

Instituto Superior de Ciências do Trabalho e da Empresa



A PERFORMANCE DE MODELOS ALTERNATIVOS DA
ESTIMAÇÃO DO VALUE-AT-RISK

SARA ALEXANDRA MARTINS MOURALINHO

Relatório de Projecto

Mestrado em Finanças

Orientador:

Prof. Doutor José Dias Curto, Prof. Auxiliar, ISCTE Business School, Departamento de
Gestão

Maio 2010

Resumo

Nos dias de hoje o controlo, a gestão e a previsão do risco fazem parte do mundo financeiro, adquirindo uma crescente importância devido às crises financeiras que ocorreram nos últimos anos, onde se verificaram avultadas perdas e até a falência de grandes instituições.

Com a presente tese pretende-se verificar a adequação de alguns modelos de referência na literatura para a modelação e estimação do *Value at Risk*. Para isso, consideram-se os modelos de heteroscedasticidade condicional: GARCH, EGARCH, GJR, EWMA e a teoria dos valores extremos através das distribuições GEV (*Generalized Extreme Value Distribution*) e da GPD (*Generalized Pareto Distribution*).

A performance dos modelos na estimação do VaR foi avaliada segundo a técnica de *backtesting* com recurso aos testes de Kupiec (1995) e de Christoffersen (1998).

A análise efectuada teve por base as rendibilidades diárias de três índices com elevada liquidez no mercado accionista e representativos de três áreas geográficas distintas: o Nikkei (Japão e Ásia), o S&P 500 (Norte-Americano) e o DJ Euro Stoxx 50 (Europa).

Palavras-Chave: *Value at Risk*, Volatilidade, GARCH, Teoria dos Valores Extremos

JEL Classification: C10, G10, G17

Abstract

In recent years, risk management and prediction has become a central part of the financial world as the recent crisis lead to the biggest losses in history and to the failure of some of the biggest financial institutions.

This thesis evaluates the fitness of some reference models used to estimate the Value at Risk. The conditional conditional heteroskedasticity models considered are GARCH, EGARCH, GJR, EWMA and the extreme value theory through the *Generalized Extreme Value Distribution* and the *Generalized Pareto distribution*.

The performance of the VaR estimation models is evaluated through backtesting of the statistical tests of Kupiec (1995) and Christoffersen (1998).

The analysis is based on the daily return of three widely known and liquid indexes from different parts of the developed world: the Nikkei (Japan and Asia), the S&P 500 (North American) and the DJ Euro Stoxx 50 (Europe).

Keywords: *Value at Risk*, Volatility, GARCH, Extreme Value Theory

JEL Classification: C10, G10, G17

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Prof. José Dias Curto pela orientação que me deu ao longo da realização desta tese.

Quero agradecer também aos meus pais pelo apoio incondicional que sempre me deram.

E por fim ao Diogo pelo incentivo que me deu para que este trabalho chegasse ao fim.

A todos o meu muito obrigado!

Índice

Resumo.....	II
Abstract	III
1. Introdução.....	1
2. <i>Value at Risk</i>	3
2.1 A origem do <i>Value at Risk</i>	3
2.2 Definição formal de <i>Value at Risk</i>	4
2.3 Métodos para estimar o VaR.....	5
2.4 Abordagem paramétrica.....	6
3. Estimação do VaR.....	7
3.1 Média da distribuição	7
3.2 Desvio padrão da distribuição	7
3.2.1 GARCH	8
3.2.2 GJR.....	10
3.2.3 EGARCH.....	10
3.2.4 EWMA	11
4. Teoria dos Valores Extremos.....	12
4.1 Introdução	12
4.2 Teoria.....	12
4.2.1 Distribuição Generalizada de Valores Extremos.....	13
4.2.1.1 Escolha dos máximos	15
4.2.2 Distribuição Generalizada de Pareto.....	15
4.2.2.1 Escolha do limite da cauda	17
4.3 Estimação dos parâmetros.....	18
4.3.1 Estimação do índice de cauda (ξ).....	18
4.4 Estimação do VaR	21

4.4.1 GEV.....	21
4.4.2 GPD.....	22
5. <i>Backtesting</i>	23
5.1 Teste de Kupiec (Kupiec, 1995).....	24
5.2 Teste de Christoffersen (Christoffersen, 1998).....	25
6. Resultados.....	28
6.1 Caracterização dos dados.....	28
6.2 Caracterização das amostras.....	29
6.3 Estimação dos modelos GARCH.....	31
6.3.1 ARMA - GARCH.....	31
6.3.2 ARMA - EGARCH.....	33
6.3.3 ARMA - GJR.....	34
6.3.4 EWMA.....	35
6.4 Estimação dos Parâmetros das Distribuições de Valores Extremos.....	35
6.4.1 GEV.....	35
6.4.2 GPD.....	36
7. Previsão.....	38
8. <i>Backtesting</i>	43
9. Conclusões.....	45
Bibliografia.....	47

1. Introdução

Nos dias de hoje, o controlo, a gestão e a previsão do risco fazem parte do mundo financeiro. A gestão do risco de mercado ao qual as instituições financeiras estão expostas tornou-se num importante instrumento para as entidades de regulação. A evidência disso é a crescente importância dada pelo *Bank of International Settlement (Basel Committee)* em impor o cumprimento do capital adequado para as instituições financeiras baseado no risco em que estas incorrem.

Esta crescente preocupação em medir o risco está intimamente relacionada tanto com os desastres financeiros que ocorreram nas últimas décadas (Lehman Brothers, Barings, Orange County, Metallgesellschaft, entre outros), onde se verificaram avultadas perdas, como com a crescente inovação e complexidade dos produtos financeiros, em particular os derivados.

O risco pode ser entendido como a possibilidade de ocorrência de movimentos desfavoráveis no valor de determinado activo. De acordo com a literatura financeira, o risco pode ser repartido por vários tipos, consoante a sua natureza: risco de crédito, risco de taxa de juro, risco de liquidez, risco operacional, entre outros. Este trabalho foca-se no risco de mercado, que está associado à alteração no valor dos activos devido a variações nas condições de mercado, como por exemplo, variações nas taxas juro, no preço de mercadorias, alterações de indicadores económicos, entre outros.

A medida mais utilizada para quantificar o risco de mercado designa-se por *Value at Risk (VaR)* e foi desenvolvida pelo departamento de estudos globais da J.P. Morgan Chase, com o objectivo de sumariar numa medida única a perda máxima esperada para um activo ou uma carteira de activos, com determinada probabilidade e num determinado horizonte temporal. Tendo sido adoptado como medida de referência para quantificar o risco de mercado devido à sua fácil interpretação e à facilidade em resumir este tipo de risco.

Nesta tese pretende-se verificar a adequação de alguns modelos de referência na literatura para a modelação e estimação do *Value at Risk*. Para isso consideram-se os modelos de heteroscedasticidade condicional: GARCH, EGARCH, GJR, EWMA e a teoria dos valores extremos através das distribuições GEV (*Generalized Extreme Value Distribution*) e GPD (*Generalized Pareto Distribution*).

Este trabalho encontra-se dividido em nove capítulos. Nos primeiros quatro serão descritos os fundamentos teóricos necessários para a estimação do VaR: definição formal de VaR, descrição dos modelos econométricos e breve referência à teoria dos valores extremos.

O capítulo 5 centra-se na metodologia de validação dos modelos, através da técnica de *backtesting*, com recurso a testes de Kupiec (1995) e de Christoffersen (1998).

Nos capítulos 6 e 7 explicam-se os procedimentos utilizados para a estimação dos modelos e comentam-se os resultados obtidos.

Por fim são apresentados os resultados de *backtesting* aos modelos estimados e uma breve conclusão.

2. Value at Risk

2.1 A origem do Value at Risk

A necessidade de quantificar o risco ao qual as instituições financeiras estão expostas levou ao desenvolvimento de uma métrica simples, objectiva e de fácil interpretação denominada por *Value at Risk*.

O termo *Value at Risk* (VaR) teve a sua origem na década de 80, devendo-se a Till Guldemann, então responsável pelo departamento de estudos globais da J.P. Morgan, que promoveu internamente o VaR como uma medida de quantificação do risco.

No início dos anos 90 verificou-se uma crescente aposta no mercado de derivados, o que colocou muitas instituições financeiras em sérios riscos, levando mesmo à falência de algumas, entre elas o banco de investimento inglês Barings, conduzindo também à necessidade de regulamentar e quantificar o risco que as instituições incorrem.

No mês de Julho de 1993, numa conferência sobre o tema gestão de risco, Guldemann demonstrou o sistema do VaR utilizado na J.P.Morgan, criando um elevado interesse entre a audiência. Em 1994 é publicado, pela primeira vez, a metodologia utilizada para estimar o VaR e dois anos mais tarde é apresentado um software de gestão de risco, RiskMetrics, desenvolvido pela J.P.Morgan, tornando-se a referência para a determinação do VaR.

Os acontecimentos vividos no início dos anos 90 provocaram uma maior preocupação entre as entidades reguladoras e de supervisão do sistema financeiro. Com o objectivo de reforçar a credibilidade e a segurança do sector, foi publicado em Janeiro de 1996 um Complemento ao Acordo de Basileia de 1988, conhecido como *Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks*, com o objectivo de alargar os requisitos de fundos próprios dos bancos explicitamente para a cobertura do risco de mercado. Este acordo permitia a utilização de duas abordagens: a *standard* e a utilização de modelos internos, sendo esta última baseada na metodologia VaR.

O VaR tornou-se assim a medida de referência mais utilizada para quantificar o risco de mercado e para determinação do capital necessário a afectar face aos riscos incorridos, apresentando diversas vantagens face a outras métricas, como por exemplo: a quantificação, de forma agregada, do risco de uma carteira de activos sem a necessidade de pressupostos muito fortes; a possibilidade de comparar posições detidas em

diferentes mercados financeiros, o que é essencial devido à diversificação e internacionalização dos activos financeiros e a possibilidade de avaliar a performance de uma carteira de activos através da relação risco-rendibilidade.

2.2 Definição formal de *Value at Risk*

O VaR pode ser definido formalmente como a maior (ou pior) perda esperada de uma carteira de activos que não será excedida com um determinado nível de confiança $(1 - \alpha)$ e durante um determinado período de tempo:

$$Prob [\Delta V < -VaR] = \alpha \quad (1)$$

sendo ΔV a variação de valor e α o nível de significância.

Definindo a rendibilidade logarítmica de uma carteira de activos como:

$$r_t = \log V_t - \log V_{t-1} \quad (2)$$

onde V_t representa o valor da carteira ou de um activo no momento t .

É possível definir o VaR a partir da função de distribuição das taxas de rendibilidade:

$$Prob [r_t < -VaR_t^*] = \alpha \quad (3)$$

De acordo com (3) pode ser definido o VaR em função das taxas de rendibilidade e eliminar o sinal negativo pois estaremos sempre interessados em determinar uma perda, sendo um valor negativo por definição: $Prob[r_t < VaR_t^*] = \alpha$.

Em termos de valores monetários o VaR será facilmente estimado a partir do VaR^* utilizando-se a seguinte expressão:

$$VaR_t = VaR_t^* * V_{t-1} \quad (4)$$

onde V_{t-1} representa o valor da carteira no instante $t - 1$.

É também possível definir o VaR^* em termos da função densidade de probabilidade da distribuição de probabilidades subjacente ($f(\bullet)$), sendo representado pelo seu quantil, ou seja, pela massa de probabilidade à esquerda de VaR_t^* :

$$Prob[r_t < VaR_t^*] = \alpha \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{VaR_t^*} f(r_t) dr_t = \alpha \quad (5)$$

Neste último será necessário assumir uma distribuição para as taxas de rendibilidade, geralmente as distribuições normal ou t-student.

A estimação do VaR é consideravelmente simplificada se assumirmos que as taxas de rendibilidade pertencem a uma família de distribuições paramétricas como será apresentado na secção 2.4 Abordagem paramétrica.

2.3 Métodos para estimar o VaR

Existem várias metodologias para estimar o VaR, sendo geralmente divididas em paramétricas e não paramétricas e distinguem-se pela hipótese que é feita em relação à distribuição de probabilidades das taxas de rendibilidade do activo ou activos considerados.

Na abordagem não paramétrica não se assume uma distribuição teórica para as taxas de rendibilidade sendo a estimação do VaR baseada na distribuição empírica respectiva. Quando se opta pela abordagem paramétrica, presume-se que as taxas de rendibilidade seguem uma determinada distribuição teórica (sendo a distribuição normal a mais frequentemente assumida) com a conseqüente necessidade de estimar os respectivos parâmetros.

Na abordagem não paramétrica a metodologia mais utilizada para estimar o VaR é a Simulação Histórica. Esta metodologia não requer nenhum pressuposto sobre a distribuição das taxas de rendibilidade, baseando-se apenas nos valores históricos respectivos. O VaR corresponderá ao quantil da distribuição associado ao nível de confiança pretendido:

$$VaR_t = V_{t-1} * q_\alpha \quad (6)$$

onde V_{t-1} representa o valor no momento $t - 1$ e q_α é o quantil empírico de ordem α .

