

QUALITY AND TIMING OPTION VALUE IN US
TREASURY BOND FUTURES MARKETS

Vera Cristina Vaz Antunes

Tese submetida como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre de Finanças

Orientador:
Doutor João Pedro Nunes, Professor Associado, ISCTE Business School, Departamento de
Finanças

Outubro de 2010

RESUMO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação tem como objectivo descrever uma solução quasi-analítica para avaliação de futuros sobre obrigações com diversas opções de entrega, no contexto de taxas de juro estocásticas. Assume-se que a dinâmica da curva de taxa de juro é descrita segundo a metodologia proposta por Heath-Jarrow-Morton e a curva inicial de taxa de juro é definida através de uma especificação consistente com o modelo proposto. Esta tese fornece também um estimador para o valor conjunto da *quality option* e *timing option* embutidas nos contratos de futuros sobre obrigações. De acordo com estas premissas, são avaliados um conjunto de futuros transacionados pela CBOT e é obtida uma estimativa para ambas as opções de entrega em análise. Os resultados obtidos, através das soluções analíticas apresentadas, são comparados com os resultados obtidos por Nunes e Oliveira (2003) e conclui-se que opções de entrega não são significativas de acordo com a especificação descrita. Verifica-se ainda que a estimação da dinâmica inicial da taxa de juro e a especificação da função volatilidade têm um impacto significativo nas estimativas do preço dos futuros e no respectivo valor das opções de entrega.

Palavras-chave: *Quality Option, Timing Option, Modelos HJM multifactoriais, contratos de futuros*

Classificação JEL: *G12, G13, G15*

ABSTRACT

This dissertation describes a quasi-analytical solution to price bond futures with delivery options in the context of stochastic interest rates, assuming that the dynamic of interest rates is described under the Heath-Jarrow-Morton specification. The initial structure of interest rates is specified by a consistent family with the proposed model. It also provides an analytical solution for an estimator for the embedded quality and timing option for treasury bond futures. Under these assumptions, a set of CBOT treasury bond futures are priced and an estimate of quality and timing options are obtained. The results obtained are compared with results offered by Nunes and Oliveira (2003) and it is concluded that the quality and timing option for those contracts are not significant under the described specification. The initial structure of interest rates and the volatility specification are found to have important pricing implications and a large impact on delivery option estimates.

Key words: *Quality Option, Timing Option, Gaussian HJM multi-factor models, Future contracts*

JEL Classification: *G12, G13, G15*

SUMÁRIO EXECUTIVO

Os futuros sobre obrigações transacionados pela CBOT são dos derivados com maior volume de transação em todo o mundo. Na perspectiva de avaliação financeira, são também dos mais complexos atendendo a que as suas especificações de entrega fornecem possibilidades para o vendedor, que se traduzem na opção de escolha da melhor obrigação e do momento ideal para a sua entrega. Contudo, o equilíbrio nos mercados obriga a que estas opções se reflectam na redução do preço de compra do futuro, eliminando oportunidades de arbitragem.

As diferentes opções de entrega têm sido objecto de diversos estudos que pretendem descrever analiticamente o preço destes contratos e a determinação do valor financeiro das opções mais relevantes: *timing option* e *quality option*. A primeira advém do facto do vendedor poder exercer a sua opção de entrega durante todo o mês de maturidade do contrato, a segunda surge da possibilidade da escolha da obrigação a entregar de entre um cabaz de obrigações entregáveis.

A importância da obtenção desta estimativa com a maior precisão possível é baseada nas necessidades intrínsecas à negociação de qualquer instrumento nos mercados financeiros, em que a decisão de compra se baseia normalmente no preço considerado justo em comparação com o preço em mercado.

A presente tese pretende demonstrar a aplicação da solução obtida por Nunes e Oliveira (2003) para a *quality option* dos contratos de futuros sobre obrigações. Pretende-se ainda definir analiticamente um estimador para o valor conjunto da *quality option* e *timing option* existentes nos contratos em análise na presente tese, em função da solução analítica anterior. Estas opções representam o valor financeiro que o comprador atribui às possibilidades de entrega que o vendedor detém.

Pretende-se ainda avaliar empiricamente a adequação de um modelo HJM com 3 factores e estimação consistente da curva inicial de taxa de juro aos contratos de futuros sobre obrigações do tesouro americano transacionados pela CBOT.

AGRADECIMENTOS

Aproveito este espaço para agradecer a todos os que me apoiaram na elaboração desta tese:

Ao Professor João Pedro Nunes, a quem agradeço a sua disponibilidade e enorme paciência na orientação deste trabalho.

À minha família, em especial ao meu marido, pelo seu incondicional apoio e auxílio na concretização desta importante etapa da minha vida académica. Ao meu filho pelo alento final fornecido.

A todos o meu muito obrigado.

I. ÍNDICE

1.	Introdução.....	1
2.	Revisão da Literatura	3
3.	O mercado de futuros sobre obrigações	6
3.1	Características gerais dos contratos de futuros sobre obrigações	7
3.2	A importância dos contratos de futuros sobre obrigações.....	8
3.3	CBOT	9
3.4	Liquidação de futuros sobre obrigações.....	12
4.	<i>Delivery Options</i>	14
4.1	<i>Quality Option</i>	14
4.2	<i>Switching Option</i> ou <i>End-of-Month Option</i>	14
4.3	<i>Timing Option</i>	14
4.4	<i>New-issue Option</i>	15
4.5	<i>Wild-card Option</i>	15
5.	Avaliação de futuros sobre obrigações.....	16
5.1	Modelo de avaliação de futuros sobre obrigações com <i>quality option</i>	17
5.2	Modelo de avaliação de futuros sobre obrigações com <i>quality option</i> e <i>timing option</i>	18
6.	Modelo de não arbitragem para a estrutura das taxas de juro	21
6.1	Especificação do modelo.....	21
6.2	Avaliação de futuros sobre obrigações num modelo HJM para a estrutura de taxas de juro.....	23
6.2.1	Avaliação do futuro com <i>quality option</i>	25
6.2.2	Especificação da função volatilidade	27
6.2.3	Estimação consistente da curva de taxa de juro	28
7.	Resultados empíricos.....	30
7.1	Dados.....	30
7.2	Estimação da curva inicial de taxa de juro	31
7.3	Estimativa do valor da <i>quality option</i> e <i>timing option</i>	39
7.4	Discussão.....	45
8.	Conclusões gerais.....	48
9.	Bibliografia.....	50
10.	Anexos.....	53

II. ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 – Resumo das especificações dos contratos sobre futuros transacionados pela CBOT	11
Tabela 2 – Contratos de futuros em análise e respectivas especificações.....	39
Tabela 3 – Contratos de futuros e volume de transação.....	40
Tabela 4 – Características da distribuição da <i>quality option</i>	43
Tabela 5 – Estimativas obtidas para o contrato de Junho de 2006.....	43
Tabela 6 – Parâmetros estimados para o contrato de Junho de 2006.....	44

III. ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Perfil de maturidade residual a 03-01-2005	32
Gráfico 2 – Mediana do <i>bid-ask spread</i> antes e após remoção de <i>outliers</i> no conjunto total de obrigações da amostra	34
Gráfico 3 – Número de obrigações com cotação antes e após remoção de <i>outliers</i>	35
Gráfico 4 – Perfil de maturidade residual a 03-01-2005 após a retirada de <i>outlier</i>	35
Gráfico 5 – Erro médio absoluto e número de observações diárias na amostra.....	36
Gráfico 6 – MAPE das obrigações entregáveis em comparação com MAPE obtido durante a estimação dos parâmetros.....	37
Gráfico 7 – <i>Surface</i> da curva de taxa de juro estimada para 2005 (frequência semanal)	38
Gráfico 8 – Erro de estimação e MAPE das obrigações entregáveis	41
Gráfico 9 – Estimativa da <i>quality option</i> em função do tempo até à maturidade do contrato .	42
Gráfico 10 – Estimativa da <i>quality option</i> e <i>timing option</i> em função do tempo até à maturidade do contrato	45

IV. ÍNDICE DE ANEXOS

Anexo 1 – Determinação da estimativa da <i>quality option</i> e <i>quality option</i> para o contrato com vencimento a 6 meses.....	53
---	----

1. Introdução

Um contrato de futuros funciona como um mecanismo de controlo da incerteza sobre um activo. Mais concretamente é um compromisso assumido entre dois investidores e a bolsa, no qual estes se comprometem a comprar ou vender um determinado activo com entrega diferida. A convenção determina que no momento em que o contrato é aceite, o preço futuro a pagar/receber é conhecido e o seu valor no momento presente é zero. O intermediário na transação, a bolsa, irá diariamente e até à data maturidade, reavaliar o contrato com o objectivo de eliminar risco de contraparte. Assim, no fim de cada dia de transação, é definido o novo preço de fecho com base nos negócios realizados. A diferença face ao preço do dia anterior será debitada ou creditada nas respectivas contas margens dos investidores.

