

*PRICING CORPORATE DEBT AND CREDIT RISK UNDER THE CEV MODEL*

Jorge M. Duque Oliveira

Projecto de Mestrado  
em Finanças

Orientador:  
Prof. Doutor José Carlos Dias, Prof. Convidado, INDEG-ISCTE Business School, Departamento  
de Finanças

Setembro 2010

*PRICING CORPORATE DEBT AND CREDIT RISK UNDER THE CEV MODEL*

Dissertation presented at the Instituto Superior de Ciências do Trabalho e da Empresa to obtain a Master's Degree in Finance, under the guidance and orientation of Professor Doctor José Carlos Dias, *Department of Finance, ISCAC Business School, Coimbra.*

*Jorge Duque de Oliveira*

Lisbon, September 2010

## Resumo

O modelo de Merton (1974) tem sido frequentemente utilizado pelos analistas como método de aproximação ao risco de crédito das empresas, numa clara esperança de se encontrar melhores resultados relativamente aos métodos tradicionais. Seguindo a estrutura geral de equilíbrio para a avaliação de opções com o subjacente de acções, Robert Merton, inspirado na teoria das opções de Black and Scholes (1973), desenvolveu o seu modelo fundamentando-o num processo de avaliação estrutural baseado na evolução do valor da empresa determinando a causa do incumprimento do serviço da dívida e o momento de *default* da firma. A análise centra-se, fundamentalmente, na informação do mercado accionista para apreciar o valor de mercado do capital próprio, necessário para a estimativa do risco de crédito, do cumprimento da dívida ou da probabilidade de *default*. Na perspectiva de Merton (1974), o valor de mercado dos capitais próprios ( $E$ ) de uma empresa com dívida pode ser equiparado a uma opção *call* sobre o valor dos seus activos ( $V$ ) e o endividamento, a valor de mercado ( $D$ ), sob a forma de obrigações de cupão zero com valor nominal  $X$  e reembolso na maturidade  $T$ . Portanto, a firma entrará em incumprimento quando o valor dos seus activos for menor que a dívida prometida (reembolsada no momento  $T$ ). O modelo pressupõe ainda que o valor da firma segue um processo de difusão log-normal com volatilidade constante e que, da emissão das duas classes de *securities*, *equity* e *debt*, os capitais próprios não recebem dividendos e a dívida constitui-se como uma *pure discount bond*, *zero coupon* e de pagamento *bullet* na maturidade  $T$ .

Na prática, o modelo de Merton tem uma forte expressão na metodologia KMV, com especial incidência nas estimativas da volatilidade dos activos ( $\sigma_V$ ), *Distance to Default (DD)* e *Expected Default Frequency (EDF)*, a probabilidade de incumprimento avaliada pela MOODY'S KMV.

No entanto, na extrema variabilidade dos mercados e no constante aumento dos níveis de exigência dos investidores, observa-se, cada vez mais, maiores e mais fundamentadas controvérsias que questionam estes processos de avaliação de risco surgindo, constantemente na literatura propostas alternativas no sentido de se encontrar respostas que favoreçam com maior precisão a valorização da dívida corporativa e o risco de crédito das empresas.

O modelo *CEV* de avaliação de opções, baseado na elasticidade constante da variância (*Constant Elasticity of Variance Model*), introduz o conceito de volatilidade implícita, pressupondo uma elasticidade dinâmica com variação multi-variada em consequência das alterações permanentes dos preços, contrariamente ao modelo B-S/Merton cuja variância se assume como uma constante. O argumento central deste trabalho, expressa-se nos trilhos de outras respostas, cuja pertinência pretende explicar melhor as dúvidas que, presentemente, os modelos teóricos colocam às finanças corporativas. As respostas encontradas sugerem de facto maior precisão, muito à custa de um formulário estatístico e matemático complexo, de elevado nível de sofisticação e em permanente debate, observado neste processo estrutural de desenvolvimento contínuo, teórico-estocástico, de que o modelo *CEV* é parte integrante.

No final, mais do que a minimização do erro é a precisão do valor que se pretende perceber e demonstrar, numa tentativa de encontrar caminhos que expliquem, de forma alternativa e segura, como se chegar mais próximo do verdadeiro *benchmark* da firma. A título de exemplo, seguimos três métodos analíticos de abordagem ao *CEV*, com base na função de distribuição de probabilidades qui-quadrado não central, para a avaliação do preço e cobertura das opções *call* ao estilo europeu sob a difusão *CEV*, nomeadamente as aproximações Sankaran (1963), Fraser *et al.* (1998) e Penev e Raykov (2000), comentando e comparando, nos exemplos propostos, as diferenças encontradas para vários cenários de elasticidades, não deixando de incluir, como começámos, o modelo de B-S/Merton.

**Palavras-chave:** *CEV model, risco de crédito, credit spread, efeito sorriso e volatilidade implícita*

**Classificação do Jornal de Literatura Económica (JEL):** *G13; G32*

## ***Abstract***

The model of Merton (1974) has been often used by analysts as a method of approach to the companies' credit risk, trying to reach better results, in comparison to the ones obtained through traditional methods. Following the general equilibrium framework for valuing options with the underlying shares, Robert Merton, inspired by the Black and Scholes' (1973) theory of options, developed his model basing it in a structural evaluation process based on the evolution of the value of the Corporations in order to determine the cause for the default of debt as well as the default time of the firms. The analysis focuses mainly on the stock market information to assess the market value of equity, necessary to estimate the credit risk, the debt obligations fulfilment or the likelihood of default. According to Merton (1974), the equity's market value ( $E$ ) of an indebted company may be equalized to a call option over the value of its assets ( $V$ ) and debt, according to the market price ( $D$ ), under the form of zero coupon bonds with par  $X$  and repayment at maturity  $T$ . Therefore, the firm enters into default when the value of its assets is less than the promised debt (repaid at time  $T$ ). The model also assumes that the firm value follows a lognormal diffusion process with constant volatility and that with the emission of two classes of securities, equity and debt, the equity does not receive dividends and that the debt is a pure discount bond with zero coupon and a bullet payment at maturity  $T$ .

In practice, the model of Merton has a strong expression in the KMV methodology, with special reference to estimates of the volatility of assets ( $\sigma_V$ ), Distance to Default (DD) and Expected Default Frequency (EDF), being the probability of default estimated by MOODY'S KMV.

There is, however, in the extreme variability of the markets and in the ever-increasing levels of demand from investors, progressive controversies that question these types of risk assessment appearing increasingly different proposals in order to find alternative solutions to encourage more precisely the evaluation of corporate debt and credit risk of companies.

The CEV model of option valuation, based on constant elasticity of variance (Constant Elasticity of Variance Model), introduces the concept of implied volatility, assuming a dynamic elasticity with multi-varied variation as a result of the underlying asset price, contrary to the model BS / Merton, whose variance is assumed to be constant. The main purpose of this work consists, then, in an attempt to find other answers, more accurate, that might explain the doubts that, at present, the theoretical models put to corporate finance. The answers suggest, in fact, greater precision, much to the expense of a complex mathematical and statistical form highly sophisticated and in permanent debate, observed in this theoretic-stochastic structural process of continuous development that the CEV model is.

In the end, more than minimizing the error it is the precision of the value that we want to understand and demonstrate in an attempt to find ways to explain, in an alternative and secure way, how to get closer to the true benchmark of the firm. As an example, we followed three analytical approach methods of the CEV model, based on the probability distribution function of chi-square, in order to evaluate the price and coverage of European-style call options under the CEV diffusion, namely the approaches of Sankaran (1963), Fraser *et al.* (1998) and Penev and Raykov (2000), commenting and comparing, in the examples offered, the differences found for various scenarios of elasticity, whilst including, as in the beginning, the Model BS / Merton.

**Key words:** *CEV model, risco de crédito, credit spread, efeito sorriso e volatilidade implícita*

**JEL classification:** *G13; G32*

## *PRICING CORPORATE DEBT AND CREDIT RISK UNDER THE CEV MODEL*

### *Agradecimentos*

Ao Professor Doutor Mohamed Azzim, pela força que incutiu no estudo e na pesquisa.

Ao Professor Doutor José Carlos Dias, pelos seus conselhos e ensinamentos, pela sua disponibilidade e entusiasmo, contagiante e motivadores e pelo profissionalismo sempre presente.

À minha mulher e à sua santa paciência, que em momento algum me suprimiu qualquer apoio e às minhas filhas, pelos minutos, horas e dias de atenção que, infelizmente, não lhes consegui dar, também agradeço e dedico este trabalho.

*Jorge Duque de Oliveira*

Lisboa, Setembro de 2010

## CONTEÚDO

<b>1. Pricing Corporate Debt and Credit Risk under the Merton Model</b> .....	<b>1</b>
1.0 Introdução .....	1
1.1 Breve revisão da literatura .....	1
1.1.1 Os Modelos de Risco de Crédito ... ..	2
1.1.1.1 Síntese dos modelos estruturais de risco de crédito .....	4
1.1.1.2 Os modelos de forma reduzida .....	5
1.2 Descrição do Modelo de Black e Scholes de avaliação de opções .....	5
1.2.1 A Volatilidade Implícita no Modelo Black e Scholes .....	9
1.2.2 As Gregas das Opções ... ..	9
1.3 O Valor de Mercado dos Capitais Próprios ( $E_t$ ) e da Dívida ( $D_t$ ) em Tempo Contínuo, com Base no Modelo de Merton (1974).....	10
1.3.1 Pressupostos Necessários e Quadro Geral dos Preços .....	10
1.3.2 O Valor do Capital Próprio e a Dívida com e sem Risco .....	13
1.3.2.1 O Modelo de Pricing na Avaliação dos Capitais Próprios .....	14
1.3.2.2 O Modelo de Pricing na Avaliação do Risco de Desconto das Obrigações ...	16
1.4 A Probabilidade de Incumprimento Neutra ao Risco e o Valor de Mercado da Dívida sem Risco .....	21
1.5 Um Exemplo Prático de Aplicação ao Modelo KMV .....	22
1.6 O Credit Spread como Função da Yield To Maturity .....	25
1.7 Limitações do Modelo de Merton .....	25
<b>2. Pricing Corporate Debt and Credit Risk Under the CEV Model</b> .....	<b>26</b>
2.1 O Modelo CEV como Alternativa ao Modelo Black-Scholes/Merton .....	26
2.2 The Constant Elasticity of Variance (CEV) Model .....	26
2.2.1 A Configuração Geral do Modelo .....	26
2.2.2 A difusão CEV e a sua Função de Densidade de Probabilidade .....	29
2.2.3 O Valor do Capital Próprio e da Dívida .....	30
2.2.4 O Credit Spread .....	31
2.2.5 Aproximação analítica .....	31
<b>3 Análise Numérica</b> .....	<b>33</b>
<b>4 Conclusões e Apreciação Crítica</b> .....	<b>39</b>
<b>Referências</b> .....	<b>41</b>
<b>Anexos</b> .....	<b>45</b>

## 1. Pricing Corporate Debt and Credit Risk Under the Merton Model

### 1.0 Introdução

O trabalho de Black e Scholes (1973), em torno da avaliação de opções europeias com acções relativamente às quais não é previsível o pagamento de dividendos ao longo do período de vida da opção (opções sem dividendos), constitui o primeiro modelo de avaliação (*pricing*) deste tipo de derivados financeiros, sendo igualmente válido para opções *call* americanas, desde que se verifique um conjunto de condições, a primeira das quais baseada na não geração de dividendos, por parte do activo subjacente, antes da maturidade da opção. Este modelo supõe que o processo de avaliação de acções ( $S_t$ ), se define como a seguinte solução de uma equação diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (1.1)$$

em que  $\mu$  é conhecido e referido como a taxa de rendibilidade esperada,  $\sigma$  o desvio padrão da rendibilidade percentual dos preços, conhecida pela volatilidade do preço da acção e  $W_t$  o *standard Brownian motion*.

Na teoria da avaliação das opções o pressuposto da neutralidade ao risco permite colocar a taxa estimada de retorno a partir da taxa de juro sem risco no mercado, sendo a volatilidade a única variável não observável directamente na referida equação diferencial estocástica.

### 1.1 Breve revisão da literatura

O contributo pioneiro destes autores, cujos resultados têm constituído a base para o desenvolvimento da conhecida análise *contingent claims*, utilizada em muitas aplicações das finanças, progride com Robert C. Merton (1973a) que clarifica e amplia o modelo à teoria de avaliação dos passivos das empresas em geral. Enquanto Black e Scholes (1973) fornecem uma estrutura geral de equilíbrio para a avaliação de opções com acções, derivando uma fórmula simples para o *pricing* de opções *call*, ao estilo europeu, num contexto de não pagamento de dividendos, Merton (1973a) generaliza este modelo para os casos de pagamento de dividendos e taxas de juro estocásticas. Mais tarde, Merton (1974, 1977), coloca formalmente a aplicação destes conhecimentos na avaliação do passivo das empresas, resultando que os modelos de avaliação de opções também possam ser usados para avaliar os vários elementos da estrutura de capital de uma firma, desde que os passivos corporativos sejam vistos, de um modo geral, como combinações de simples contratos de opções, servindo o valor total da firma como activo subjacente (substituindo deste modo as acções ordinárias na estrutura de Black-Scholes/Merton) e as *securities* individuais entre a estrutura de capital da firma (dívida, obrigações convertíveis, acções ordinárias, etc.) consideradas como opções e avaliadas como *contingent claims* no valor da empresa. Ou seja, sintetizando, o ponto central baseia-se no facto de que quer a dívida quer os capitais próprios podem ser interpretados como opções sobre o valor da empresa.

O desenvolvimento desta aproximação deu-se quando, pela primeira vez, foi reconhecido que as estruturas de financiamento baseadas no capital próprio e em obrigações de cupão zero de uma firma alavancada são idênticas à estrutura das estratégias de simples opções *call* e *put*. Portanto, observando a estrutura dos passivos corporativos como *contingent claims* no valor da empresa, implica que os modelos de avaliação de opções possam igualmente ser usados para avaliar *securities* corporativas.

### 1.1.1 Os Modelos de Risco de Crédito

As *corporate liabilities* como simples opções na perspectiva do risco de incumprimento e dos *credit spreads* das empresas, podem ser vistas na literatura financeira em dois tipos de modelos distintos: estruturais e de forma reduzida (*reduced-form*, ou *intensity-based*, ou, ainda, *hazard rate models*, como também são conhecidos). Os modelos estruturais, assim chamados devido a um conjunto explícito de variáveis estruturais e económicas das empresas, quantificáveis e utilizáveis na determinação da probabilidade de incumprimento e dos *credit spreads*, nomeadamente os valores dos activos e da dívida, observados como um todo e baseados nos argumentos de não arbitragem, foram criados, primeiramente, por Merton (1974), a partir da teoria de avaliação das opções de Black e Scholes (1973). No modelo de Merton uma firma entra em incumprimento se, no momento do vencimento da dívida, os seus activos estiverem abaixo dessa responsabilidade, sobrepondo-se, portanto, a dívida ao valor da empresa. No seguimento de Merton (1974), os modelos estruturais continuam, depois, a ser desenvolvidos por Black e Cox, (1976), Merton (1977), Ho e Singer (1982), Johnson e Stulz (1987), Chance (1990), Kim, Ramaswamy e Sundaresan (1993), Shimko, Tejima e Van Deventer (1993), Longstaff e Schwartz (1995), Zhou (2001), Duffie e Lando (2001), Hilberink e Rogers (2002), Giesecke e Goldberg (2003), Leland (2004), Chen e Kou (2005), entre outros.

Segundo as categorias conceptuais de Sundaresen (2000), na avaliação da dívida corporativa, é possível distinguir-se, na literatura, essencialmente dois modelos estruturais, os modelos de risco de incumprimento sem negociações ou de comportamento estratégico e os modelos de risco de incumprimento com negociações ou de comportamento estratégico. No primeiro caso, do ponto de vista teórico, enquadra-se o modelo básico da dívida corporativa desenvolvido por Merton (1974), que estudou a estrutura de risco das taxas de juro às empresas numa probabilidade *default* relativamente elevada, com base nos conhecimentos da teoria de avaliação das opções de Black e Scholes (1973) e Merton (1973), derivando uma fórmula explícita de avaliação das obrigações com risco de incumprimento no momento da sua maturidade. O essencial desta questão é que o retorno, na maturidade do investimento das obrigações com risco *default*, se assemelha ao retorno do investimento numa opção com o valor da empresa como activo subjacente<sup>1</sup>, sendo ainda assumido que a

---

<sup>1</sup> Basicamente, o retorno do obrigacionista na maturidade do investimento pode ser visto como o valor facial da obrigação menos o preço de uma opção *put* no valor da firma com um preço de exercício igual ao valor facial da obrigação, ou seja:  $\min(V, X) = X - \text{Max}(X - V, 0)$ .



probabilidade *default* ocorre apenas na maturidade, não existindo custos de falência e, neste caso, com as execuções de dívida a obedecerem exclusivamente às regras de prioridade legalmente estabelecidas. Merton (1974) caracterizou o prémio de risco de incumprimento como dependente unicamente de 3 variáveis, nomeadamente a alavancagem da firma, medido como se o rácio da dívida sobre o valor global da firma fosse livre de risco, a volatilidade das operações da empresa e o *timing* ou o momento da maturidade, demonstrando que o prémio de risco de incumprimento aumenta na alavancagem e na volatilidade dos activos subjacentes da firma. O comportamento do *credit spread* relativamente ao prazo de vencimento depende de a alavancagem ser elevada ou não.

Apesar da simplicidade e da intuição do modelo de avaliação da *equity* e da dívida de risco nas estruturas de capital de casos simples, o modelo não é capaz, todavia, de lidar com muitos dos problemas encontrados nas estruturas mais complexas, sendo feitas extensões subsequentes destes modelos de diferentes formas. Black e Cox (1976), por exemplo, analisaram o preço da dívida subordinada assumindo a existência de duas emissões de dívida, uma sénior e outra júnior em lugar de um única, como no modelo de Merton (1974). Avaliaram também o efeito de algumas disposições específicas em contratos de dívida e acordos de subordinação e restrições ao financiamento dos pagamentos aos obrigacionistas e accionistas. A chave de inovação no seu modelo consiste numa condição de contorno adicional que permite o incumprimento inicial ou, pelo menos, antes da maturidade. Portanto, se o valor da firma variar ao longo do tempo e cair para um nível específico tal que incorra em incumprimento, então o obrigacionista tende a influenciar a empresa para entrar em falência, ao ponto de provocar uma transferência de propriedade total dos seus activos para os detentores dos títulos.

Para Altman *et al.* (2004), os modelos de risco de crédito dividem-se em duas categorias distintas agrupadas em modelos de *pricing* e de *value-at-risk* englobando, os modelos de *pricing*, as duas classes de modelos estruturais, de primeira e de segunda geração (iniciada pelos trabalhos de Black e Scholes/Merton) mais os modelos de forma reduzida. Apesar das abordagens distintas, tanto os modelos estruturais como os de forma reduzida se centram objectivamente na estimativa da probabilidade de incumprimento (Allen e Saunders, 2003) reflectindo, os modelos estruturais, como vantagens relevantes a consideração dos preços de mercado e a sua evolução histórica no conjunto das suas variáveis e, também, como já referido, o facto de a situação de incumprimento ser uma realidade perfeitamente previsível. Em sentido inverso, apontam-se aos modelos estruturais, como principais pontos críticos, as diferenças entre a realidade dos mercados de valores mobiliários, que pagam dividendos, ou juros de cupão e os critérios das variáveis assumidas pelos modelos, que normalmente não expressam a *dividend yield* e consideram sempre as *zero coupon bonds*. Também, na prática, os activos das empresas marcam a diferença, uma vez que não são todos negociáveis nem observáveis facilmente (Jarrow, Lando e Turnbull, 1997), sendo necessário especificar a cadeia complexa de prioridades credoras em caso de falência, para implementar estes modelos, o que não é tarefa fácil (veja-se, por exemplo, Jones, Mason e

Rosenfeld, 1984). A avaliação de derivados de crédito cujo *pay-off* dependa da notação de empresa ou *rating* de crédito, constitui igualmente outra desvantagem dos modelos estruturais, na medida em que o *credit rating* não é considerado variável de *input*.

Dos modelos de risco de incumprimento com negociações ou de comportamento estratégico destaca-se Anderson e Sundaresan (1996) que utilizam uma análise teórica baseada em jogos para estudar o projecto e avaliação dos contratos de dívida. “O processo de *default* resulta não só de um mecanismo exógeno como também de um comportamento oportunista das partes”.