Esta metodologia apresenta a vantagem de ser conceptualmente simples, fácil de implementar e de não depender de nenhum pressuposto. No entanto, tem a desvantagem de não captar os *clusters* de volatilidade e de considerar que o passado representa o futuro imediato, ou seja, caso a volatilidade actual seja superior à volatilidade histórica

do período da amostra, o risco e conseqüentemente o VaR será subestimado e poderão ocorrer perdas superiores às estimadas.

Na abordagem paramétrica, assume-se que as taxas de rendibilidade seguem uma distribuição paramétrica, geralmente a distribuição normal, estando a estimação do VaR condicionada à estimação dos parâmetros da distribuição.

Neste trabalho será apenas considerada a abordagem paramétrica, pela sua simplicidade e porque produz estimativas de VaR mais precisas comparativamente com métodos não paramétricos (Jorion, 2007), desde que a distribuição considerada se ajuste à série de dados.

2.4 Abordagem paramétrica

Na abordagem paramétrica o VaR pode ser estimado directamente a partir da distribuição das taxas de rendibilidade. Considerando que as taxas de rendibilidade de um activo ou de uma carteira de activos têm distribuição normal com média μ e desvio padrão σ , então o VaR* obtêm-se através da estandardização:

$$Z_{\alpha} = \frac{VaR^* - \mu}{\sigma} \text{ resultando } VaR^* = \mu + Z_{\alpha} \sigma$$

em que Z_{α} é o quantil da distribuição normal estandardizada correspondente à probabilidade α .

Por definição, o VaR* é uma rendibilidade negativa, localizando-se na aba esquerda da distribuição. No entanto, caso a distribuição das taxas de rendibilidade seja simétrica, como é o caso da distribuição normal, existirá a mesma massa de probabilidade em ambas as abas da distribuição, podendo considerar-se o valor positivo do VaR*.

Com recurso à expressão (4) obtemos assim o valor do VaR:

$$VaR = VaR_t^* * V_{t-1} = V_{t-1} (\mu + Z_{\alpha} \sigma) \quad (7)$$

em que V_{t-1} representa o valor da carteira no momento $t - 1$, Z_{α} representa o quantil da distribuição paramétrica considerada (geralmente $N(0,1)$), μ e σ são a média e o desvio padrão das taxas de rendibilidade.

Para horizontes temporais curtos pode assumir-se o pressuposto que a média das taxas de rendibilidade da distribuição é zero, obtendo-se o valor do VaR directamente do

desvio padrão do activo ou da carteira de activos multiplicado pelo quantil, que dependerá do nível de confiança pretendido.

3. Estimação do VaR

Para estimar o VaR na abordagem paramétrica é necessário conhecer a média e o desvio padrão da distribuição das taxas de rendibilidade. Para isso, são apresentadas nas secções seguintes diferentes metodologias para estimar ambos os parâmetros.

3.1 Média da distribuição

Relativamente à média da distribuição dois pressupostos podem ser tomados: um, onde se assume que a média das taxas de rendibilidade é igual a zero, considerando que num horizonte de curto prazo o valor médio destas tenderá para zero; e outro onde é considerado que a média não é igual a zero e varia no tempo, designando-se por r_t .

Para estimar a média condicional das taxas de rendibilidade em cada período (r_t) recorre-se à metodologia de Box-Jenkins e aos modelos ARMA (*Autoregressive Moving Average*):

$$r_t = \alpha + \sum_{i=1}^p \gamma_i r_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t \quad (8)$$

onde ε_t segue um processo ruído branco (*white noise*) com $E(\varepsilon_t) = 0$ e $E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$ e $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ para $t \neq s$ e $\alpha, \gamma_i, \theta_i$ são os parâmetros do modelo.

3.2 Desvio padrão da distribuição

Há algumas décadas atrás admitia-se que a média das taxas de rendibilidade dos activos financeiros variava com o tempo mas a variância mantinha-se constante (é o pressuposto da homocedasticidade). No entanto, a crescente preocupação em medir o risco conjugada com a percepção de que a volatilidade varia ao longo do tempo motivou o desenvolvimento de diversos modelos de séries cronológicas que podem ser utilizados na respectiva previsão.

A volatilidade de uma carteira de activos ou mesmo de um activo não é constante, constituindo os *clusters* de volatilidade, uma das características das séries de taxas de rendibilidade dos activos financeiros, ou seja, grandes variações tendem a ser seguidas por grandes variações assim como pequenas variações tendem a ser seguidas de pequenas variações, justificando-se assim que a volatilidade das rendibilidades dos

activos financeiros varie com o tempo (*time-varying*), existindo períodos de maior e menor volatilidade e, conseqüentemente, de maior e menor risco.

A previsão da volatilidade é a parte mais importante na avaliação do risco (RiskMetrics, 2007), sendo fundamental em toda a área financeira. Tal como referi anteriormente, existe uma relação directa entre a volatilidade e o VaR: quando a volatilidade aumenta o VaR tenderá a aumentar e torna-se necessário estimar a volatilidade para assim prever o valor em risco de determinado activo.

Alguns dos modelos mais utilizados para modelar a volatilidade condicional são descritos nas secções seguintes: GARCH, GJR, EGARCH e EWMA.

3.2.1 GARCH

O modelo *Autoregressive Conditional Heteroskedastic* (ARCH) desenvolvido por Engle em 1982 foi pioneiro em considerar que a variância dos erros não é constante mas sim condicionalmente heterocedástica.

O modelo ARCH considera que a variância condicional (σ_t^2) é função dos erros passados ao quadrado (ε_{t-i}^2):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1,q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (9)$$

sendo α_0 e α_i parâmetros do modelo.

Tradicionalmente, considera-se que a variável aleatória ε_t segue uma distribuição normal. No entanto, outras distribuições podem ser consideradas, como por exemplo a distribuição t-student.

A escolha de outras distribuições que não a normal deve-se ao facto das séries de taxas de rendibilidade apresentarem caudas mais pesadas que a distribuição normal, ou seja, tendem a apresentar mais observações nas caudas do que seria de esperar num comportamento Gaussiano. Caso se considere que os erros seguem uma distribuição normal e esta não seja adequada à série de dados podemos estar a subestimar o risco.

Em 1986, Bollerslev (Bollerslev, 1986) introduziu uma generalização ao modelo ARCH, o modelo *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*

(GARCH), tornando-se um modelo muito utilizado para descrever a variância condicional, por ser um modelo parcimonioso e fácil de estimar (Engle, 2001).

O modelo GARCH, uma extensão do modelo ARCH, assume que a variância dos retornos é uma variância condicional, isto é, o seu valor no período t está condicionado ao valor nos períodos de tempos anteriores.

De acordo com o modelo GARCH, a variância condicional do período t (σ_t^2) é função dos erros passados ao quadrado (ε_{t-i}^2) mas também dos seus próprios valores passados (σ_{t-j}^2):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (10)$$

sendo α_0, α_i e β_j parâmetros do modelo.

De um modo geral, o modelo GARCH(1,1) é suficiente para descrever a volatilidade observada de séries de taxas de rendibilidade dos activos financeiros, não sendo necessário mais defasamentos temporais.

Este modelo é largamente aplicado a séries de dados financeiros por conseguir modelar alguns dos factos estilizados das distribuições empíricas das taxas de rendibilidade dos activos financeiros nomeadamente, o *volatility clustering*, o excesso de curtose (maior concentração e maior peso nas caudas das distribuições do que na distribuição normal, característico de distribuições leptocúrticas) e a existência de heteroscedasticidade condicional dos erros.

Outros factos empíricos, designados vulgarmente por factos estilizados, são captados por extensões do modelo GARCH como será referido adiante.

O modelo GARCH é um modelo simétrico, ou seja, o impacto na volatilidade de um choque negativo é o mesmo que o impacto na volatilidade de um choque positivo, o que segundo Bollerslev et al. (1994), não se verifica nas distribuições das taxas de rendibilidade dos activos financeiros. Devido a esta evidência empírica e ao facto de as variações dos preços estarem negativamente correlacionadas com as variações na volatilidade (*leverage effect*), foram desenvolvidos extensões ao modelo GARCH,

nomeadamente os modelos EGARCH (Nelson, 1991) e GJR (Glosten, Jagannathan e Runkle, 1993) na tentativa de captar esta característica das séries de dados financeiros.

3.2.2 GJR

O modelo GJR é um simples modelo GARCH ao qual é adicionado um termo, I_{t-1} , com o objectivo de modelar a assimetria existente na volatilidade que decorre do diferente impacto das notícias positivas ou negativas, ou seja, uma notícia negativa tenderá a ter um efeito na volatilidade maior do que uma notícia da mesma amplitude mas de cariz positivo, considerando sempre uma volatilidade mínima que resulta da inexistência de notícias:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 I_{t-1} \quad (11)$$

onde $I_{t-1} = \begin{cases} 1 & \text{se } r_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{restantes casos} \end{cases}$

onde $\alpha_0, \alpha_i, \beta_j$ e γ são parâmetros do modelo.

O impacto das boas notícias é medido pelos parâmetros α_i enquanto que o impacto das más notícias é medido por $\alpha_i + \gamma$.

Se $\gamma > 0$, o *leverage effect* existe e as más notícias provocam um acréscimo na volatilidade.

3.2.3 EGARCH

O modelo EGARCH também pretende captar o *leverage effect* e apresenta a característica de não ser necessário impor artificialmente a não negatividade dos parâmetros do modelo, devido ao facto de a modelação ser efectuada sobre o logaritmo da volatilidade e não directamente sobre a volatilidade:

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i \ln(\sigma_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^q \left(\gamma_j \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-j}} + \alpha_j \left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-j}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right| \right) \quad (12)$$

onde $\omega, \beta_i, \gamma_j$ e α_j são parâmetros do modelo.

O parâmetro γ reflecte a relação entre as variações do preço dos activos e as variações na volatilidade dos mesmos e caso esta relação seja negativa, γ será negativo.

3.2.4 EWMA

O modelo *Exponentially Weight Moving Average* (EWMA) é o modelo base do conhecido software de gestão de risco RiskMetrics, desenvolvido pela J.P. Morgan.

O EWMA atribui diferentes ponderações às observações em função da sua distância em relação à observação mais recente, ou seja, atribui um maior peso às observações mais recentes em detrimento das observações mais antigas, admitindo que as volatilidades mais recentes têm uma maior influência na previsão da volatilidade futura que as volatilidades mais remotas.

O peso atribuído às observações decai exponencialmente ao longo do tempo, sendo que o peso atribuído às observações mais recentes versus observações mais antigas é medido através do *decay factor* (λ):

$$\sigma_t^2 = (1 - \lambda) \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j (r_{t-j} - \bar{r})^2 \quad (13)$$

onde \bar{r} é a taxa de rendibilidade média esperada.

O modelo EWMA é sobretudo utilizado pela sua simplicidade, pela quase ausência de pressupostos e pela necessidade de estimação de um único parâmetro, o *decay factor*.

Apesar da possibilidade de estimação de λ , o RiskMetrics recomenda a utilização de um *decay factor* de 0.94 para dados diários e 0.97 para dados mensais, sendo considerado como o factor óptimo para a previsão da volatilidade.

4. Teoria dos Valores Extremos

Para além dos modelos da família ARCH, para estimar a volatilidade e consequentemente o VaR, foi desenvolvido em 1997 por Danielsson e Vries, um modelo semi-paramétrico baseado nos valores extremos das distribuições.

4.1 Introdução

Os modelos econométricos apresentados até agora para estimar o VaR têm por base a assumpção de que as taxas de rendibilidade seguem uma distribuição teórica conhecida, geralmente as distribuições normal ou t-student, verificando-se um bom ajustamento destas distribuições às observações intermédias das taxas de rendibilidade. No entanto, com base em séries históricas, e tendo em conta o excesso de curtose evidenciado pelas distribuições empíricas, a probabilidade de ocorrência de eventos raros ou extremos é subestimada quando se consideram essas distribuições teóricas para modelar as taxas de rendibilidade dos activos financeiros.

Nesse sentido, e com o objectivo de estimar a probabilidade de ocorrência de valores extremos das distribuições, Danielsson e Vries (1997) propuseram um método semi-paramétrico para modelar as caudas da distribuição baseado na Teoria dos Valores Extremos (EVT), assumindo que a distribuição empírica apresenta um comportamento e propriedades específicas nas caudas, diferentes das características verificadas no centro da distribuição.

De acordo com Danielsson e Vries (1997), a influência do centro da distribuição na modelação dos extremos pode ser minimizada se as caudas forem modeladas de forma independente da restante distribuição.

Segundo Jorion (2007) a Teoria dos Valores Extremos tem como objectivo modelar as caudas da distribuição das taxas de rendibilidade, não sendo adequada para modelar o centro da distribuição.

