \alpha$. Escolhendo um nível de significância $\alpha=1\%$, rejeitamos H_0 , em todos os períodos, comparando os “modelos” de avaliação “*Single-curve*” e “*Multi-curve sem CSA*”. Então podemos afirmar com 99% de confiança que existem diferenças significativas entre a média da soma do quadrado dos erros do modelo “*Single-curve*” em comparação com a soma do quadrado dos erros do modelo “*Multi-curve sem CSA*”, para os *caps/floors* e *swaptions*. Relativamente aos *caps/floors*, e ao teste à igualdade das médias dos erros dos modelos “*Multi-curve com CSA*” e “*Multi-curve sem CSA*”, a hipótese nula também é rejeitada em todos os períodos analisados, podendo igualmente afirmar-se que a média dos erros nos dois “modelos” é significativamente diferente.

Para os *swaptions*, e relativamente ao teste à igualdade das médias dos erros dos modelos “*Multi-curve com CSA*” e “*Multi-curve sem CSA*”, a hipótese nula não é rejeitada apenas no período de falência da Lehman, não existindo por isso, uma evidência estatística que nos leve a preferir qualquer um destes modelos no referido período. Os resultados obtidos nos testes de hipóteses estão de acordo com a teoria dos agentes de mercado na utilização das diferentes

metodologias, comparando os períodos pré e pós crise de crédito. Logo os resultados e as conclusões apresentadas nos pontos anteriores, relativamente aos modelos “*Single-curve*” e “*Multi-curve*” têm relevância estatística.

5. Conclusões

Foi apresentada nesta dissertação, uma análise quantitativa da classe de modelos de taxa de juro, os chamados *market models*, e apresentados os acontecimentos que levaram a alterações nos modelos durante a crise do *subprime*. Esta crise resultou numa crise de crédito e de liquidez ocorrida nos mercados financeiros, também denominada de “*credit crunch*”, que levou a que uma série de relações existentes entre as taxas de juro se tenham quebrado. Para tal, apresentou-se uma análise empírica que pretende ajustar o *pricing* de derivados, através da utilização de três formas (ou “modelos”) de avaliação distintas: “*Single-curve*”, “*Multi-curve sem CSA*” e “*Multi-curve com CSA*”. Os modelos de taxa de juro escolhidos foram o LMM para avaliar *caps/floors* e o SMM para avaliar *swaptions*. A escolha dos modelos relaciona-se com a sua utilidade e aplicabilidade pelos *players* de mercado, e a utilização de fórmula fechada para avaliação dos referidos instrumentos, através da famosa fórmula de Black (1976) [5]. Nesta dissertação, começou por apresentar-se o modelo na sua formulação original, “*Single-curve*”, onde apenas era necessário uma *yield curve* para estimar simultaneamente as taxas *forward* e os factores de desconto. Este “modelo”, serviu para testarmos se no período anterior à crise financeira (pré “*crunch*”), era o que melhor ajustava o preço dos *caps/floors* e dos *swaptions*, comparativamente com os modelos “*Multi-curve*”. Depois, com as alterações ocorridas no mercado e a já explicitada explosão do *basis* entre os diversos períodos de capitalização subjacentes ao indexante (1d, 1M, 3M, 6M e 12M), levou a que as relações existentes entre as taxas se quebrassem e conseqüentemente à modificação na forma de avaliação dos referidos instrumentos. Assim, e face aos desenvolvimentos ocorridos no mercado pós “*crunch*”, implementaram-se duas novas fórmulas de *pricing*: “*Multi-curve sem CSA*” (não pressupõe a existência de colateral associado aos contractos OTC) ou “*Multi-curve com CSA*” (pressupõe a existência de colateralização perfeita, de forma a mitigar o risco de crédito). A abordagem “*Multi-curve*” utiliza uma estrutura temporal de taxa de juro (ETTJ), para estimar as *forward rates* e uma outra ETTJ para determinar os factores de desconto que serão utilizados para descontar os *cash-flows* futuros.