De todos os tipos de activos subjacentes aos contratos de futuros, os que representam a complexidade das taxas de juro são os mais procurados, tendo como objectivo principal a cobertura do risco.

A CBOT iniciou a transação de contratos de futuros em 1975. Rapidamente o mercado evoluiu e em 1978 este mesmo organismo deu início à transação dos contratos de futuros sobre obrigações do tesouro que se tornaram no derivado com maior volume de transação nos Estados Unidos na América.

Os contratos de futuros, para além de permitirem a composição de estratégias de investimento puras ou de especulação, permitem também a composição de estratégias de *hedging* pelo que a sua transação tornou-se de utilização comum por casas de investimentos, salas de tesouraria de bancos ou ainda pelo comum investidor.

A avaliação dos futuros sobre obrigações encerra um elevado nível de dificuldade, uma vez que o activo sobre o qual recai o investimento não é físico mas teórico. O contrato tem subjacente a entrega de \$100.000 de uma obrigação fictícia de médio/longo prazo sobre a dívida governamental dos EUA, não sendo um título transacionado em mercado como habitualmente. A complexidade das especificações de entrega leva a que este contrato tenha embutido em si uma ou várias opções de entrega, dando ao vendedor o direito de escolha da obrigação a entregar de entre um cabaz de obrigações (*quality option*) e a possibilidade de escolha do momento ideal de entrega da referida obrigação, durante o mês de maturidade do contrato (*timing option*), seguindo assim uma analogia com as opções americanas sobre um determinado activo.

As obrigações presentes no cabaz divergem quanto às suas características gerais, pelo que é necessário realizar um ajustamento via factores de conversão. O seu objectivo é o de uniformizar estas obrigações na obrigação teórica, contudo dão origem às referidas opções de entrega do vendedor uma vez que a curva de taxa de juro flutua diariamente e raramente é igual à taxa de cupão teórica.

O conhecido modelo de *cost of carry* tem sido utilizado frequentemente como modelo de avaliação directa de contratos de futuros sobre os diversos activos. O mesmo não se poderá dizer sobre os contratos de futuro sobre obrigações. A análise histórica demonstra que o preço de mercado destes tem sido sempre inferior ao valor teórico determinado através do referido modelo, provavelmente porque este último não considera as opções de entrega já referidas. A avaliação obtida pelo modelo de *cost of carry* tem assim vindo a ser aceite como limite superior do valor do futuro. Com efeito, até aos dias de hoje, não foi ainda possível desenvolver um modelo consensual ou fórmula fechada de avaliação deste derivado sobre taxa de juro, existindo no entanto inúmeros estudos que procuram determinar o valor da opção de entrega com a precisão que os mercados financeiros exigem. A demonstração da significância do valor da opção de entrega por parte dos vários estudos vem também refutar a utilização do modelo tradicional de *cost of carry*, tornando os investidores ávidos por um modelo financeiro de valorização que consiga cobrir todas as especificidades dos contratos. Por sua vez, a especificações de entrega e a quantidade de informação relevante, nomeadamente o número de obrigações no cabaz de entregáveis, obriga a que, dada a sua complexidade analítica, possa ser necessário diminuir a exactidão requerida nas diversas aproximações do valor do futuro em função do tempo de obtenção destas mesmas estimativas no momento da aplicação dos diversos estudos empíricos.

A maioria dos modelos desenvolvidos em torno do valor das opções de entrega são modelos de taxa de juro com apenas um factor e assim apenas um grau de liberdade. Alguns modelos desenvolvidos têm já em consideração a estrutura inicial da curva de taxa de juro e a sua natureza estocástica mas focam-se, na sua generalidade, na importância da *quality option* e ignoram a outra importante opção de entrega presente nestes contratos, a *timing option*.

Nesta tese pretende-se descrever e demonstrar a aplicação um modelo de não arbitragem que permita determinar a amplitude da *quality option* (assumindo a inexistência da segunda opção de entrega) e a determinação de um minorante para o valor conjunto da *quality option* e

timing option, que constituem, quase na totalidade, o valor total da opção de entrega embutida nos futuros sobre obrigações de longo prazo do tesouro americano. Para tal irá utilizar-se um modelo de não arbitragem com taxa de juro de natureza estocástica descrito por Heath, Jarrow e Morton (1992) (HJM daqui em diante) com 3 parâmetros. O uso de diversos factores torna-se mais realista uma vez que permite capturar os movimentos que empiricamente são comumente observados: alterações de nível, alterações na inclinação e na curvatura, capturando assim a dinâmica diária da curva de taxa de juro. A literatura nesta área pressupõe que 3 variáveis aleatórias seriam suficientes para captar toda a dinâmica da curva de taxas de juro. A presente tese pretende também averiguar sobre a adequação deste pressuposto no caso da avaliação dos futuros sobre obrigações dos EUA.

O presente documento está organizado da seguinte forma: no capítulo 2 irá rever-se os trabalhos desenvolvidos por outros investigadores neste âmbito; o capítulo 3 foca o funcionamento geral dos futuros sobre obrigações do tesouro transacionados pela CBOT; o capítulo 4 descreve a complexidade das especificações de entrega dos mesmos e as diversas opções embutidas em que se traduzem; os capítulos seguintes pretendem descrever o modelo proposto e sua posterior validação empírica. As conclusões irão ser apresentadas no capítulo 8.

2. Revisão da Literatura

A avaliação de derivados de taxa de juro é uma tarefa que tem capturado a atenção de diversos autores. Na prática, a importância desta avaliação tem origem no papel vital que tem na definição de estratégias e no processo de decisão de todos os participantes de mercado. Por outro lado, a taxa de juro impõe-se como um dos dados económicos de maior importância.

No que diz respeito a futuros sobre obrigações, a análise empírica tem recaído maioritariamente sobre os futuros transacionados pela CBOT (e de entre estes, os futuros sobre obrigações de longo prazo), já que foi este organismo que deu origem a este tipo de contrato e ainda porque estes são os mais utilizados para cobertura de risco em todo o mundo.

A modelização e avaliação das diversas opções de entrega tem sido examinada na literatura usando diversos métodos e não há, até ao momento, consenso relativamente aos resultados empíricos.

Historicamente, o preço dos futuros foi obtido através do tradicional modelo de *cost of carry*, que relaciona o preço do futuro em função do preço à vista do activo subjacente (neste caso, a obrigação *cheapest-to-deliver*). No entanto, este modelo não inclui as diversas opções de entrega dos contratos e tem sido interpretado como limite superior destes. Alternativamente, os modelos propostos pretendem cobrir a análise de uma ou várias opções de entrega e podem normalmente dividir-se em várias perspectivas académicas.

Os primeiros modelos têm como objecto de estudo o risco associado aos factores de conversão e o seu impacto, propondo sistemas alternativos para estabelecer a equivalência entre as obrigações no cabaz e propondo métodos alternativos de identificação da obrigação *cheapest-to-deliver*. Os modelos propostos por Kane e Marcus (1984), Goodman e Ross (1986) ou Benninga e Wiener (1999) integram-se neste primeiro grupo.