4.2 Teoria

Para modelar os valores extremos da distribuição empírica das taxas de rendibilidade são utilizadas geralmente duas famílias de distribuições: a distribuição Generalizada de Valores Extremos (*Generalized Extreme Value*, GEV), onde se admite que a distribuição dos máximos de uma variável aleatória converge para uma de três

distribuições que constituem casos particulares e a distribuição Generalizada de Pareto (*Generalized Pareto Distribution*, GPD), que modela a distribuição dos excessos acima de um dado valor (limite).

A EVT é usualmente apresentada em função dos máximos mas o mesmo se aplica aos mínimos visto que: $\min(X_1, X_2, \dots, X_n) = -\max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. No entanto, o nosso objectivo é estimar a perda potencial máxima, interessando apenas os valores mínimos.

Nas secções seguintes são apresentadas as especificidades de cada família de distribuições: GEV e GPD.

4.2.1 Distribuição Generalizada de Valores Extremos

Admitindo que X_1, X_2, \dots, X_n representa uma sequência de variáveis aleatórias estacionárias, independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com a mesma função de distribuição $F_{X_i}(x) = P(X_i \leq x)$ e que $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é uma amostra do processo representado pelas variáveis X_i , pode definir-se M_n como sendo o máximo de cada conjunto de amostras, não sobrepostas e com n observações cada: $M_n = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Como se pode depreender, a distribuição exacta das observações máximas (F^n) é degenerada, ou seja, atribui toda a massa de probabilidade a um único ponto, sendo necessário transformá-la com um parâmetro de escala ($a_n > 0$) e de localização ($b_n \in \mathfrak{R}$), numa distribuição estandardizada dos valores máximos não-degenerada à medida que $n \rightarrow \infty$:

$$F^n \left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \right]$$

O teorema fundamental de Fisher-Tippet (1928) ou teorema do Valor Extremo, mais tarde formalizado por Gnedenko (1943) demonstra que mesmo desconhecendo-se a distribuição exacta de X_i é possível estabelecer a distribuição limite de M_n , desde que existam constantes normalizadoras ($a_n > 0$ e $b_n \in \mathfrak{R}$) e uma distribuição não degenerada tal que:

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow{d} H(x) \text{ com } n \rightarrow \infty$$

onde \xrightarrow{d} indica convergência em distribuição e M_n representa o valor máximo de X em cada bloco de observações.

Prova-se assim que F pertence ao domínio de atracção do máximo de H ($F \in \text{MDA}(H)$) e $H(x)$ pertence ao domínio de atracção de uma das distribuições de valores extremos: Gumbel, Weibull ou Fréchet.

Em suma, o teorema de Fisher-Tippett-Gnedenko (FTG) estabelece a GEV como a distribuição limite para uma sequência de máximos normalizados de variáveis aleatórias i.i.d e o domínio de atracção de cada uma das três distribuições depende das caudas da função densidade de probabilidade da distribuição subjacente, que são usualmente classificadas como: leves, pesadas ou curtas.

A função de distribuição de uma variável aleatória X com distribuição $\text{GEV}(\xi, \mu, \sigma)$ é dada pela seguinte expressão:

$$G(x) = \exp\left(-\left[1 + \xi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right]\right) \quad (14)$$

onde os parâmetros μ e σ representam a localização e a escala, respectivamente e ξ representa o índice de cauda, parâmetro de achatamento que especifica a densidade da cauda da distribuição.

As constantes a_n e b_n referidas para normalização dos máximos dos conjuntos de observações são incorporadas nos parâmetros de localização e escala da GEV.

A distribuição Generalizada de Valores Extremos é uma generalização de três casos particulares (distribuição Gumbel, Weibull ou Fréchet) que se distinguem pelo sinal do parâmetro ξ . Este parâmetro mede a rapidez com que a cauda se aproxima de zero, quanto mais densa for a cauda mais lenta é a velocidade e menor será o índice. Se $\xi = 0$ estamos na presença de uma distribuição Gumbel, típica de distribuições com caudas leves. Se $\xi < 0$ estamos perante uma distribuição Weibull onde não existe qualquer observação para além de um dado limite, definido como o último ponto da distribuição. $\xi > 0$ corresponde à distribuição Fréchet, sendo esta a que melhor caracteriza as caudas

pesadas e conseqüentemente as distribuições das taxas de rendibilidade diárias de activos financeiros, visto tratar-se de um facto estilizado destas distribuições.

A distribuição GEV é muito importante pois qualquer que seja a distribuição original, a distribuição dos máximos normalizados (valores extremos) pertencerá a uma destas três distribuições que constituem casos particulares da GEV.

4.2.1.1 Escolha dos máximos

Para estimar a distribuição GEV é necessário definir o máximo amostral e para isso divide-se a amostra em blocos com (aproximadamente) o mesmo número de observações, sem sobreposição e escolhe-se o máximo de cada bloco, assumindo-se que as observações são i.i.d.

Este método de escolha dos máximos designa-se por *Block Maxima* e apresenta algumas deficiências devido à existência de períodos de maior volatilidade seguidos de períodos de menor volatilidade. Ao ser escolhido o valor máximo de cada bloco pode escolher-se máximos de blocos de observações que, caso estivessem presentes em outros blocos não seriam escolhidos. Da mesma forma, podem não ser escolhidas observações de elevado valor devido a não serem valores máximos no conjunto onde estão inseridas, levando assim à perda de informação dessas observações. Gera-se assim uma problemática em torno de qual deverá ser o número de observações óptimo em cada bloco, não existindo uma resposta de aceitação generalizada.

Em finanças, para além de ser importante conhecer o comportamento dos máximos de uma distribuição pode também ter interesse conhecer como se comporta uma variável acima de determinado valor. Nesse sentido, e para evitar a perda de informação resultante da abordagem *Block Maxima* é apresentada na secção seguinte a Distribuição Generalizada de Pareto que centra a sua análise no comportamento das observações que excedem um determinado limite, modelando-as através da abordagem *Peaks-over-Threshold* (POT).

4.2.2 Distribuição Generalizada de Pareto

Para além da GEV, a GPD também é uma distribuição que se enquadra na Teoria dos Valores Extremos, tendo como objectivo a modelação das observações que excedem um determinado limite.

Definindo o limite como u , a função de distribuição dos excessos dos valores de x em relação a u ($y = x - u$) é dada pela seguinte expressão:

$$F_u(y) = P(Y \leq y | X > u) = P(X - u \leq y | X > u) = \frac{F(y + u) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (15)$$

$F_u(y)$ representa a probabilidade do valor x não ultrapassar o limite u em mais de y unidades, sabendo que o valor de x é maior do que u .

Como $x = y + u$, para $X > u$ é possível obter a expressão de $F(x)$:

$$F(x) = [1 - F(u)]F_u(y) + F(u) \quad (16)$$

Segundo o teorema de Balkema e de Haan (1974) e Pickands (1975), para valores de u suficientemente grandes, a função de distribuição dos excessos pode ser aproximada por uma distribuição Generalizada de Pareto, ou seja, à medida que se aumenta o valor a partir do qual se avaliam os excessos, a distribuição $F_u(y)$ converge para uma GPD.

Com recurso à expressão (16) e ao teorema Balkema-Haan-Pickands pode-se escrever a expressão aproximada da função de distribuição dos valores de X acima do limite u :

$$F(x) \approx [1 - F(u)]W_\xi(x) + F(u) \quad (17)$$

onde $W_\xi(x)$ representa a distribuição Generalizada de Pareto.

A função de distribuição da GPD é dada pela seguinte expressão:

$$W_\xi(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{x - u}{\sigma}\right)^{-1/\xi}, & \left(1 + \xi \frac{x - u}{\sigma}\right) > 0, \sigma > 0, \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x - u}{\sigma}\right), & x \geq u, \sigma > 0, \xi = 0 \end{cases} \quad (18)$$

em que u , σ e ξ são parâmetros de localização (valor limite a partir do qual se considera a cauda da distribuição), de escala e de achatamento, respectivamente.

A GPD é em geral utilizada para modelar as caudas de uma outra distribuição e tem as seguintes distribuições como casos particulares:

- Quando $\xi=0$ e $u=0$, a GPD é equivalente à distribuição exponencial, que é a distribuição limite da GPD quando $\xi \rightarrow \infty$;
- Se $\xi < 0$ então a GPD equivale à distribuição Beta;

- Quando $\xi > 0$ as distribuições de Pareto são casos particulares da GPD, sendo a distribuição Uniforme $U(0, \sigma)$ um desses casos ($\xi=1$ e $u=0$).

4.2.2.1 Escolha do limite da cauda

A escolha do limite a partir do qual se define o início da cauda da distribuição, e consequentemente o ponto a partir do qual a GPD modela as observações, é a maior problemática em torno do método *peaks-over-threshold*. Este limite deve ser suficientemente elevado para garantir que a distribuição limite dos excessos é uma GPD, sendo fundamental porque é com base nestas mesmas observações que se baseia a estimação do parâmetro ξ .

A escolha do limite u deverá ter em conta o *tradeoff* entre o enviesamento e a variância do estimador, ou seja, se u for muito alto significa que o número de observações usadas na estimação é baixo e consequentemente a variância do estimador tenderá a ser alta. Quando o valor de u é baixo, considerar $W_\xi(x)$ como uma aproximação para $F_u(y)$ poderá ser pobre e como consequência, o estimador pode ser fortemente enviesado.

O limite da cauda deve ser suficientemente elevado para que a aproximação sugerida pelo teorema de Balkema-Haan-Pickands seja boa, no entanto deve ser garantido um número de observações suficiente para estimar os parâmetros desconhecidos com alguma exactidão.

Para ajudar na escolha do limite considera-se o seguinte resultado: se $X \sim W_\xi$ e $0 \leq \xi < 1$, então *the average excess function* é linear:

$$e(u) = E[X - u | X > u] = \frac{\sigma}{1 + \xi} + \frac{\xi}{1 + \xi} u, \quad u \geq 0, \quad 0 \leq \xi < 1 \quad (19)$$

Este resultado sugere que se selecciona u de forma a que a função estimada para $e(u)$, seja aproximadamente linear:

$$e(u) = \frac{1}{N(u)} \sum_{j=1}^n \max\{x_j - u, 0\} \quad (20)$$

sendo $N(u)$ o número de observações maiores que u .

Para verificar que $e(u)$ é aproximadamente linear pode-se construir o gráfico com os pontos $(x_k, e(x_k))$ onde x_1, x_2, \dots, x_n são as estatísticas de ordem, ordenadas de forma

crescente. O valor a partir do qual o gráfico parece seguir uma linha recta indica que os excessos acima desse valor u seguem uma GPD e esse valor deverá ser considerado o limite da cauda.

Em alternativa, o limite u pode ser escolhido com base no gráfico de Hill, que se obtém pela representação do estimador de Hill para a cauda da distribuição, como será referido na secção 4.4.1 *Hill-plot*.

4.3 Estimação dos parâmetros

Para caracterizar as distribuições de valores extremos será necessário estimar os parâmetros destas, para tal pode ser utilizado o Método da Máxima Verosimilhança.

No entanto, a utilização deste método está condicionada ao pressuposto que as observações amostrais são independentes.

Para que as condições de regularidade sejam satisfeitas, o parâmetro ξ deve ser maior ou igual a $-1/2$, verificando-se assim as propriedades do estimador de consistência, eficiência assintótica e normalidade.

4.3.1 Estimação do índice de cauda (ξ)

Ambas as distribuições, GEV e GPD na sua forma estandardizada dependem do índice de cauda ξ , sendo a estimação deste parâmetro de extrema importância para a caracterização das distribuições. A estimação do índice de cauda está condicionada à escolha do limite a partir do qual se decide quais as observações consideradas como extremos e à escolha do estimador. Estimador este que deve estabelecer o equilíbrio entre o enviesamento potencial e a variância.

Nesta secção são apresentados dois estimadores utilizados com esta finalidade.

4.3.1.2 Estimador de Hill (Hill, 1975)

O estimador mais utilizado para estimar o índice de cauda é o estimador de Hill proposto por Hill em 1975.

Considerando uma amostra x_1, x_2, \dots, x_n de variáveis aleatórias i.i.d. cuja função de distribuição pertence ao domínio de atracção do máximo de uma distribuição Fréchet, é possível mostrar que F tem a forma: $F(x) = x^{-\alpha} L(x)$, $x > 0$.

O estimador de Hill pode ser obtido como o estimador de máxima verosimilhança, bastando para isso considerar que $L(x) = C$ (constante) e que a função $F(x)$ é válida para um domínio onde $x > u > 0$, com $u = X_{k,n}$, limite a partir do qual se consideram as observações extremas.

O estimador de ξ , para uma amostra de tamanho n , onde k corresponde ao número de observações da cauda e ξ ao índice de cauda é:

$$\hat{\xi}(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=j}^k \ln X_{j,n} - \ln X_{k,n} \quad (21)$$

Este estimador é muito utilizado na estimação do índice de cauda pela sua simplicidade e pelas propriedades assintóticas de consistência e normalidade. Contudo, tem sido alvo de algumas críticas, entre elas a sensibilidade do estimador ao valor do limite u e conseqüentemente ao número de observações utilizadas na estimação.