### 1.1.1.1 Síntese dos Modelos Estruturais de Risco de Crédito

Como modelos estruturais mais importantes, referidos na literatura relativamente aos eventos de *default*, citando Hua e Wang (2003) em *Theoretical specifications – structural approaches*, além de Merton (1974), que especifica  $V$  (*value of the firm*)  $\leq X$  (*face value of debt contract*), em  $T$  (*maturity of the contract*) destacam-se: Shimko *et al* (1993),  $V \leq X$ , em  $T$ , com taxas de juro estocásticas, cuja dinâmica está correlacionada com  $V$ ; Leland (1994)  $V \leq K$  (*strike price*), onde  $K$  pode ser determinado endógena ou exogenamente; Longstaff e Schwartz (1995),  $V \leq X$ , entre 0 e  $T$ , com taxas de juro estocásticas, cuja dinâmica está correlacionada com  $V$ ; Das (1995),  $V \leq X$ , entre 0 e  $T$ ; Saa-Requejo e Santa Clara (1997),  $V \leq K$ , entre 0 and  $T$ , sendo que  $K$  segue um processo de difusão com componentes de difusão ligadas à alietoriedade (*randomness*) das taxas de juro de curto prazo e  $V$ ; Briys e de Varenne (1997),  $V \leq \alpha$  (valor do desconto arbitrário),  $V \leq X$ , entre 0 e  $T$ , com taxas de juro estocásticas de cujas dinâmicas estão correlacionadas com  $V$  e  $V \leq X$  na maturidade e sem prévio *default*; Zhou (1997),  $V \leq X$ , entre 0 e  $T$ , em que  $dV/V$  é um processo *jump diffusion*. Note-se que os tradicionais modelos estruturais observam algumas falhas empíricas como, por exemplo, subestimarem os *spreads* de crédito, particularmente na dívida de curto prazo, com forte impacto no investimento da dívida, ou subestimarem as probabilidades de incumprimento no curto prazo, não existindo um factor de *nondefault* ou liquidez que estime estas probabilidades, incutindo imprecisão na observação da estrutura de capital. No entanto, trabalhos mais recentes desenvolveram modelos que consideram *jumps* no processo da avaliação do risco de crédito e das probabilidades *default*, nomeadamente Zhou (2001), Duffie e Lando (2001), Hilberink e Rogers (2002), Gieseck e Goldberg (2003), Chen e Kou (2005), Zhu *et al.* (2005), Carr e Linetsky (2006), por exemplo. Os trabalhos de evidência empírica de Jones *et al.* (1984), Sarig e Warga (1989), Collin-Dufresne *et al.* (2001), Cooper e Davydenko (2003), Huang e Huang (2003), Vassalou e Xing (2004), Eom *et al.* (2004), por exemplo, mostram como calibrar os modelos estruturais de risco de crédito e explicam como seleccionar os dados.

### 1.1.1.2 Os Modelos de Forma Reduzida

A abordagem dos modelos de forma reduzida, em contraste com os modelos estruturais, considera a probabilidade de incumprimento como uma variável exógena, ignorando o efeito da estrutura de capital da empresa e admitindo, na generalidade, que os eventos *default* ocorrem de forma imprevisível, não considerando explicitamente a relação entre *default* e valor da empresa. Contrariamente aos modelos estruturais, os modelos de forma reduzida consideram o tempo de incumprimento determinável não através do valor da firma mas como o primeiro salto de um processo de *jumps* dados de forma exógena. Nomeadamente, os parâmetros relativos à taxa de risco de incumprimento são deduzidos a partir de dados do mercado (veja-se, por exemplo, Elizalde (2005a) para uma revisão mais detalhada dos modelos de forma reduzida). Estes modelos foram pela primeira vez introduzidos na literatura por Jarrow e Turnbull (1992), existindo outros trabalhos dentro desta abordagem, como o de Litterman e Iben (1991), Jarrow e Turnbull (1995), Das e Tufano (1996), Duffie e Singleton (1999), Das e Sundaran (1999), Madan e Unal (2000), de entre outros. Como se disse, os modelos de forma reduzida consideram a probabilidade de incumprimento como uma variável exógena ao risco da dívida corporativa, independente do valor dos seus activos e ignorando o efeito da estrutura de capital, constituindo por isso um evento de ocorrência imprevisível. Portanto, os modelos típicos de forma reduzida envolvem, essencialmente, duas componentes, uma descrição da evolução das taxas de juro (sem risco) e um processo de intensidade que captura a probabilidade de incumprimento da empresa, descurando a sua estrutura de capital que não é, explicitamente, modelada.

A principal vantagem desta abordagem relativamente aos modelos estruturais é a sua fácil programação computacional, dado que se restringe a variáveis observáveis, incluindo a possibilidade de manipular informações de notação de crédito e *rating* de empresas utilizáveis para o *pricing* de opções, contrastando com os processos estocásticos dos modelos estruturais. Nos modelos de forma reduzida o *spread* de crédito da dívida obrigacionista é observável por comparação entre os preços de mercado das obrigações emitidas com risco e sem risco.

### 1.2 Descrição do Modelo de Black e Scholes de avaliação de opções

O modelo de Black e Scholes baseia-se nos seguintes pressupostos:

- . É possível emprestar e pedir emprestado liquidez a uma dada taxa de juro constante e sem risco;
- . O preço segue um *geometric Brownian motion* com *drift* e volatilidade constantes;
- . Não existem custos de transacção;
- . As acções não pagam dividendos;
- . Todas as *securities* são perfeitamente divisíveis, ou seja, é possível comprar qualquer parcela de uma quota;
- . Não existem restrições às vendas a descoberto;
- . Não existem oportunidades de arbitragem.

Nestas condições ideais de mercado para uma opção sobre qualquer *equity*, Fisher Black e Myron Scholes formularam em 1973 o modelo analítico de cálculo do justo valor de mercado de uma opção ao estilo europeu, com base nas seguintes fórmulas originais (valor de uma *call*, ( $c_t$ ) e de uma *put* ( $p_t$ ) europeias sobre uma acção sem dividendos):

$$c_t = S_t * N(d_1) - K * e^{-r\tau} * N(d_2); \quad (1.2)$$

$$p_t = - S_t * N(-d_1) + K * e^{-r\tau} * N(-d_2), \quad (1.3)$$

sendo:

$$d_1 = \frac{\ln(S_t / K) + (r + \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma(T - t)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K * e^{-r(T-t)}}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma(T - t)^{\frac{1}{2}}} \quad e: \quad (1.4)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma(T - t)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow d_2 = d_1 - \sigma(T - t)^{\frac{1}{2}} \quad (1.5)$$

em que:

$t$  - data de avaliação;

$T$  - data de vencimento da opção e ( $\tau = T - t$ ) o tempo (em anos) para o vencimento da opção;

$S_t$  - preço *spot* do activo subjacente;

$N(d)$ - função de distribuição cumulativa ou *standard* normal;

$K$  - preço de exercício da opção;

$r$  - taxa anual de juro sem risco e em regime de capitalização contínua;

$\sigma$  - volatilidade do activo subjacente, ou desvio-padrão anual esperado da taxa de rendibilidade do activo subjacente.

$$N(-d) = 1 - N(d)$$

Todos estes parâmetros são observáveis directamente do mercado excepto, como se disse, a volatilidade, assumida como independente do *strike price* e da *time to maturity*, que terá de ser calculada a partir de séries de registos históricos dos valores diários do activo (acção) e da respectiva rendibilidade gerada. Assim, considerando como amostra:

$$\sigma_m = \left[ \left( \sum_{t=1}^n (R_t - \bar{R}) \right) / (n - 1) \right]^{1/2} \quad (1.6)$$

com,

$S_t$  - Valor do activo no momento  $t$ ;

$R_t$  - Rendimento do activo calculado por meio da expressão  $\ln(S_t / S_{t-1})$ ;

$\bar{R}$  - Rendimento médio.

A volatilidade anualizada ( $\sigma$ ) resulta do produto de  $\sigma_m$  pela raiz quadrada do número de períodos que perfaz um ano:

- . Séries diárias de preços:  $\sigma = \sigma_m (250)^{1/2}$  (ou 252, ou 260 dias no ano);
- . Séries semanais de preços:  $\sigma = \sigma_m (52)^{1/2}$
- . Séries mensais de preços:  $\sigma = \sigma_m (12)^{1/2}$

Em equilíbrio, ou seja, para que não possa ser possível arbitragem, a relação entre os prémios de uma *call* e de uma *put* europeias, com o mesmo preço de exercício e a mesma maturidade (e sem pagamento de dividendos) é dada pela conhecida paridade *put-call*, ou seja:

$$c_t + K e^{-r(T-t)} = p_t + S_t \quad (1.7)$$

Ambos os lados da equação podem ser explicados pelo rendimento obtido pela compra de uma *call*, aplicando o valor actual do seu preço de exercício no activo sem risco (lado esquerdo), sendo igual ao rendimento de comprar uma *put* e adquirir o activo (lado direito).

Do conjunto de proposições formuladas em desigualdades prova-se que não existe qualquer vantagem no exercício antecipado de uma *call* americana (neste referido contexto de ausência de dividendos) pelo que o procedimento para a sua avaliação se equipara a contratos ao estilo europeu. Por exemplo, Seja:

- $C_0$  – Valor da *call option* do activo subjacente;
- $S_0$  – Preço spot do activo subjacente;
- $K$  – *Strike price* (preço de exercício) do activo subjacente na maturidade do contrato (opções ao estilo europeu) ou até à data de expiração do contrato (opções ao estilo americano);
- $T$  – Data de expiração do contrato;
- $P(0, T)$  – Preço, no momento 0, de uma obrigação de cupão zero, maturidade em  $T$  e valor nominal (ao par) unitário.

Então:

- I –  $C_0(S_0, K, T) \geq [S_0 - K]^+ \Rightarrow C_0(S_0, K, T) \geq 0$  e, portanto,  $S_0 \geq K$ , com *payoff*  $S_0 - K$  para  $S_0 > K$ ;
- II –  $C_0(S_0, K, T) \leq S_0$ , caso contrário haveria possibilidade de ocorrerem situações de arbitragem, abrindo caminho, por exemplo, a uma *short call*;
- III –  $C_0(S_0, K, T) \geq c_0(S_0, K, T)$ , ou seja, a flexibilidade do exercício antecipado não pode ter valor negativo;
- IV – Combinando (II e III), resulta que:  $c_0(S_0, K, T) \leq S_0$ , ou seja, o exercício antecipado da *call* (num momento zero) não é superior ao preço *spot* do activo subjacente nesse momento.
- V –  $c_0(S_0, K, T) \geq [S_0 - KP(0, T)]^+$ , ou seja o exercício antecipado da *call* não poderá ser inferior ao máximo da diferença entre o preço *spot* do activo subjacente e o preço de exercício convertido

numa aplicação, ao momento zero, de uma obrigação sem risco, de cupão zero, valor nominal ao par e maturidade  $T$ .

VI – De III e V verifica-se que  $C_0(S_0, K, T) \geq S_0 - KP(0, T)$ , dado que  $P(0, T) < 1$  (para  $T > 0$  e taxas nominais de juro positivas) e, portanto,  $S_0 - KP(0, T) > S_0 - K$  e,  $C_0(S_0, K, T) > S_0 - K$ . Conclui-se assim que  $C_0(S_0, K, T) = c_0(S_0, K, T)$ , uma vez que do exercício antecipado da call americana não resultaria um *payoff* superior a  $S_0 - K$  anulando assim qualquer vantagem relativamente ao modelo europeu (num contexto de ausência de dividendos).

### 1.2.1 A Volatilidade Implícita no Modelo Black e Scholes

O parâmetro  $\sigma$ , podendo ser estimado, como se disse, a partir do histórico do preço das acções, com base no desvio padrão da taxa de retorno dos títulos sendo que, dado um conjunto de pressupostos, derivados das fórmulas de Black-Scholes (1973) e da observação do preço de opção sobre um determinado activo de mercado, é possível encontrar um valor de volatilidade implícita ( $\sigma_{imp}$ ) frequentemente citado pelos investidores para referenciar os preços de mercado com o modelo  $B-S$ , considerando que:

$$\sigma_{imp}: c_{B-S}(S_t, K, \sigma') = c(S_t, K), \quad \text{sendo:}$$

$c_{B-S}(S_t, K, \sigma_{imp})$  o preço  $B-S$  da *call* e  $c(S_t, K)$  o preço de mercado da opção.

A volatilidade implícita de uma opção é frequentemente interpretada como uma expectativa de mercado da volatilidade numa determinada maturidade, ou seja num período de vida  $T-t$  da opção. Voltaremos a este tema mais à frente, a propósito do processo CEV e das tabelas anexas das formulações de Sankaran (1963), Fraser *et al.* (1998) e de Penev e Raykov (2000).

### 1.2.2 As Gregas das Opções

No modelo Black e Scholes, as *Greeks* constituem medidas de sensibilidade relativamente a pequenas variações de um determinado parâmetro subjacente, tornando-se uma ferramenta de trabalho na gestão de instrumentos financeiros e no *trading* de produtos derivados, nomeadamente na protecção de carteiras a mudanças adversas nas condições de mercado como, por exemplo, o *Delta*, *Theta* e *Vega*, definidos para medir as variações de preço, prazo e volatilidade.

São os seguintes os parâmetros de cálculo para as opções *call* e *put*:

*Delta* - Mede a taxa de variação do justo valor da opção relativamente à variação do activo subjacente, isto é, indica a sensibilidade do valor da opção face a pequenas alterações de preço do activo subjacente:

$$\text{Delta } (\delta_c) = \Phi(d_1) e^{-q\tau}$$

$$\text{Delta } (\delta_p) = -(1 - \Phi(d_1)) e^{-q\tau}$$

*Theta* – Indica a sensibilidade do justo valor da opção relativamente a pequenas variações no tempo de expiração, sendo por vezes expresso como o montante de preço da opção depreciado no decorrer de um dia, representado por um indicador negativo, uma vez que a opção vai perdendo valor com o tempo, à medida que se aproxima do seu termo de validade. Esta depreciação de preço tem efeitos opostos entre comprador e vendedor do derivado, com desvantagem do primeiro:

$$Theta (\theta_c) = - [(V_t \Phi'(d_1) \sigma e^{-q\tau}) / 2\tau^{0.5}] + qVt e^{-q\tau} \Phi(d_1) - rX e^{-r\tau} \Phi(d_2)$$

$$Theta (\theta_p) = - [(V_t \Phi'(d_1) \sigma e^{-q\tau}) / 2\tau^{0.5}] - qVt e^{-q\tau} \Phi(-d_1) + rX e^{-r\tau} \Phi(-d_2)$$

*Vega* – Relaciona a sensibilidade do justo valor da opção com as pequenas variações da volatilidade implícita, frequentemente utilizado como medida de mudança de preço da opção face ao aumento de 100 *basis points* na volatilidade:

$$Vega (\zeta_c) = V_t \Phi'(d_1) e^{-q\tau} \tau^{0.5}$$

$$Vega (\zeta_p) = V_t \Phi'(d_1) e^{-q\tau} \tau^{0.5}$$

*Rho* – Mede a sensibilidade do justo valor da opção face a pequenos ajustes na taxa de juro, avaliando a variação do preço da opção relativamente à alteração de cada 100 *basis points* da taxa de juro:

$$Rho (\rho_c) = \tau X \Phi(d_2) e^{-r\tau}$$

$$Rho (\rho_p) = - \tau X \Phi(-d_2) e^{-r\tau}$$

*Gamma* – Avalia a sensibilidade do delta comparativamente com pequenas mudanças no preço do activo subjacente, ajudando a prever as alterações do delta ajustado à medida do preço dos activos:

$$Gamma (\Gamma_c) = (e^{-q\tau} \Phi'(d_1)) / (V_t \sigma \tau^{0.5})$$

$$Gamma (\Gamma_p) = (e^{-q\tau} \Phi'(d_1)) / (V_t \sigma \tau^{0.5})$$

(Na tabela 5 encontra-se um exemplo de cálculo, para estes parâmetros, obtido a partir destas fórmulas e duma dada matriz de *inputs*.)

### **1.3 O valor de mercado dos capitais próprios ( $E$ ) e da dívida ( $D$ ) em tempo contínuo, com base no modelo de Merton (1974)**

#### **1.3.1 Pressupostos necessários e quadro geral de preços**

De forma a simplificar uma aproximação ao modelo, examinaremos o caso mais simples de uma empresa estruturada apenas em duas classes de *claims*, uma simples e homogénea classe de dívida (*debt*) e uma outra, residual, afecta aos capitais próprios (*equity*). Se assumirmos uma estrutura de capital simples cujos capitais próprios sejam constituídos apenas por acções ordinárias, então os capitais próprios da firma podem ser simplesmente assumidos como uma opção *call*, de estilo europeu, sobre o valor da empresa. Também a avaliação da dívida corporativa é assumida como uma dívida simples, composta por obrigações de cupão zero, embora outros tipos de responsabilidades corporativas também possam ser analisados utilizando a abordagem *contingent claims*. Geralmente o valor de uma emissão particular de dívida depende, fundamentalmente de três características essenciais:

- I . A taxa de rendibilidade requerida na emissão de dívida sem risco (obrigações do Estado ou dívida de empresas com excelentes notações de *rating*, por exemplo);
- II . As condições e restrições contratuais contidas nos termos do acordo, nomeadamente o prazo, a taxa de cupão, o valor nominal da dívida, os prazos da *call*, condições de antiguidade em caso de incumprimento, disposições do fundo de amortização, etc.;
- III . A probabilidade de ocorrência de incumprimento (*default*), ou seja a probabilidade da firma não estar em condições de satisfazer alguma ou mesmo todas as condições exigíveis no contrato.

O objectivo desta secção é, assim, analisar os passivos corporativos de uma empresa utilizando as ferramentas da teoria de avaliação de opções. Em ordem a simplificar a análise nesta fase, assume-se, como se disse, que a estrutura de capital da firma é apenas composta por acções ordinárias e emissão de dívida por obrigações de cupão zero. O desenvolvimento do modelo de preços para valorizar os passivos corporativos como *contingent claims*, requer os seguintes requisitos gerais:

**Hipótese 1** (Mercados perfeitos). Os mercados assumem-se como “perfeitos” e sem atritos no sentido em que não existem custos de transacção ou impostos. Os activos são perfeitamente divisíveis, os investidores agem como tomadores de preços (*price-takers*), ou seja, negociam em activos sem efeito nos preços e têm igual, completo e gratuito acesso à informação. As transacções de activos ocorrem em tempo contínuo, não existe limite ao crédito concedido ou contraído a uma taxa de juro sem risco, nem restrições ou regulações de qualquer género sobre as vendas de activos a descoberto (*short sales*).

**Hipótese 2** (Estrutura temporal de taxas de juro horizontal). A estrutura temporal das taxas de juro é horizontal e não estocástica, ou seja, é conhecida com certeza. Assume-se, portanto, que é uma economia com taxas de juro determinísticas, isto é, o preço ( $P$ ) do desconto de uma obrigação sem risco, prometido pagar por cada euro no tempo  $T$ , é dado por:



$$P(r, t, T) = e^{-r(T-t)}$$

onde  $r$  corresponde à taxa instantânea de juro isenta de risco.

**Hipótese 3** (Teorema de Modigliani e Miller). A 1ª proposição (não considerando os impostos) de Modigliani e Miller (1958), que estabelece, essencialmente, que o valor de mercado de uma firma, na ausência de impostos sobre o rendimento das sociedades e outras imperfeições de mercado, depende do valor dos seus activos e é invariável relativamente à sua estrutura de capital.

**Hipótese 4** (Dinâmica de Itô). O valor de mercado da firma segue um processo difusão de Itô com variância por unidade de tempo proporcional ao quadrado do valor de mercado da firma. Portanto é assumido que as dinâmicas para o valor da firma seguem um *geometric Brownian motion*<sup>2</sup>:

$$dV_t = (\mu V_t - \bar{P})dt + \sigma V_t dW_t^P \quad (1.8)$$

em que  $V$  corresponde ao valor dos activos da firma (num dado momento  $t$ ),  $\mu$  a taxa instantânea esperada de retorno dos activos por unidade de tempo,  $\bar{P}$  o valor líquido conhecido das distribuições em dinheiro<sup>3</sup>,  $\sigma^2$  a variância instantânea do retorno da firma na unidade de tempo e  $dW_t^P$  um processo *standard Gauss-Wiener*<sup>4</sup> sob  $P$ . Assume-se ainda que  $\mu$  e  $\sigma$  são constantes e que a curva de rendimento é horizontal, a uma taxa constante de juro sem risco  $r$ .

Segundo Merton (1974), no seguimento deste conjunto de pressupostos, qualquer *contingent claim*,  $F(V, t)$ , cujo valor pode ser descrito como uma função do valor do activo e do tempo, necessita de satisfazer a seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} + (rV - \bar{P}) \frac{\partial F}{\partial V} + \frac{\partial F}{\partial t} - rF + \bar{p} = 0 \quad (1.9)$$

<sup>2</sup> O *geometric Brownian motion* é um processo estocástico utilizado pelo modelo Black-Scholes/Merton para modelizar o preço do activo subjacente ajustado à opção, a partir da seguinte equação diferencial estocástica (SDE):

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t), \quad \text{ou seja,} \quad dS(t) / S(t) = \mu dt + \sigma dW(t),$$

podendo ser o parâmetro  $\mu$  interpretado como a taxa de rendibilidade esperada para o activo por unidade de tempo ( $E[dS_t / S_t] = \mu dt$ ), o parâmetro  $\sigma$  como o desvio padrão da taxa de rendibilidade para o activo na unidade de tempo ( $Var(dS_t / S_t) = \sigma^2 dt$ ) e  $dS(t) / S(t) = S(t+dt) - S(t) / S(t)$  como a taxa de rendibilidade do activo subjacente no instante de tempo  $dt$ , ou seja:



<sup>3</sup> Se este valor for positivo, representa o pagamento total em dinheiro, pela empresa, por unidade de tempo, quer aos seus accionistas quer aos obrigacionistas (pagamentos de dividendos e juros, respectivamente). Se for negativo, representa o recebimento líquido da firma através de um novo financiamento.

<sup>4</sup> Um processo Wiener ou Movimento Browniano é um processo estocástico em tempo contínuo, constituindo um caso particular do processo de Markov. Cada incremento do processo é independente dos anteriores e as mudanças no processo têm distribuição normal com variância que aumenta linearmente com o tempo. Um processo de Wiener é um Random Walk em tempo contínuo, no sentido em que:  $S_{t+1} = S_t + dz$ , onde  $dz = \varepsilon(dt)^{1/2}$  e  $\varepsilon \approx N(0, 1)$ ,  $E[dz] = 0$  e  $var[dz] = dt$ .