Um segundo grupo de estudos propõem soluções teóricas e avaliações empíricas para a *quality option*, assumindo que a estrutura de taxas de juro é determinística. Neste grupo enquadram-se os estudos desenvolvidos por Gay e Manaster (1984), Boyle (1989), Hemler (1990), Barnhill e Seale (1988), Hedge (1998), Kane e Marcus (1986), utilizando diferentes metodologias. No estudo apresentado pelos últimos autores, através de simulação de Monte Carlo, estes concluíram que 3 meses antes do vencimento do contracto, o valor da *quality option* dos contractos de futuros *T-Bond* variava em média entre 1.39% e 4.6%, para os contratos entre Setembro de 1981 e Março de 1983. Hedge (1998) concluiu que o valor desta opção de entrega é uma função crescente do tempo para a maturidade já que aumenta a incerteza e as possibilidades de variação da obrigação mais barata. Para o mesmo tipo de contrato, a estimativa para o valor da opção obtida por este autor era de que esta representava menos de 0.5% do preço do futuro.

Um terceiro grupo de autores assumem um processo estocástico sobre a evolução das taxas de juro, como é o caso do modelo proposto neste trabalho.

Neste âmbito, a primeira abordagem considera um modelo de equilíbrio em que a dinâmica da curva de taxa de juro de curto prazo é modelizada directamente. A vantagem de utilização deste método é a liberdade na especificação da evolução das taxas de juro, no entanto, encontra dificuldades no ajustamento da estrutura observada em mercado. Esta abordagem foi iniciada por Vasicek (1977), Cox, Ingersoll e Ross (1985) ou Carr e Chen (1997).

Os últimos autores dedicaram o seu estudo aos futuros sobre *T-Bonds* transacionados pela CBOT entre 1987 e 1991 e concluíram que o valor da *quality option* era significativo. Chen (1997) definiu ainda o valor dado pelo modelo de *cost of carry* como um limite superior para o preço do futuro com as diversas opções de entrega. Pela análise empírica, concluiu que o valor conjunto destas seria, em média, de 2% do preço do futuro.

Na segunda abordagem às taxas de juro estocásticas, incluem-se os modelos de não arbitragem com os trabalhos desenvolvidos Ritchken e Sankarasubramanian (1992,1995) ou Nunes e Oliveira (2003) e que tomam por base a metodologia proposta por Heath-Jarrow-Morton (1992).

A estrutura definida por HJM tem sido aceite como a mais consistente no âmbito da avaliação de derivados de taxa de juro e é vista como a generalização dos modelos estocásticos anteriores, com variações na definição da função de volatilidade. A sua utilização não tem sido no entanto generalizada devido à sua complexidade e à dificuldade de implementação dos métodos numéricos que exige, pelo que os modelos mais simples propostos por Vasicek or CIR continuam populares.

Nos trabalhos desenvolvidos por Ritchken e Sankarasubramanian foi utilizado um modelo HJM com 1 e 2 variáveis de estado, no qual se avaliou quais os factores que mais influenciam a magnitude da *quality option* e se determinou o valor desta opção de entrega para os diversos futuros sobre obrigações transacionados pela CBOT. No caso dos futuros sobre *T-Bonds*, a estimativa era de que esta representava, em média, 2% do valor do contracto.

Por sua vez, no trabalho desenvolvido por Nunes e Oliveira (2003) foi utilizado um modelo HJM com 3 factores. Estes autores tomaram como base o facto estilizado apresentado por Litterman e Scheinkman (1988) no qual, através da análise de componentes principais, os 3 primeiros vectores próprios conseguem capturar cerca de 96% da variabilidade do retorno de qualquer obrigação de cupão zero.

Estes autores dedicaram o seu estudo aos futuros sobre obrigações do governo alemão transacionados pela EUREX, cujos contractos não contêm *timing option*. Para o caso em análise, através de simulação de Monte Carlo, avaliou-se a exactidão do modelo, provando-se a sua adequação empírica. Para o período temporal entre Maio de 1999 e Setembro de 2001, a estimativa do valor da *quality option* representava um valor insignificante no valor dos futuros analisados, sendo, em média, de 0.06% a 3 meses antes do vencimento, para os contractos de longo prazo. Uma das razões apontadas para o baixo valor desta opção é o número reduzido de obrigações no cabaz (cerca de 8 no caso dos futuros transacionados pelo

EUREX, e entre 22 e 30 nos contractos da CBOT) e de pouca diversidade das suas características.

Os modelos anteriores incidem maioritariamente sobre apenas um tipo de opção de entrega, a *quality option*, que é considerada por muitos como sendo a mais relevante financeiramente. No entanto, ignorar as restantes opções de entrega pode levar a estimativas incorrectas do preço do futuro e à escolha errada das estratégias óptimas de entrega, pelo que surge, por último, um grupo de autores que considerou o efeito conjunto da *quality option* e *timing option*. Neste grupo enquadra-se Boyle (1989), Gay e Manaster (1991) ou Chen e Yeh (2005). Biagini e Bjork (2005) também se dedicaram à análise desta última opção, para a qual derivam um modelo explícito e independente de qualquer especificação da estrutura de taxa de juro, para avaliação de futuros na presença de *timing option*.

No estudo feito por Boyle (1989), demonstrou-se que a *timing option* pode ter um valor significativo. A análise deste autor assume taxas de juro constantes, utilizando um método de avaliação numérico (binomial) e não se aplica directamente a futuros sobre obrigações.

O estudo realizado nesta dissertação segue de perto a análise realizada por Nunes e Oliveira (2003), pretendendo alargar a mesma ao caso de futuros sobre obrigações transacionados pela CBOT.

Na avaliação de futuros sobre obrigações com várias opções de entrega torna-se necessário reconhecer que o resultado da *timing/quality option* depende de uma relação de troca, já que o vendedor tem o direito de trocar tempo ou a obrigação, e está portanto interligado. A inovação financeira desta tese traduz-se na obtenção de um estimador para o valor conjunto de ambas as opções de entrega, independente da formulação para a dinâmica da estrutura da taxa de juro.

3. O mercado de futuros sobre obrigações

Um contrato de futuro é um compromisso estandardizado, transacionado em bolsa e garantido por uma *clearing house*. Este compromisso cria a obrigação de entregar (vendedor) e aceitar a entrega (comprador) do activo definido previamente, no momento T , por um preço acordado em $t < T$. O risco, para qualquer das partes, é ilimitado uma vez que os *payoffs* são simétricos.

Quando o contrato é escrito, tem valor nulo. No entanto, entre a data do contrato e o vencimento do mesmo, o valor do direito de compra flutua consoante o preço do activo subjacente.

Para eliminar o risco de contraparte e garantir a transacção final, é requerido um depósito a ambos os investidos, sendo que a conta margem é revista diariamente consoantes os movimentos diários no preço do contrato. Assim o preço do futuro é rescrito diariamente. A qualquer momento, o investidor pode decidir encerrar o seu compromisso. Para que tal aconteça, a bolsa irá encontrar um outro investidor que deseje tomar a sua posição ou que deseje encerrar também o seu contrato mas encontrando-se este numa posição inversa.

Na maturidade, o preço do futuro converge para o preço no mercado à vista e elimina qualquer estratégia de arbitragem. A excepção a esta regra ocorre quando o contrato de futuro dá alguma flexibilidade na entrega a uma das partes, normalmente definida nas especificações de entrega do contrato.

Dada a diversidade de activos subjacentes, os contratos de futuros são um derivado amplamente transacionado com o objectivo de cobertura de risco, especulação ou ainda pura transacção de bens como no caso de *commodities*.

3.1 Características gerais dos contratos de futuros sobre obrigações

Actualmente, os principais mercados de transacção de futuros sobre obrigações são: CBOT (dívida pública dos Estados Unidos da América), EUREX (dívida pública alemã), LIFFE (dívida pública do Reino Unido) ou MATIF (dívida pública francesa).