Este estimador tem a particularidade de apenas ser aplicável a distribuições de caudas pesadas, não devendo ser utilizado caso se esteja na presença de distribuições com caudas curtas ou leves.

4.3.2 Estimador de Pickands (Pickands, 1975)

O estimador de Pickands é outro estimador utilizado para estimar ξ :

$$\hat{\xi}_{k,n}^{(P)} = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{X_{k,n} - X_{2k,n}}{X_{2k,n} - X_{4k,n}} \quad (22)$$

onde $X_{k,n}$ representa a k -ésima estatística de ordem superior de uma amostra de tamanho n .

Se $k \rightarrow \infty$ e $k/n \rightarrow 0$, então $\hat{\xi}_{k,n}^{(P)} \xrightarrow{P} \xi$ quando $n \rightarrow \infty$

De forma análoga ao estimador de Hill, o elemento crucial deste estimador é a escolha correcta do ponto de corte k , onde a distribuição de valor extremo se inicia que por consequência condiciona o número de observações utilizadas na estimação.

4.4 Escolha estatística de ordem k

Ambos os estimadores atrás apresentados dependem do valor de k , ou seja, da última estatística a ser considerada, valor de corte a partir do qual se inicia a cauda da

distribuição e a partir do qual a distribuição dos valores extremos começa a ser considerada.

Os estimadores apresentados são bastante sensíveis ao ponto k especialmente em amostras pequenas. A escolha do limite k deverá ter em conta o *trade off* entre a variância e o enviesamento do estimador. Caso se aumente o tamanho da amostra e consequentemente k , a variância do estimador diminuirá mas o enviesamento tenderá a aumentar. Quanto maior for k , mais observações do centro da distribuição serão utilizadas na estimação dos parâmetros da distribuição, em especial do índice de cauda, influenciando o resultado dos estimadores. O contrário também se verifica, caso o número de observações da amostra seja pequeno, a variância do estimador aumentará e o enviesamento diminuirá, sendo assim necessário estabelecer um equilíbrio.

Para encontrar o ponto k óptimo existem várias alternativas, não existindo um consenso sobre qual a melhor forma de determinar o ponto de corte. São apresentadas de seguida duas possibilidades: a primeira é o método gráfico através da observação do *Hill-plot* e a outra, o procedimento do *bootstrap* interactivo.

4.4.1 Hill-plot

Este método consiste em traçar um gráfico que representa o índice de cauda da distribuição estimado através do estimador de Hill e verificar a partir de que valor o gráfico estabiliza. Deve ser considerado como k óptimo o ponto a partir do qual o gráfico apresenta uma tendência horizontal.

O gráfico será traçado com os seguintes pontos: $\{(k, \hat{\alpha}_{k,n}^{(H)}): k = 1, \dots, n\}$.

À medida que se aumenta o ponto k , avança-se na direcção do interior da distribuição e o peso que é dado às observações da cauda é cada vez menor. Por outro lado, um valor pequeno de k incorpora um reduzido número de observações extremas e produz um estimador com elevada variância. O ponto óptimo será aquele que estabelece um equilíbrio entre o enviesamento e a variância.

4.4.2 Bootstrap interactivo

Outra alternativa para escolher o ponto óptimo para k pode ser através da minimização da função do erro quadrático médio, MSE:

$$k^* = \min \left\{ \text{MSE} \left[\left(\hat{\xi} - \xi \right)^2 \right] \right\}$$

Este método denomina-se *bootstrap*, pois consiste em escolher um valor de k inicial arbitrário, encontrar o valor de ξ e minimizar o MSE em função de k . Este procedimento deverá ser repetido sucessivas vezes até à convergência de k e ξ .

Alguns estudos referem que este método é eficaz para escolher k , no entanto deverá ser complementado com a análise visual do *Hill-plot*.

4.4 Estimação do VaR

Para estimar o VaR poderemos recorrer à expressão (5), sendo necessário estimar o quantil de ordem α da distribuição das taxas de rendibilidade.

Nas secções seguintes serão apresentadas duas estimativas de quantis, para cada uma das distribuições de valores extremos, GEV e GPD.

4.4.1 GEV

Partindo da expressão (21) obtém-se o estimador das caudas da distribuição:

$$\hat{F}(u) \approx \frac{k}{n} \left(\frac{x}{X_{k,n}} \right)^{-\hat{\xi}} \quad (23)$$

onde k corresponde ao número de observações na cauda da distribuição, n o número de observações na amostra, $X_{k,n}$ é o limite a partir do qual se consideram os excessos e ξ o índice de cauda.

Consequentemente, obtém-se o estimador para os quantis (α), sendo esta a expressão utilizada para estimar o VaR:

$$\hat{q}_\alpha = \left(\frac{n}{k} (1 - \alpha) \right)^{-\hat{\xi}} X_{k,n} \quad (24)$$

4.4.2 GPD

Com recurso à expressão (17) obtém-se o estimador para as caudas da distribuição, sendo função do número total de observações maiores que u , $N(u)$ e do número de observações na amostra, n :

$$\hat{F}(x) = \left[1 - \frac{n - N(u)}{n} \right] W_{\hat{\xi}}(x - u) + \frac{n - N(u)}{n} = 1 + \frac{N(u)}{n} (W_{\hat{\xi}}(x - u) - 1) \quad (25)$$

A estimativa para o quantil será obtida partindo da expressão anterior considerando x o quantil da distribuição, obtendo-se assim a estimativa para o quantil e por consequência a expressão utilizada para determinar o VaR:

$$\hat{q}_{\alpha} = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left[\left(\frac{n}{N(u)} (1 - \alpha) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right] \quad (26)$$

5. *Backtesting*

Após a estimação de um modelo é necessário verificar a sua adequação face aos dados observados, ou seja, validar o modelo. Para validar um modelo pode-se recorrer a diversos métodos, entre eles o *backtesting*, o *stress test*, entre outros.

O foco deste capítulo é o *backtesting*, que consiste em replicar as condições de mercado do passado e comparar a actuação do modelo com os dados observados, permitindo assim verificar se as projecções do modelo estão em linha com as perdas/ganhos realizados.

O VaR pode ser estimado com recurso a diversos modelos estatísticos, podendo ser consideradas diversas hipóteses mais ou menos fortes. Porém, para que um modelo seja útil é necessário que as estimativas obtidas sejam consistentes e apropriadas face ao valor em risco. Uma das formas de verificar a adequação do modelo é validar sistematicamente a sua performance, por exemplo através da técnica de *backtesting*.

Este método, para além de comparar os resultados do modelo face aos verificados permite também inferir sobre a adequação dos pressupostos assumidos, verificar se existem vulnerabilidades que possam ser corrigidas, se o modelo é adequado para prever acontecimentos imprevistos e/ou se será necessário rever a metodologia adoptada.

O *backtesting* é crucial para o Acordo de Basileia, visto que o requisito de capital poderá ser determinado com recurso a modelos internos. Sendo necessário verificar se os modelos são adequados e rigorosos na previsão das perdas, assegurando que o capital disponível é suficiente para fazer face a eventuais prejuízos.

Para que um modelo de VaR seja utilizado no cálculo do capital regulamentar é necessário que esse modelo seja aceite pelo Comité de Basileia (ou pelo órgão regulador do país), estando condicionado à comprovação da sua adequação para quantificar o risco de mercado. Basileia impõe a realização de *backtesting* ao modelo, recomendando que o número de vezes em que a perda verificada ultrapasse a perda estimada não seja superior a 4, numa amostra anual.

Se o modelo estiver correctamente calibrado e for adequado, o número de observações inferiores à estimativa do VaR deverá estar de acordo com o nível de confiança assumido.

Nas secções seguintes são apresentados os testes estatísticos utilizados para o *backtesting* dos modelos: o teste de Kupiec (1995) e o teste de Christoffersen (1998).

5.1 Teste de Kupiec (Kupiec, 1995)

Um método simples de verificar a adequação do modelo centra-se em quantificar o número de vezes em que o VaR estimado foi excedido pelas taxas de rendibilidade efectivamente verificadas e comparar esse número com o nível de significância estabelecido para o modelo (α).

Definindo N como o número de vezes em que o VaR estimado superou as taxas de rendibilidade observadas (número de excepções) de uma amostra de T observações, $\frac{N}{T} = \pi$ será a taxa de falhas (proporção de excepções na amostra). Idealmente, esta taxa deverá ser uma medida não enviesada de α e deverá convergir para α à medida que o tamanho da amostra aumenta.

Este método não toma em consideração a distribuição das taxas de rendibilidade nem a dimensão de valor de VaR que é excedido mas apenas a frequência com que este ocorre, podendo definir-se como uma sucessão binária:

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{se } r_t < VaR_t^*(\alpha) \\ 0 & \text{se } r_t \geq VaR_t^*(\alpha) \end{cases}^1$$

O teste de Kupiec é um teste LR (teste de razão de verosimilhanças):

$$LR_{uc} = -2 \ln[(1 - \alpha)^{T-N} \alpha^N] + 2 \ln[(1 - \pi)^{T-N} \pi^N] \sim \chi^2(1) \quad (27)$$

Este rácio segue assintoticamente uma distribuição qui-quadrado com um grau de liberdade sobre a hipótese nula:

$$H_0: E[I_t] \equiv \pi = \alpha$$

onde π representa a verdadeira taxa de excepções e α o nível de significância previsto no modelo.

¹ VaR* é por definição um valor negativo

Kupiec definiu regiões de não rejeição com um nível de confiança de aproximadamente 95% do teste, para diferentes níveis de confiança e para diferentes conjuntos de observações, como é possível verificar na Tabela 1.

Se o valor de LR_{uc} , para um nível de confiança de 95% for superior a 3,841 rejeita-se a hipótese nula e o modelo não é adequado para estimar o VaR. Sempre que é observado um número de exceções sistematicamente superiores a α diz-se que o modelo subestima o VaR, caso contrário, se for sistematicamente inferior, o modelo sobrestima o VaR, podendo estar a ser alocado requisitos de capital superiores aos necessários para fazer face a uma situação inesperada.

Probabilidade π	Nível confiança $1-\alpha$	Região de não rejeição para N		
		T= 252 dias	T= 510 dias	T= 1000 dias
1%	99%	$N < 7$	$1 < N < 11$	$4 < N < 17$
2,50%	97,50%	$2 < N < 12$	$6 < N < 21$	$15 < N < 36$
5%	95%	$6 < N < 20$	$16 < N < 36$	$37 < N < 65$
7,50%	92,50%	$11 < N < 28$	$27 < N < 51$	$59 < N < 92$
10%	90%	$16 < N < 36$	$38 < N < 65$	$81 < N < 120$

Tabela 1 – Regiões de não rejeição do teste de Kupiec para um nível de confiança de 95%.

Uma das críticas apontadas ao teste de Kupiec centra-se no facto de este aferir sobre a validade do modelo sem ter em consideração a variação temporal dos excessos acima de um determinado limite. Caso as taxas de rendibilidade verificadas sejam inferiores ao VaR estimado em períodos de tempo muito curtos, o modelo deverá não ser adequado para estimar o VaR pois não capta o fenómeno *volatility clustering*, esperando-se assim que as exceções face ao estimado ocorram em momentos distintos de tempo.

5.2 Teste de Christoffersen (Christoffersen, 1998)

Em 1998, Christoffersen apresentou um teste estatístico com o objectivo de colmatar algumas deficiências do teste de Kupiec, onde considerou que para um modelo ser adequado deveria satisfazer duas propriedades: *unconditional coverage property*, testada pelo teste de Kupiec e *independence property* testada pelo teste de independência Markov.

Se, num curto espaço de tempo, as taxas de rendibilidade verificadas excederem sistematicamente a estimativa de VaR indica que o modelo não capta o acréscimo de volatilidade verificado no mercado ou uma alteração da estrutura da carteira em análise.

Um modelo de VaR deverá ser considerado adequado se a probabilidade de ocorrer uma perda máxima hoje for independente da probabilidade de ocorrer ou não, uma falha na previsão do modelo no dia anterior.

Os procedimentos para a realização do teste são os seguintes: cada dia de observação atribui-se o valor 0 se a taxa de rendibilidade verificada não exceder o VaR estimado e 1 caso o contrário se verifique. De seguida define-se T_{ij} como o número de dias em que $I_t = j$ e $I_{t-1} = i$ ocorrem simultaneamente.

Para verificar a independência temporal dos desvios observados utiliza-se a estatística de teste LR_{ind} :

$$LR_{ind} = -2\ln[(1 - \pi)^{(T_{00}+T_{10})}\pi^{(T_{01}+T_{11})}] + 2\ln[(1 - \pi_0)^{T_{00}}\pi^{T_{01}}(1 - \pi_1)^{T_{10}}\pi_1^{T_{11}}] \quad (28)$$

O primeiro termo representa a máxima verosimilhança sob a hipótese nula, hipótese em que as exceções são independentes em dias consecutivos, $\pi = \pi_0 = \pi_1$ contra a hipótese alternativa de existência de dependência entre duas exceções consecutivas. O segundo termo representa a máxima verosimilhança para os dados observados, sendo π_1 a taxa de exceção quando $I_t = 1$ precedida por uma exceção no dia anterior ($I_{t-1} = 1$) e π_0 a taxa de ocorrer uma exceção $I_t = 1$ precedida de uma não exceção no dia anterior ($I_{t-1} = 0$).