Sendo  $F \equiv F(V, t)$  um rótulo genérico para cada *security* da firma,  $t$  o tempo e  $\bar{p}$  o recebimento ou pagamento da *security* na unidade de tempo, constituindo  $\bar{p}$  uma parte de  $\bar{P}$  pagável à *contingent claim*, com maturidade (ou data de expiração contratual) em  $T$  e comprimento temporal  $\tau (T - t)$ , tal que:

$$\partial F / \partial t = - \partial F / \partial \tau \quad \text{e, portanto, em } F(V, \tau):$$

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V^2 \partial^2 F / \partial V^2 + (rV - \bar{P}) \partial F / \partial V - \partial F / \partial \tau - rF + \bar{p} = 0 \quad (1.9a)$$

Considerando-se, neste caso, genericamente,  $F(V, \tau)$ , uma solução de preços para avaliar qualquer *contingent claim*. Naturalmente que este formulário deverá ser especificamente adaptado às condições da dívida obrigacionista e ao tipo de *contingent claim* que se pretenda avaliar. No modelo de Merton (1974), a dívida é representada na forma mais simples resultando esta equação igualmente simplificada, uma vez que se assume que a firma, quer na emissão de dívida quer nos lucros obtidos, não paga *coupon* nem dividendos e, portanto,  $\bar{p}$  e  $\bar{P}$  resultam de valor nulo.

O modelo de Merton (1974) considerando a firma com uma estrutura de capital simples, constituída apenas com duas classes de *claims*, a dívida, representada por papel obrigacionista de puro desconto, sem cupão, de valor facial  $X$ , com início em  $t$ , maturidade em  $T$  e de  $\tau$  períodos, tal que  $\tau = T - t$  e os capitais próprios, *equity*, representados por acções ordinárias, pressupõe ainda, como referido nas hipóteses acima, que o valor dos activos não se altera com a sua estrutura de capital sendo, deste modo, considerado, como se disse, o mais simples modelo de equilíbrio de avaliação da dívida corporativa, admitindo, com a mesma simplicidade, tanto um conjunto de pressupostos tendente a avaliar a estrutura de capital da empresa, como procedimentos objectivos destinados a ponderar a sua falência. Esta perspectiva de simplificação inclui três pontos essenciais:

1. A empresa promete pagar a dívida  $D$ , de valor  $X$ , na maturidade  $T$ , representada por emissão obrigacionista sem juros de cupão;
2. Em situação *default* de  $X$  os obrigacionistas serão donos da firma e os accionistas perderão a sua posição;
3. Os accionistas não recebem dividendos e a firma não altera a sua estrutura de capital enquanto a dívida não for resolvida.

Sob esta perspectiva de simplificação, Black e Scholes (1973) e Merton (1973a), concluíram que os capitais próprios da empresa podem ser considerados como uma opção *call* ao estilo europeu sobre o valor da firma, com  $V$  em vez de  $S$  no correspondente formulário e que os detentores de uma opção *call* europeia sobre as acções têm o direito mas não a obrigação de as adquirir, na maturidade da opção, exercendo esse desígnio caso, evidentemente, o preço de mercado da acção, na maturidade, seja superior ao respectivo preço de exercício. Do mesmo modo também, os accionistas podem ser encarados na

perspectiva de detentores de uma opção de recompra da empresa aos seus credores, pagando um preço de exercício igual ao valor nominal da dívida ( $X$ ) na respectiva data de vencimento ( $T$ ).

### 1.3.2 O Valor do Capital Próprio e a Dívida com e sem Risco

Os valores de mercado de capital próprio ( $E$ ) e de dívida ( $D$ ) têm como base as seguintes igualdades e os conhecidos parâmetros de *Black-Scholes/Merton*:

$$D_t = V_t - E_t \quad (1.10)$$

Sendo a soma da dívida com a *equity* equivalente ao valor dos activos da empresa e o passivo composto por obrigações de cupão zero e de maturidade  $T-t$ , com  $V_t$  correspondente ao valor de mercado da empresa, em  $t$ , representado pelo valor dos seus activos,  $r$  a taxa de juro *spot* sem risco, de capitalização contínua e equivalente à taxa de rendibilidade de uma obrigação sem risco de maturidade idêntica à da dívida,  $\sigma_v$  a volatilidade dos activos, ou seja, o desvio-padrão da taxa de rentabilidade dos activos e o risco de negócio da empresa,  $q$  a *dividend yield* dos activos e  $X$  o valor facial da dívida, onde:

$$d_1 = \frac{\ln(V_t / X) + (r + \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma(T - t)^{1/2}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma(T - t)^{1/2} \quad (1.11), (1.12)$$

Com  $N(d_i)$  representando a função de distribuição normal cumulativa univariada, de uma determinada variável aleatória normalmente distribuída, de média  $\theta$  e variância  $I$ .

Considerando a inexistência de dividendos ( $q=0$ ), temos que:

$$E_t = V_t N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad e \quad (1.13)$$

$$D_t = V_t N(-d_1) + X e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (1.14)$$

O valor de mercado do capital próprio da empresa pode ser utilizado para obter uma estimativa do *credit risk* e em especial da probabilidade de *default*, podendo ainda, como já referido, o capital próprio de uma empresa com dívida, ser encarado como uma opção sobre o valor dos activos da empresa. Deste modo, na maturidade da dívida ( $T$ ), podem ocorrer duas situações distintas:

I - Se  $V_T > X$ :

- . A empresa reembolsa a dívida, paga o valor facial de  $X$  e o valor de mercado da dívida é  $D_T = X$ ;
- . O valor de mercado dos capitais próprios é  $E_T = V_T - X$ .

II - Se  $V_T < X$ :

- . Os accionistas da empresa tendem, racionalmente, a não reembolsar a dívida entregando, por sua conta, os seus activos, sendo o valor de mercado da dívida  $D_T = V_T$ ;
- . O valor de mercado dos capitais próprios é  $E_T = 0$ .

### 1.3.2.1 O Modelo de Pricing na Avaliação dos Capitais Próprios

Na maturidade ( $T$ ), o valor de mercado do capital próprio ( $E_T$ ) é dado pela seguinte expressão:

$$E_T = \text{Max}[V_T - X, 0]$$

Ou, a partir de uma solução *closed-form*, com base na equação diferencial estocástica (1.9a), mostra-se que os capitais próprios da firma,  $E(V, X, \tau, \sigma, r) \equiv E$ , baseados na referida estrutura de capital simples, na ausência de dividendos e de *coupons* de dívida, satisfazem a seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 E}{\partial V^2} + rV \frac{\partial E}{\partial V} - \frac{\partial E}{\partial \tau} - rE = 0 \quad (1.15)$$

nas seguintes condições:

$$E(0, X, \tau, \sigma, r) = 0$$

(se o valor da firma é zero então o seu capital também é nulo, não podendo ser negativo devido à responsabilidade limitada da dívida);

$$E(V, X, \tau, \sigma, r) / V \rightarrow 1 \quad \text{com } V \rightarrow \infty$$

(o valor dos capitais próprios aproximam-se do valor da firma à medida que este se vai tornando cada vez mais elevado) e,

$$E(V, X, 0, \sigma, r) = \text{Max}[V - X, 0] \quad (1.16)$$

(o valor dos capitais próprios na maturidade da dívida,  $\tau = 0$ , com um máximo  $V - X$  e um mínimo de zero conferindo, portanto, na data de vencimento ( $T$ ), o valor de mercado do capital próprio na maturidade ( $E_T$ ), conforme (1.16)).

Estas condições incluem-se expressamente na equação (1.13) reflectindo, portanto, o valor da *equity* como uma função crescente do valor da firma, do tempo até à maturidade da dívida, da volatilidade dos activos e da taxa de juro sem risco, mas uma função decrescente do capital prometido da dívida:

$$\frac{\partial E(.)}{\partial V} > 0; \frac{\partial E(.)}{\partial \tau} > 0; \frac{\partial E(.)}{\partial \sigma} > 0; \frac{\partial E(.)}{\partial r} > 0; \frac{\partial E(.)}{\partial X} < 0 \quad (1.17)$$

Em síntese, estas propriedades constituem o que de razoável se espera de um modelo de avaliação dos capitais próprios, ou seja, a expectativa de retorno dos accionistas aumenta com o aumento do valor da firma, fazendo crescer o valor da *equity*. Da mesma forma e em sentido contrário, aumentando o capital prometido, aumenta também o valor da dívida decrescendo, portanto, o valor da *equity*, com os accionistas reclamantes confinados ao valor residual. Com o aumento do nível de risco da firma aumenta também o valor da *equity*, devido à elevada probabilidade de aumento do retorno esperado do investimento accionista. Isto verifica-se igualmente na perspectiva da volatilidade, verificando-se que, com o aumento desta, a probabilidade do valor da firma vir a cair a breve trecho também aumenta, embora as perdas em movimento descendente tenham barreira zero, devido à propriedade de responsabilidade limitada. Finalmente, se a taxa de juro sem risco aumentar, o valor actual do capital da dívida prometida cai e, portanto, sobe o valor dos capitais próprios.

Confere-se, portanto, que o capital próprio corresponde a uma *call* (europeia) sobre o valor dos activos da empresa ( $V$ ) com preço de exercício igual ao valor de reembolso (nominal) da dívida (1.13), podendo o valor da *call*, no momento  $t$ , ser calculado de acordo com a fórmula (1.2) de Black-Schols, ou seja:

$$c_t = E_t \tag{1.18}$$

Considerando ainda que a *equity*, num momento  $t$ , resulta da sua volatilidade ( $\sigma_E$ ) e do efeito da volatilidade dos activos no valor da empresa enquanto variável aleatória normal, a *equity* e a volatilidade dos activos ( $\sigma_V$ ) estão relacionados pela seguinte expressão:

$$E_t \sigma_E = V_t \sigma_V N(d_1) \tag{1.19}$$

Estimando  $V_t$  e  $\sigma_V$ , o valor do activo ( $V_t$ ) e a sua volatilidade ( $\sigma_V$ ) constituem a solução para o sistema de equações (1.13) e (1.19).

No cálculo dos valores de mercado da *equity* e da dívida é assumido que os *pay-offs* desta, bem como do valor da empresa, constituem *contingent claims*, incorporando opções *put* e *call* e cuja relação entre os capitais próprios e a dívida da empresa se traduz na relação da paridade *put-call*, uma das principais características da teoria das opções. Tendo como activo subjacente o valor da empresa,  $V_t$  e uma obrigação de cupão zero, sem risco de *default* ( $X_t$ ),  $p_t$  e  $c_t$  o valor de opções *put* e *call* sobre o valor da empresa no momento  $t$ , pode-se descrever essa relação da seguinte forma:

$$V_t + p_t = X_t + E_t \quad \text{ou} \tag{1.20}$$

$$V_t + p_t = X_t + c_t \tag{1.21}$$

Esta aceção parte do modelo de *pricing* das opções para avaliação da *equity*, conforme definido na equação (1.13) e, baseado na igualdade fundamental do valor da firma, em  $t$ :

$$V_t = D_t + E_t \Leftrightarrow D_t = V_t - V_t N(d_1) + X e^{-r(T-t)} N(d_2) = V_t (1 - N(d_1)) + X e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (1.22)$$

conforme, também, (1.12a).

### 1.3.2.2 O Modelo de Pricing na Avaliação do Risco de Desconto das Obrigações

Na maturidade ( $T$ ), o valor de mercado da dívida ( $D_T$ ) é dado pela seguinte expressão:

$$D_T = \min[V_T, X];$$

O valor da dívida de risco,  $D(V, X, \tau, \sigma, r) \equiv D$  satisfaz a mesma equação fundamental diferencial parcial (1.9a) o que, com base na referida estrutura de capital simples, sem dividendos e *coupons* de dívida, equivale à seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 D}{\partial V^2} + rV \frac{\partial D}{\partial V} - \frac{\partial D}{\partial \tau} - rD = 0 \quad (1.23)$$

nas seguintes três condições:

$$D(0, X, \tau, \sigma, r) = 0$$

(se o valor da firma é zero então a dívida também é zero, não fazendo sentido assumir qualquer valor negativo);

$$D(V, X, \tau, \sigma, r) \rightarrow X e^{-r(T-t)} \quad \text{com } V \rightarrow \infty$$

(o valor da dívida de risco aproxima o valor da dívida obrigacionista sem risco à medida que o valor da firma se vai tornando cada vez maior) e,

$$D(V, X, 0, \sigma, r) = \min[V, X]$$

(na maturidade o valor da dívida é mínimo conferindo, portanto, na data do vencimento ( $T$ ), o seu valor de mercado ( $D_T$ ), ou seja,  $D_T = \min[V_T, X]$  ).

A solução para a equação (1.23), sujeita aos limites impostos pelas três condições referidas, resulta na forma *standard* do modelo de Merton (1974) para avaliação da dívida com risco estabelecida pela equação (1.14). Neste quadro de avaliação incluem-se, em suma, o valor da firma, a dívida ao valor nominal, a volatilidade operativa da empresa, isto é, o seu risco de negócio, o rendimento de uma obrigação sem risco com a mesma maturidade da dívida, ou seja, a taxa de juro sem risco e o tempo até ao vencimento das obrigações. Merton (1974) mostrou que a estática comparativa em relação ao valor da dívida, constituída pelos activos da firma diminuídos dos capitais próprios, (1.10) e (1.14), com  $D(.)$  representando  $D(V, X, \tau, \sigma, r)$  resulta da seguinte formulação:

$$\partial D(.) / \partial V = 1 - \partial E(.) / \partial V > 0; \quad \partial D(.) / \partial X = - \partial E(.) / \partial X > 0; \quad \partial D(.) / \partial \tau = - \partial E(.) / \partial \tau < 0;$$

$$\partial D(.) / \partial \sigma = - \partial E(.) / \partial \sigma < 0; \quad \partial D(.) / \partial r = - \partial E(.) / \partial r < 0, \quad (1.24)$$

ou seja, o valor da dívida constitui uma função crescente quer do valor da firma quer do valor nominal da dívida e decrescente relativamente ao prazo de vencimento da dívida, à volatilidade dos activos da empresa e à taxa de juro sem risco, constituindo estas propriedades o que normalmente se espera dum aceitável modelo de avaliação da dívida de risco. Com o aumento do valor da empresa a dívida torna-se menos arriscada, os capitais próprios valorizam-se e o nível de cobertura da dívida também cresce, fazendo baixar, portanto, a probabilidade de incumprimento, responsável pelo aumento do valor da dívida. Aumentando o capital prometido da dívida aumentam as expectativas dos obrigacionistas face ao exigível sobre os activos da empresa, valorizando portanto o valor da dívida. Com o alongamento da maturidade da dívida o valor desta cai, na medida em que o valor actual do capital prometido diminui. Aumentando o risco da firma, o valor da dívida decresce, porque as perdas para os credores em face de expectativas de incumprimentos aumentam. Se a taxa de juro sem risco aumenta, o valor actual do capital prometido da dívida cai e, portanto, também diminui o valor da dívida.

Deste modo, torna-se também possível calcular o valor da dívida com risco usando a abordagem à avaliação neutra ao risco, necessitando-se para isso de calcular o preço no momento  $t$  do *pay-off* da dívida com vencimento em  $T$ , ou seja, se:

$$D_t = X e^{-r(T-t)} - [X e^{-r(T-t)} N(-d_2) - V_t N(-d_1)], \quad (1.25)$$

compreendendo a diferença entre o valor da dívida sem risco (no momento  $t$ ) e uma *put option* (a ser exercida igualmente em  $t$ ) correspondente a uma posição curta dos obrigacionistas. Interpretando o valor da dívida com risco ( $D_t$ ) como sendo equivalente ao preço de uma obrigação sem risco ( $X_t$ ) com um valor nominal idêntico ao valor nominal da dívida da empresa menos o preço de uma opção *put* europeia, do tipo *Black-Scholes*,  $p_t$ , sobre o valor da empresa, então:

$$D_t = X e^{-r(T-t)} - p_t \iff D_t = X_t - p_t \quad (1.26)$$

Constituindo, assim, como já visto, a soma dos valores da dívida ( $X_t$ ) com a *equity* ( $E_t$ ) o valor da firma ( $V_t$ ), tal como (1.10) ou (1.20), considerando a referida relação de paridade *put-call*.

Pode-se assim decompor a dívida, com e sem risco, explicando-a nas seguintes equações:

$$\text{Risk Debt } (D_t) = X e^{-r(T-t)} - p_t, \text{ determinada pelos parâmetros } D_t(V_t, X, \tau, \sigma, r) \quad \text{e}$$

$$\text{Value of risk-free debt } (X_t) = X e^{-r(T-t)}, \text{ com put option, de (1.20) e (1.11a), igual a:}$$

$$p_t = X e^{-r(T-t)} N(-d_2) - V_t N(-d_1), \quad (1.27)$$

com a *put-call parity*, baseada nos preços das opções *call* e *put* do tipo europeu, dada por:

$$\text{Assets} = \text{Equity} + (\text{PV (face value of debt)} - \text{"risk premium"}) = \text{Equity} + \text{Debt},$$

ou, a partir da equação fundamental do valor da firma, dada por (1.10).

Resumindo e em síntese, os conceitos básicos dos capitais próprios e passivos das empresas como activos subjacentes de opções, passam pelos seguintes pressupostos:

- . A empresa é constituída por uma estrutura de capital simples, composta apenas por duas classes de *contingent claims*, dívida e *equity*:
  - Dívida, representada por obrigações de cupão zero, com valor facial  $X$  e maturidade em  $T$ , ou seja  $\tau$  ( $T-t$ ) períodos, a contar do período corrente ( $t$ ), detida pelos *bondholders*, sob a forma de opções financeiras do tipo *short put*. Além destas simplificações de restrição na emissão de obrigações, o modelo assume outras, relacionadas com a dívida, nomeadamente se  $X$  não for pago os obrigacionistas assumirão o controlo da empresa e os accionistas não receberão nada. Estes, por sua vez, não receberão dividendos nem a firma poderá emitir novas *securities* enquanto a dívida estiver a decorrer.
  - *Equity*, representada por acções ordinárias, detidas pelos *equityholders*, sob a forma de posições longas do tipo *call options*.
  - Os direitos reclamados dos accionistas e obrigacionistas podem ser formalmente ilustrados, pela relação de paridade *put-call*, ou seja, o equilíbrio que se estabelece entre os *payoffs* do activo de risco subjacente, neste caso o valor da empresa  $V_t$ , mais o valor da opção *put* escrita nele,  $p_t$ , com os *payoffs* da obrigação sem cupão e sem risco,  $X_t$ , mais o valor de uma opção *call* sobre o activo de risco,  $c_t \equiv E_t$ , representando esta os capitais



próprios dos accionistas de uma empresa alavancada. Este relacionamento é conferido pelas referidas igualdades (1.20) e (1.21).

Do Quadro 1 (Anexos), releva-se um exemplo de simulador de cálculo da decomposição do valor da empresa, do risco da dívida, da probabilidade neutra ao risco de incumprimento e do *credit spread*, a partir das variáveis de *input*  $V_t$  (como o valor dos activos da firma no momento  $t$ ),  $X$  (como a dívida total da firma com um dado valor facial),  $r$  (como a taxa de juro sem risco),  $\tau_{(T-t)}$  (como a maturidade da dívida) e  $\sigma_V$  (como a volatilidade do activo), iguais a 80, 48, 7%, 3 anos e 27%, respectivamente, resultando, de (1.11),  $d_1 = 1,7752$  pelo que (aplicando a função estatística do Excel *DIST.NORMP*, que devolve a distribuição cumulativa normal padrão, de média zero e desvio-padrão igual a 1)  $N(d_1) = 0,96207$ .

De (1.12) obtém-se  $d_2 = 1,3075$  e  $N(d_2) = 0,90449$  e, portanto, a partir de (1.13),  $E_t(V_t, X, \tau, \sigma, r) = 41,7736$  sendo que, de (1.10) e (1.14),  $D_t = 38,2264$ , com  $N(-d_1) = 1 - N(d_1) = 0,03793$ .

De (1.27) encontra-se para a opção *put* o valor de 0,6817, sendo a dívida sem risco no momento  $t$  ( $X_t = X e^{-r(T-t)}$ ), igual a 38,908.