Estes regem-se por um conjunto de características, nomeadamente:

- O nocional é determinado à data de abertura;
- O activo subjacente é uma obrigação teórica, com um cupão fixo;
- A bolsa determina, na data de abertura do contrato, quais as obrigações passíveis de ser entregues na maturidade. O motivo pelo qual existem várias obrigações neste cabaz é o de reduzir possíveis desvios no mercado, aumentando assim a possibilidade de variação da *cheapest-to-deliver* numa base diária. Se o número de obrigações para entrega for muito baixo e com alguma obrigação com características muito particulares que aumentem a sua probabilidade de ser a *cheapest-to-deliver*, torna-se mais fácil que uma qualquer instituição manipule a quantidade disponível desta obrigação no mercado, tornando-a mais escassa e assim manipular o seu preço, pelo

que a escolha das obrigações possíveis para entrega segue critérios rigorosos por parte destes organismos;

- A bolsa pode, a qualquer momento durante o período de transação do futuro (i.e., até ao último dia de transação), incluir novas obrigações no cabaz de entregáveis, normalmente novas emissões;
- As obrigações no cabaz têm características semelhantes no que diz respeito às suas características gerais, nomeadamente prazos de maturidade e indexação;
- À data de abertura do contrato, a bolsa anuncia o factor de conversão a aplicar a cada obrigação entregável. Este valor é tal que torna o comprador aproximadamente indiferente entre receber o nocional do contrato ou o valor equivalente da obrigação entregável.

3.2 A importância dos contratos de futuros sobre obrigações

A utilização dos futuros sobre obrigações tem-se tornado uma ferramenta fundamental na gestão do risco para investidores de todo o mundo.

Deter títulos de taxa de juro é o equivalente a especular sobre a evolução futura destes mesmos factores. Com os contratos de futuros sobre obrigações, as instituições financeiras e investidores individuais podem controlar o risco que advém da tomada de posições em títulos sobre taxa de juro e otimizar a sua performance. Neste sentido, independentemente da evolução destas taxas, os contratos de futuros sobre obrigações contribuem de forma efectiva para atingir diversos objectivos, nomeadamente:

- **Eficiência:** A liquidez e características (contrato transacionado em mercado regulado) deste derivado permitem a tomada ou cedência de posições de forma fácil.
- **Integridade nas transações:** O risco de contraparte tem-se revelado uma preocupação acrescida nos tempos actuais. A bolsa, ao servir de intermediário neste tipo de transação, garante a integridade do mercado e dos seus investidores, eliminando assim o risco contraparte inerente às mesmas.
- **Avaliação financeira:** O preço deste tipo de contratos é determinado pelas transações correntes. Estes preços tornam-se assim barómetros das taxas de juros globais, reflectindo as tendências diárias dos diversos mercados.

- Versatilidade: Os futuros sobre obrigações são influenciados pelas mesmas forças económicas que afectam o activo subjacente (o instrumento de dívida sobre o qual incidem).
- Gestão do risco: Os futuros são um instrumento que permite ajustar o risco/retorno de uma carteira de obrigações ao permitir:
 - 1) Assegurar o preço de compra: Se o investidor planeia comprar obrigações no futuro e considera a possibilidade de subida do preço das mesmas, este pode adquirir futuros sobre este activo e assegurar o preço de compra máximo que irá enfrentar.
 - 2) Assegurar o valor presente da carteira de obrigações: Ao vender futuros, o investidor assegura um preço de venda e protege o valor da sua carteira de possíveis descidas de preços.
 - 3) *Cross-Hedge*: Dada a interligação entre os movimentos de preços de ambos os activos, a tomada de posições em futuros sobre obrigações do tesouro permite efectuar um controlo efectivo do risco e melhorar o retorno de obrigações não-governamentais, quer seja obrigações de empresas privadas, *Eurobonds* ou outro tipo de instrumentos de taxa de juro.
 - 4) Especular sobre alterações na estrutura de taxas de juro: Cobrindo uma largo espectro de maturidades e de características dos activos subjacentes, permitem construir estratégias baseadas em diferentes movimentos na curva.

3.3 CBOT

A Chicago Board of Trade (CBOT) foi pioneiro na transação de futuros sobre taxa de juro em 1978. Estes futuros pretendiam dar resposta à necessidade crescente de ferramentas financeiras que pudessem proteger os investidores da instabilidade do custo de financiamento. O primeiro contrato a ser transacionado foi sobre obrigações de maturidade superior a 10 anos (*U.S. Treasury bonds*), seguidos dos futuros sobre obrigações com maturidades até 10 anos, 5 anos e 2 anos (*U.S. Treasury notes*). Durante as últimas 2 décadas, o volume de transações aumentou para níveis sem precedentes, reflectindo a crescente necessidade requerida pelas alterações nos mercados financeiros. Hoje em dia, os futuros sobre obrigações do tesouro americanas são os mais transacionados de todo o mundo, existindo cada vez mais um

interesse considerável pelo desenvolvimento de modelos de *pricing* precisos e rigorosos para este derivado.

Em anexo é apresentado um pequeno resumo das características dos contratos transacionados na CBOT. O nosso estudo irá recair sobre os futuros sobre *T-Bonds*.

Tabela 1 – Resumo das especificações dos contratos sobre futuros transacionados pela CBOT

	T-Bond	10-years T-Note	5-years T-Note	2-years T-Note
Unidade de transacção	\$100.000	\$100.000	\$100.000	\$200.000
Obrigações entregáveis	Obrigações com pelo menos 15 anos até à maturidade	Obrigações com maturidade entre 6,5 e 10 anos	Obrigações com maturidade entre 4,25 e 5,25 anos	Obrigações com maturidade entre 1,75 e 2 anos
Varição Mínima de preço	0.0312500	0.0312500	0.0156250	0.0078125
Meses de expiração do contracto	Março, Junho, Setembro e Dezembro	Março, Junho, Setembro e Dezembro	Março, Junho, Setembro e Dezembro	Março, Junho, Setembro e Dezembro
Horário de transacção	7:20 am - 2:00 pm	7:20 am - 2:00 pm	7:20 am - 2:00 pm	7:20 am - 2:00 pm
Ticker	US	TY	FV	TU
Último dia de transacção	7 dias de transacção antes do último dia de transacção do mês de maturidade	7 dias de transacção antes do último dia de transacção do mês de maturidade	Último dia de transacção do mês do contracto. Neste dia, a transacção encerra às 12:01 pm	Último dia de transacção do mês do contracto. Neste dia, a transacção encerra às 12:01 pm
Último dia de entrega	Último dia de transacção do mês do contracto	Último dia de transacção do mês do contracto	3 dias de transacção após o último dia de transacção	3 dias de transacção após o último dia de transacção

Para todos os tipos de contratos apresentados, a obrigação teórica subjacente tem um notional de \$100.000 e paga um cupão de 6%¹ semianual.

Importa ainda descrever os seguintes aspectos que caracterizam um contrato de futuros sobre obrigações transacionado na CBOT:

- A escolha das obrigações entregáveis e respectivo factor de conversão é determinado pela bolsa consoante as características das mesmas, nomeadamente datas de maturidade/data de recompra (no caso de obrigações *callable*). No entanto, durante o prazo de vigência do contrato, a bolsa pode decidir incluir novas emissões neste cabaz, mesmo que estas tenham sido colocadas em mercado já depois da abertura do contrato. Esta possibilidade é geralmente designada por *new issue option*.
- O vendedor pode escolher para entrega qualquer obrigação que esteja predefinida no cabaz de entregáveis, em qualquer data à sua escolha do mês de maturidade, desde que não tenha já encerrado a sua posição.
- A transação de futuros sobre obrigações encerra às 14 horas, hora de Chicago, sendo o preço do futuro encerra neste momento e é reaberto apenas no dia de transação seguinte. Por sua vez, o mercado de obrigações não tem horário definido. Desde que haja investidores a executar ordens, o mercado pode ser considerado aberto. A *clearing house* da CBOT aceita a entrega da obrigação do contrato até às 20 horas de cada dia de entrega. Desta forma, o vendedor tem, durante o mês de maturidade do contrato, a possibilidade de entrega até às 20 horas, podendo obter ganhos caso alguma das obrigações entregáveis tenha descidas de preço consideráveis durante esta janela de tempo.
- O último dia de negociação ocorre 7 dias de transação antes do último dia de transação do mês de entrega. No entanto, a *clearing house* aceita entregas até ao último dia de transação do mês de entrega. O preço de *settlement* do futuro é assim determinado 7 dias antes da sua data de vencimento final, sendo que o vendedor pode ainda decidir a entrega durante estes dias.