Na análise empírica efectuada, os resultados evidenciam que até à crise de crédito e liquidez, ocorrida em Agosto 2007, a prática de mercado para *pricing* dos *caps/floors* e *swaptions*

consistia na abordagem tradicional, “*Single-curve*”, e após essa altura o mercado abandonou-a e adoptou uma mais actual, designada de “*Multi-curve*”. O objectivo desta dissertação foi, através de uma análise quantitativa, demonstrar as alterações verificadas no mercado de taxa de juro na altura da crise financeira, que conduziram a modificações nos modelos de mercado, como é o caso do LMM e do SMM. Assim, apresentou-se o que de mais actual se pratica no mercado para *pricing* e *hedging* dos instrumentos derivados de taxa de juro, bem como, sistematizou-se os passos essenciais à construção dos modelos para avaliação dos referidos instrumentos.

Bibliografia

- [1] Ametrano, F., and M. Bianchetti, (2009), “*Bootstrapping the illiquidity, Multiple Yield Curves Construction for Market Coherent Forward Rates Estimation*”. SSRN working paper, <http://ssrn.com/abstract=1371311>
- [2] Bianchetti, M., (2010), "*Two Curves, One Price*". SRN working paper, <http://ssrn.com/abstract=1334356>
- [3] Bianchetti, M., and M. Carlicchi (2011), “*Interest Rates After The Credit Crunch: Multiple-Curve Vanilla Derivatives and SABR*”. SSRN working paper, <http://ssrn.com/abstract=1783070>
- [4] Bianchetti, M., and M. Morini, (2010), *Interest Rates After The Credit Crunch*. WBS Course, 25-26 Oct. Milan
- [5] Black, F., (1976), “*The pricing of commodity contracts*”, Journal of Financial Economics 3, pp. 167-179
- [6] Brace, A., D. Gatarek, and M. Musiela, (1997), *The Market Model of Interest Rate Dynamics*, Mathematical Finance
- [7] Brigo, D., and F. Mercurio, (2006), *Interest Rate Models: Theory and Practice*, 2^a Edition. Springer, Heidelberg
- [8] Brigo, D., and M. Morini, (2005), *An empirically efficient analytical cascade calibration of the LIBOR Market Model based only on directly quoted swaptions data*, SSRN working paper, <http://ssrn.com/abstract=552581>
- [9] Chibane, M., and G. Sheldon, (2009), "*Building Curves on a Good Basis*", SSRN working paper, <http://ssrn.com/abstract=1394267>
- [10] Fujii, M., Y. Shimada, and A. Takahashi, (2009), "*A Market Model of Interest Rates with Dynamic Basis Spreads in the presence of Collateral and Multiple Currencies*", SSRN working paper, <http://ssrn.com/abstract=1520618>
- [11] Fujii, M., Y. Shimada, and A. Takahashi, (2010), "*A Note on Construction of Multiple Swap Curves with and without Collateral*", SSRN working paper, <http://ssrn.com/abstract=1440633>
- [12] Gatarek, D., P. Bachert, and R. Maksymiuk, (2006), *The Libor Market Model in Practice*, Wiley.