A decomposição do valor da empresa revela, assim, duas *claims* distintas:

- # Um crédito de “risco elevado”, representando os capitais próprios dos accionistas, equivalente a uma *call option* sobre o valor da firma, com um preço de exercício igual ao valor nominal da dívida  $X$ , cujo *payoff* na maturidade corresponde a :

$$E_T = \text{Max}[V_T - X, 0] = [V_T - X]^+ \quad \text{e,} \quad (1.25)$$

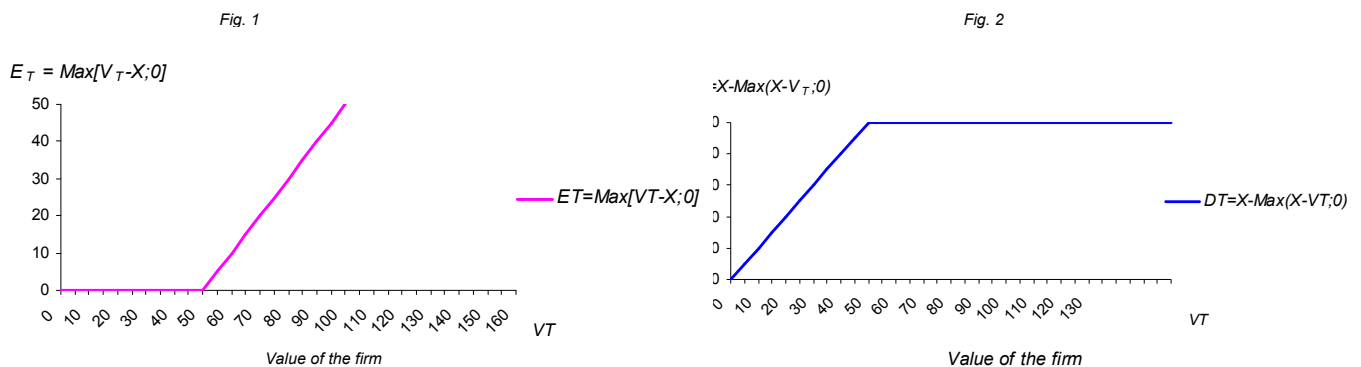
- # Um crédito de “baixo risco”, representando a dívida de risco da empresa, equivalente à dívida sem risco de incumprimento, menos uma opção *put* ao estilo europeu com um preço de exercício igual ao capital prometido da dívida  $X$ , na maturidade  $T$ , igual à maturidade da correspondente dívida de risco. No entanto a dívida com risco também pode ser analisada noutra perspectiva diferente, ou seja, usando a relação de paridade *put-call* verifica-se facilmente que o crédito dos obrigacionistas é equivalente a ter a propriedade plena da firma e um posição curta (*short position*) sobre uma opção *call* europeia no valor da firma, nomeadamente (1.2) e (1.7), cujo pagamento aos obrigacionistas, na maturidade  $T$ , é dado por:

$$D_T = \text{min}[V_T, X] = X - \text{Max}[X - V_T, 0] = X - [X - V_T]^+ \quad (1.26)$$

Portanto, se o valor da firma,  $V_T$ , na maturidade da dívida, for superior ao capital prometido,  $X$ , os accionistas pagarão o valor nominal da obrigação aos obrigacionistas (isto é, a dívida é paga de modo que  $D_T = X$ ) e os capitais próprios terão valor positivo (ou seja, os accionistas retirarão

o valor em excesso de  $V_T - X$ ). No entanto, se o valor da firma na maturidade da dívida for abaixo de  $X$ , então os capitais próprios deixam de ter valor sendo, neste caso, preferível entregar a firma aos credores a ter de cobrir a dívida com novos pagamentos. Tanto os accionistas como os obrigacionistas, face à falência da firma, irão reter um valor menor que o prometido pagamento  $X$  (os credores manterão um valor  $D_T = V_T < X$ ). Isto significa que os detentores de acções, tendo protecção contra o *downside risk* (risco descendente), ou seja, contra a depreciação do valor da firma abaixo de  $X$ , têm também o direito sobre a apreciação do valor da firma acima de  $X$ . A razão desta assimetria entre *downside risk* e *upside* potencial é explicada pela natural responsabilidade limitada dos capitais próprios.

As figuras 1 e 2 revelam, respectivamente, os valores instantâneos de *pay-off* da *equity* e da dívida como função do valor da firma à data ( $T$ ) do vencimento desta, para os *inputs* de  $X = 50$ ,  $\sigma = 0,3$ ,  $r = 0,05$  e  $\tau = 0$  (veja-se Tabela 1 dos Anexos):



De (1.13) e (1.14), resulta que:

$D_t = 50$  (dado que  $\tau = 0$ ) e, pelas igualdades (1.18) e (1.19), para  $V_T = 100$ ,

$$E_t = 50 \text{ e } c_t = p_t = 0 \quad e$$

$$E_T = \max [V_T - X, 0] = [V_T - X]^+ = 50 \quad \text{com}$$

$$D_T = \min [V_T, X] = X - \max [X - V_T, 0] = X - [X - V_T]^+ = 50,$$

Finalmente, recordando de novo o modelo de Modigliani & Miller<sup>5</sup>, o valor da empresa depende do valor dos seus activos e não é afectado pela sua estrutura de capital, em contraste com o modelo de Merton (1974) que é considerado como o modelo mais simples de equilíbrio do *pricing* da dívida da

<sup>5</sup> O custo de capital,  $K_V$ , depende do custo do capital próprio,  $K_E$  e do capital alheio,  $K_D$ , ponderados pelos respectivos pesos de cada um no activo da empresa:  $K_V = E/V K_E + D/V K_D$ . A elasticidade do preço da *equity* mede a variação do valor desta relativamente às variações do valor da empresa calculada por  $\eta_E = N(d_1)V/E$ , sendo o custo da *equity* dado pela seguinte igualdade:  $K_E = r_f + (K_V - r_f) N(d_1) V/E$ . O custo da dívida deriva da seguinte equação:  $K_D = r_f + (K_V - r_f) N(-d_1) V/D$ .

empresa, traduzindo um conjunto de pressupostos objectivos e simplificados da sua estrutura de capital e assumindo também, com a mesma simplicidade e clareza, a possibilidade de ocorrer um procedimento de falência.

Refira-se, agora, neste ponto, uma importante questão que caracteriza este modelo e que, porventura, poderá constituir o ponto mais crítico de toda a arquitectura do seu processo:

Sabendo-se que a volatilidade aumenta simultaneamente o valor das opções *call* e *put* sobre os activos da empresa, esta característica da teoria de avaliação das opções, constitui a questão chave para se perceber o problema de substituição dos activos. Aumentando o grau de risco de uma firma num determinado período  $t$  (alterando, portanto, a volatilidade dos seus activos), sem mudar o valor,  $V_t$ , da firma, transfere-se a riqueza dos obrigacionistas para os accionistas, podendo esta situação acontecer, por exemplo, se a firma vender os seus activos correntes e investir esse dinheiro noutros de maior volatilidade. Contabilisticamente o valor da firma permanecerá o mesmo, no entanto, observando o princípio da paridade *put-call* (equações (1.20) e (1.21)) é possível concluir que a substituição desses activos confere, de facto, com essa transferência de valores, uma vez que tanto a opção longa *call*, em poder dos detentores do capital próprio, como a opção curta *put*, na posse dos credores, aumentarão em valor.

A importância desta possibilidade, de transferência de valores, constitui um ponto-chave que determina a existência de condições nos contratos de emissão de dívida, exigíveis pelos obrigacionistas no intuito de deterem algum controlo sobre as decisões de investimento. No caso presente do modelo de Merton (1974), este controlo existe desde que se assuma imutável a volatilidade dos activos da firma, ou seja, na prática o que se admite é que o nível de risco da empresa permanece constante e inalterável.

#### **1.4 A Probabilidade de Incumprimento Neutra ao Risco e o Valor de Mercado da Dívida Sem Risco**

Um conceito que vem do modelo de abordagem estrutural e relevante na literatura é a *Distance to Default (DD)*, a distância normalizada medida em desvios-padrão do valor dos activos de uma empresa a partir do seu limiar de incumprimento. A *DD* constitui uma peça chave no cálculo da *Expected Default Frequency (EDF)* no modelo da KMV da Moody's, tornando-se amplamente utilizado na literatura como uma ordem numérica de medida de solvabilidade (vidé Vassalou e Xing (2004)).

De (1.12) assume-se que  $d_2$  corresponde à *DD* e, de (1.11) (para a formulação da dívida em (1.14)),  $N(-d_2)$ , assumido no mundo do risco real, corresponde à probabilidade de o valor de mercado dos activos atingir a barreira de *default* (no prazo  $\tau$ ), designada pela (*EDF*), ou seja, a probabilidade de o valor da empresa ( $V_T$ ) ser inferior ao valor nominal da dívida:

$$EDF = P[V_T < X] = N(-d_2) = 1 - N(d_2), \quad (1.27)$$

traduzindo-se pela probabilidade da empresa entrar em ruptura com os seus compromissos e na situação de incumprimento e falência técnica, uma vez que os capitais próprios são inexistentes, relevando valores negativos ( $E_t < 0$ ).

Voltando de novo ao Quadro 1 dos Anexos, considerando os mesmos dados de *input*, o valor de mercado da dívida neutra ao risco, conferida a partir de (1.11) e (1.12), resulta que, de (1.27):

$$p_t = 48 \cdot e^{-0,07 \cdot 3} \cdot (1 - 0,90449) - 80 \cdot 0,03793 = 0,6817$$

com  $X_t = X e^{-r(T-t)} = 38,9080$ , ou seja, um valor superior à dívida de risco determinada,  $D_t = 38,2264$ .

O valor de mercado da dívida, obtido deste modo, compreende o conceito de *risk-neutral*, sem risco *default*, apresentando assim um valor superior para os *bondholders*, incorporando deste modo um *fee* que se pode atribuir à remuneração do risco.

### 1.5 Um Exemplo Prático de Aplicação ao Modelo KMV

O procedimento utilizado pela Moody's|K-M-V para determinar a probabilidade de incumprimento de uma empresa pública, baseia-se no modelo da *default probability* de VK (Vasicek-Kealhofer model)<sup>6</sup> e na medida de crédito da *Expected Default Frequency*<sup>TM</sup> ( $EDF^{TM}$ ), correspondente à probabilidade de incumprimento durante o próximo ano, ou anos, para firmas com capitais próprios negociados publicamente (podendo também o modelo ser adaptado para determinar valores de *EDF* de firmas sem capitais transaccionados na praça pública). A medida de crédito *EDF* da *MKMV* assume que “default” significa o não-pagamento de qualquer prestação de capital ou juros. O modelo prevê três passos essenciais para a determinação da probabilidade de incumprimento de uma firma, nomeadamente:

- Estimativa da volatilidade e do valor corrente de mercado dos activos da empresa, ou seja a volatilidade dos activos e o valor destes são estimados a partir do valor de mercado e da volatilidade dos capitais próprios, bem como do valor contabilístico dos passivos;
- Cálculo da *distance-to-default* (*DD*), isto é, quanto distante está a firma do incumprimento (a sua distância ao incumprimento), calculada a partir do valor do activo e da volatilidade do activo (estimados no passo anterior) e o valor contabilístico dos passivos. A *Distance to Default* é uma medida de risco que compara o *gap* existente entre o valor dos activos e o ponto de *default*, repercutindo no valor do activo a variação de um desvio padrão, constituindo deste modo uma medida do número de desvios padrão entre o valor dos activos da empresa, num determinado momento  $t$  ( $V_t$ ) e o ponto *default* ( $X$ ) num certo horizonte temporal:

<sup>6</sup> Oldrich Vasicek e Stephen Kealhofer estenderam a estrutura de Black-Scholes/Merton para produzir um modelo de probabilidade de incumprimento, conhecido como modelo VK, que assume que os capitais próprios da empresa constituem uma opção perpétua com o ponto de *default* actuando como uma barreira absorvente do valor patrimonial da firma. Quando o valor do activo atinge o ponto de incumprimento, a empresa é assumida em situação *default*.

$$DD = d_2$$

(1.28)

Para determinar  $d_2$ , utiliza-se a taxa de crescimento esperada para os activos ( $\mu$ ), no lugar da taxa de juro sem risco, o que faz com que dependa do valor de mercado dos activos, do grau de *leverage* financeiro e do próprio risco do negócio.

Existem seis variáveis que determinam a probabilidade de incumprimento de uma empresa num determinado horizonte temporal (de  $0$  a  $H$ ), conforme figura abaixo:

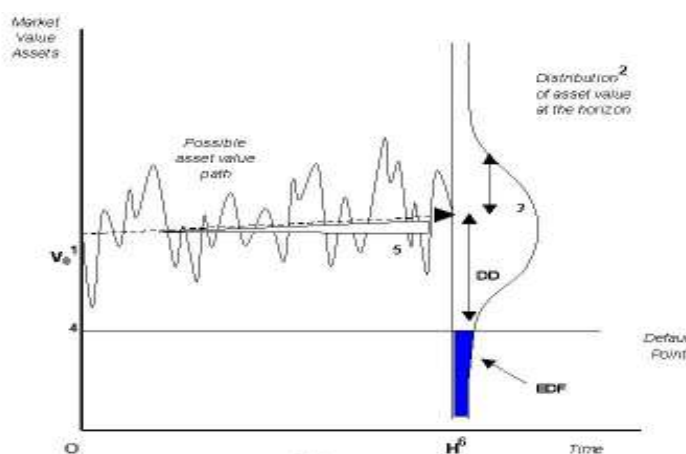


Fig. 3

1. O valor do activo corrente,
  2. A distribuição do valor do activo no momento  $H$ ;
  3. A volatilidade do valor do activo no momento futuro  $H$ ;
  4. O nível do ponto *default*, o valor contabilístico dos passivos;
  5. A taxa esperada de crescimento do valor do activo ao longo do horizonte ( $\mu$ );
  6. O comprimento do horizonte  $H$ .
- Cálculo da probabilidade de *default* (*EDF*), determinada directamente a partir da *distance-to-default* e da taxa *default* para níveis dados de *DD*, ou seja a escala de probabilidade da *DD*, obtida a partir de registos históricos com o mesmo nível de *DD*. A *Expected Default Frequency* (*EDF*) é a probabilidade de o valor dos activos, em  $t$ , atingir um valor inferior ao valor nominal da dívida, conforme (1.27).

Na prática, esta medida de estimar o incumprimento representa uma forma de antecipar possíveis dificuldades das empresas, pegando no preço de mercado da acção ( $E_t$ ), na volatilidade dos activos ( $\sigma_t$ ) e no respectivo valor de mercado ( $V_t$ ).

Com base no modelo de Merton (1974), foi possível estabelecer a ligação entre o valor de mercado dos activos das empresas e o valor de mercado dos seus capitais próprios, seguindo-se o modelo de avaliação de opções *B-S*, de que a teoria de Merton, como se sabe, constitui um caso particular,

ilustrando-se alguns detalhes técnicos da estimativa dos valores *EDF*. Recordando as noções do modelo de Black-Schols/Merton, entre as quais o facto de admitir apenas dois tipos de contrapartes para o valor da empresa, nomeadamente, uma simples classe de dívida e uma simples classe de capitais próprios, com  $X$  como o valor contabilístico da dívida vencível no momento  $T$ , os valores de mercado da dívida e dos capitais próprios relacionados pelas equações (1.11), (1.12), (1.13) e (1.14) e os capitais próprios e a volatilidade dos activos por (1.19), o modelo estrutural da *KMV*, ao assumir-se como uma extensão do modelo de Merton (1974), resolve o problema de a volatilidade dos activos não ser facilmente observável no mercado. No entanto, como através do preço de cotação de mercado das acções se pode tirar o desvio padrão da taxa de rendibilidade geométrica, é possível determinar a volatilidade do capital próprio ( $\sigma_E$ ):

$$\sigma_E E_t = (\Delta E / \Delta V) \sigma_V V_t \Leftrightarrow \sigma_E E_t = N(d_1) \sigma_V V_t \quad (1.29)$$

A volatilidade dos activos ( $\sigma_V$ ) ao divergir da volatilidade dos capitais próprios ( $\sigma_E$ ), incrementa esta pelo nível de *leverage* financeiro ( $\partial E / \partial V$ ). No mercado, a volatilidade dos activos é tendencialmente mais diferenciada por sector de actividade que a volatilidade dos capitais próprios, existindo um efeito de compensação entre *leverage* e volatilidade dos activos. Sectores com elevada volatilidade dos activos (construção e obras públicas) tendem a ter *leverage* baixo, enquanto sectores com baixa volatilidade dos seus activos (Bancos) têm tendência a elevado *leverage*.

A título de exemplo, uma empresa que tenha um capital social de 10 milhões de acções, cotadas a 6 euros cada ( $E_t$ ), uma volatilidade anual da taxa de rendibilidade geométrica da acção ( $\sigma_E$ ) de 30%, uma dívida total com maturidade de 1 ano e valor nominal ( $X$ ) de 200 milhões de euros, num mercado com taxa de juro sem risco (composta em tempo contínuo) de 6% a. a., das igualdades (1.11), (1.12), (1.13) e (1.19), obtém-se, de forma iterativa (recorrendo ao *Solver* ou *Goal Seek* do *Excel*), um valor do activo em tempo  $t$  ( $V_t$ ) de 248,35266 M€ e uma volatilidade ( $\sigma_V$ ) de 7,247%, pelo que o valor de mercado do passivo ( $D_t$ ) é 188,3527 M€ (alternativamente:  $D_t = X e^{-r(T-t)} N(d_2) + V_t N(-d_1)$ ). A *distance to default* ( $DD = d_2$ ) é 3,779583, ou seja para que a empresa se encontre no limiar da situação de incumprimento, é preciso que ao longo do próximo ano o valor dos activos desça ( $V_t - X$ ) 35,009M€, estando a firma afastada do ponto de *default* 3,779583 desvios padrão. A *expected default frequency* (*EDF*) é 0,00079, ou seja, existe 0,079% de probabilidade dos activos da empresa atingirem, no final do próximo ano, a barreira de *default* (conforme Quadro 2).

### 1.6 O Credit Spread Como Função da Yield to Maturity

O *credit spread* ( $s_\tau$ ) representa o preço estimado da dívida, de maturidade igual a  $\tau$ , no pressuposto desta ser neutra ao risco *default* e, portanto, função estrita da *yield to maturity* (*YTM*), ou seja:

$$YTM = y(t, T) \Rightarrow s_\tau = y_\tau - r \Leftrightarrow y_\tau = s_\tau + r \quad e, \quad (1.30)$$

$$D_t = X e^{-(r+s_\tau)\tau} \Rightarrow -(r+s_\tau)\tau = \ln D_t / X \Rightarrow s_\tau = ((-\ln D_t / X) / \tau) - r \quad (1.31)$$

Recorrendo, de novo, aos *inputs* do Quadro 1 (Anexos), o *credit spread* seria:

$$s_\tau = ((-\ln 38,2264 / 48) / 3) - 0,07 \Rightarrow s_\tau = 0,59\%, \text{ correspondendo a } YTM \text{ a } \sim 7,59\%.$$

### 1.7 Limitações do Modelo de Merton

Uma das limitações do modelo de Merton resulta do facto de se considerar que as empresas assumem um estrutura de dívida simples, que o passivo é exclusivamente equiparado a obrigações de cupão zero, sendo que a probabilidade do incumprimento só ocorrerá, conseqüentemente, na maturidade do seu vencimento, afastando a possibilidade de o *default* poder ocorrer mais cedo, não importando por isso o valor da firma antes da maturidade da dívida. Contrariamente, Geske (1977, 1979), equipara mesmo a estrutura de dívida da empresa a uma obrigação com cupão, em que cada pagamento no seu vencimento é visto como uma potencial causa de incumprimento. Outra limitação, porventura a mais importante e central no tema do presente trabalho, deriva da conhecida fórmula (1.1) de Black-Scholes (1973), adaptada por Merton (1973) ao modelo de *pricing* do valor da empresa, generalizado na equação (1.8), assumindo que as dinâmicas de avaliação do preço do activo subjacente seguem um *geometric Brownian motion*, com distribuição log-normal e volatilidade constante. No entanto esta perspectiva tem sido criticada de forma muito consistente na literatura como, por exemplo, Jackwerth e Rubintein (1996), com o argumento de que o pressuposto da log-normal é incapaz de acomodar a assimetria negativa e curtose elevada que são características geralmente implícitas nas distribuições empíricas de retorno dos activos.

Nesta ausência de volatilidade dinâmica dos activos e das taxas de juro constantes, os preços reflectem indiferença relativamente ao preço das opções e é no cerne destas limitações que partimos para o capítulo seguinte, no intuito de encontrar novas respostas, porventura mais precisas, na avaliação da dívida e do risco de crédito das empresas.

## 2 Pricing Corporate Debt and Credit Risk under the CEV Model

### 2.1 O Modelo CEV Como Alternativa ao Modelo de Black-Scholes/Merton

Na essência, entre o modelo de *Black-Scholes/Merton* e o modelo de *Constant Elasticity of Variance (CEV)*, de *Cox (1975)*, reside, como se disse, a diferença na perspectiva da volatilidade, assumindo aquele uma volatilidade constante do preço do activo, independentemente do nível do preço da *security*, enquanto que no modelo *CEV* a variância dos preços muda do mesmo modo que mudam os preços dos activos. Este modelo considera, portanto, a possibilidade de a volatilidade do activo subjacente, dependendo das variações de preço do próprio activo subjacente, estar relacionada com o nível de preço da sua opção, exibindo um efeito “sorriso” de volatilidade implícita (*implied volatility smile, ou implied volatility skew*) semelhante às curvas de “sorriso” de volatilidade observadas na prática (figs. 4, 5 e 6, para Betas iguais a -2, 4 e 2, respectivamente), conforme, por exemplo *Dennis e Mayhew (2002)*. As funções *CEV* determinam o preço teórico, a sensibilidade e a volatilidade implícita<sup>7</sup> das opções, utilizando a técnica de avaliação baseada no modelo de *pricing* das opções e da elasticidade constante da variância.

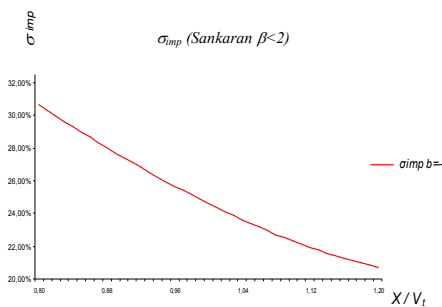


Fig. 4

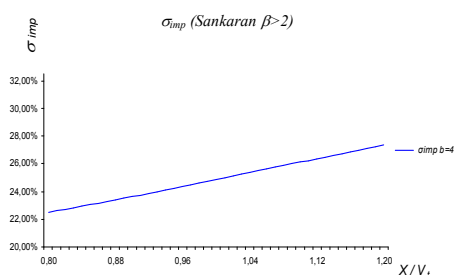


Fig. 5

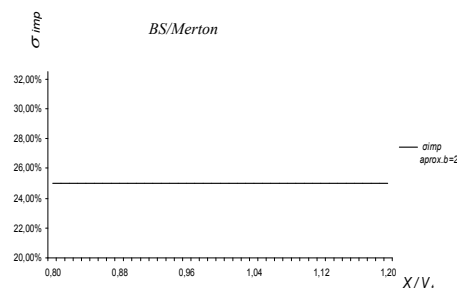


Fig. 6

(Conforme Tabelas 6 e 7 dos Anexos.)