3.4 Liquidação de futuros sobre obrigações

A liquidação, quer física quer financeira destes contratos de futuros tem por base os factores de conversão de cada obrigação entregável presente no cabaz, os quais estabelecem uma

¹ A partir de Março de 2000 iniciou-se as alterações impostas pelo CBOT que determinaram a alteração do cupão do notional de 8% para 6%.

equivalência entre a obrigação física e a obrigação teórica subjacente ao contrato, de modo a que seja indiferente ao comprador do futuro receber uma qualquer obrigação do cabaz. Assim o factor de conversão determinará o preço de cada unidade de valor facial desta que faz com que a *yield-to-maturity* seja igual ao cupão teórico da obrigação subjacente. Desta forma, o investidor ficará indiferente entre receber/pagar a obrigação fictícia, com um pré-especificado cupão teórico que lhe assegura esta rentabilidade e pagando F_{T_f} (preço de *settlement* do futuro na data de maturidade do contrato), ou entre pagar $F_{T_f} \times cf$ pela obrigação efectivamente entregue, assegurando a mesma rentabilidade teórica.

O preço de entrega final é obtido então como:

$$\text{Preço de entrega} = F_{T_f} \times cf + AI \quad (3.1)$$

com AI igual ao juro corrido da obrigação escolhida pelo vendedor.

No entanto, o factor de conversão encerra em si a problemática da geração da *quality option*. Este define uma equivalência exacta apenas no pressuposto de a curva de taxa de juro ser plana no dia de vencimento do contrato e de valor coincidente ao cupão da obrigação teórica. A realidade é que a estrutura das taxas de juro varia constantemente no mercado e esta afecta de forma diferenciada cada obrigação, uma vez que estas têm características diferentes no que diz respeito a prazos de maturidades e taxas de cupão. Assim, o seu preço na maturidade do contrato é determinado pelos *cashflows* descontados usando a curva de taxa de juro em vigor nesse momento temporal. Este aspecto conduz a que haja no mercado diferentes preços para cada obrigação do cabaz, permitindo ao vendedor, como investidor racional, escolher para entrega a obrigação mais barata e assim maximizar o seu retorno na operação.

Contudo, o que se verifica na realidade é que no momento da contratação do futuro ambos os investidores detêm a mesma informação e uma vez que o custo para entrar nesta operação é nulo, é expectável que o comprador procure descer o preço de compra, anulando o lucro subjacente à opção de escolha detida pelo vendedor que pagaria zero no momento inicial.

O vendedor tenderá assim a maximizar a diferença entre $F_{T_f} \times cf_j + AI_j(T_f)$ e $CB_j(T_f) + AI_j(T_f)$ ($CB_j(T_f)$ representa o preço *clean* da obrigação j na data de maturidade) em que j representa qualquer uma das obrigações entregáveis. A obrigação que maximiza esta diferença é chamada de *cheapest-to-deliver* e obedece à seguinte condição:

$$CTD = j : \max_{j \{ \text{cabaz de obrigações entregáveis} \}} [F_{T_f} \times cf_j - CB_j(T_f)] \quad (3.2)$$

4. Delivery Options

Nos contratos de futuros sobre obrigações do tesouro americanas, existem diversos tipos de opções capturadas pelas suas complexas especificações de entrega. A dificuldade de avaliação financeira deste derivado advém da multiplicidade de opções embutidas e pela sua interdependência. A opção de escolha para o vendedor tem valor monetário uma vez que dela podem advir proveitos financeiros.

4.1 Quality Option

A CBOT pré-determina o capaz de obrigações de diferentes maturidades e taxas de cupão que podem ser aceites como activo entregável na maturidade de determinado contrato. O vendedor do contrato tem a opção de escolha da obrigação que vai entregar, de entre o cabaz anteriormente anunciado. Naturalmente, o vendedor irá escolher a opção mais barata para entrega ou aquela que lhe maximiza o retorno do seu investimento.

4.2 Switching Option ou End-of-Month Option

O último dia de *trading* é o oitavo dia de negociação antes do fim do mês do contrato, enquanto o último dia de entrega é o último dia de negociação no referido mês. No período temporal entre as duas datas, o preço de entrega do futuro já está fixo e não varia consoante os mercados assim determinam. No entanto, o mesmo não acontece às obrigações entregáveis, em que o seu preço está sujeito às variações de mercado. Esta variação faz com que a obrigação mais barata para entrega possa variar durante estes dias, aumentando o leque de possibilidades do vendedor.

4.3 Timing Option

A entrega pode ocorrer em qualquer dia do mês de vencimento do contrato e o vendedor pode escolher o dia de entrega. Para além da possibilidade de diferir a entrega, o vendedor tem ainda a possibilidade de encerrar a sua posição no contrato.

4.4 *New-issue Option*

Esta opção é considerada pela maioria dos investigadores como tendo valor nulo. Caracteriza-se pela possibilidade de entrada de novas obrigações para o cabaz de entregáveis durante o período de vida do contrato. Um número suficiente de obrigações entregáveis faz com que a inserção de uma nova emissão com características gerais semelhantes às já existentes não tenha um impacto significativo no valor do futuro. A ressalva deve ser feita quando se espera que esta nova obrigação possa vir a ser *cheapest-to-deliver* e neste caso é de esperar que este tipo de opção possa ser relevante, já que as emissões a ocorrer e suas características são comunicadas antecipadamente aos mercados.

4.5 *Wild-card Option*

Durante os dias possíveis para a entrega, a hora e data limite imposta ao vendedor para que este informe a bolsa acerca da obrigação a entregar é as 20 horas do dia anterior à entrega. Atendendo que o mercado de futuros encerra às 14 horas mas o mercado de obrigações continua aberto, caso o preço de alguma obrigação entregável desça consideravelmente, pode ser vantajoso para o vendedor comprar a obrigação entregável mais barata e anunciar à bolsa a sua intenção de entrega. Desta forma, o vendedor irá conseguir obter vantagem financeira através da descida do preço da obrigação, sendo que, apenas no dia seguinte, o preço do futuro irá descontar automaticamente os movimentos ocorridos no activo subjacente. Esta estratégia pode ser considerada uma estratégia de arbitragem e esta possibilidade vigora durante todos os dias do mês de maturidade do contrato.

5. Avaliação de futuros sobre obrigações

O objectivo desta análise é definir um modelo de avaliação genérico considerando apenas a existência de dois tipos de opções de entrega: a *quality option* e *timing option*. O modelo proposto é independente de qualquer formulação para o processo estocástico das taxas de juro.

Para a concepção deste modelo foi necessário formalizar um conjunto de pressupostos que seguidamente se descrevem.

Pressupostos

H1) Os mercados são perfeitos:

- não há custos de transação, contas margens, limites quanto à variação no preço dos futuros, impostos ou restrições a *short selling*.
- As transações e o *marking-to-market* são feitos em tempo contínuo.

Esta hipótese assume que não há fricções no mercado que provoquem quaisquer desvios no preço e permite que a análise do modelo seja feita em tempo contínuo.

H2) O cabaz de entregáveis e respectivas características são conhecidos no momento de avaliação do contrato. As características de opcionalidade (opção de recompra) das obrigações não são tidas em conta.

Notação

A incerteza é representada pelo espaço de probabilidade (Ω, F, Q) onde Q é a medida de risco neutral obtida quando a *money-market account* é o numerário em tempo contínuo e a *filtration* F_t contém toda a informação disponível no momento t . Considere-se assim a seguinte nomenclatura:

m = Número de obrigações entregáveis de um determinado contrato;

$H(t, T_f, \{1, \dots, m\})$ = Preço no momento t de um futuro que matura em T_f , com m obrigações entregáveis e considerando apenas a existência de *quality option*;

$H(T_f, T_f, \{1, \dots, m\})$ = Preço de liquidação de um futuro que matura em T_f , com m obrigações entregáveis e considerando apenas a existência de *quality option*;

$H(t, T_f, \{j^*\})$ = Preço no momento t de um futuro que matura em T_f e sobre uma obrigação específica j^* (sem qualquer opção de entrega);

$H(t, T_f^*, j^*)$ = Preço no momento t de um futuro que matura em T_f e sobre uma obrigação específica j^* e que será entregue no momento T_f^* (sem qualquer opção de entrega);

$AI_j(T_f)$ = Juro corrido da obrigação j no momento T_f ;

cf_j = Factor de conversão da obrigação entregável j ;

$CB_j(t)$ = Preço *clean* da obrigação entregável j no momento t ;

d = Número de dias durante os quais o vendedor pode exercer a sua opção de entrega (considera a existência de *timing option*);

$\{T_f^1, \dots, T_f^d\}$ = Conjunto de dias durante os quais o vendedor pode exercer a sua opção de entrega (considera a existência de *timing option*).