- [13] Hagan, P., and G. West, (2006), *Interpolation Methods for Curve Construction*, Applied Mathematical Finance, Vol. 13, No. 2, 89-129
- [14] Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton, (1992), "*Bond pricing and the term structure of interest rates*", *Econometrica* 60, pp. 77-105.
- [15] Hull J., (2010), *Options, Futures and other Derivatives*, 7^a Edition. Prentice Hall
- [16] Hull J., and A. White (2000), "*Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities, and the Implementation of the Libor Market Model*". SSRN working paper, <http://ssrn.com/abstract=295227>
- [17] Hyman, J., (1983), "*Accurate Monotonicity Preserving Cubic Interpolation*", *Stat. Comput.* Vol. 4, No. 4, 645-654
- [18] Jamshidian, F., (1997), "*Libor and swap market models and measures*", *Finance and Stochastics* 1, pp. 293-330.
- [19] Jong, F., (1999), J. Driessen, and A. Pelsser "*Libor and Swap Market Models for the pricing of interest Rate Derivatives: An Empirical Analysis*", SSRN working paper, <http://ssrn.com/abstract=205371>
- [20] Mercurio F., (2009), "*Interest rates and the credit crunch: new formulas and market models*". SSRN working paper, <http://ssrn.com/abstract=1332205>
- [21] Mercurio, F., (2009), "*Libor Market Models with Stochastic Basis*". SSRN working paper, <http://ssrn.com/abstract=1583081>
- [22] Morini, M., (2009), "*Solving the Puzzle in the Interest rate Market (Part 1 & Part 2)*", SSRN working paper, <http://ssrn.com/abstract=1506046>
- [23] Rebonato, R., (1999), *Volatility and Correlation*, John Wiley & Sons.
- [24] Varma, J., (2010), "*An Introductory Note on Two Curve Discounting*", Introductory note

A Anexo: Tabelas

Tabela A.1: Instrumentos de mercado utilizados na construção da yield curve C_x

Instrumento	Taxa	Expressão
Depos	$R_x^{DEPO}(0, T_i)$	$P_x(0, T_i) = \frac{1}{1 + R_x^{DEPO}(0, T_i)\tau(0, T_i)}$
FRAs	$F_x(0, T_{i-1}, T_i)$	$P_x(0, T_i) = \frac{P_x(0, T_{i-1})}{1 + F_x(0, T_{i-1}, T_i)\tau(T_{i-1}, T_i)}$
Swaps	$S_x(0, T_i)$	$P_x(0, T_i) = \left[\sum_{\alpha=1}^{j-1} P_x(0, S_\alpha)\tau(S_{\alpha-1}, S_\alpha)F_x(0; S_{\alpha-1}; S_\alpha) + \right. \\ \left. P_x(0, S_{j-1}) - S_x(0, T_i)A_x(0, T_{i-1}) \right] \frac{1}{S_x(0, T_i)\tau(T_{i-1}, T_i)}$

A Tabela A.1 apresenta os instrumentos genéricos de mercado utilizados na construção da *yield curve*, C_x , bem como a respectiva expressão utilizada para caracterizar a curva, através de factores de desconto para a maturidade T_i .

Tabela A.2: Instrumentos de mercado utilizados na construção da “Euribor *Single-curve*”

	Instrumento	Subjacente	Prazo
Depos	EUDR1T Curncy	O/N	1wd
	EUDR2T Curncy	T/N	2wd
	EUDRA Curncy	1M	1M
	EUDRB Curncy	2M	2M
	EUDRC Curncy	3M	3M
	
	EUDR1 Curncy	12M	1y
Swaps	EUSA2 Index	6M	2y
	EUSA3 Index	6M	3y
	EUSA4 Index	6M	4y
	6M	
	EUSA15 Index	6M	15y

A Tabela **A.2** apresenta os diferentes instrumentos de mercado utilizados na construção da “Euribor *Single-curve*”, bem como o respectivo *underlying* e prazo associado.

Tabela A.3: Instrumentos de mercado utilizados na construção da yield curve “Euribor 3M standard”

	Instrumento	Subjacente	Prazo
Depos	EUDR1T Curncy	O/N	1wd
	EUDR2T Curncy	T/N	2wd
	EUDRA Curncy	1M	1M
	EUDRB Curncy	2M	2M
	EUDRC Curncy	3M	3M
FRA	FRA 3x6F	3M	6M
	FRA 6x9F	3M	9M
	FRA 9x12F	3M	1y
Swaps vs 3M	EUSW2V3 Index	3M	2y
	EUSW3V3 Index	3M	3y
	3M	
	EUSW15V3 Index	3M	15y

A Tabela A.3 apresenta os diferentes instrumentos de mercado utilizados na construção da *yield curve* “Euribor 3M Standard”, bem como o respectivo *underlying* e prazo associado.