### 2.2 The Constant Elasticity of Variance (CEV) Model

#### 2.2.1 A Configuração Geral do Modelo

A avaliação de opções europeias é explorada no contexto de uma economia intertemporal estocástica com transacções contínuas no intervalo de tempo  $[t, T]$ , para um tempo  $T > t$ , e onde a incerteza está representada por um espaço completo de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ , onde  $\Omega$  representa o conjunto de todos os eventos possíveis (associados a uma experiência aleatória), designado por *state space*, neste caso relacionado com o conjunto de valores futuros susceptíveis de assumir o activo subjacente;  $\mathcal{F}$ , o conjunto de todos os eventos aos quais pode ser associada uma probabilidade de ocorrência (0 ou 1) composta por elementos de informação designados por *measurable sets*. Por exemplo, no momento  $t$ ,  $\mathcal{F}_t$  representa a

<sup>7</sup> Volatilidade estimada pelo mercado, resultante dos preços das opções negociadas no mercado de derivados



*filtration*, onde cabe toda a informação disponível gerada pela observação de um processo estocástico  $(S_t)_{t \geq 0}$ , traduzindo a informação gerada pela trajectória do processo  $S$  no intervalo de tempo  $[0, t]$ . Nesta altura, em *time*  $t$ ,  $S_t$  deixa de ser uma variável aleatória, uma vez que passa a ser conhecido o conjunto de informação  $\mathcal{F}_t$  e, finalmente,  $Q$ , que representa a *martingale probability measure*<sup>8</sup> ou medida de probabilidade *martingale* obtida quando o preço descontado de qualquer activo subjacente, expresso em unidades de numerário, é considerado como uma *money market account*,  $B_t$ , cuja dinâmica é governada pela seguinte *ODE* (*Ordinary Differential Equation*):

$$dB_t = r B_t dt \quad (2.32)$$

em que  $r \geq 0$  significa a taxa instantânea de juro sem risco, assumida como constante, e  $B_t$  o saldo da *money market account* (*cash bond*) no momento  $t$ . Esta conta paga juros a uma taxa de juro constante,  $r$ , em regime de capitalização contínua (assumindo que não existe incerteza associada à taxa de juro), representando o preço do activo subjacente e o valor temporal do dinheiro. Assim, no período  $T$  ( $t + \Delta t$ ), a conta irá ter um saldo de  $B_T = B_t e^{r\Delta t}$ . Alternativamente, a *money market account* também pode ser interpretada como correspondendo a uma obrigação *zero coupon* com valor actual igual a  $B_t$  e valor de reembolso igual a  $B_T$ .

O preço dos activos pode assim ser modelado segundo o seguinte processo de difusão uni-dimensional:

$$dV_t / V_t = (r - q) dt + \sigma(t, V) dW_t^Q \quad (2.33)$$

Sendo  $r \geq 0$  a taxa instantânea de juro sem risco, assumida como constante,  $q \geq 0$  a *dividend yield* para o preço do activo,  $\sigma(t, V)$  a volatilidade instantânea na unidade de tempo das rendibilidades do activo e  $W_t^Q \in \mathbb{R}$ , o *standard Brownian motion* em  $Q$ .

Além disto, uma atenção especial é dedicada ao processo *constant elasticity of variance*, que é descrito pela seguinte *SDE* (*stochastic differential equation*):

$$dV_t = (r - q) V_t dt + \delta V_t^{\beta/2} dW_t^Q \quad (2.34)$$

Cuja função de volatilidade local é dada por:

<sup>8</sup> A *martingale measure*  $Q$  é a medida de probabilidade equivalente à medida original  $P$  (*physical measure*), tal que o preço descontado de qualquer activo (ou seja, o preço expresso em unidades do numerário *money market account*) é um  $Q$ -*martingale*, isto é, para  $T \geq t$  e considerando um qualquer activo financeiro  $X$ :

$$X_t / B_t = E_Q(X_T / B_T | \mathcal{F}_t)$$

Assumindo taxas de juro contínuas,  $B_T = B_t e^{r(T-t)}$ , podendo, portanto, a equação de cima ser escrita como:

$$E_Q(X_T | \mathcal{F}_t) = X_t e^{r(T-t)},$$

ou seja, a *risk neutral measure*  $Q$  pressupõe a valorização de qualquer activo financeiro à taxa de juro sem risco.

$$\sigma(t, V) = \delta V_t^{\beta/2-1}, \quad \text{para } \delta \text{ e } \beta \in \mathbb{R} \quad (2.35)$$

Mantém-se assim todos os pressupostos do modelo de avaliação de opções *Black-Scholes/Merton*, excepto no ponto em que o processo estocástico do preço das acções é generalizado a um processo de difusão *CEV*. Este processo tem a flexibilidade de, não só permitir mudar a volatilidade, como também preservar a propriedade dos valores não-negativos do estado da variável subjacente, conforme a difusão lognormal usada no modelo *Black-Scholes/Merton*. Como é normal, a classe de processos de difusão *CEV*, pode ser descrita, na medida física  $P$ , pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$dV_t = \mu V_t dt + \delta V_t^{\beta/2} dW_t^P \quad (2.36)$$

em que  $\mu$  representa a taxa composta continuamente, de rendibilidade esperada dos activos da firma e  $W_t^P$ ,  $\in \mathbb{R}$ , o *standard Brownian motion* sob  $P$ .

A especificação *CEV*, sugerida pela equação (2.36), conjuga a assunção lognormal de *Black-Scholes/Merton* ( $\beta=2$ ), bem como a difusão absoluta ( $\beta=0$ ) e os modelos de difusão raiz quadrada ( $\beta=1$ ) de *Cox e Ross (1976)*, como casos especiais. A volatilidade local, dada pela equação (2.35), é uma função decrescente do preço do activo para  $\beta < 2$  e crescente para  $\beta > 2$ . Nos casos em que  $\beta=2$  o preço da acção não tem influência na volatilidade, sendo esta uma constante ( $\sigma(t, V) = \delta$ ) ao longo do tempo, independentemente do preço da acção.

A elasticidade da variância da rendibilidade, relativamente ao preço, é igual a  $\beta-2$ , uma vez que:

$$d\sigma(V, t) / \sigma(V, t) = (\beta-2) dV / V, \quad \text{onde} \quad (2.37)$$

$$\sigma^2(V, t) = \delta^2 V_t^{\beta-2} \quad (2.38)$$

é a variância instantânea da rendibilidade do activo.

Uma vez que a volatilidade é proporcional ao expoente do preço do activo subjacente, a elasticidade da variância é independente do preço da acção. Se  $\beta=2$ , a elasticidade é zero, implicando portanto que os preços das acções sejam *lognormalmente* distribuídos e a variância das rendibilidades constante, conforme assumido na estrutura *Black-Scholes (1973)* e *Merton (1973)*. O parâmetro  $\delta$  do modelo, pode ser interpretado como o parâmetro de escala, fixando a volatilidade instantânea inicial,  $t = t_0$ ,  $\sigma_0 = \sigma(t_0, V_{t_0}) = \delta V_{t_0}^{\beta/2-1}$ .

Originalmente, *Cox (1975)*, estudou o caso  $\beta < 2$  e *Emanuel e MacBeth (1982)* estenderam a análise a  $\beta > 2$ . *Cox*, restringiu o parâmetro  $\beta$  ao intervalo  $0 \leq \beta \leq 2$ . No entanto, *MacBeth e Merville (1980)* descobriram que  $\beta$  é geralmente menor que dois mas pode ser negativo e, *Jackwerth e Rubinstein (2001)* documentaram que, no *post crash* de 1987, típicos valores de  $\beta$ , implícitos no índice S&P 500 de preços

das opções sobre acções, são tão baixos como  $\beta = -6$  e designaram o modelo, com  $\beta < 0$ , como o *CEV* não restrito (*unrestricted CEV*).

Para difusões de *CEV* com  $\beta < 2$ , a variância da taxa de rendibilidade irá variar inversamente com o preço da acção, ou *moneyiness*,  $X / V_t$  (duas últimas colunas da tabela 6, anexa), uma característica que tem sido notada como uma empírica regularidade dos preços da acção (veja-se, por exemplo, *Black* (1975), *MacBeth e Merville* (1979) e *Jackwerth e Rubinstein* (2001)).

Valores de parâmetros para  $\beta < 2$  também podem ser esperados para opções de índices de acções, enquanto que, para  $\beta > 2$ , são típicos de algumas opções com futuros de *commodities* subjacentes e *upward sloping implied volatility smiles*. As figuras 4 e 5, mostram uma típica *volatility smile* descrevendo uma volatilidade implícita cuja função do preço de exercício é largamente convexa, monotonamente decrescente para  $\beta < 2$  e crescente para  $\beta > 2$  (*vide* representação gráfica das duas últimas colunas das Tabelas 6 e 7).

### 2.2.2 A Difusão *CEV* e a sua Função de Densidade de Probabilidade

Nos pressupostos dos modelos de avaliação das opções em ambiente de risco neutro, o preço de uma opção deverá ser igual ao desconto do seu retorno esperado na medida neutra ao risco, sendo necessário calcular esta expectativa integrando a função de retorno sobre uma função de densidade igualmente neutra ao risco. A questão reside na necessidade de saber qual a medida de densidade a utilizar. Na estrutura *Black-Scholes/Merton*, a densidade de risco neutro é log-normal, no entanto, esta previsão tem sido consistentemente rejeitada na literatura financeira sendo, portanto, necessário encontrar uma distribuição de retorno das acções mais consentânea com o facto dessa taxa de retorno e da sua volatilidade dependerem das próprias acções. A difusão *CEV*, onde a volatilidade é uma função dos preços da acção subjacente, gera uma família de distribuições para cada propósito. Sob uma difusão *CEV*, equação (2.36) e para  $\beta = 2$ , a transição de densidade de probabilidade é dada pelo *GBM*. No entanto, para  $\beta \neq 2$ , a densidade de transição é muito mais complexa, distinguindo-se os casos em que  $\beta < 2$  (*Cox*, 1975, baseado na teoria de *William Feller*, 1951) e  $\beta > 2$  (*Emanuel e MacBeth*, 1982, *Chen e Lee*, 1993).

Para  $\beta < 2$ , sob um processo de difusão *CEV*, *Cox* (1975) propõe a seguinte função densidade de probabilidade de transição:

$$f(V_T, T; V_t, t) = (2-\beta) k^{1/(2-\beta)} (xz)^{1-2\beta} e^{-xz} I_{(1/2-\beta)}(2(xz)^{1/2}) \quad (2.39)$$

em que:

$$k = 2(r-q) / \sigma^2 (2-\beta) [e^{(r-q)(2-\beta)(T-t)} - 1], \quad (2.40)$$

$$x = k V_t^{2-\beta} e^{(r-q)(2-\beta)(T-t)}, \quad (2.41)$$

$$z = k V_T^{2-\beta}, \quad (2.42)$$

e  $I_q(\cdot)$  a função de Bessel modificada do primeiro tipo de ordem  $q$ , como definido por Abramowitz e Stegun (1972, equação 9.6.10).

Para  $\beta > 2$ , o processo tem, segundo Emanuel e MacBeth (1982), igualmente fundamentado na teoria de Feller (1951), a seguinte função densidade de probabilidade de transição:

$$f(V_T, T; V_t, t) = (\beta - 2) k^{1/(2-\beta)} (xz^{1-2\beta})^{1/(4-2\beta)} e^{-xz} I_{(1/\beta-2)}(2(xz)^{1/2}), \quad (2.43)$$

com  $k, x, z$  e  $I_q(\cdot)$  conforme definidos anteriormente.

Cox (1975), para  $\beta < 2$  e Emanuel e MacBeth (1982), para  $\beta > 2$ , expressaram inicialmente o formulário CEV de opções *call* para a avaliação das opções ao estilo europeu, em termos da função de distribuição gamma complementar *standard*. Duma maneira geral, o activo subjacente resultante duma *call* ao estilo europeu, com *dividend yield*, numa perspectiva do processo de difusão CEV, também pode ser visto como uma acção, um índice de acções, uma taxa de câmbio, um contrato financeiro de futuros, ou taxa de juros sem risco, estrangeira ou doméstica, de outros instrumentos financeiros possíveis.

### 2.2.3 O Valor do Capital Próprio e da Dívida

Com base nestas funções densidade de probabilidade, Schroder (1989) contribuiu, na formulação da avaliação de opções sob difusão CEV, com a aplicação da função de distribuição cumulativa da distribuição qui-quadrado não central  $Q(\omega; \nu, \lambda)$  para resolver a equação da opção de uma *call* europeia, expressa em termos daquela função. As seguintes igualdades fornecem, para o caso de  $\beta < 2$  e  $\beta > 2$ , as fórmulas CEV de avaliação de opções traduzindo, sob a difusão CEV (2.39) e para  $\beta < 2$ , o preço da opção *call* europeia ( $q \geq 0$ ):

$$c_t = E_t = E_t^Q [e^{-r(T-t)} (V_T - X)^+] = V_t e^{-q(T-t)} Q(2y; 2+2/(2-\beta), 2x) - X e^{-r(T-t)} [1 - Q(2x; 2/(2-\beta), 2y)], \quad (2.44)$$

em que  $y = k X^{2-\beta}$ ,  $k$  e  $x$  conforme (2.40) e (2.41) e  $Q(\omega; \nu, \lambda)$  definindo a referida função de distribuição complementar não central do qui-quadrado, avaliada em  $\omega$ , com  $\nu$  graus de liberdade e  $\lambda$  como parâmetro de não centralidade.

Para  $\beta > 2$ , sob a difusão CEV (2.43), o preço da opção *call* europeia é:

$$c_t = E_t = E_t^Q [e^{-r(T-t)} (V_T - X)^+] = V_t e^{-q(T-t)} Q(2x; 2/(\beta-2), 2y) - X e^{-r(T-t)} [1 - Q(2y; 2+2/(\beta-2), 2x)] \quad (2.45)$$

Recordando de novo a igualdade entre os valores de mercado do capital próprio ( $E$ ) e da dívida ( $D$ ), em  $t$  (1.10), para  $\beta < 2$  e  $\beta > 2$ , respectivamente:

$$D_t = V_t \{1 - e^{-q(T-t)} Q(2y; 2+2/(2-\beta), 2x) - X e^{-r(T-t)} [1-Q(2x; 2/(2-\beta), 2y)]\} \quad (2.46)$$

e,

$$D_t = V_t \{1 - e^{-q(T-t)} Q(2x; 2/(\beta-2), 2y) - X e^{-r(T-t)} [1-Q(2y; 2+2/(\beta-2), 2x)]\} \quad (2.47)$$

Pela paridade *put-call*, o valor da *put*, é:

$$p_t = X e^{-r(T-t)} Q(2x; 2/(2-\beta), 2y) - V_t e^{-q(T-t)} [1-Q(2y; 2+2/(2-\beta), 2x)] \quad , \quad \beta < 2 \quad (2.48)$$

$$p_t = X e^{-r(T-t)} Q(2y; 2+2/(\beta-2), 2x) - V_t e^{-q(T-t)} [1-Q(2x; 2/(\beta-2), 2y)] \quad , \quad \beta > 2 \quad (2.49)$$

### 2.2.4 O Credit Spread

Na sequência da secção 1.6 do capítulo anterior e das equações (1.30), (1.31), (2.46) e (2.47) é a seguinte a formulação do *credit spread* na perspectiva do CEV:

$$s_\tau = ((-\ln\{V_t \{1 - e^{-q(T-t)} Q(2y; 2+2/(2-\beta), 2x) - X e^{-r(T-t)} [1-Q(2x; 2/(2-\beta), 2y)]\}\}/X)/\tau) - r, \quad \beta < 2 \quad (2.50)$$

e

$$s_\tau = ((-\ln\{V_t \{1 - e^{-q(T-t)} Q(2x; 2/(\beta-2), 2y) - X e^{-r(T-t)} [1-Q(2y; 2+2/(\beta-2), 2x)]\}\}/X)/\tau) - r, \quad \beta > 2 \quad (2.51)$$

Nas tabelas 4 e 6 encontram-se, para as diferentes variáveis de *input*, a simulação dos *spreads* de crédito nos modelos de Merton e CEV, com as aproximações analíticas de Sankaran (1963), Fraser *et al.* (1998) e Penev e Raykov (2000).

### 2.2.5 Aproximação Analítica

No modelo CEV, para se chegar ao preço das opções, recorre-se necessariamente a um poderoso instrumento de cálculo estatístico, a conhecida função de distribuição não central do qui-quadrado, existindo na literatura diversas formas de abordagem alternativas ao cálculo desta função de distribuição (veja-se, entre outros, Schroder (1989), Ding (1992), Knüsel e Bablok (1996), Benton e Krishnamoorthy (2003) ou Dyrting (2004)) incluindo, por exemplo, a metodologia baseada nas séries de funções *gamma* incompletas.

A função de distribuição cumulativa chi-quadrado não central,  $F(\omega; \nu, \lambda)$  e a sua função complementar,  $Q(\omega; \nu, \lambda)$ , é normalmente expressa como uma infinita soma ponderada de funções de distribuição cumulativas chi-quadrado central, aproximando-se, para efeitos de avaliação numérica, a uma soma finita. Para amplos valores dos parâmetros de não centralidade a soma converge lentamente, tendo sido

proposto, na literatura, um número de aproximações analíticas com a finalidade de superar esse problema. Estas aproximações analíticas remetem o argumento  $\omega$  e os parâmetros  $\nu$  e  $\lambda$  para uma nova variável,  $z$ , que é aproximadamente de distribuição normal, sendo dado que:

$$F(\omega; \nu, \lambda) = 1 - Q(\omega; \nu, \lambda) \text{ e, portanto,}$$

$$F(\omega; \nu, \lambda) = N(z) \text{ e } Q(\omega; \nu, \lambda) = N(-z), \quad (2.52)$$

com  $N(z)$  correspondente à distribuição *standard* normal. Diversas aproximações têm sido propostas por vários autores, recomendando Schroder (1989), por exemplo, a de Sankaran (1963), que estabelece a seguinte relação para a variável  $z$ :

$$z = - \frac{1 - hp (1 - h + (2 - h) mp/2) - (\omega/(\nu + \lambda))^h}{h [2p (1 + mp)]^{1/2}} \quad (2.53)$$

em que:

$$h = 1 - 2/3 \frac{(\nu + \lambda) (\nu + 3\lambda)}{(\nu + 2\lambda)^2}; \quad (2.54)$$

$$p = \frac{\nu + 2\lambda}{(\nu + \lambda)^2}; \quad (2.55)$$

$$m = (h - 1) (1 - 3h). \quad (2.56)$$

Fraser e outros (1998) propõem uma metodologia de aproximação analítica à distribuição não central do qui-quadrado, baseada nos métodos assintóticos de terceira ordem, com um formulário bastante mais simplificado:

$$z = \mu - s - \frac{\nu - 1}{2} x \frac{\ln(\mu) - \ln(s)}{\mu - s}, \quad (2.57)$$

com  $s = \lambda^{0,5}$  e  $\mu = \omega^{0,5}$ .

Finalmente Penev e Raykov (2000), propõem o seguinte modelo de aproximação analítica:

$$z = \text{sign}(s - 1) \left[ \nu(s - 1)^2 (1/2s + \mu^2 - h(1 - s)) - \ln(1/s - \frac{2h(1 - s)}{s(1 + 2\mu^2 s)}) + \frac{2B(s)}{\nu} \right]^{1/2} \quad (2.58)$$

onde:

$$\mu^2 = \lambda/\nu \quad (2.59)$$

$$h(s) = \frac{(1-s) \ln(1-s) + s - 0,5s^2}{s^2} \quad (2.60)$$

$$B(s) = \frac{-3}{2} \frac{1 + 4\mu^2 s}{(1 + 2\mu^2 s)^2} + \frac{5}{3} \frac{(1 + 3\mu^2 s)^2}{(1 + 2\mu^2 s)^3} + \frac{2(1 + 3\mu^2 s)}{(s-1)(1 + 2\mu^2 s)^2} + \frac{3\eta}{(s-1)^2(1 + 2\mu^2 s)} - \frac{(1 + 2h(\eta))\eta^2}{2(s-1)^2(1 + 2\mu^2 s)} \quad (2.61)$$

$$\eta = \frac{1 + 2\mu^2 s - 2h(1-s) - s - 2\mu^2 s^2}{1 + 2\mu^2 s - 2h(1-s)} \quad (2.62)$$

$$s = \frac{(1 + 4\omega\mu^2/v)^{1/2} - 1}{2\mu^2} \quad (2.63)$$

Penev e Raykov (2000), desenvolveram também uma aproximação mais simples, referida como aproximação melhorada de primeira ordem Wiener Germ, dada por:

$$z = \text{sign}(s-1) \left[ v(s-1)^2 \left[ \frac{1 + \mu^2 - h(1-s)}{2s} - \frac{h(1-s)}{s} \right] - \ln \left[ \frac{1 - 2h(1-s)}{s} \frac{1 + 2\mu^2 s}{s(1 + 2\mu^2 s)} + \frac{2(1 + 3\mu^2)^2}{9v(1 + 2\mu^2)^3} \right] \right]^{1/2} \quad (2.64)$$

Em situações de pequeno número de graus de liberdade, segundo Penev e Raykov (2000), a igualdade (2.58), deve ser mais rigorosa, embora os seus resultados numéricos sugiram diferenças importantes no desempenho de ambas as aproximações analíticas, sendo que, em geral a equação (2.64), apresenta resultados ligeiramente piores nas *tails*, embora às vezes dê ainda melhores resultados em redor do centro. É preferível usar a primeira fórmula (2.58), apesar de um pouco mais complexa embora, alternativamente, também se admitam poder utilizar a média das duas aproximações.