5.1 Modelo de avaliação de futuros sobre obrigações com *quality option*

Uma nova hipótese é assumida cumulativamente com as já definidas anteriormente.

H3) A entrega ocorre apenas no último dia de entrega do mês de maturidade do contrato. Esta hipótese permite que a análise seja feita apenas considerando apenas a existência de *quality option* e ignorando a existência de *timing option*. O vendedor escolhe qual a obrigação para entrega e a conversão é feita via o sistema de factores previamente anunciados pela bolsa.

Proposição 1) O preço no momento t de um futuro que vence em T_f ($t < T_f$), com m obrigações entregáveis e considerando apenas a existência de *quality option* é dado por:

$$H(t, T_f, \{1, \dots, m\}) = E^Q \left\{ \min_{j=1, \dots, m} \left[\frac{CB_j(T_f)}{cf_j} \right] \middle| F_t \right\} \quad (5.1)$$

Demonstração: Ver Chen (1997). Esta proposição segue imediatamente o critério de maximização do lucro do vendedor do futuro. No entanto, numa situação de não arbitragem, este valor deve ser nulo. Aplicando expectativas sobre o preço do futuro na maturidade sujeito a F_t , surge a proposição acima.

Proposição 2) O preço no momento t de um futuro que vence em T_f ($t < T_f$), sobre uma obrigação específica j^* é

$$H(t, T_f, j^*) = \min_{j=1, \dots, m} E^Q \left\{ \left[\frac{CB_j(T_f)}{cf_j} \right] \middle| F_t \right\} \quad (5.2)$$

em que j^* representa a obrigação de entre o cabaz de entregáveis que o vendedor, no momento t escolheria para entrega no momento T_f , caso não houvesse opção de escolha.

Demonstração: Ver Oliveira (2002, página 38).

Proposição 3) O valor da *quality option*, no momento t é dado por:

$$QO(t, T_f, \{1, \dots, m\}) = H(t, T_f, j^*) - H(t, T_f, \{1, \dots, m\}) \quad (5.3)$$

Esta proposição representa o valor que o comprador atribui à possibilidade de o vendedor alterar a decisão da obrigação de entrega entre o momento presente t e o momento T_f , sendo que no momento t a obrigação que se prevê mais barata na maturidade seja j^* e o vendedor poderá alterar a sua decisão para uma qualquer obrigação presente no cabaz $\{1, \dots, m\}$.

5.2 Modelo de avaliação de futuros sobre obrigações com *quality option* e *timing option*

A anterior hipótese H3) é agora retirada, permitindo ao vendedor a escolha da obrigação a entregar bem como o dia do mês de entrega que lhe é mais vantajoso financeiramente. Assim, poderemos analisar o efeito conjunto de ambas as opções de entrega.

A proposição seguinte representa a contribuição mais relevante desta dissertação no que diz respeito à avaliação de futuros sobre obrigações.

Proposição 4) O preço no momento t de um futuro que vence em T_f ($t < T_f$), com m obrigações entregáveis e considerando que o vendedor pode decidir entregar em qualquer um dos dias pertencentes ao conjunto $\{T_f^1, \dots, T_f^d\}$ é dado por:

$$H(t, \{T_f^1, \dots, T_f^d\}, \{1, \dots, m\}) \leq \min_{l=1, \dots, d} [H(t, T_f^l, \{1, \dots, m\})] \quad (5.4)$$

Demonstração: Como investidor racional e considerando ambas as opções de entrega, o vendedor deverá ter em conta dois critérios na sua decisão de entrega. O primeiro, já visto anteriormente, que se prende com a escolha da obrigação mais barata para entrega e o segundo, que se prende com o melhor momento temporal para esta decisão. Estes dois

critérios estão interligados uma vez que a obrigação mais barata depende directamente da estrutura de taxas de juro em vigor em cada um dos possíveis dias para entrega. Neste sentido, o vendedor irá tentar maximizar retorno desta estratégia. Contudo, para assegurar a inexistência de oportunidades de arbitragem, o comprador irá procurar a baixar o preço do futuro, restabelecendo o equilíbrio. Seguindo uma analogia com Oliveira (2002, proposição 1, página 36) para o caso de *quality option*, o preço do futuro no primeiro dia possível de entrega, considerando a possibilidade de adiar a entrega e alteração da *cheapest-to-deliver* a entregar é:

$$H(T_f^1, \{T_f^1, \dots, T_f^d\}, \{1, \dots, m\}) = E^Q \left\{ \min_{l=1, \dots, d} \min_{j=1, \dots, m} \left[\frac{CB_j(T_f^l)}{cf_j} \right] \middle| F_{T_f^l} \right\} \quad (5.4)$$

O preço do futuro no momento t corresponde à expectativa do preço na sua maturidade sujeito à informação disponível no momento t , pelo que

$$H(t, \{T_f^1, \dots, T_f^d\}, \{1, \dots, m\}) = E^Q [H(T_f^1, \{T_f^1, \dots, T_f^d\}, \{1, \dots, m\}) | F_t] \quad (5.5)$$

$$H(t, \{T_f^1, \dots, T_f^d\}, \{1, \dots, m\}) = E^Q \left\{ \left[E^Q \left\{ \min_{l=1, \dots, d} \min_{j=1, \dots, m} \left[\frac{CB_j(T_f^l)}{cf_j} \right] \middle| F_{T_f^l} \right\} \right] \middle| F_t \right\} \quad (5.6)$$

Pela desigualdade de *Jensen* e usando a regra dos valor esperados condicionados, ficamos com

$$H(t, \{T_f^1, \dots, T_f^d\}, \{1, \dots, m\}) \leq E^Q \left\{ \left[\min_{l=1, \dots, d} E^Q \left\{ \min_{j=1, \dots, m} \left[\frac{CB_j(T_f^l)}{cf_j} \right] \middle| F_{T_f^l} \right\} \right] \middle| F_t \right\} \quad (5.8)$$

$$H(t, \{T_f^1, \dots, T_f^d\}, \{1, \dots, m\}) \leq \min_{l=1, \dots, d} \left\{ E^Q \left[E^Q \left\{ \min_{j=1, \dots, m} \left[\frac{CB_j(T_f^l)}{cf_j} \right] \middle| F_{T_f^l} \right\} \right] \middle| F_t \right\} \quad (5.9)$$

$$H(t, \{T_f^1, \dots, T_f^d\}, \{1, \dots, m\}) \leq \min_{l=1, \dots, d} \left[E^Q \left\{ \min_{j=1, \dots, m} \left[\frac{CB_j(T_f^l)}{cf_j} \right] \middle| F_t \right\} \right] \quad (5.10)$$

$$H(t, \{T_f^1, \dots, T_f^d\}, \{1, \dots, m\}) \leq \min_{l=1, \dots, d} [H(t, T_f^l, \{1, \dots, m\})] \quad (5.11)$$

■

O preço no momento t de um futuro que vence em T_f ($t < T_f$), com m obrigações entregáveis e considerando que o vendedor pode decidir entregar em qualquer um dos dias pertencentes ao conjunto $\{T_f^1, \dots, T_f^d\}$ é portanto majorado pelo valor mínimo do futuro com

quality option, considerando que o dia de maturidade na determinação desta pode variar consoante o vector de possíveis dias de entrega. O tempo, no que diz respeito à maturidade do contrato, varia em tempo discreto.