A combinação das duas estatísticas teste designa-se *Conditional Coverage* e permite testar a hipótese da taxa de exceção ser idêntica a α e hipótese de independência das exceções. Sendo duas propriedades que um modelo de estimação do VaR deve cumprir:

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind}$$

Cada uma das componentes do teste é independentemente distribuída com uma distribuição assintótica qui-quadrado com um grau de liberdade. Face à independência das componentes, o teste conjunto segue uma distribuição qui-quadrado com dois graus de liberdade.

De acordo com a estatística de teste LR_{ind} , para um nível de confiança de 95% e para um valor do teste superior a 3,841 rejeita-se o modelo sobre o pressuposto de não existir

independência entre observações de dias consecutivos. Caso se considere a combinação das duas estatísticas, LR_{cc} , o modelo deverá ser rejeitado, para o mesmo nível de confiança, se o valor obtido no teste for superior a 5,991.

6. Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos na estimação do VaR para três índices bolsistas utilizando os modelos atrás descritos.

6.1 Caracterização dos dados

Para concluir sobre a aplicação dos modelos apresentados são utilizadas séries históricas de cotações diárias de três índices de ações: Nikkei, como índice representativo do mercado asiático, o S&P 500 representando o mercado norte-americano e o Dow Jones Euro Stoxx 50 como o índice representativo do mercado europeu.

O Nikkei (NKY) é o índice de referência do mercado de ações de Tóquio, sendo composto por 225 ações das principais empresas japonesas de diversos sectores de actividade.

O S&P 500 (SPX) é um índice de ações composto pelas 500 empresas de maior capitalização, cotadas no mercado norte-americano, nas bolsas NYSE Euronext e na NASDAQ OMX.

Por fim, o índice Dow Jones EURO STOXX 50 (SX5E), é um índice que integra as ações *blue chip*, ou seja, as grandes empresas cotadas nos países da União Europeia. O índice foi criado em 31 de Dezembro de 1991, com o valor base de 1000 pontos, sendo o peso de cada ação que compõe o índice limitado a 10%.

A amostra de cotações compreende o período entre 1 de Janeiro de 1995 e 30 de Junho de 2009, tendo sido dividida em duas subamostras: a amostra 1 que compreende o período de 1 Janeiro de 1995 a 31 de Dezembro de 2005, a partir da qual serão estimados os modelos e a amostra 2 que se inicia a 1 Janeiro de 2006 e termina a 30 Junho de 2009, que será utilizada para avaliar a capacidade predictiva dos modelos, tendo por base as observações entretanto ocorridas, ou seja, o propósito é proceder ao *backtesting* dos modelos.

É de realçar que a amostra utilizada para *backtesting* contém um dos períodos mais atribulados da história recente dos mercados financeiros, a chamada crise “*subprime*” que teve o seu início no Verão de 2007 e se mantém até aos dias de hoje. Tem também sido considerada por alguns economistas, como a pior crise desde a Grande Depressão nos anos 30. Esta crise teve o seu início no sistema bancário norte-americano, levando à

falência de alguns bancos. No entanto, teve repercussões por todas as economias em geral.

Neste período, os mercados financeiros confrontaram-se com perdas inesperadas, podendo ser um “bom” período para testar a eficácia dos modelos em prever estas crises e as perdas verificadas.

Com base na cotação de fecho diária dos índices foram calculadas as taxas de rendibilidade logarítmicas que são utilizadas na estimação e previsão do VaR:

$$r_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

sendo P_t a cotação do índice no momento t .

6.2 Caracterização das amostras

Para analisar os dados, dividiu-se a amostra em duas subamostras, onde foram calculadas as seguintes medidas:

	Amostra 1			Amostra 2		
	S&P 500	DJ Euro	Nikkei	S&P 500	DJ Euro	Nikkei
Média	0,000361	0,000355	-0,000074	-0,000348	-0,000449	-0,000561
Mediana	0,000564	0,000824	-0,000102	0,000796	-0,000080	0,000251
Máximo	0,055732	0,070783	0,076605	0,109572	0,104376	0,132346
Mínimo	-0,071127	-0,066195	-0,072340	-0,094695	-0,082079	-0,121110
Desv Padrão	0,011110	0,013940	0,014444	0,017344	0,017038	0,019768
Assimetria	-0,111361	-0,103467	-0,015567	-0,181170	0,039262	-0,376710
Curtose	6,329938	6,294076	4,952640	10,872360	9,559141	10,148680
Jarque-Bera	1285,522	1280,017	430,3206	2274,609	1593,847	1847,249
Probabilidade	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
Observações	2770	2820	2708	879	889	858

Tabela 2 – Caracterização das séries de taxas de rendibilidade dos três índices accionistas.

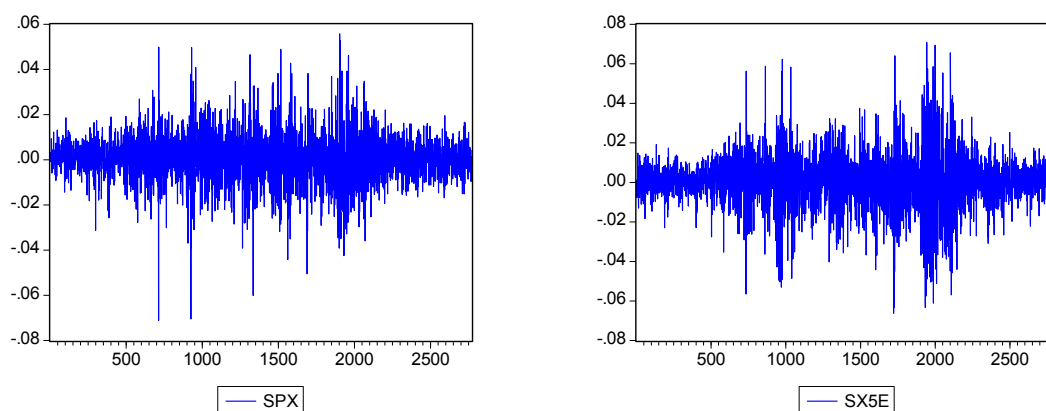
Como se pode observar na tabela anterior o índice S&P 500 foi o que apresentou uma rendibilidade média diária mais elevada (0.0361%), em contrapartida, o Nikkei apresentou uma rendibilidade média negativa (-0.0074%), sendo também o índice que apresenta uma maior volatilidade diária medida pelo desvio padrão. A rendibilidade mais baixa e a mais elevada foram também verificadas neste índice representativo do mercado asiático.

A amostra utilizada para *backtesting* (amostra 2) revela que estamos na presença de um período de grande incerteza nos mercados, como se pode observar pelo desvio padrão dos três índices, todos superiores ao da amostra 1 verificando-se uma rendibilidade média de todos os índices negativa.

Analisando as medidas que comparam as distribuições empíricas face à distribuição normal, pode concluir-se que nenhuma das distribuições empíricas segue uma distribuição normal porque a estimativa para a curtose é superior a 3, estando-se assim na presença de distribuições leptocúrticas, mais pontiagudas na zona central e com caudas mais pesadas do que a distribuição normal. A assimetria negativa em todas as séries revela a existência de valores extremos do lado esquerdo da distribuição, reforçando a existência de uma cauda esquerda mais pesada. Para além destas duas medidas, o valor do teste Jarque-Bera reforça a conclusão de não normalidade das séries pois rejeita-se sempre a hipótese nula do teste com um nível de significância praticamente nulo.

Os valores destas estatísticas são típicos de distribuições de taxas de rendibilidade de activos financeiros, ou seja, distribuições leptocúrticas e assimétricas negativas, concluindo-se assim que as distribuições de taxas de rendibilidade dos índices não seguem uma distribuição normal, como usualmente é assumido em vários tipos de análise.

Um dos factos estilizados das séries de taxas de rendibilidade de activos financeiros é o *volatility clustering* que facilmente se pode comprovar pela observação dos seguintes gráficos:



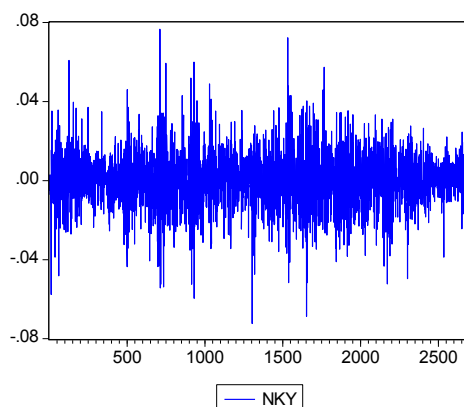


Figura 1 – Representação gráfica das taxas de rendibilidade das séries dos três índices accionistas da amostra 1.

Pela observação dos gráficos verifica-se a existência de períodos de maior e menor volatilidade, reforçando-se a hipótese de que a volatilidade não é constante e que varia ao longo do tempo.

6.3 Estimação dos modelos GARCH

Nas próximas secções são apresentados os resultados obtidos na estimação dos parâmetros dos modelos atrás expostos para estimar o VaR.

Na estimação dos modelos da família GARCH assumiu-se que os erros seguem uma distribuição t-student, sendo usualmente considerada em detrimento da distribuição normal devido à sua característica de ter abas mais pesadas e por isso se ajustar melhor às séries de taxas de rendibilidade dos activos financeiros.

6.3.1 ARMA - GARCH

Para a estimação do modelo ARMA-GARCH verificou-se a existência de dependência linear das taxas de rendibilidade entre períodos consecutivos através das funções de autocorrelação e de autocorrelação parcial e do teste de Ljung-Box onde é rejeitada, para todos os índices, a hipótese nula das taxas de rendibilidade terem sido geradas por um processo ruído branco (e a consequente ausência de dependência linear entre as rendibilidades sucessivas dos vários índices).

De seguida, optou-se por estimar um modelo GARCH(1,1) para descrever a volatilidade condicional, visto tratar-se de um modelo parcimonioso, assumindo-se assim que um desfazamento temporal será suficiente para captar a heteroscedasticidade condicional dos erros.

Com recurso ao teste LM ARCH (Engle, 1982) testou-se a hipótese de heteroscedasticidade condicional dos resíduos dos modelos e para todos os índices não se rejeitou a hipótese nula, concluindo-se assim que os modelos estimados capturaram a dependência na volatilidade evidenciada pelas taxas de rendibilidade dos três índices bolsistas:

Teste LM ARCH (5)	SPX	SX5E	NKY
F-Stat	1,607511	1,399391	0,243443
Prob	(0,154577)	(0,221237)	(0,943176)

Tabela 3 – Teste LM-ARCH aplicado às séries dos resíduos da estimação dos modelos ARMA-GARCH referente às três séries de taxas de rendibilidade.

Os resultados da estimação dos parâmetros dos modelos ARMA-GARCH, para os três índices bolsistas tal como os valor do logaritmo da função de verosimilhança (log-lik) e os valores dos critérios de informação de Akaike (AIC) e Schwarz (SIC) são apresentados na seguinte tabela:

Coefficientes	SPX	SX5E	NKY
C (prob)	0,000739 (0,0000)	0,000794 (0,0000)	0,000313 (0,1451)
AR (1) (prob)	0,788388 (0,0000)	-0,903386 (0,0000)	0,783844 (0,0000)
MA(1) (prob)	-0,821235 (0,0000)	0,912970 (0,0000)	-0,805952 (0,0000)
MA(2) (prob)		-0,036011 (0,1753)	
MA (3) (prob)		-0,058616 (0,0026)	
C (prob)	6,61E-07 (0,0023)	7,60E-07 (0,0056)	2,44E-06 (0,0045)
GARCH (-1) (prob)	0,935756 (0,0000)	0,923174 (0,0000)	0,927808 (0,0000)
ϵ (-1) (prob)	0,060278 (0,0000)	0,074687 (0,0000)	0,062606 (0,0000)
Log-lik	8929,384	8665,49	7824,577
AIC	-6,442155	-6,139355	-5,773691
SIC	-6,427178	-6,120383	-5,758429

Tabela 4 – Parâmetros estimados do modelo ARMA – GARCH. Software: Eviews.

Para os índices SPX e NKY considerou-se um ARMA(1,1) enquanto que para o SX5E adicionaram-se mais dois desfasamentos MA na estimação da média condicional das taxas de rendibilidade devido à significância estatística de MA(3).

6.3.2 ARMA - EGARCH

À semelhança da estimação do modelo anterior, estimou-se os parâmetros do modelo ARMA-EGARCH e testou-se a hipótese de heteroscedasticidade condicional dos resíduos dos modelos com recurso ao teste LM ARCH, obtendo-se os seguintes resultados:

Teste LM ARCH (5)	SPX	SX5E	NKY
F-Stat	0,608832	1,156716	0,546328
Prob	(0,693181)	(0,328144)	(0,741255)

Tabela 5 - Teste LM-ARCH aplicado às séries dos resíduos da estimação dos modelos ARMA-EGARCH referente às três séries de taxas de rendibilidade.