### 3 Análise Numérica

No modelo CEV, dependente da função de distribuição qui-quadrado não central,  $F(\omega;v,\lambda)$ , a fórmula da *put* europeia pode ser também obtida na expectativa de  $p_T = \text{Max}[X - V_T, 0]$  ou, descontada no momento  $t$ ,  $p_t = E_t^Q[e^{-r\tau} (X - V_T)^+]$ , ou ainda pela imposição da paridade *put-call*. Por outro lado, a análise aos dados revela que, para valores de  $\beta < 2$ , a volatilidade  $\sigma(V,t)$  aumenta à medida que o preço das acções diminui, e vice-versa para  $\beta > 2$  (como já referido, nos quadros anexos, através da redução da *moneyness*, relação  $X/V_t$ ). Quando  $\beta < 2$ , o modelo Black-Scholes/Merton, com a volatilidade dinâmica

de (2.35), mostra *calls* acima do preço de mercado<sup>9</sup> para as opções *out-of-the-money* e abaixo do preço de mercado para as opções *in-the-money*, rendendo idêntico preço de mercado para as opções *at-the-money*, conforme valores do seguinte exemplo, confrontados com o modelo CEV e as referidas metodologias de aproximação analítica de Sankaran (1963), Fraser *et al.* (1998) e Penev & Raykov (2000), gerados para  $\sigma = 25\%$ ,  $\tau = 0,5$ ,  $r = 10\%$ ,  $q = 0$ ,  $\beta = 1$  e  $\beta = 3$ :

Quadro 1

$(\beta = 1)$	$X$	$V_t$	$Call_{BS}$	$Call_{CEV_{Sankaran}}$	$Call_{CEV_{Penev \& Raykov}}$	$Call_{CEV_{Fraser}}$
<i>In-the-money</i>	95	100	12,588	12,659	12,663	12,655
<i>At-the-money</i>	100	100	9,582	9,578	9,585	9,576
<i>Out-of-the-money</i>	105	100	7,100	7,010	7,014	7,008
$(\beta = 3)$						
<i>In-the-money</i>	95	100	12,588	12,513	12,517	12,517
<i>At-the-money</i>	100	100	9,582	9,577	9,585	9,576
<i>Out-of-the-money</i>	105	100	7,100	7,010	7,181	7,179

(para maiores detalhes veja-se os simuladores das Tabelas 6, 7 e 8 dos Anexos).

Verifica-se assim uma profunda diferença dos valores das *calls* entre os modelos B-S/Merton e CEV, acentuando-se a diferença com o aumento da elasticidade  $e$ , portanto, num suposto mundo de elasticidade constante da variância, o modelo de avaliação das opções *call*, com base no CEV, gera preços que são melhores que os preços Black-Scholes/Merton, destacando-se dois motivos essenciais:

- 1º. O modelo CEV corrige os erros de previsão das opções *out-of-the-money* e *in-the-money*;
- 2º. O modelo CEV prevê mudanças na volatilidade que são consistentes com o “sorriso” de volatilidade observado na prática.

A evidência empírica no modelo CEV resulta de uma generalizada aceitação, existente na literatura económica, que é dada pela visão prática da existência de uma grande volatilidade na variância das rendibilidades das acções, com variações constantes observadas diariamente. O relacionamento inverso entre a variância das rendibilidades dos títulos e o seu preço de mercado pode ser modelizado usando um processo de difusão CEV, na medida em que este modelo indica rigorosamente como a taxa da variância se altera relativamente a uma dada variação no preço da acção. Se a taxa da variância se altera com as variações dos preços das acções, o modelo irá exigir um constante ajustamento *ad hoc* no valor de  $\sigma^2(V,t)$  empregado na fórmula Black-Scholes/Merton. Por outro lado, também o modelo CEV se

<sup>9</sup> Considera-se “preço de mercado” o *benchmark* dos valores encontrados na metodologia do CEV baseados na função de distribuição qui-quadrado não central,  $F(\omega;v,\lambda)$  e na sua função complementar,  $Q(\omega;v,\lambda)$ , expressa numa série *gamma*, conforme à frente se refere e de que as formulações de Sankaran (1963), Fraser *et al.* (1998) e Penev & Raykov (2000) constituem exemplos de aproximação analítica.



ajusta automaticamente às alterações na taxa da variância, nomeadamente considerando dois parâmetros,  $\beta$  e  $\delta$ , preferencialmente estimados ao isolado  $\sigma$  (2.38).

As especificações CEV, dadas pela equação (2.34), estendem várias alternativas dos processos de difusão como casos especiais. Repare-se que, para  $\beta = 2$ , obtém-se a assunção log-normal do modelo Black-Scholes/Merton, observado no capítulo 1, verificando-se uma relação de preços acentuadamente diferenciada para  $\beta \neq 2$ .

Em observação a estas abordagens, com base nos *inputs* dos *Quadros 1b* e *1c*, retirados dos simuladores das *tabelas 4, 6, 7 e 8* dos Anexos, conferimos os seguintes valores de aproximação ao risco de crédito das empresas, derivados das fórmulas (1.10), (1.13), (1.26), (1.27) e (1.31) de B-S/Merton, e do processo de difusão CEV, nomeadamente, (2.44), (2.45), (2.46), (2.47), (2.48), (2.49), (2.50) e (2.51), com as aproximações analíticas à variável  $z$  (aproximadamente de distribuição normal), sugeridas por Sankaran (1963), em (2.53), (2.54), (2.55) e (2.56), por Fraser *et al.* (1998) em (2.57) e Penev e Raykov (2000) em (2.58), (2.59), (2.60), (2.61), (2.62), (2.63) e (2.64), para  $\beta = 1$  e  $\beta = 3$ :

### Quadro 1b

$\sigma(V_t)$	$r$	$q$	$\tau$	$V_t$	$X$	B-S/Merton		CEV <sub>Sankaran(63)</sub>	CEV <sub>Fraser(98)</sub>	CEV <sub>P &amp; R(00)</sub>	Gamma Series
0,25	0,1	0	0,5	100	95	$E_t(c_t)$	12,5880378	12,65929281	12,65533409	12,66298336	12,6629
						$p_t$	2,95483316	3,026088136	3,022129417	3,029778688	3,0296953
						$D_t$	87,4119622	87,34070719	87,34466591	87,33701664	87,3371000
						$X_t$	90,3667953	90,36679533	90,36679533	90,36679533	90,36679533
						$s_t$	6,64895%	6,81205%	6,80298%	6,82050%	6,8203095%
				100	100	$E_t(c_t)$	9,58223506	9,578410821	9,576033895	9,584727741	9,5845
						$p_t$	4,70517751	4,701353271	4,698976345	4,707670191	4,7074425
						$D_t$	90,4177649	90,42158918	90,42396611	90,41527226	90,4155000
						$X_t$	95,1229425	95,12294245	95,12294245	95,12294245	95,12294245
						$s_t$	10,14588%	10,13743%	10,13217%	10,15140%	10,1508946%
				100	105	$E_t(c_t)$	7,09955942	7,009633301	7,00819758	7,013730682	7,0170
						$p_t$	6,978649	6,888722873	6,887287152	6,892820254	6,8960896
						$D_t$	92,9004406	92,9903667	92,99180242	92,98626932	92,9830000
						$X_t$	99,8790896	99,87908957	99,87908957	99,87908957	99,87908957
						$s_t$	14,48639%	14,29289%	14,28980%	14,30170%	14,3087339%
$\beta$						-	1	1	1	1	1

**Quadro 1c**

$\sigma(V_t)$	$r$	$q$	$\tau$	$V_t$	$X$	B-S/Merton	CEV <sub>Sankaran(63)</sub>	CEV <sub>Fraser(98)</sub>	CEV <sub>P &amp; R(00)</sub>	CEV <sub>Gamma Series</sub>	
0,25	0,1	0	0,5	100	95	$E_t(c_t)$	12,5880378	12,51276356	12,51028703	12,51749811	12,5174
						$p_t$	2,95483316	2,879558891	2,877082356	2,884293434	2,8841953
						$D_t$	87,4119622	87,48723644	87,48971297	87,48250189	87,4826000
						$X_t$	90,3667953	90,36679533	90,36679533	90,36679533	90,36679533
						$s_t$	6,64895%	6,47680%	6,47113%	6,48762%	6,4873950%
				100	100	$E_t(c_t)$	9,58223506	9,577496426	9,575926805	9,584892284	9,5845
						$p_t$	4,70517751	4,700438876	4,698869256	4,707834734	4,7074425
						$D_t$	90,4177649	90,42250357	90,42407319	90,41510772	90,4155000
						$X_t$	95,1229425	95,12294245	95,12294245	95,12294245	95,12294245
						$s_t$	10,14588%	10,13540%	10,13193%	10,15176%	10,1508946%
				100	105	$E_t(c_t)$	7,09955942	7,180566172	7,178972303	7,185601452	7,1884
						$p_t$	6,978649	7,059655744	7,058061876	7,064691025	7,0674896
						$D_t$	92,9004406	92,81943383	92,8210277	92,81439855	92,8116000
						$X_t$	99,8790896	99,87908957	99,87908957	99,87908957	99,87908957
						$s_t$	14,48639%	14,66086%	14,65743%	14,67171%	14,6777436%
$\beta$						-	3	3	3	3	

As diferenças de preços, quer para  $\beta < 2$  quer para  $\beta > 2$ , podem ser melhor comparadas nas seguintes representações gráficas:

**In-the-money call option prices ( $\beta=1$ )**

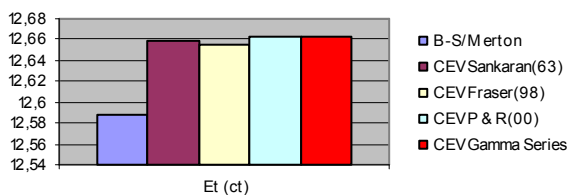


Fig. 7

**At-the-money call option prices ( $\beta=1$ )**

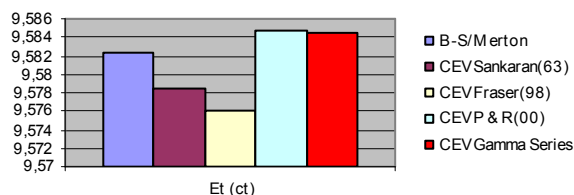


Fig. 8

**Out-of-the-money call option prices ( $\beta=1$ )**

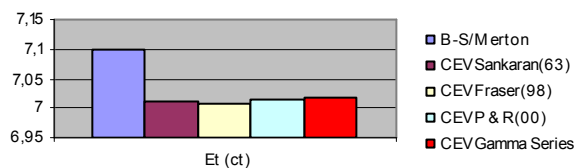


Fig. 9

**In-the-money call option prices ( $\beta=3$ )**

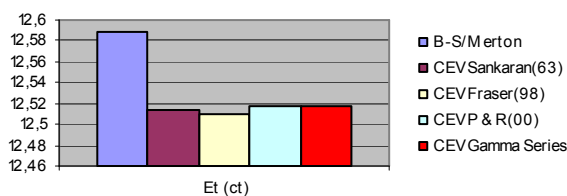


Fig. 10

**At-the-money call option prices ( $\beta=3$ )**

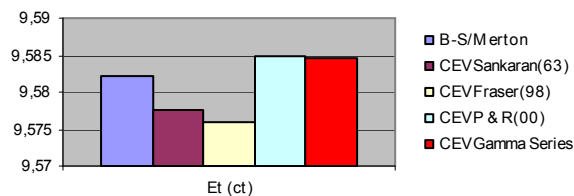


Fig. 11

**Out-of-the-money call option prices  
 ( $\beta=3$ )**

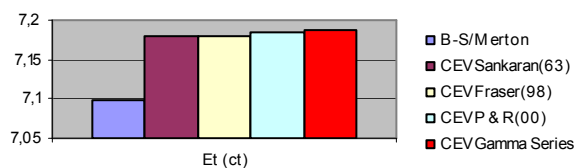


Fig. 12

Também a *yield spread* apresenta comportamentos diferentes, quer em função de variações nos preços de exercício quer na maturidade da dívida. Para  $\beta = 3$ , por exemplo, os *spreads* de crédito são mais elevados nas maturidades curtas e na região *in-the-money* e menos elevados nas maturidades longas e na região *out-of-the-money* no modelo B-S/Merton relativamente ao modelo CEV, especialmente na aproximação analítica de Penev e Raykov (fig.13).

**Option yield spreads ( $\beta = 3$ )**

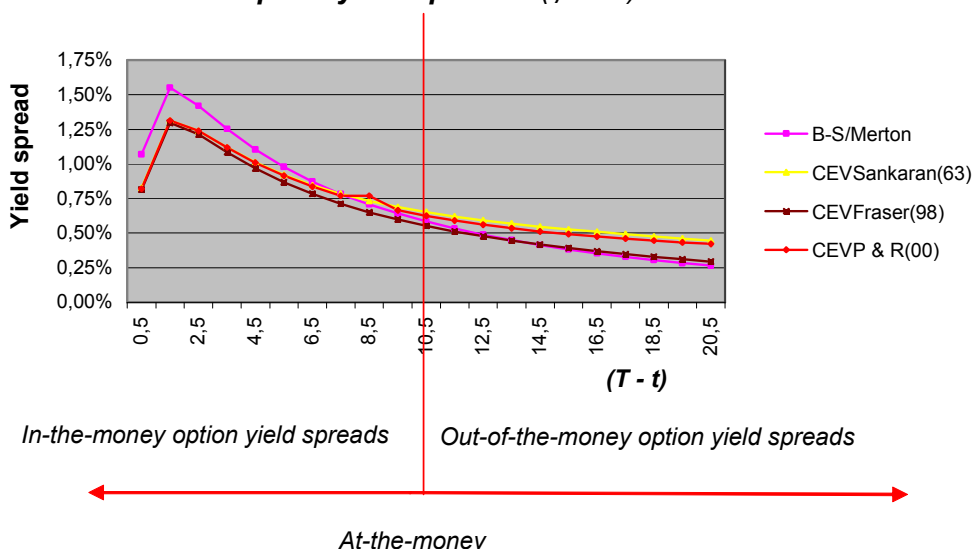
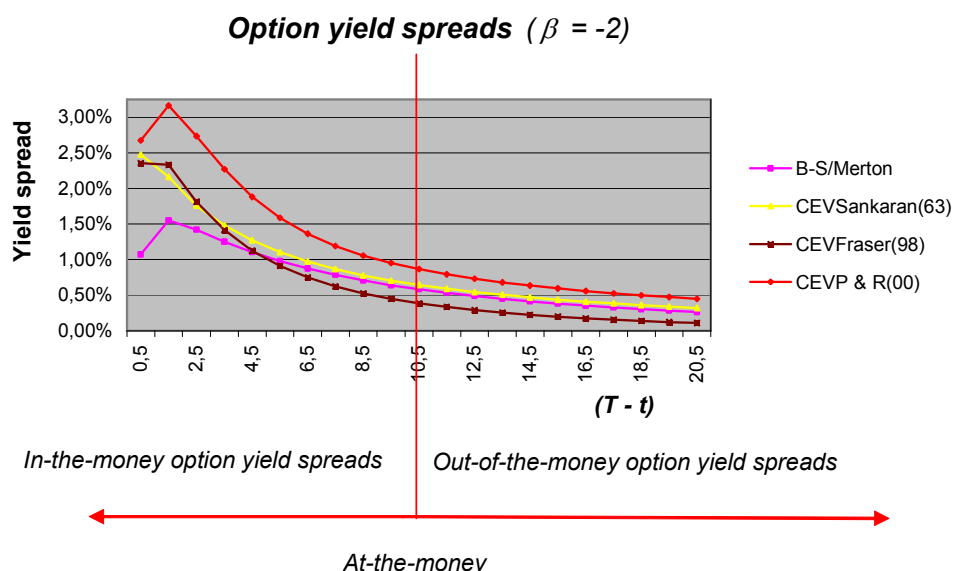


Fig. 13

Para  $\beta = -2$ , as diferenças são mais acentuadas, invertendo-se a relação dos preços, quer relativamente aos valores do modelo B-S/Merton, devido à indiferença da dinâmica de beta, cuja trajectória de valores se mantém constante, quer nas três metodologias abordadas do CEV, destacando-se os extremos de *timing* e limites de preços de exercício, com especial relevância nas regiões *in-the-money*, observando-se maior convergência de valores ao centro, para  $\beta = 3$  e no maior pico da região *out-of-the-money* ( $\tau = 20,5$  anos;  $Vt = 100$  e  $X = 120$ ) para  $\beta = -2$  (fig. 14).



Outra referência significativamente diferencia *Fig. 14* seada na volatilidade implícita (ponto 1.2.1) e que parece questionar o nível de precisão da aproximação analítica de Penev e Raykov comparativamente com o referido *benchmark* de mercado face aos preços das opções e volatilidade (relativamente ao modelo B-S), prende-se pela observação de alguma turbulência em zonas da região *at-the-money* e do limiar *out-of-the-money*<sup>10</sup>, variando conforme os betas (para  $\beta = 3$ :  $X = 100$  e  $104$ ;  $\beta = 1$ :  $X = 101$  e  $105$ ;  $\beta = 0$ :  $X = 101, 102, 106$  e  $107$ ;  $\beta = -2$ :  $X = 101, 102, 103, 108$  e  $109$ ), contrastando, visivelmente nas *figs. 15 a 18*, com o comportamento linear dos preços de Sankaran e Fraser *et al.*, com a *décalage* máxima em  $\beta = -2$  (exemplo da *Tabela 6* e *das folhas de cálculo anexas*).

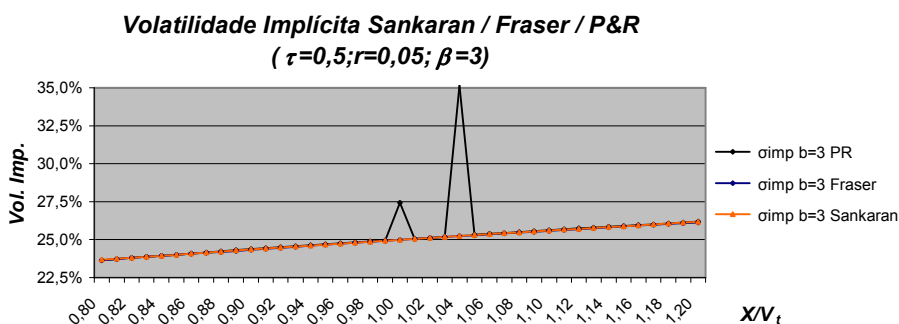


Fig. 15

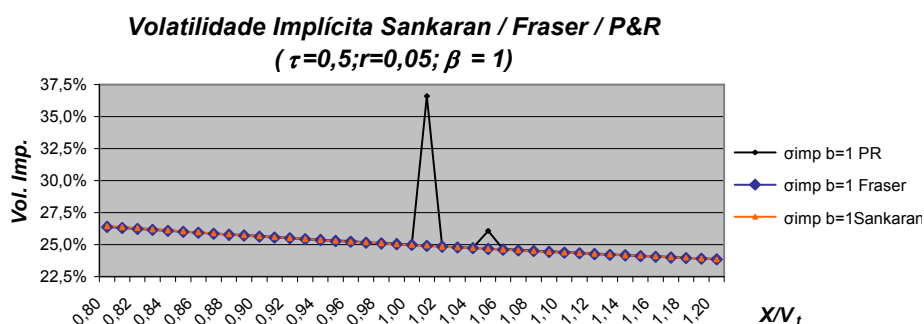


Fig. 16

<sup>10</sup> Valores determinados em folha de cálculo Excel com base nos referidos formulário B-S/Merton, CEV e as aproximações analíticas de Sankaran, Fraser *et al.* e Penev & Raykov, utilizando a conhecida função “DIST. NORMP” e as ferramentas de iteração “SOLVER” ou “GOAL SEEK”.

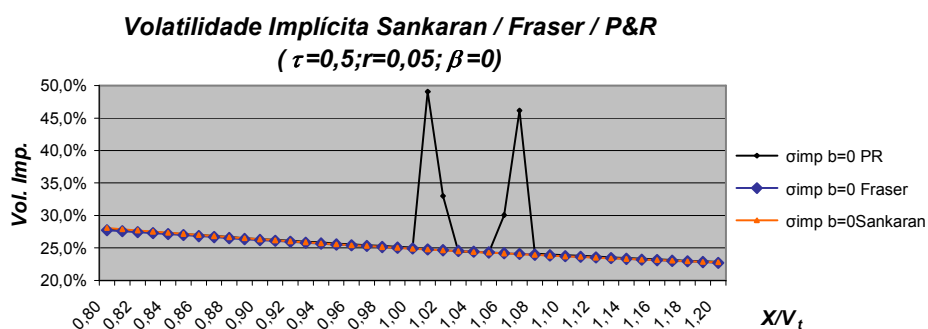


Fig. 17

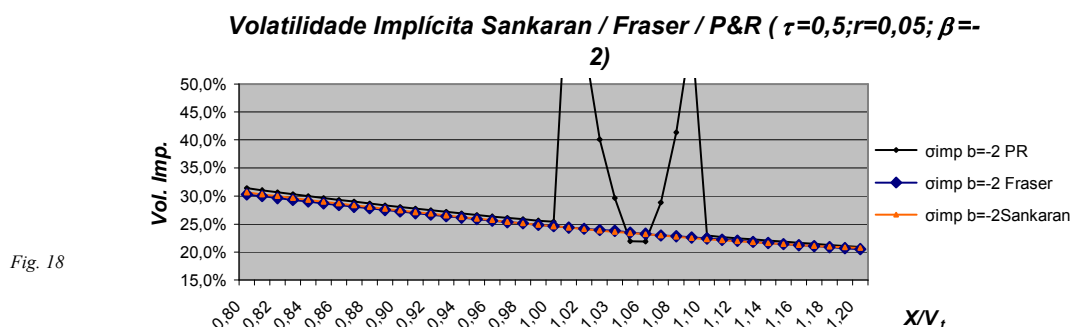


Fig. 18

#### 4 Conclusões e Apreciação Crítica

Na perspectiva da volatilidade constante da variância, modelo CEV, concluem-se duas realidades distintas que conferem o seguinte:

- Em primeiro lugar que o modelo de avaliação de opções baseado no CEV, aplicado às empresas, ao seu valor intrínseco inscrito no preço de mercado das acções, constitui enquanto um processo de avaliação dos seus activos reais, um avanço relativamente ao modelo de Black-Scholes/Merton, conferindo maior aproximação à realidade do mercado, nos diferentes aspectos da valorização das *securities*, dos activos ou dos *spreads* de crédito;
- Em segundo lugar que, dentro das três metodologias do CEV aqui abordadas, baseadas na distribuição qui-quadrado não central e constituídas como modelos alternativos de aproximações analíticas às funções de distribuição cumulativas qui-quadrado não central, distingue-se Sankaran (1963), Fraser *et al.* (1998) e Penev & Raykov (2000), com diferentes níveis de aproximação e destacados pela precisão dos preços e tempos de computação, em resultado da solução do complexo formulário referido no ponto anterior.