Proposição 5) O valor mínimo para o valor conjunto de *quality option e timing option*, no momento t é dado por:

$$QTO(t, \{T_f^1, \dots, T_f^d\}, \{1, \dots, m\}) \geq \min_{l=1, \dots, d} QO(t, T_f^l, \{1, \dots, m\}) \quad (5.12)$$

Afirmar que o preço do futuro com ambas as opções de entrega é sempre menor ou igual ao valor mínimo do preço do futuro com *quality option* considerando diversas datas para maturidade do contrato é equivalente a afirmar que o valor conjunto de *quality option e timing option* é sempre igual ou superior ao mínimo do valor da *quality option* para os diversos possíveis dias de entrega.

Demonstração: Tal como anteriormente

$$QTO(t, \{T_f^1, \dots, T_f^d\}, \{1, \dots, m\}) = H(t, T_f^*, j^*) - H(t, \{T_f^1, \dots, T_f^d\}, \{1, \dots, m\}) \quad (5.13)$$

Por substituição do último membro da equação pela Proposição 4, então

$$QTO(t, \{T_f^1, \dots, T_f^d\}, \{1, \dots, m\}) \geq H(t, T_f^*, j^*) - \min_{l=1, \dots, d} [H(t, T_f^l, \{1, \dots, m\})] \quad (5.14)$$

$$QTO(t, \{T_f^1, \dots, T_f^d\}, \{1, \dots, m\}) \geq \min_{l=1, \dots, d} [H(t, T_f^*, j^*) - H(t, T_f^l, \{1, \dots, m\})] \quad (5.15)$$

$H(t, T_f^*, j^*) \geq \min_{l=1, \dots, d} [H(t, T_f^l, j^*)]$ uma vez $T_f^* \in \{T_f^1, \dots, T_f^d\}$, e portanto

$$QTO(t, \{T_f^1, \dots, T_f^d\}, \{1, \dots, m\}) \geq \min_{l=1, \dots, d} \left[\min_{s=1, \dots, d} [H(t, T_f^s, j^*)] - H(t, T_f^l, \{1, \dots, m\}) \right] \quad (5.16)$$

$$QTO(t, \{T_f^1, \dots, T_f^d\}, \{1, \dots, m\}) \geq \min_{l=1, \dots, d} [H(t, T_f^l, j^*) - H(t, T_f^l, \{1, \dots, m\})] \quad (5.17)$$

e portanto

$$QTO(t, \{T_f^1, \dots, T_f^d\}, \{1, \dots, m\}) \geq \min_{l=1, \dots, d} QO(t, T_f^l, \{1, \dots, m\}) \quad (5.18)$$

■

6. Modelo de não arbitragem para a estrutura das taxas de juro

Os derivados sobre taxa de juro são instrumentos condicionados pela evolução futura dessas mesmas taxas. Desta forma, a incerteza quanto à sua trajectória deverá ser modelizada através de uma variável aleatória de evolução temporal, ou seja, por uma variável estocástica.

A escolha de um modelo de não arbitragem para a estrutura de taxas de juro prende-se com o facto de que nestes modelos, esta estrutura é um *input* e não um *output*, ao contrário dos modelos de equilíbrio. Desta forma, assegura-se que a dinâmica de toda a estrutura de taxa de juro é automaticamente consistente com os dados de mercado, garantindo o ajustamento perfeito do preço do *underlying* na determinação do preço do derivado.

O modelo a especificar irá suportar a avaliação dos contratos de futuros sobre obrigações do tesouro, considerando as opções de entrega descritas anteriormente.

Para cada dia da nossa amostra, os parâmetros do processo estocástico que define a evolução das taxas de juro, são estimados utilizando um critério de minimização dos desvios entre o preço obtido via modelo e o preço de mercado dos futuros efectivamente verificado. A consideração conjunta de um modelo estrutural para a evolução das taxas de juro e de um modelo de avaliação genérico dos futuros sobre obrigações permite derivar uma solução fechada para o preço do futuro com *quality option* e a partir deste, um majorante para o preço do futuro considerando ambas as opções de entrega.

A parametrização da estrutura de taxas de juro irá ser feita por intermédio de um modelo HJM multifactor, incorporando assim várias fontes de incerteza. Estas traduzem-se na introdução de factores adicionais na dinâmica da estrutura de taxas de juro, para além das alterações de nível já capturadas pelos modelos unifactoriais. Esta alternativa aos modelos unifactoriais é suportada por diversos estudos empíricos, que demonstram, usando a análise de componentes principais, que a dinâmica da estrutura de taxas de juro pode ser explicada, na sua grande parte, por alterações de nível, na inclinação e na sua curvatura. O nosso estudo pretende também demonstrar a aderência deste facto estilizado ao mercado de futuros em análise.

6.1 Especificação do modelo

A técnica proposta por Heath-Jarrow-Morton (1990;1992) define um modelo estrutural sobre a evolução das taxas de juro considerando um vector de variáveis de estado e impondo restrições à tendência do processo estocástico definido para as taxas *forward*, por forma a garantir a inexistência de oportunidades de arbitragem.

A vantagem da utilização destes modelos, por oposição aos de taxas de juro de curto prazo que apenas capturam a dinâmica de um ponto na curva, é a de que pretendem capturar analiticamente toda a dinâmica da estrutura da curva.

A metodologia proposta assenta num modelo multifactor onde se usam como variáveis de estado, não a taxa de juro de curto prazo, mas um vector que contém a estrutura de taxas a prazo/factores de desconto. As hipóteses anteriormente definidas no capítulo 5 mantêm-se válidas no âmbito deste modelo.

A taxa de juro inicial é um *input* do modelo, que traduz assim as preferências dos investidores implícitas nos preços de mercado e consequentemente, qualquer curva de taxa de juro pode ser capturada pela metodologia HJM. Para implementar este mesmo modelo, é ainda necessário especificar a estrutura de volatilidade das taxas *forward*.

A formulação do modelo HJM pode ser feita através da definição do processo estocástico para as taxas *forward*² ou em termos de factores de desconto, que representam o preço no momento t de uma obrigação de cupão zero com uma determinada maturidade T e valor nominal unitário. Assim, considere-se o seguinte processo estocástico, na medida Q , para os factores de desconto:

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r(t)dt + \underline{\sigma}(t,T)' \cdot d\underline{W}^Q(t) \quad (6.1)$$

em que:

- $\underline{W}^Q(t) \in \mathfrak{R}^n$ representa um vector de processos *Brownian motion* de dimensão n ;
- $P(t,T)$ representa o preço no momento t de uma unidade facial de uma obrigação de cupão zero sem risco e que matura em T ;
- $r(t)$ é a taxa de juro instantânea em t e entende-se como o parâmetro de tendência;
- $\underline{\sigma}(t,T)$ representa o parâmetro de volatilidade da equação;
- n representa o número de factores de incerteza e por conseguinte, o número de parâmetros do modelo.

² O mesmo modelo pode ser definido através da equação do processo estocástico para $f(t,T)$ ou para $r(t)$. A formulação apresentada nesta dissertação, assenta na definição do preço de uma obrigação de cupão zero, que paga uma unidade de valor facial na maturidade, que é obtida a partir da taxa *forward* considerando a seguinte equação:

$$P(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t,s)ds\right\}$$

O modelo HJM é visto como a generalização de vários modelos descritos por diversos autores uma vez que a sua formulação é genérica, pelo que a escolha da função de volatilidade corresponde a uma visão particular deste mesmo modelo. Nesta dissertação, por razões de simplificação analítica, a função de volatilidade irá ser determinística, dando origem a um modelo Gaussiano e a factores de desconto com uma distribuição lognormal.

6.2 Avaliação de futuros sobre obrigações num modelo HJM para a estrutura de taxas de juro

O presente capítulo terá como base a teoria de avaliação de futuros presente no capítulo 5, o modelo HJM especificado e considera ainda a teoria de avaliação de obrigações de taxa fixa, no qual o preço, num determinado momento temporal t de uma obrigação pode ser obtido através do somatório de todos os seus *cashflows* futuros conhecidos, actualizados, para o momento t com base na curva de taxa de juro corrente. Esta visão é equivalente a afirmar que uma obrigação de taxa fixa pode ser interpretada como o somatório de inúmeras obrigações de cupão zero que representam cada um dos *cashflows* futuros da obrigação original e com maturidades iguais ao momento de pagamento desses mesmos *cashflows*.