Os resultados obtidos no teste permitem rejeitar a hipótese nula e concluir que os modelos estimados capturaram a dependência na volatilidade evidenciada pelas taxas de rendibilidade.

Os resultados da estimação dos parâmetros dos modelos ARMA-EGARCH, dos valores dos critérios de informação e do logaritmo da função de verosimilhança, para os três índices bolsistas são os seguintes:

Coefficientes	SPX	SX5E	NKY
C (prob)	0,000118 (0,7404)	0,000591 (0,0003)	2,41-05 (0,9181)
AR (1) (prob)	0,989896 (0,0000)	-0,916784 (0,0000)	-0,991938 (0,0000)
MA (1) (prob)	-0,981093 (0,0000)	0,929902 (0,0000)	0,991767 (0,0000)
MA (2) (prob)		-0,029114 (0,2712)	
MA (3) (prob)		-0,051392 (0,0068)	
ω (prob)	-0,177630 (0,0000)	-0,202286 (0,0000)	-0,301362 (0,0000)
α (prob)	0,087392 (0,0000)	0,142886 (0,0000)	0,132437 (0,0000)
γ (prob)	-0,114290 (0,0000)	-0,063583 (0,0000)	-0,071248 (0,0000)
β (prob)	0,988265 (0,0000)	0,989957 (0,0000)	0,976847 (0,0000)
Log-lik	8972,008	8683,296	7842,054
AIC	-6,472208	-6,151274	-5,785860
SIC	-6,455092	-6,130194	-5,768418

Tabela 6 – Parâmetros estimados do modelo ARMA - EGARCH. Software: Eviews

6.3.3 ARMA - GJR

O resultado do teste LM ARCH permite concluir que a estimação do modelo ARMA-GJR também capturou a dependência na volatilidade evidenciada pelas taxas de rentabilidade:

Teste LM ARCH (5)	SPX	SX5E	NKY
F-Stat	0,728743	1,063165	0,344152
Prob	(0,601826)	(0,378814)	(0,886222)

Tabela 7 - Teste LM-ARCH aplicado às séries dos resíduos da estimação dos modelos ARMA-GJR referente às três séries de taxas de rentabilidade.

Os mesmos resultados apresentados para os modelos anteriores são apresentados na seguinte tabela para o modelo ARMA-GJR:

Coeficientes	SPX	SX5E	NKY
C (prob)	0,000528 (0,0005)	0,000609 (0,0003)	0,000139 (0,5304)
AR(1) (prob)	-0,843285 (0,0000)	-0,913000 (0,0000)	0,731318 (0,0001)
MA (1) (prob)	0,846185 (0,0000)	0,929077 (0,0000)	-0,750407 (0,0001)
MA (2) (prob)	-0,024869 (0,3466)	-0,022722 (0,3978)	
MA (3) (prob)	-0,049857 (0,0110)	-0,049145 (0,0110)	
C (prob)	1,11E-6 (0,0000)	1,03E-6 (0,0003)	3,26E-6 (0,0003)
α (prob)	-0,012708 (0,1792)	0,030062 (0,0026)	0,023790 (0,0128)
γ (prob)	0,128453 (0,0000)	0,080182 (0,0000)	0,077453 (0,0000)
β (prob)	0,936591 (0,0000)	0,922927 (0,0000)	0,922807 (0,0000)
Log-lik	8968,57	8681,637	7838,894
AIC	-6,469003	-6,150097	-5,783526
SIC	-6,447608	-6,129018	-5,766085

Tabela 8 – Parâmetros do modelo ARMA - GJR. Software: Eviews

Foram adicionados dois termos MA na estimação dos parâmetros do modelo para o índice SPX, devido à não significância estatísticas dos termos AR(1) e MA(1) quando considerados isoladamente.

Comparando as medidas de bondade do ajustamento (*goodness-of-fit*) dos três modelos estimados e para cada índice bolsista, verifica-se que o modelo que apresenta menores valores dos critérios de informação, AIC e SIC é o modelo ARMA-GARCH. Indicando assim, que entre os três modelos estimados, o ARMA-GARCH é o modelo onde se verifica uma menor diferença entre os dados empíricos e a estimativa, sendo assim o mais propenso para gerar as taxas de rendibilidade empíricas.

6.3.4 EWMA

Para estimar o modelo EWMA assumiu-se um *decay factor* de 0,94 visto a amostra ser de dados diários e este ser o valor óptimo proposto pelo RiskMetrics.

Este modelo foi calculado em Excel com recurso a uma fórmula de cálculo do RiskTech².

Nesta estimação não foram assumidos pressupostos referentes à evolução da média das taxas de rendibilidade, pretendendo-se replicar a metodologia seguida pelo RiskMetrics e verificar a sua performance.

6.4 Estimação dos Parâmetros das Distribuições de Valores Extremos

Nesta secção são apresentados os procedimentos adoptados para estimar as duas distribuições de valores extremos, GEV e GPD.

6.4.1 GEV

Para modelar os máximos segundo a distribuição GEV foi necessário seleccionar os valores extremos de cada bloco de dados, para tal, dividiu-se a amostra em sub amostras de dados mensais, não sobrepostos e escolheu-se a perda máxima verificada das taxas de rendibilidade em cada bloco de observações, seguindo-se a metodologia *block maxima*.

Após a escolha dos mínimos da amostra (máximos em valor absoluto), é necessário estimar os parâmetros ξ , μ e σ , recorrendo-se para isso o método da Máxima Verosimilhança.

Para estimar os parâmetros recorreu-se ao software Xtremes e como resultado dessa estimação obtiveram-se os seguintes resultados:

² Site na internet com informação relacionada com risco: www.risktech.com.br

	ξ	μ	σ
SPX	0.56541	0.0129095	0.00729917
SX5E	0.574047	0.0147945	0.00849276
NKY	0.566284	0.0183224	0.0103757

Tabela 9 – Estimativas para os parâmetros da distribuição GEV. Software: Xtremes

Com base na estimativa para o parâmetro ξ ($\xi > 0$), conclui-se que a distribuição Fréchet deve ser a mais apropriada para modelar os valores mínimos mensais das taxas de rendibilidade dos três índices considerados. Tal resultado já era esperado uma vez que se trata de distribuições empíricas com abas pesadas.

6.4.2 GPD

Para estimar os parâmetros da distribuição GPD é necessário determinar o valor acima do qual se inicia a cauda da distribuição, sendo essencial conhecer o limite u .

Segundo Danielsson e Morimoto (2000), a subamostra para estimar os parâmetros deve conter, em média, 10% das observações extremas, sendo este o tamanho da amostra escolhido.

Após a selecção de uma subamostra com 10% das observações extremas da amostra 1 e ordenadas as observações pode ser escolhido o limite, recorrendo-se para isso à representação gráfica do estimador de Hill.

O limite u escolhido foi o ponto a partir do qual o gráfico apresenta uma tendência linear, ou seja, se aproxima de uma recta:

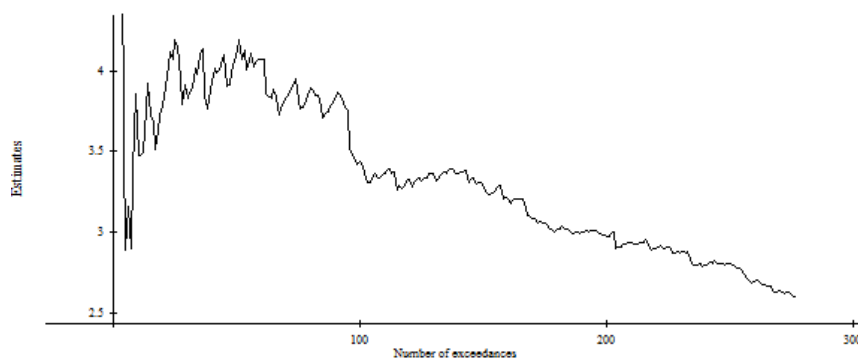


Figura 2 – Hill-graph do índice SPX

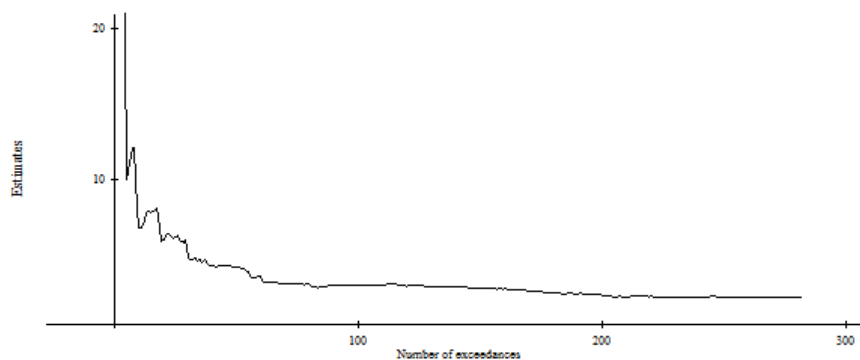


Figura 3 – Hill-graph do índice SX5E

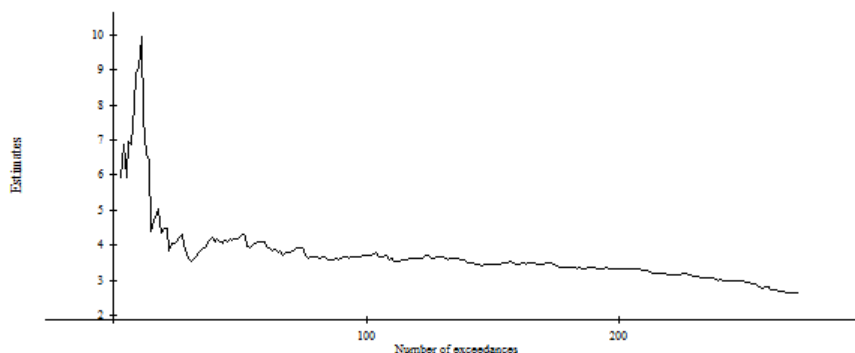


Figura 4 – Hill-graph do índice NKY

Através da análise visual dos gráficos escolheu-se como limite as estatísticas de ordem 100, 56 e 40 para os índices SPX, SX5E e NKY, respectivamente. Sendo estes os valores limite a partir do qual se define a cauda da distribuição.

Após escolha do limite u , estimaram-se os parâmetros da distribuição, utilizando-se o estimador de Hill e o método *bootstrap* interactivo:

	u	α	σ
SPX	-0.019926	3.43513	0.0148116
SX5E	-0.032883	3.58309	0.0209429
NKY	-0.033734	4.10753	0.0211729

Tabela 10 – Estimativas para os parâmetros da distribuição GPD. Software: Xtremes

Tal como foi referido na secção 4.3.2 Estimador de Pickands, a estimação do índice de cauda também poderia ser efectuada com recurso a este estimador. No entanto, neste trabalho recorreu-se apenas ao estimador de Hill devido à facilidade de interpretação gráfica e a uma maior referência na literatura financeira.

7. Previsão

Estimados os modelos, pretendemos avaliar a capacidade predictiva dos vários modelos na estimação do VaR, utilizando-se para isso a amostra de taxas de rendibilidade de 1 Janeiro de 2006 a 30 Junho 2009.

Após estimados os parâmetros dos modelos, com os dados da amostra 1, é possível verificar como os modelos se comportam no contexto de uma nova amostra. Para tal foi estimado o VaR para um nível de confiança de 95% e comparado com as taxas de rendibilidade efectivamente observadas.