As representações gráficas ilustram as significativas diferenças de preços da *call* e, consequentemente, do *pricing corporate debt* entre os modelos B-S/Merton e CEV, este mesmo afectado pelas alternativas nuances sugeridas pelas aproximações analíticas dos formulários de Sankaran (1963), Fraser *et al.* (1998) e Penev e Raykov (2000). Repare-se que, como se disse atrás a propósito do *Quadro 1*, as diferenças de preço entre os dois modelos são mais significativas para preços do subjacente acima ou abaixo dos preços de mercado e para elasticidades maiores. Por outro lado, nas três propostas do CEV, há menos consenso nas *call at-the-money*, com a metodologia Penev e Raykov (2000) a apresentar

maior aproximação ao *benchmark* do mercado. Conforme referido na última nota de roda-pé, considera-se a referência de mercado os valores encontrados pelo método *gamma series*, séries de funções *gamma* incompletas que mapeiam o argumento  $\omega$  ( $2x$  ou  $2y$ ) e os parâmetros  $\nu$  e  $\lambda$  ( $2y$  ou  $2x$ ), abrindo caminho para o cálculo da variável  $z$ , de distribuição aproximadamente normal e chave da formulação CEV. Dias *et al.* (2010), descreve e confere o *pricing* das *European-style standard call option under CEV assumption* pelo método *gamma series*, coincidindo os preços com o método de representação integral, com a função inclusa do programa *Mathematica* e com o processo iterativo de Ding (1992), constituindo portanto os caminhos mais precisos para a determinação teórica do *pricing* e *benchmark* do mercado.

Em face da maior precisão dos valores da *equity*, do modelo CEV e da metodologia de Penev e Raykov, a variação da *yield spread* para as simulações de maturidade e preços de exercício dos exemplos apresentados revelam-se, conseqüentemente, também mais precisos.

Finalmente resta acrescentar duas questões importantes. A primeira prende-se com a referida “turbulência” nas zonas *at-the-money* do modelo Penev & Raykov que, citando Dias *et al.* (2010), resulta dos valores muito baixos simulados para  $2x$  e  $2y$ , geralmente quando  $\leq 1.000$ , assumindo um comportamento mais preciso para valores superiores. Naquele caso sugere-se Ding (1992), para maior precisão. A segunda questão prende-se com as *yield spreads*, cuja estrutura de prazos apresenta maior coerência em Carr e Linetsky (2006), em particular nos casos em que o *time to maturity* se aproxima de zero. Tendo em conta que os mercados não transaccionam dívida a preço zero, por mais pequenos que sejam os prazos, estenderam o modelo CEV acrescentando a ideia de que o incumprimento pode não ser consequência de factos em progressão contínua mas antes através de saltos (*jumps to default*) que podem ocorrer de forma imprevisível. No seu modelo formulando um processo baseado no *credit spread* instantâneo, com *pricings* positivos logo a partir do momento zero e *spreads* genericamente mais elevados, mesmo nas maturidades mais longas. Em contraste, acrescentam também que as probabilidades de incumprimento neutras ao risco, variando em função do tempo, são significativamente mais acentuadas que no modelo CEV, podendo ocorrer eventos *default*, surpreendentemente, logo a partir do momento zero.

Citando Sundaram, R. K. (*New York University*), no resumo da conferência *Moody's-NYU*, sobre Risco de Crédito, em Nova York, Maio de 2006, os modelos estruturais oferecem uma abordagem intelectualmente mais interessante para a modelagem do risco de crédito. No entanto, empiricamente, estes modelos não parecem ser capazes de combinar as *yield spreads* observadas nas *corporate bonds*, o que pode ter menos a ver com deficiências dos modelos estruturais do que, propriamente, com a nossa visão das *yield spreads* como decorrentes, principalmente, do risco de crédito. Portanto uma melhor compreensão da composição e mecanismo das *yield spreads* poderá ajudar a medir melhor os modelos estruturais.

## Referências

- [1] Abramowitz, Milton and Irene A. Stegun (1972), "Handbook of Mathematical Functions", Dover, New York .
- [2] Allen, L. and Saunders, A. (2003). "A Survey of Cyclical Effects in Credit Risk Measurement Models", *BIS Working Papers*, N° 126 .
- [3] Altaman, E., Resti, A. and Sironi, A. (2004). "Default Recovery Rates in Credit Risk Modeling: A Review of the Literature and Empirical Evidence", *Economic Notes*, 33(2), 183-208.
- [4] Anderson, R., and Sundaresan, S. (1996), "Design and Valuation of Debt Contracts", *Review of Financial Studies*, 9, 37-68 .
- [5] Beckers, S. (1980), "The Constant Elasticity of Variance Model and Its Implications for Option Pricing", *Journal of Finance*, 35, 661-673.
- [6] Benton, Denise and K. Krishnamoorthy (2003), "Computing Discrete Mixtures of Continuous Distributions: Noncentral Chi-Square, Noncentral t and the Distribution of the Square of the Sample Multiple Correlation Coefficient", *Computational Statistics and Data Analysis* 43, 249-267.
- [7] Black, F. (July/August 1975), "Fact and Fantasy in the Use of Options", *Financial Analysts Journal* 31, 36-41, 61-72.
- [8] Black, F. and Scholes, M. (May-Jun., 1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy* V.81, N°3, 637-654.
- [9] Black, F. and Cox, J.C. (1976), "Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions", *Journal of Finance* 31, 351-367.
- [10] Chance, D. (1990), "Default Risk and the Duration of Zero-Coupon Bonds", *Journal of Finance* 45, 265-274.
- [11] Carr, P. and Linetsky, V. (2006), "A Jump To Default Extended CEV Model: An Application of Bessel Processes", *Finance and Stochastics*, V. 10, N° 3, Pages 303-330.
- [12] Chen, N., and S. Kou (2005), "Credit spreads, optimal capital structure, and implied volatility with endogenous default and jump risk", *Working paper, IEOR, Columbia University*.
- [13] Chen, R.-R. and Lee, C. (July, 1993), "A Constant Elasticity of Variance (CEV) Family of Stock Price Distributions in Option Pricing: Review and Integration", *Journal of Financial Studies*.
- [14] Collin-Dufresne, Pierre, and Robert S. Goldstein (2001), "Do credit spreads reflect stationary leverage ratios?", *Journal of Finance* 56, 1929–1957.
- [15] Cooper, Ian A. and Davydenko, Sergei A. (December 2003), "Using Yield Spreads to Estimate Expected Returns on Debt and Equity", *London Business School*.
- [16] Cox, J. (1975), *Notes on Option Pricing I: "Constant Elasticity of Variance Diffusion"*. Unpublished Note, *Stanford University, Graduate School of Business*. Also, *J. Portfolio*

---

*Management (1996), (5-17).*

- [17] Cox, J. and Ross, S.A. (1976), “The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes”, *Journal of Political Economy*, V. 3, 145-166.
- [18] Cox, J., Ross, S.A. and M. Rubinstein (1979), “Option Pricing: A Simplified Approach” *Journal of Financial Economics*, 7, 229-263.
- [19] Das, Sanjiv R., and Rangarajan K. Sundaran (1999), “A Direct Approach to Arbitrage-Free Pricing of Credit Derivatives”, *Management Science*.
- [20] Das, Sanjiv R. (1995), “Credit Risk Derivatives”, *The Journal of Derivatives*, 2, 7-23.
- [21] Das, Sanjiv R. and Tufano, P. (1996), “Pricing Credit Sensitive Debt When Interest Rates, Credit Ratings and Credit Spreads are Stochastic”, *Journal of Financial Engineering*, V. 5, 161-198.
- [22] Dennis, Patrick and Stewart Mayhew (2002), “Risk-Neutral Skewness: Evidence from Stock Options”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 37, 471-493.
- [23] Dias, José Carlos, “Corporate Liabilities as Contingent Claims”, *Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Coimbra, Department of Finance*, June 2007.
- [24] Dias, J. C., Larguinho, M. e Braumann, C. A., “Speed and Accuracy Comparison of Noncentral Chi-Squared Distribution Methods for Option Pricing and Hedging”, *Preliminary draft*, March 2010.
- [25] Ding, Cherng G. (1992), Algorithm AS 275: “Computing the Non-Central  $\chi^2$  Distribution Function”, *Applied Statistics* 41, 478-482.
- [26] Duffie, Darrel, and Kenneth J. Singleton (1999), “Modeling Term Structures of Defaultable Bonds”, *Review of Financial Studies* 12, 687-720.
- [27] Duffie, Darrel, and D. Lando (2001), “Term Structures of Credit Spreads With Incomplete Accounting Information”, *Econometrica* 69(3): 633-664.
- [28] Dyrting, S. (2004), “Evaluating the Noncentral Chi-Square Distribution for the Cox-Ingersoll-Ross Process”, *Computational Economics* 24, 35-50.
- [29] Elizalde, A. (2005a), “Credit Risk Models III: Reconciliation Reduced - Structural Models”, *Working Paper*.
- [30] Emanuel, D. C. and J. D. MacBeth (1982), “Further Results on the Constant Elasticity of Variance Call Option Pricing Model”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17, 533-554.
- [31] Eom Y.H., J. Helwege, and J. Huang (2004), “Structural Models of Corporate Bond Pricing: An Empirical Analysis.” *Review of Financial Studies*, 17: 499-544.
- [32] Feller, William (1951), “The Asymptotic Distribution of The Range of Sums of Independent Random Variables”, *Annual Math. Statistic*, Volume 22, Number 3.
- [33] Fraser, D.A.S., J. Wu, and A.C.M. Wong (1998), “An Approximation for the Noncentral Chi-Squared Distribution”, *Communications in Statistics – Simulation and Computation*,



27, 275-287.

- [34] Geske, R., (1977), "The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* V. 12, N° 4, UCLA, 541-552.
- [35] Geske, R., (1979), "The Valuation of Compound Options", *Journal of Financial Economics* 7, 63-81.
- [36] Geske, R., (1979), "A Note on a Analytical Valuation Formula for Unprotected American Call Options on a Stocks With Known Dividends", *Journal of Financial Economics*, V. 7, Issue 4, 375-380.
- [37] Hilberink, B. and C. Rogers, (2002), "Optimal capital structure and endogenous default", *Finance and Stochastics* 6(2): 237-263.
- [38] Ho, T., and Singer, R. (1982), "Bond Indenture Provisions and the Risk of Corporate Debt", *Journal of Financial Economics* 10, 375-406.
- [39] Hua, David, and Wang, David (2003), "Estimating The Probabilities of Default for Callable Bonds: Theory and Evidence" Working Paper.
- [40] Huang, J., and M. Huang. "How Much of the Corporate-Treasury Yield Spread is Due to Credit Risk?" Working paper, Penn State University (2003).
- [41] Jackwerth, Jens Carsten and Mark Rubinstein (1996), "Recovering Probability Distributions from Option Prices", *Journal of Finance* 51, 1611-1631.
- [42] Jackwerth, Jens Carsten and Mark Rubinstein (2001), "Recovering Stochastic Processes from Option Prices" Working Paper, Abstract published in *Journal of Finance* 52, N° 3, 1236.
- [43] Jarrow, R. A., Lando, D., and Turnbull, S. M. (1997), "A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads". *Review of Financial Studies* 10, 481-523.
- [44] Jarrow, R. A., and S. M. Turnbull (1992), "Credit Risk: Drawing the Analogy", *Risk Magazine* 5 (9).
- [45] Jarrow, R. A., and S. M. Turnbull (1995), "Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk" *Journal of Finance*, Vol. 50(1), pp. 53-85.
- [46] Jones, E., Mason, S. and Rosenfeld, E.(1984), "Contingent Claims Analysis of Corporate Capital Structures: An Empirical Investigation" *Journal of Finance*, Vol. 39, pp. 611-627.
- [47] Johnson, H. and Stulz, R. (1987), "The Pricing of Options with Default Risk", *Journal of Finance*, 42, pp. 267-280.
- [48] Knüsel, L. and B. Bablock (1996), "Computation of the Noncentral Gamma Distribution", *SIAM Journal of Scientific Computing* 17, 1224-1231.
- [49] Leland, H (2004), "Predictions of default probabilities in structural models", *Journal of Investment Management* 2, 2004, 1-16.
- [50] Litterman and Iben (1991), "Model of Estimating Credit Risk", Working Paper.
- [51] Longstaff, Francis A. and Schwartz, Eduardo S., "A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and

---

*Floating Rate Debt*”, *Journal of Finance*, Vol. 50, N° 3, July 1995, 789-819.

- [52] MacBeth, J. D. and L. J. Merville (1979), “An Empirical Examination of the Black-Scholes Call Option Pricing Model”, *Journal of Finance*, 34, 1173-1186.
- [53] MacBeth, J. D. and L. J. Merville (1980), “Tests of the Black-Scholes and Cox Call Option Valuation Models”, *Journal of Finance*, 35, 285-301.
- [54] Madan, Dilip., and Haluk Unal (2000). “A Two-Factor Hazard-Rate Model for Pricing Risky Debt and the Term Structure of Credit Spreads,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v35, 43-65.
- [55] Merton, Robert C., “On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates”, *Journal of Finance*, Volume 29, Issue 2, 1973 (May, 1974), 449-470.
- [56] Merton, Robert C. (1977), “On the Pricing of Contingent Claims and the Modigliani-Miller Theorem”. *Journal of Financial Economics*, 5, 241-249.
- [57] Penev, Spiridon and Tenko Raykov (2000), “A Wiener Germ Approximation of the Noncentral Chi Square Distribution and of its Quantiles”. *Computational Statistics*, 15, 219-228.
- [58] Sankaran, Munuswamy (1963), “Approximations to the Non-Central Chi-Square Distribution”, *Biometrika*, 50, 199-204.
- [59] Sarig, Oded, and Arthur D. Warga (1989), “Bond Price Data and Bond Market Liquidity”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 24, 367-378.
- [60] Schroder, Mark (1989),” Computing the Constant Elasticity of Variance Option Pricing Formula”, *Journal of Finance*, 44, 211-219.
- [61] Sundareshan (2000),” Credit Risk: Drawing the Analogy”, *Risk Magazine* 5 (9).
- [62] Shimko, D., Tejima, H. and Van Deventer, D. (1993),” The Pricing of Risky Debt When Interest Rates are Stochastic”, *Journal of Fixed Income*, September, 58-66.
- [63] Vassalou, Maria and Xing Yuhang (April 2004),” Default Risk in Equity Returns”, *Journal of Finance* 2004, LIX (2): 831-68.
- [64] Zhou, C. (2001),” The term structure of credit spreads with jump risk”, *Journal of Banking and Finance*, 25(11): 2015-2040.
- [65] Zhu H., Zhang, Y., Zhou, H. (2005),”Explaining Credit Default Swaps Spreads With The Equity Volatility and Jump Risks of Individual Firms”, *Bank for International Settlements working paper*, <http://www.bis.org/publ/work181.htm>.

### Quadro 1

1. Dados

	Dados
The value of the asset =>	$V_t$ 80,00
The total debt of the firm has a face value of =>	$X$ 48,00
The risk-free interest rate =>	$r$ 7,0000%
Maturity of the debt =>	$\tau = T-t$ 3,00
Asset volatility =>	$\sigma_v$ 27,0000%
The market risk premium =>	$r_m - r$ 1,00%
The beta of the asset =>	$\beta_v$ 1,0000
Dividend Yield =>	$q$ 0,0000%

	Parâmetros
	$d_1$ 1,775193
	$d_2$ 1,307539
	$N(d_1)$ 0,962067
	$N(d_2)$ 0,904485
	$N(-d_1)$ 0,037933
	$N(-d_2)$ 0,095515

$$d_1 = \frac{\ln(V_t/X) + (r + 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (\text{segundo o modelo BS para acq dividendos})$$

$$d_2 = \frac{\ln(V_t/X) + (r - 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

2. Decomposição do valor da empresa

Decomposição do valor da empresa	
$V_t$	80,00 €
$E_t = \text{Equity}$	41,7736 €
$D_t = \text{Debt}$	38,2264 €

$$E_t(V_t, X, \tau, \sigma, r) = E_t(400, 500, 2, 0.2, 0.05) = V_t N(+d_1) - X e^{-r(T-t)} N(+d_2)$$

$$D_t = V_t N(-d_1) + X e^{-r(T-t)} N(+d_2)$$

3. Decomposição do risco da dívida

Decomposição do risco da dívida	
$D_t$	38,2264 €
$X_t$	38,9080 €
$P_t$	0,6817 €
$C_t$	41,7736 €

$$\text{Risk debt} = D_t = X e^{-r(T-t)} - P_t$$

$$\text{Risk debt} = D_t(V_t, X, \tau, \sigma, r)$$

$$\text{Value of risk-free debt} = X e^{-r(T-t)}$$

$$\text{Put option} = X e^{-r(T-t)} N(-d_2) - V_t N(-d_1)$$

$$\text{Call option} = V_t e^{-q(T-t)} N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$$V_t = E_t + X e^{-r(T-t)} - P_t$$

Através da paridade put-call, é equivalente dizer:

$$\text{assets} = \text{equity} + (\text{PV}(\text{face value of debt}) - \text{"risk premium"}) = \text{equity} + \text{debt}$$

$$D_t = V_t - E_t \quad 38,23 \text{ €} \quad (\text{Equity}) E_t(V_t, X, \tau, \sigma, r) = V_t N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

4. Risk-neutral probability of default

O risk-neutral probability of default é dado por:

$$P[V_T < X] = N(-d_2) = 1 - N(d_2) = 0,095515 \quad 9,55\%$$

5. Credit Spread

O credit spread é dado por:

$$s(t, T) = y(t, T) - r = (1/\tau) \ln(X/D_t) - r = 0,5892\%$$

Decomposição do risco da empresa	
$D_t$	38,23 €
$N(-d_2)$	9,55%
$y(t, T)$	7,59%
$s(t, T)$	0,59%
$s(t, T)$	0,0059

$$y(t, T) = (1/\tau) \ln(X/D_t)$$

$$s(t, T) = y(t, T) - r = - (1/\tau) \ln(D_t/X) - r$$

59 pontos base

### Quadro 2

The market value of equity and the market value of assets are related by the following expression:

$$E_t = V_t N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad \Rightarrow \quad V_t = [E_t + X e^{-r(T-t)} N(d_2)] / N(d_1)$$

The equity and asset volatility are related by the following equation:

$$\sigma_E = V_t \sigma_V N(d_1) / E_t \quad (1.9)$$

$$d_1 = \frac{\ln(V_t / X) + (r + \sigma_V^2 / 2)(T - t)}{\sigma_V (T - t)^{1/2}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_V (T - t) \quad (1.5), (1.6)$$

The value of the asset at time $t$ .....	$V_t = 248,35266$	←	inputs de simulação	} Determinação de $V_t$ e $\sigma_V$ iterativamente
The value of the equity* at time $t$ .....	$E_t = 60,000000$	←		
The total debt of the firm has a face value of .....	$X = 200$			
The risk-free interest rate (compounded continuously) .....	$r = 6\%$			
The maturity of the debt (years) .....	$\tau (T-t) = 7$			
The asset volatility .....	$\sigma_V = 7,247\%$	←		
The equity volatility** .....	$\sigma_E = 30,00\%$	←		
	$d_1 = 3,662054$			
	$d_2 = 3,7796836$			
	$N(d_1) = 0,999841$			
	$N(d_2) = 0,999821$			
The value of the equity* at time $t$ .....	$E_t = 60$	←		
The equity volatility** .....	$\sigma_E = 30,00\%$	←		
The market value of the debt at time $t$ ( $V_t - E_t$ ) .....	$D_t = 188,3527$			
$D_t = X e^{-r(T-t)} N(d_2) + V_t N(-d_1)$ .....	$D_t = 188,3527$			
The distance to default ( $DD = d_2$ ) .....	$DD = 3,7796836$			
The expected default frequency .....	$EDF = 0,000079$			

Tabela 1

$$s(t, T) = y(t, T) - r = \left[ \frac{1}{(T-t)} \ln \left( \frac{V_t}{D_t} \right) \right] - r$$

$$D_t = V_t N(-d_1) + X e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(V_t/X) + (r + 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