Tabela A.4: Instrumentos de mercado utilizados na construção da yield curve “Euribor 6M standard”

	Instrumento	Subjacente	Prazo
Depos	EUDR1T Curncy	O/N	1wd
	EUDR2T Curncy	T/N	2wd
	EUDRA Curncy	1M	1M
	EUDR.... Curncy	...	
	EUDRF Curncy	6M	6M
FRA	FRA 6x12F	6M	1Y
	FRA 12x18F	6M	18M
	FRA 18x24F	6M	2y
Swaps vs 6M	EUSA3 Index	6M	3y
	EUSA4 Index	6M	4y
	6M	
	EUSA15 Index	6M	15y

A Tabela **A.4** apresenta os diferentes instrumentos de mercado utilizados na construção da *yield curve* “*Euribor 6M Standard*”, bem como o respectivo *underlying* e prazo associado.

Tabela A.5: Instrumentos de mercado utilizados na construção da yield curve “OIS Discounting curve”

	Instrumento	Subjacente	Prazo
Eonia	EUDR1T Curncy	O/N	1wd
	EUDR2T Curncy	T/N	2wd
Eonia Swaps	EUSWEA Curncy	O/N	1M
	EUSWE..Curncy	O/N	...
	EUSWE1 Curncy	O/N	1y
	EUSWE2 Curncy	O/N	2y
	EUSWE3 Curncy	O/N	3y
	O/N	
	EUSWE15 Curncy	O/N	15y

A Tabela A.5 apresenta os diferentes instrumentos de mercado utilizados na construção da *yield curve* “OIS Discounting curve”, bem como o respectivo *underlying* e prazo associado.

Tabela A.6: Média do quadrado dos erros, por maturidade do cap/floor, dados por cada um dos 3 “modelos” de avaliação

<i>Maturidade (Y)</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pré crise										
<i>Single-Curve</i>	0,03%	0,03%	0,06%	0,03%	0,03%	0,08%	0,13%	0,11%	0,08%	0,11%
<i>Multi-Curve s/ CSA</i>	0,03%	0,05%	0,12%	0,07%	0,07%	0,15%	0,20%	0,17%	0,10%	0,13%
<i>Multi-Curve c/ CSA</i>	0,01%	0,07%	0,06%	0,06%	0,07%	0,12%	0,15%	0,16%	0,10%	0,05%
Pós crise										
<i>Single-Curve</i>	9,98%	2,70%	0,34%	0,32%	0,43%	0,49%	0,29%	0,13%	0,11%	0,48%
<i>Multi-curve s/ CSA</i>	0,07%	0,21%	0,19%	0,18%	0,20%	0,20%	0,13%	0,13%	0,16%	0,12%
<i>Multi-curve c/ CSA</i>	0,30%	0,31%	0,19%	0,25%	0,24%	0,22%	0,18%	0,14%	0,22%	0,11%
Falência Lehman										
<i>Single-Curve</i>	48,5%	10,0%	0,41%	0,36%	0,63%	0,96%	0,56%	0,17%	0,11%	0,94%
<i>Multi-Curve s/ CSA</i>	0,11%	0,44%	0,18%	0,15%	0,17%	0,24%	0,15%	0,13%	0,17%	0,03%
<i>Multi-Curve c/ CSA</i>	0,76%	0,80%	0,20%	0,40%	0,23%	0,31%	0,28%	0,15%	0,32%	0,03%

A Tabela A.6. apresenta a média do quadrado dos erros, por maturidade do *cap/floor*, apurado em cada um dos três “modelos” de avaliação em diferentes períodos.