A comparação entre a previsão e a realidade pode ser visualizada através dos seguintes gráficos. A vermelho está representada a previsão do VaR, obtidas a partir dos vários modelos, assumindo-se um nível de confiança de 95%, e a azul são apresentadas as taxas de rendibilidade efectivamente observadas, ou seja, as taxas de rendibilidade da amostra 2:

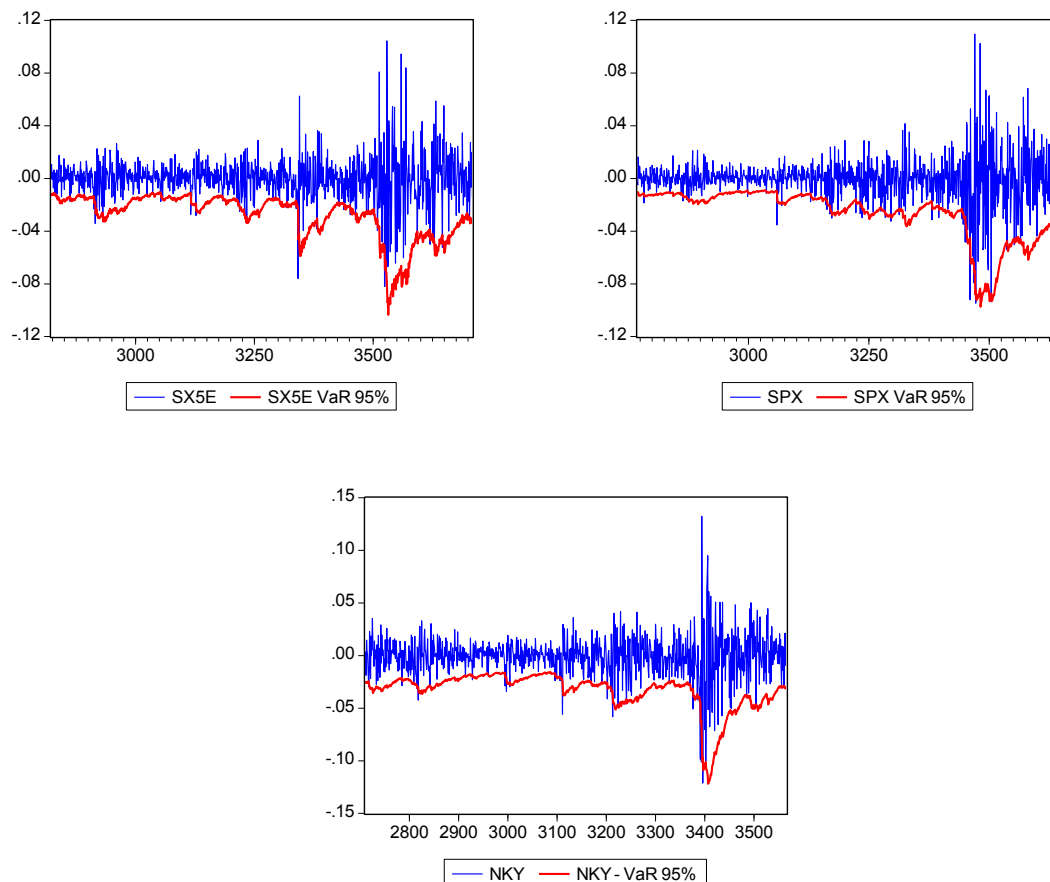


Figura 5 – Comparação das rendibilidades verificadas face às estimadas segundo o modelo ARMA-GARCH

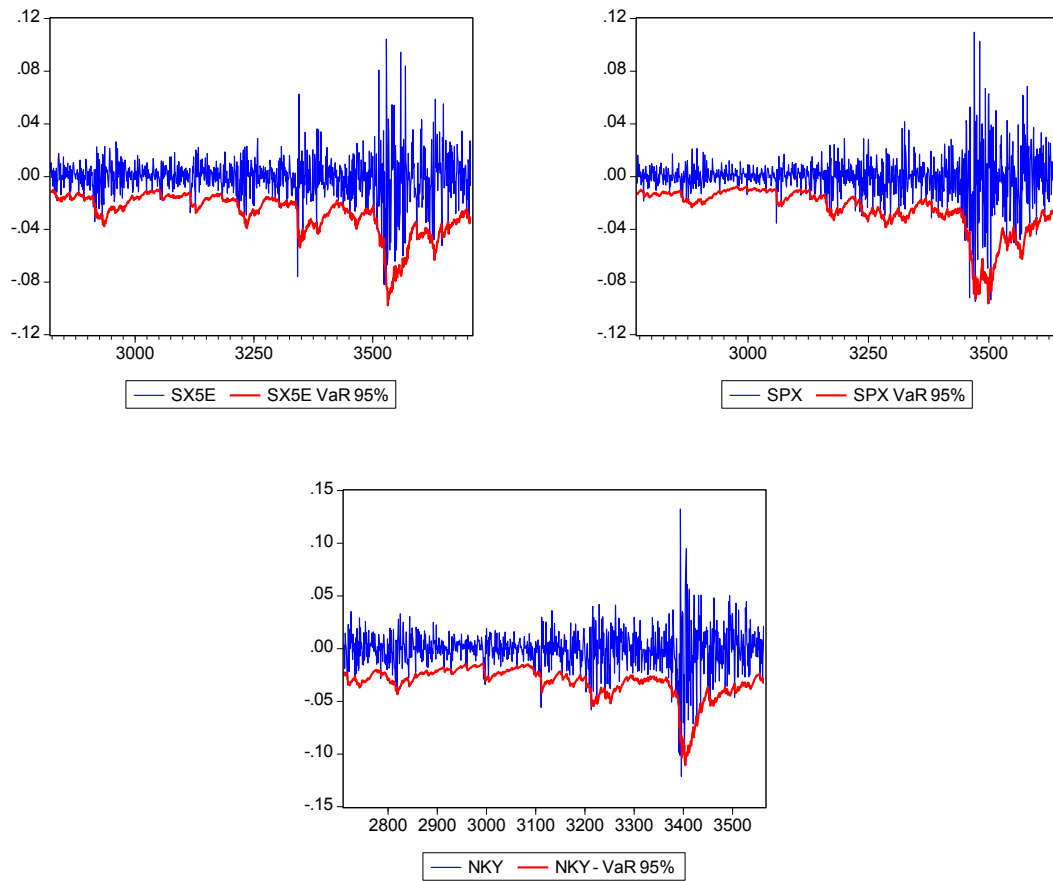
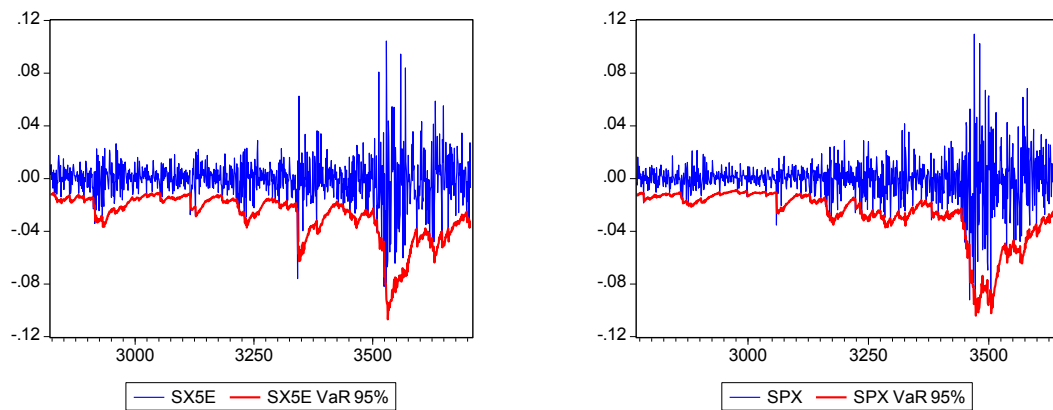


Figura 6 – Comparação das rendibilidades verificadas face às estimadas segundo o modelo ARMA-EGARCH



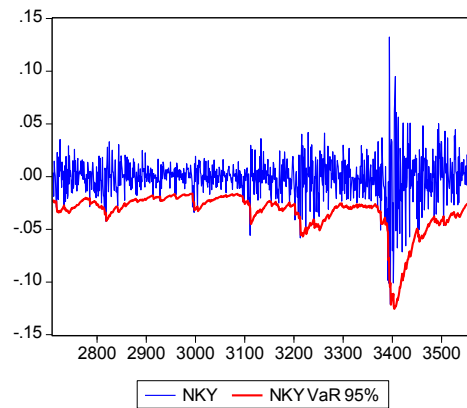


Figura 7 – Comparação das rendibilidades verificadas face às estimadas segundo o modelo ARMA-GJR

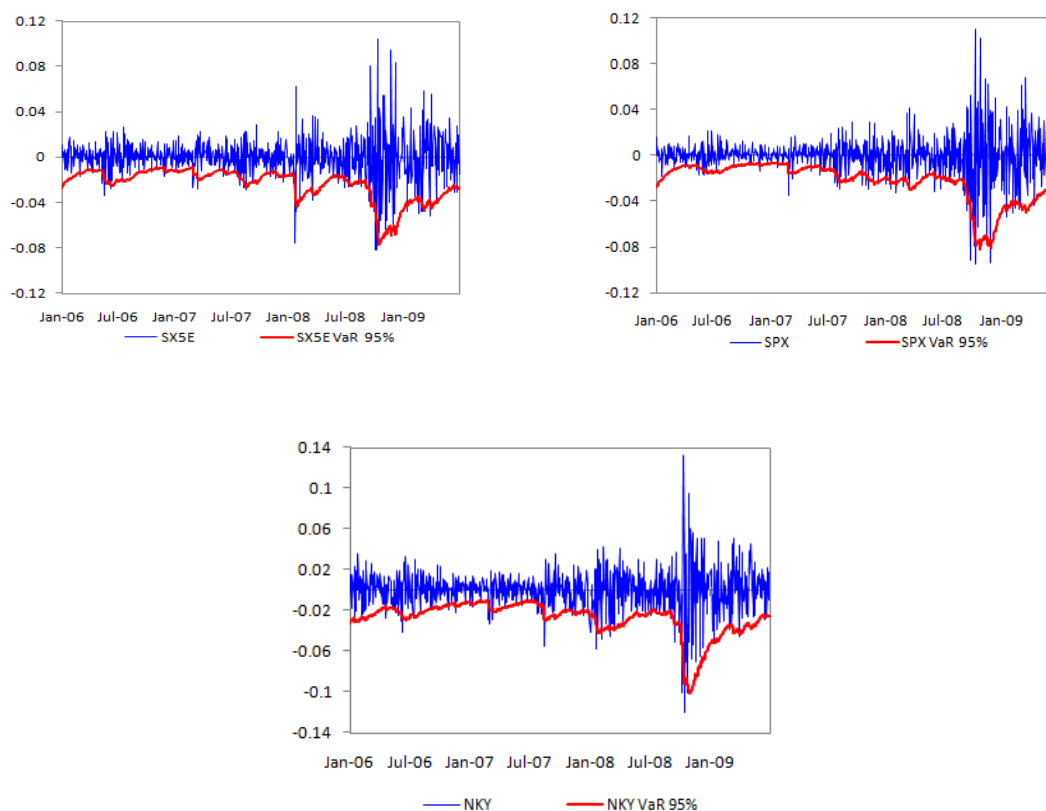


Figura 8 – Comparação das rendibilidades verificadas face às estimadas segundo o modelo EWMA com $\lambda=0.94$

Para estimar o VaR, com um nível de confiança de 95%, e tendo por base a GEV recorreu-se à expressão (24) onde $X_{k,n}$ é o limite a partir do qual a distribuição deverá ser considerada. Esse limite foi escolhido através da visualização do gráfico do estimador de Hill e corresponde ao mesmo limite considerado para a estimação e previsão da GPD.

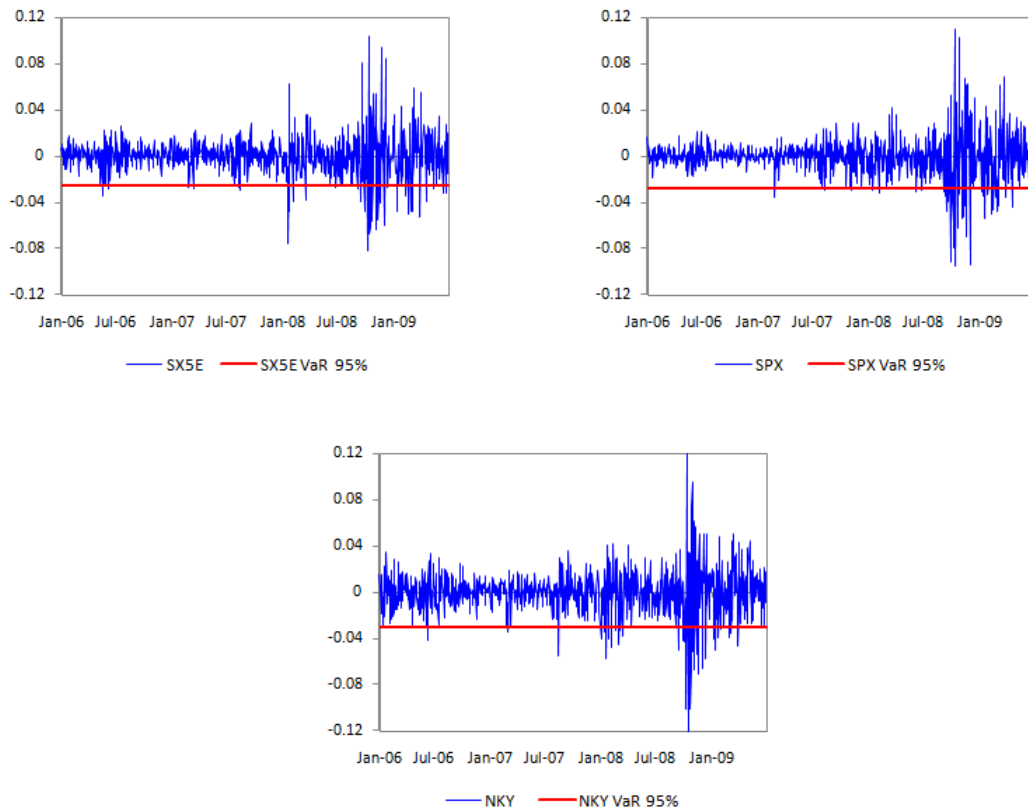


Figura 9 – Comparação das rendibilidades verificadas face às estimadas segundo o modelo GEV