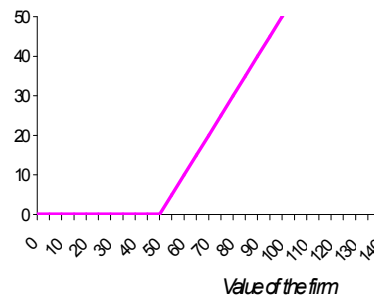
$$d_2 = \frac{\ln(V_t/X) + (r - 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

X = 50  
 $\sigma_V = 0,300$   
 r = 0,05

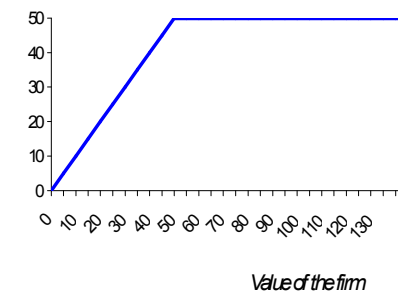
T-t = 1

Yield Spread		VT	$E_T = \text{Max}(VT-X; 0)$	$d_1$	$d_2$	Dt	$D_T = X - \text{Max}(X-VT; 0)$
VT	$E_T = \text{Max}(VT-X; 0)$						
0	0	0	0	0	18,172695	0	
5	0	-7,358617	-8	5,000000	5		
10	0	-5,048126	-5	10,000000	10		
15	0	-3,696576	-4	14,999889	15		
20	0	-2,737636	-3	19,994821	20		
25	0	-1,993824	-2	24,941293	25		
30	0	-1,386085	-2	29,696768	30		
35	0	-0,872250	-1	34,029697	35		
40	0	-0,427145	-1	37,723390	40		
45	0	-0,034535	0	40,669472	45		
50	0	0,316667	0	42,884373	50		
55	5	0,634367	0	44,469484	50		
60	10	0,924405	1	45,559785	50		
65	15	1,191214	1	46,286683	50		
70	20	1,438241	1	46,759710	50		
75	25	1,668217	1	47,061884	50		
80	30	1,883345	2	47,252240	50		
85	35	2,085428	2	47,370928	50		
90	40	2,275966	2	47,444386	50		
95	45	2,456180	2	47,489621	50		
100	50	2,627157	2	47,517389	50		
105	55	2,789791	2	47,534406	50		
110	60	2,944868	3	47,544829	50		
115	65	3,093030	3	47,551217	50		
120	70	3,234896	3	47,555137	50		
125	75	3,370969	3	47,557547	50		
130	80	3,501705	3	47,559032	50		
135	85	3,627506	3	47,559949	50		
140	90	3,748731	3	47,560518	50		
145	95	3,865702	4	47,560872	50		
150	100	3,978708	4	47,561093	50		
155	105	4,088007	4	47,561232	50		
160	110	4,193836	4	47,561319	50		

$$E_T = \text{Max}(V_T - X; 0)$$



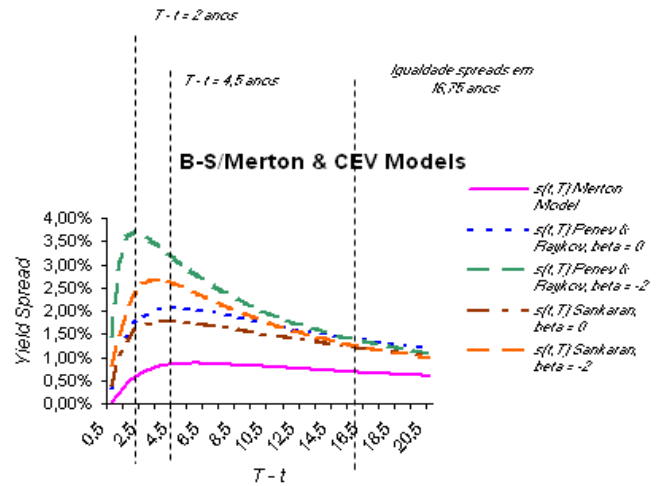
$$D_T = X - \text{Max}(X - V_T; 0)$$



Payoff  $E_t$  e  $D_t$

Tabela 2

Yield Spread CEV Model for $\beta = 0$						
$X_t$	$D_t$	$E_t$	$c_t$	$p_t$	$T - t$	$s(t, T)$ Penev & Raykov, $\beta = 0$
46,81	46,74	33,26	33,259	0,074	0,5	0,3159%
45,66	45,20	34,80	34,800	0,459	1,0	1,0105%
44,53	43,57	36,43	36,431	0,963	1,5	1,4571%
43,43	41,96	38,04	38,038	1,470	2,0	1,7219%
42,36	40,41	39,59	39,586	1,946	2,5	1,8807%
41,31	38,94	41,06	41,064	2,378	3,0	1,9758%
40,29	37,53	42,47	42,470	2,764	3,5	2,0300%
39,30	36,20	43,80	43,805	3,104	4,0	2,0568%
38,33	34,93	45,07	45,072	3,400	4,5	2,0645%
37,38	33,73	46,27	46,274	3,657	5,0	2,0587%
36,46	32,58	47,42	47,416	3,875	5,5	2,0431%
35,56	31,50	48,50	48,501	4,060	6,0	2,0206%
34,68	30,47	49,53	49,533	4,214	6,5	1,9933%
33,83	29,48	50,52	50,517	4,342	7,0	1,9625%
32,99	28,55	51,45	51,455	4,445	7,5	1,9294%
32,18	27,65	52,35	52,351	4,526	8,0	1,8950%
31,38	26,79	53,21	53,208	4,589	8,5	1,8598%
30,61	25,97	54,03	54,028	4,634	9,0	1,8243%
29,85	25,19	54,81	54,814	4,665	9,5	1,7888%
29,11	24,43	55,57	55,569	4,683	10,0	1,7535%
28,39	23,71	56,29	56,294	4,689	10,5	1,7188%
27,69	23,01	56,99	56,991	4,685	11,0	1,6847%
27,01	22,34	57,66	57,662	4,671	11,5	1,6512%
26,34	21,69	58,31	58,307	4,650	12,0	1,6185%
25,69	21,07	58,93	58,929	4,622	12,5	1,5866%
25,06	20,47	59,53	59,529	4,588	13,0	1,5555%
24,44	19,89	60,11	60,108	4,548	13,5	1,5252%
23,84	19,33	60,67	60,667	4,503	14,0	1,4957%
23,25	18,79	61,21	61,207	4,454	14,5	1,4670%
22,67	18,27	61,73	61,728	4,402	15,0	1,4391%
22,11	17,77	62,23	62,233	4,347	15,5	1,4119%
21,57	17,28	62,72	62,721	4,288	16,0	1,3855%
21,04	16,71	63,29	63,285	4,215	16,5	1,3933%
20,52	16,35	63,65	63,649	4,165	17,0	1,3349%
20,01	15,91	64,09	64,092	4,101	17,5	1,3107%
19,52	15,48	64,52	64,520	4,036	18,0	1,2871%
19,03	15,06	64,94	64,936	3,969	18,5	1,2642%
18,56	14,66	65,34	65,338	3,902	19,0	1,2419%
18,11	14,27	65,73	65,728	3,834	19,5	1,2202%
17,66	13,89	66,11	66,107	3,765	20,0	1,1991%
17,22	13,53	66,47	66,474	3,696	20,5	1,1785%



**Tabela 3 Merton Model**

(Equity\*)  $E_t(V_t, X_t, \tau, \sigma, r) = V_t N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2)$  Call option  $= V_t e^{-q(T-t)} N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2)$

$s(t, T) = y(t, T) - r = [(1 / (T-t)) \ln(X/D_t)] - r$

Put option  $= X e^{-r(T-t)} N(-d_2) - V_t N(-d_1)$

$D_t = V_t N(-d_1) + X e^{-r(T-t)} N(d_2)$

$d_1 = \frac{\ln(V_t / X) + (r + 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

$d_2 = \frac{\ln(V_t / X) + (r - 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

q = 0  
 X = 48  
 $\sigma_V = 0,270$   
 r = 0,05  
 $V_t = 80$

Yield Spread B-S/Merton Model									
$d_1$	$d_2$	$X_t$	$D_t$	$E_t$	$c_t$	$p_t$	$T-t$	$s(t, T)$ Merton Mc	
2,902022	2,711103	46,815	46,806	33,194	33,19	0,01	0,5	0,0370%	
2,212132	1,942132	45,659	45,547	34,453	34,45	0,11	1,0	0,2447%	
1,936913	1,606232	44,532	44,232	35,768	35,77	0,30	1,5	0,4498%	
1,790619	1,408781	43,432	42,916	37,084	37,08	0,52	2,0	0,5982%	
1,702829	1,275922	42,360	41,626	38,374	38,37	0,73	2,5	0,6992%	
1,646893	1,179239	41,314	40,375	39,625	39,63	0,94	3,0	0,7667%	
1,610300	1,105176	40,294	39,166	40,834	40,83	1,13	3,5	0,8112%	
1,586344	1,046344	39,299	38,001	41,999	42,00	1,30	4,0	0,8397%	
1,571088	0,998331	38,329	36,879	43,121	43,12	1,45	4,5	0,8570%	
1,562060	0,958322	37,382	35,798	44,202	44,20	1,58	5,0	0,8664%	
1,557630	0,924423	36,459	34,756	45,244	45,24	1,70	5,5	0,8700%	
1,556674	0,895312	35,559	33,752	46,248	46,25	1,81	6,0	0,8695%	
1,558398	0,870030	34,681	32,783	47,217	47,22	1,90	6,5	0,8660%	
1,562219	0,847866	33,825	31,848	48,152	48,15	1,98	7,0	0,8602%	
1,567705	0,828279	32,990	30,946	49,054	49,05	2,04	7,5	0,8528%	
1,574525	0,810849	32,175	30,074	49,926	49,93	2,10	8,0	0,8442%	
1,582425	0,795246	31,381	29,232	50,768	50,77	2,15	8,5	0,8347%	
1,591204	0,781204	30,606	28,417	51,583	51,58	2,19	9,0	0,8247%	
1,600706	0,768510	29,850	27,628	52,372	52,37	2,22	9,5	0,8143%	
1,610801	0,756986	29,113	26,866	53,134	53,13	2,25	10,0	0,8036%	
1,621386	0,746486	28,395	26,127	53,873	53,87	2,27	10,5	0,7927%	
1,632378	0,736889	27,694	25,412	54,588	54,59	2,28	11,0	0,7818%	
1,643705	0,728091	27,010	24,718	55,282	55,28	2,29	11,5	0,7709%	
1,655312	0,720005	26,343	24,047	55,953	55,95	2,30	12,0	0,7600%	
1,667149	0,712555	25,693	23,396	56,604	56,60	2,30	12,5	0,7492%	
1,679176	0,705677	25,058	22,764	57,236	57,24	2,29	13,0	0,7386%	
1,691358	0,699315	24,440	22,152	57,848	57,85	2,29	13,5	0,7281%	
1,703667	0,693420	23,836	21,557	58,443	58,44	2,28	14,0	0,7178%	
1,716078	0,687949	23,248	20,981	59,019	59,02	2,27	14,5	0,7076%	
1,728570	0,682865	22,674	20,421	59,579	59,58	2,25	15,0	0,6976%	
1,741125	0,678134	22,114	19,877	60,123	60,12	2,24	15,5	0,6879%	
1,753727	0,673727	21,568	19,350	60,650	60,65	2,22	16,0	0,6783%	
1,766363	0,669618	21,035	18,837	61,163	61,16	2,20	16,5	0,6689%	
1,779022	0,665783	20,516	18,339	61,661	61,66	2,18	17,0	0,6597%	
1,791693	0,662201	20,009	17,856	62,144	62,14	2,15	17,5	0,6507%	
1,804367	0,658854	19,515	17,386	62,614	62,61	2,13	18,0	0,6419%	
1,817037	0,655723	19,034	16,929	63,071	63,07	2,10	18,5	0,6333%	
1,829697	0,652795	18,564	16,486	63,514	63,51	2,08	19,0	0,6248%	
1,842341	0,650053	18,105	16,054	63,946	63,95	2,05	19,5	0,6166%	
1,854964	0,647487	17,658	15,635	64,365	64,37	2,02	20,0	0,6085%	
1,867561	0,645084	17,222	15,227	64,773	64,77	2,00	20,5	0,6006%	

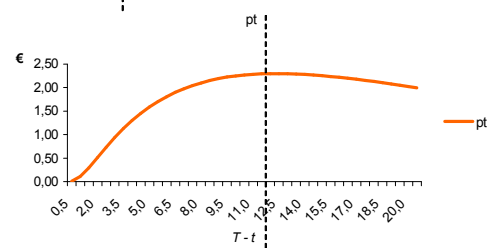
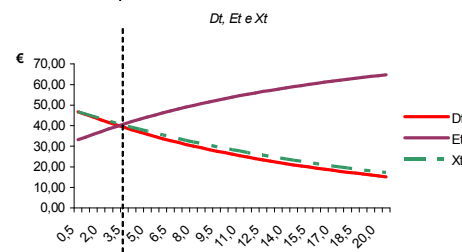
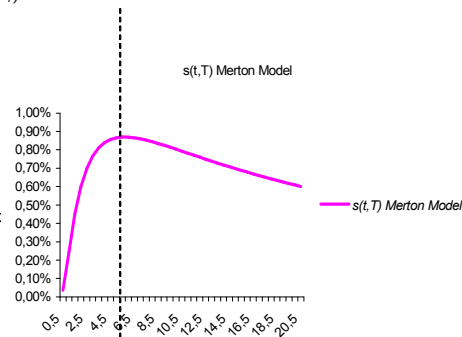


Tabela 4

MODELO BS / MERTON		DELTA ( $\delta$ - parâmetro de escala)	
		$\delta < 2$	$\delta > 2$
Value of the asset ( $V_t$ )	80,0000	1,0000	2,5000
total debt of the firm has a face value of ( $X$ )	48,0000	$\delta = \sigma / (V_0^{(0.5^6)^{-1}})$	0,090280
Dividend Yield ( $q$ )	0,0000%	ou $\delta = \sigma_0 * V_0^{1-6/2}$	
* Capitalização Contínua / Risk-Free Interest Spot Annual Rate ( $r$ )	7,0000%	6,7659%	ou $\sigma(t_0, V_{t_0}) = \delta * V_{t_0}^{6/2-1}$
Time-To-Maturity ( $\tau = T-t$ )	3,0000		
Asset Volatility ( $\sigma_V$ )	27,0000%		
* $r^{(t)} = \ln(1+r) \Rightarrow r = \exp(r^{(t)}) - 1$			
PARÂMETROS DAS OPÇÕES (Greeks Parameters)			
		CALL	PUT
Delta call ( $\delta_c$ ) = $\delta(d_1) e^{-q\tau}$	$\delta_c$	0,962067	
Delta put ( $\delta_p$ ) = $-(1 - \delta(d_1)) e^{-q\tau}$	$\delta_p$		-0,037933
Theta call ( $\theta_c$ ) = $-[(V_t \delta'(d_1) \sigma e^{-q\tau} / 2 \tau^{0.5}) + q V_t e^{-q\tau} \delta(d_1) - r X e^{-r\tau} \delta(d_2)]$	$\theta_c$	-0,00816	
Theta put ( $\theta_p$ ) = $-[(V_t \delta'(d_1) \sigma e^{-q\tau} / 2 \tau^{0.5}) - q V_t e^{-q\tau} \delta(-d_1) + r X e^{-r\tau} \delta(-d_2)]$	$\theta_p$		-0,00070
Veja call ( $\rho_c$ ) = $V_t \delta'(d_1) e^{-q\tau, 0.5}$	$\rho_c$	11,43569	
Veja put ( $\rho_p$ ) = $V_t \delta'(d_1) e^{-q\tau, 0.5}$	$\rho_p$		11,43569
Rho call ( $\rho_c$ ) = $\delta X \delta(d_2) e^{-r\tau}$	$\rho_c$	1,055752487	
Rho put ( $\rho_p$ ) = $-\delta X \delta(-d_2) e^{-r\tau}$	$\rho_p$		-0,111488827
Gamma call ( $\gamma_c$ ) = $(e^{-q\tau} \delta'(d_1)) / (V_t \sigma \tau^{0.5})$	$\gamma_c$	0,002206	
Gamma put ( $\gamma_p$ ) = $(e^{-q\tau} \delta'(d_1)) / (V_t \sigma \tau^{0.5})$	$\gamma_p$		0,002205959
$d_1 = \frac{\ln(V_t/X) + (r + 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$	$d_1$	1,775193	
$d_2 = \frac{\ln(V_t/X) + (r - 0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$	$d_2$	1,307539	
$N'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(d_1)^2/2}$	$N(d_1)$	0,962067	
	$N(d_2)$	0,904485	
	$N(-d_1)$	0,037933	0,037933
	$N(-d_2)$	0,095515	0,095515
	$N'(d_1)$	0,082530	
Put option = $X e^{-r(T-t)} N(-d_2) - V_t N(-d_1)$	Time-To-Maturity ( $\tau = T-t$ ) = 3,0		
Call option = $V_t e^{-q(T-t)} N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2)$	41,7736097	42,2546785	
Preço da opção de compra (modelo BS / Merton)	$c_t$	41,7736097	
Preço da opção de venda (modelo BS / Merton)	$p_t$	0,6816535	
1. Decomposição do Valor da Empresa*	BS / Merton	Método Sankaran / CEV MODEL	Método Penev &
$V_t$ (The value of asset)	80,00000	80,00000	80,00000
(Equity*) $E_t(V_t, X, \tau, \sigma, r) = V_t N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2)$	41,7736097	39,4028368	42,2514916
(Debt) $D_t(V_t, X, \tau, \sigma, r) = V_t N(-d_1) + X e^{-r(T-t)} N(d_2)$	38,2263903	38,9080438	38,9080438
2. Decomposição do Risco da Dívida			
Call option = $V_t e^{-q(T-t)} N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2)$	41,7736097	42,2546785	39,4028368
Put option = $X e^{-r(T-t)} N(-d_2) - V_t N(-d_1)$	0,6816535	1,1627224	0,7168197
(Value of risk-free debt) $X_t = X e^{-r(T-t)}$	38,9080438	38,9080438	38,9080438
Risk debt = $D_t = X e^{-r(T-t)} - P_t$	38,2263903	37,7453215	38,1912241
3. Decomposição do Risco da Empresa			
$D_t$ (Risk debt)	38,2263903	37,7453215	38,1912241
$X_t$ (Value of risk-free debt)	38,9080438	38,9080438	38,9080438
$P_t$	0,6816535	1,1627224	0,7168197
$C_t$	41,7736097	42,2546785	39,4028368
4. Credit Spread			
$s(t, T) = y(t, T) - r = (1/\tau) \ln(X/D_t) - r$	0,5891629%	1,0113159%	0,6198419%
$s(t, T)$ - basis points	58,92	101,13	61,98
*Através da paridade put-call, é equivalente dizer: assets = equity + (PV(face value of debt) - "risk premium") = equity + debt e, portanto: $E_t = V_t - D_t$	41,7736097	42,2546785	41,8087759
			42,2514916
			41,8064283



**Tabela 5 - Cálculo das Greeks**

MATRIZ DE INPUTS	
SPOT ( $S_t$ ) (ou $V_t$ )	80,0000
STRIKE ( $K$ ) (ou $X$ )	48,0000
DIVIDEND YIELD ( $q$ )	0,0000
RISK-FREE RATE ( $r$ )	7,0000%
TIME-TO-MATURITY ( $\tau = T-t$ )	3,0000
BETA ( $\beta$ )	1,0000
VOLATILITY ( $\sigma$ )	27,0000%
DELTA ( $\delta$ ) (parâmetro de escala)	2,414953 <= $\delta = \sigma / (V_t$
$\sigma_0$ (Volatilidade instantânea no momento $t = 0$ )	0,270000 ou $\delta = \sigma_0 * V_t$

ou  $\sigma(t_0, V_{t_0}) =$

**PARÂMETROS DAS OPÇÕES (Greeks Parameters) - Modelo Merton**

	CALL	PUT
Delta ( $\delta_c$ ) = $\Phi(d_1) e^{-q\tau}$	0,962067	
Delta ( $\delta_p$ ) = $-(1 - \Phi(d_1)) e^{-q\tau}$		-0,037933
Theta ( $\theta_c$ ) = $-[(V_t \Phi'(d_1) \sigma e^{-q\tau}) / 2 \tau^{0,5}] + qV_t e^{-q\tau} \Phi(d_1) - rXe^{-r\tau} \Phi(d_2)$	-0,00816	
Theta ( $\theta_p$ ) = $-[(V_t \Phi'(d_1) \sigma e^{-q\tau}) / 2 \tau^{0,5}] - qV_t e^{-q\tau} \Phi(-d_1) + rXe^{-r\tau} \Phi(-d_2)$		-0,00070
Vega ( $\zeta_c$ ) = $V_t \Phi'(d_1) e^{-q\tau} \tau^{0,5}$	11,435689	
Vega ( $\zeta_p$ ) = $V_t \Phi'(d_1) e^{-q\tau} \tau^{0,5}$		11,435689
Rho ( $\rho_c$ ) = $\tau X \Phi(d_2) e^{-r\tau}$	1,055752487	
Rho ( $\rho_p$ ) = $-\tau X \Phi(-d_2) e^{-r\tau}$		-0,11148883
Gamma ( $\Gamma_c$ ) = $(e^{-q\tau} \Phi'(d_1)) / (V_t \sigma \tau^{0,5})$	0,002205959	
Gamma ( $\Gamma_p$ ) = $(e^{-q\tau} \Phi'(d_1)) / (V_t \sigma \tau^{0,5})$		0,00220596













***Notas***

- . Todos os erros ou omissões, eventualmente encontrados ao longo do presente trabalho, são, naturalmente, da minha única e exclusiva responsabilidade.