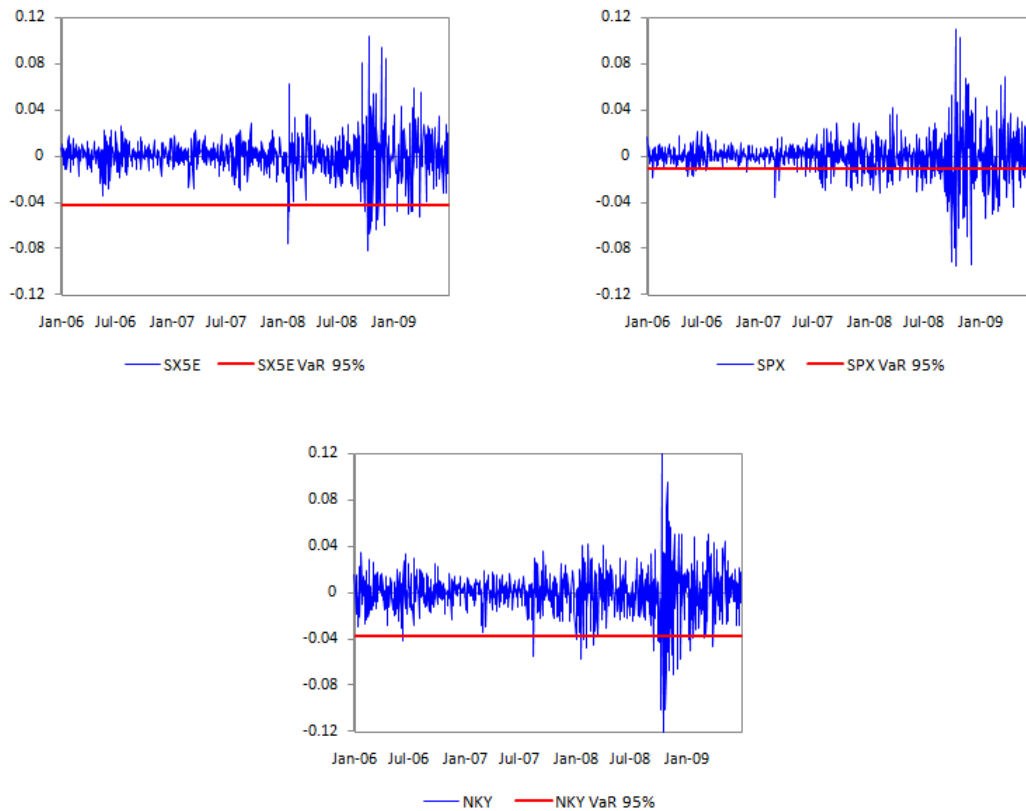


Figura 10 – Comparação das rendibilidades verificadas face às estimadas segundo o modelo GPD

Como se pode observar pela análise gráfica, o limite a partir do qual se considera o início da cauda da distribuição tem uma elevada importância.

Para o índice SPX, o VaR estimado foi ultrapassado inúmeras vezes pelas taxas de rentabilidade verificadas no mercado.

8. Backtesting

Depois de estimados os modelos e comparada a eficácia na previsão das rendibilidades extremas através da análise gráfica, calculou-se o valor dos dois testes estatísticos apresentados no capítulo 5, podendo assim ser avaliada a performance dos modelos de uma forma mais rigorosa:

	GARCH			EGARCH			GJR		
	LR uc	LR ind	LR cc	LR uc	LR ind	LR cc	LR uc	LR ind	LR cc
SPX	0.574*	-	0.574*	0.574*	-	0.574*	2.4924*	-	2.4924*
SX5E	2.252*	0.2024*	2.4544*	4.0212	-	4.0212	4.0212	-	4.0212
NKY	2.5796*	0.3902*	2.9698*	1.6104*	0.2223*	1.8327*	7.0657	1.2251*	8.2908

	EWMA			GEV			GPD		
	LR uc	LR ind	LR cc	LR uc	LR ind	LR cc	LR uc	LR ind	LR cc
SPX	0.841*	1.7445*	2.5855*	0.0001*	2.9964*	2.9965*	172.987	0.2348	173.222
SX5E	0.9719*	0.4033*	1.3752*	0.0563*	2.5127*	2.569*	19.3621	0.6534	20.0155
NKY	0.2306*	0.1215*	0.3521*	0.0002*	3.1427*	3.143*	5.3243	0.8895	6.2138

Tabela 11 – Resultados dos teste de Kupiec e Christoffersen. * encontra-se em resultados estatisticamente significativo

Para alguns modelos não é possível calcular o teste de Christoffersen (LR_ind) com base na expressão (28) porque na amostra considerada, as taxas de rendibilidade observadas não se verificaram inferiores às estimadas em dois dias consecutivos. Resumindo-se a análise de *backtesting* ao teste de Kupiec.

Com base nos resultados dos testes de Kupiec e Christoffersen é possível verificar se o VaR previsto, com um nível de confiança de 95%, foi ultrapassado pelas taxas de rendibilidade verificadas em mais de 5% das observações.

Comparando os resultados obtidos nos testes, o modelo GARCH, o EWMA e na teoria de valores extremos a GEV, foram os modelos e a distribuição respectivamente que apresentaram resultados dos testes estatisticamente significativos na previsão das taxas de rendibilidade de todos os índices accionistas, ou seja, o VaR previsto não excedeu as taxas de rendibilidade verificadas mais de 5% do total de observações consideradas na amostra de *backtesting*.

Na previsão do VaR, a distribuição GEV apresenta uma estimação para o VaR mais próxima do nível de significância considerado para os três índices analisados, visto que os resultados dos testes são os que mais se aproximam da zona de rejeição.

Em relação ao modelo EGARCH apresentou uma performance desfavorável na previsão do VaR para o índice SX5E uma vez que os testes não são estatisticamente significativos. No entanto, para os outros índices, em especial para o índice SPX, o VaR previsto não ultrapassou o verificado em duas observações consecutivas e a taxa de falhas (proporção de exceções na amostra) é inferior ao nível de significância considerado na previsão do VaR.

O modelo GJR foi eficaz a prever as taxas de rendibilidades do índice SPX, não sendo excedidas mais de 5% das taxas de rendibilidade verificadas, no entanto para o índice SX5E já não se verificou essa eficácia, mas é de salientar que não se verificaram duas exceções consecutivas, o que pode levar a concluir que a independência temporal das exceções é captada pelo modelo. Em relação ao índice NKY o resultado do teste LR_{uc} é estatisticamente significativo mas não captou a independência temporal dos desvios observados porque o teste LR_{ind} não é estatisticamente significativo.

A distribuição GPD foi a mais falível na previsão do VaR. Os resultados dos testes de *backtesting* não foram estatisticamente significativos para nenhum índice accionista. Em especial, o VaR estimado foi largamente excedido pelas taxas de rendibilidade verificadas do índice SPX.

9. Conclusões

O VaR tem sido considerado como a medida de quantificação do risco de mercado, no entanto, ao longo dos últimos anos têm sido alvo de muitas críticas devido ao elevado número de pressupostos que tem de ser assumidos para se obter um “número”, número esse que pode ter variações significativas consoante os pressupostos considerados.

Neste trabalho verifica-se que diferentes metodologias podem ser utilizadas para prever o VaR e diferentes resultados são obtidos com diferenças significativas de modelo para modelo.

De entre os modelos considerados, a teoria dos valores extremos é o método mais recente aplicado à teoria financeira e o que requer um maior acompanhamento e, em geral um maior número de pressupostos terão de ser tidos em consideração para a previsão do VaR.

De entre os três índices considerados, o DJ Euro Stoxx 50 foi o índice para o qual os modelos apresentaram mais falhas na previsão. No entanto, tanto o EGARCH como o GJR captaram a *volatility clustering* com alguma eficácia pois a previsão não ultrapassou as taxas de rendibilidade verificadas em dois dias consecutivos.

De acordo com os testes utilizados para *backtesting*, os modelos que apresentaram uma melhor performance na previsão do VaR foram o GARCH, o EWMA e, na teoria de valores extremos, a GEV.

O modelo GARCH, sendo um dos modelos mais referenciados na estimação da variância condicional e no qual são poucas as suposições necessárias, comparativamente a outros modelos, foi o modelo que apresentou uma boa performance à semelhança do modelo EWMA.

Apesar da GPD não se ter verificado eficaz na previsão do VaR, a GEV apresentou uma performance bastante favorável como se pode observar pelos resultados dos testes utilizados para *backtesting*.

O modelo/distribuição que apresentou uma pior performance foi a GPD devido, em grande medida, à não actualização dos parâmetros na amostra *out-of-sample*. Esta distribuição foi a menos eficiente, tendo largamente excedido o VaR, isto justifica-se pelo facto de a amostra considerada para *backtesting* ser uma amostra onde se

verificaram mais valores extremos que na amostra utilizada na estimação e, como os parâmetros e mesmo o limite a partir do qual se inicia a cauda não sofreram nenhum “ajuste” para acompanhar as rendibilidades entretanto verificadas, a previsão tornou-se desajustada.

A Teoria do Valores Extremos, especialmente a GPD não demonstrou uma superioridade na previsão de valores extremos face aos outros modelos considerados. Uma das críticas que é feita a este modelo é que não é flexível ao ponto de responder atempadamente a alterações na volatilidade observada.

Uma possível melhoria de resultados poderia ser obtida, caso a previsão do VaR tivesse por base uma amostra mais pequena e conseqüentemente uma nova estimação dos parâmetros da distribuição. Ajustando-se assim os parâmetros com uma maior frequência. No entanto, não deixa de ser necessário uma maior acompanhamento face a outros modelos onde não foi necessário.

Com este trabalho verifica-se que diversos modelos podem ser considerados para prever o VaR e diferentes resultados são obtidos. Para além da gestão do risco, a utilização do VaR como medida para quantificar o capital necessário para fazer face aos riscos incorridos levanta algumas reticências e impõe a validação constante dos modelos para que não se verifiquem avultadas perdas e possam ser evitadas algumas falências.

Bibliografia

Bensalah, Y. (2000), *Step in Applying Extreme Value Theory to Finance: a Review*, Working Paper 2000-20, Bank of Canada.

Bollerslev T. (1986), *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, Journal of Econometrics 31, Elsevier Science S.A.

Bollerslev T., Engle R., Nelson D. (1994), *ARCH Models*, Handbook of Econometrics, Volume IV, Elsevier Science S.A.

Brooks, C. (2nd ed), *Introductory Econometrics for Finance*, Cambridge.

Curto J., Pinto J., Tavares G. (2007), *Modeling stock markets' volatility using GARCH models with Normal, Student's t and stable Paretian distributions*, @Springer-Verlag

Curto J., Pinto C. (2009), *Predicting the financial crisis volatility*, submitted to Elsevier Science.

Danielsson, J. e C.G. de Vries (1997), *Value at Risk and Extreme Returns*, London School of Economics, Financial Market Group, Discussion Paper, no. 273.

Danielsson, J. e Y. Morimoto (December 2000), *Forecasting Extreme Financial Risk: A critical analysis of practical methods for the Japanese market*, Discussion Paper Series, Monetary and Economic Studies, IMES.

Danielsson, J. and de Vries, C. (2000), *Value-at-Risk and Extreme Returns*, Annales D'Économie et de Statistique n°60, 239-270.

Danielsson, J. and de Vries, C. (1997a), *Beyond the Sample: Extreme Quantile and Probability Estimation*, Mimeo, Tinbergen Institute Rotterdam.

Engle R. (2001), *GARCH 101: The Use of ARCH/GARCH Models Applied Econometrics*, Journal of Economic Perspectives, Volume 15, Number 4, Fall 2001, Pages 157-168.

Jorion, P. (2007), *Value at Risk*, 3rd Ed, Publisher: The McGraw-Hill companies.

J.P. Morgan/Reuters (1996), *RiskMetricsTM – Technical Document*, 4th edition.

Longin F., (2000), *From Value at Risk to stress testing: the extreme value approach*, Journal of Banking & Finance 24, 1097-1130, Elsevier Science S.A.

Manganelli S. And Engle R. (2001), *Value at Risk Models in Finance*, Working Paper nº75, European Central Bank

Reiss, R.D. e M. Thomas (2007), *Xtremes User Manual*, Xtremes Group.

Reiss, R.D. e M. Thomas (2007), *Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*, 3rd ed.

Sarma, Mandira (2002), *Extreme Value Theory and financial risk management*, UTI Institute of Capital Markets, Mumbai, India.

Souza, L.A.R. (1999), *Valor em Risco em Épocas de Crise*. Tese de Mestrado em Economia, FEA/USP.

Todorova, D. (2009), *Avaliação da Performance de Modelos de Value-at-Risk em Mercados Emergentes: uma aplicação aos mercados da Bulgária e da Roménia*. Tese de Mestrado em Finanças. ISCTE.

Zumbach G. (2007), *The RiskMetrics 2006 methodology*, Working Paper, Riskmetrics Group.