Considere-se assim

$$P(t, T_f, T) := \frac{P(t, T)}{P(t, T_f)}, \quad t \leq T_f \leq T \quad (6.2)$$

em que $P(t, T_f, T)$ representa o preço no momento t , de uma obrigação para entrega em T_f e que vence em T . $P(t, T_f, T)$ é entendido na prática como um factor de desconto *forward*.

Proposição 6) Considerando o modelo HJM descrito e a hipótese de volatilidade determinística, então o preço *forward* no momento t de uma obrigação de cupão zero com entrega em T_f e maturidade em T , segue uma distribuição lognormal dada por:

$$P(t, T_f, T) = P(t_0, T_f, T) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left[\|\underline{\sigma}(s, T)\|^2 - \|\underline{\sigma}(s, T_f)\|^2 \right] ds + \int_{t_0}^t [\underline{\sigma}(s, T) - \underline{\sigma}(s, T_f)] \cdot d\underline{W}^Q(s) \right\}$$

com $t_0 \leq t \leq T_f \leq T$ e onde $\|\cdot\|$ designa a norma Euclideana em \mathfrak{R}^n . (6.3)

Demonstração: Ver Oliveira (2002, proposição 4, página 41)

Proposição 7) O preço no momento t_0 de um futuro para entrega em T_f e sobre uma obrigação de cupão zero que vence em T é dado por:

$$F(t_0, T_f, T) = P(t_0, T_f, T) \exp\{J(t_0, T_f, T)\}, \text{ com} \quad (6.4)$$

$$J(t_0, T_f, T) := \int_{t_0}^T \left[\|\underline{\sigma}(s, T_f)\|^2 - \underline{\sigma}(s, T) \cdot \underline{\sigma}(s, T_f) \right] ds \text{ e } t_0 \leq t \leq T_f \leq T. \quad (6.5)$$

Demonstração: Ver Oliveira (2002, proposição 5, página 42). Tem por base a consideração que o preço futuro no momento t_0 é o valor esperado, na medida Q , do factor de desconto $P(T_f, T)$, sujeito à informação disponível em t_0 .

$P(t_0, T_f, T)$ pode ser obtido através da curva de taxa de juro observada no mercado e apenas faltando a especificação da função de volatilidade para que se possa determinar os parâmetros do modelo através do critério de minimização dos desvios entre o preço fornecido pelo modelo e o preço verificado em mercado.

Proposição 7) Considerando o modelo HJM anteriormente descrito, a generalização para o preço de um futuro no momento t_0 com entrega em T_f sobre uma obrigação j que vence em T e que gera um conjunto de *cashflows* durante a sua vigência é dado por:

$$H(t_0, T_f, j) = -\frac{AI_j(T_f)}{cf_j} + \sum_{i=1}^{N^j} F(t_0, T_f, T_i^i) \frac{k_i^j}{cf_j}, \quad (6.6)$$

com N^j igual ao número de *cashflows* k_i^i pagos pela obrigação de taxa fixa em cada momento T_i^j posteriores a T_f .

Demonstração: Ver Oliveira (2002, proposição 6, página 43).

Esta proposição determina que o preço no momento t , de um futuro que vence em T_f e que reclama a entrega de uma obrigação de cupão de taxa fixa com maturidade em T , é dado pela expectativa do preço da obrigação no momento T_f . As expectativas são introduzidas na equação por $F(t_0, T_f, T_i^i)$, que não é mais do que os factores de desconto que se esperam que estejam em vigor em T_f , dada a curva de taxa de juro observada e a função de volatilidade para o momento T_f . Esta definição está também em concordância com a definição de um contrato de futuros numa situação de não arbitragem, em que o preço do futuro converge para

o preço do *underlying* na maturidade e o preço do futuro no mercado à vista é a expectativa do preço do *underlying* no vencimento.

Proposição 8) Considerando o modelo HJM descrito, a generalização para o preço de um futuro no momento t_0 com entrega em T_f e sobre um conjunto de m obrigações de taxa fixa, é dado por:

$$H(t_0, T_f, j^*) = \min_{j=1, \dots, m} \left[-\frac{AI_j(T_f)}{cf_j} + \sum_{i=1}^{N^j} F(t_0, T_f, T_i^j) \frac{k_i^j}{cf_j} \right], \quad (6.7)$$

com N^j igual ao número de *cashflows* k_i^j pagos pela obrigação de taxa fixa j , ($j = 1, \dots, m$) em cada momento T_i^j posterior a T_f .

Demonstração: A proposição deriva da conjugação da proposição 7 com a proposição 2 definida no capítulo 5.

Na proposição anterior, a obrigação j^* que minimiza a equação anterior é a *cheapest-to-deliver* no momento t_0 . O resultado fornecido é um dos membros da equação de determinação do valor *quality option* e representa o valor do futuro no momento t_0 considerando que o vendedor já não poderá alterar a decisão relativamente à obrigação a entregar, ou seja, é o valor do futuro no momento t_0 sem *quality option*.

6.2.1 Avaliação do futuro com *quality option*

Conforme definido na equação (5.1), o valor do futuro com *quality option* é determinado com base no valor esperado, no momento t , pelo preço da obrigação que é *cheapest-to-deliver* no momento T_f . Seguindo a proposição anterior, o preço do futuro com *quality option* será dado por:

$$H(t, T_f, \{1, \dots, m\}) = E^Q \left\{ \min_{j=1, \dots, m} \left[-\frac{AI_j(T_f)}{cf_j} + \sum_{i=1}^{N^j} F(t_0, T_f, T_i^j) \frac{k_i^j}{cf_j} \right] \middle| F_t \right\} \quad (6.8)$$

O cálculo deste valor esperado envolve um conjunto de variáveis aleatórias pelo que requer a determinação da função de densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias, para os diversos momentos temporais T_f e T_i^j , o que faz com que a complexidade do cálculo deste valor esperado aumente directamente com a dimensão do vector de *Brownian Motions* e

com o número de diferentes prazos de pagamento de todos os *cashflows* no cabaz de entregáveis. Se considerarmos ainda a determinação do majorante para o preço do futuro com ambas as opções de entrega, devemos ainda considerar mais uma dimensão de integração para os possíveis dias de entrega que correspondem a diferentes dias de maturidade para o futuro.

Tendo em conta que se pretende utilizar um modelo HJM multifactor com o objectivo de capturar diversos choques na estrutura de taxas de juro (pela introdução de vários factores de incerteza) e que é necessário a utilização de um modelo de não arbitragem, vai utilizar-se uma hipótese de proporcionalidade por forma a reduzir a dimensão de integração necessária neste integral e consequentemente reduzir a sua complexidade.

Proposição 9) Considerando o modelo HJM descrito, o preço no momento t de uma obrigação de cupão zero com maturidade em T , é igual em distribuição, na medida \mathcal{Q} , a:

$$P(t, T) \sim P(t_0, t, T) \exp\left[-\frac{1}{2}\eta(t_0, t, T) + \sqrt{\varphi(t_0, t, T)}z\right], \text{ com } z \sim N^1(0,1) \quad (6.9)$$

$$\eta(t_0, t, T) := \int_{t_0}^t \left[\|\underline{\sigma}(s, T)\|^2 - \|\underline{\sigma}(s, t)\|^2 \right] ds, \quad (6.10)$$

$$\text{e } \varphi(t_0, t, T) := \int_{t_0}^t \|\underline{\sigma}(s, T) - \underline{\sigma}(s, t)\|^2 ds \quad (6.11)$$

\sim significa igualdade em distribuição. $N^1(0,1)$ representa a distribuição normal de média 0 e variância unitária.

Demonstração: Ver Oliveira (2002, proposição 8, página 45).

Proposição 10) Considerando o modelo HJM descrito, o preço de um futuro no momento t_0 com entrega em T_f e sobre um conjunto de m obrigações de taxa fixa, pode ser aproximado por:

$$\begin{aligned} & H(t, T_f, \{1, \dots, m\}) \\ & \approx \int_0^1 \left\{ \begin{aligned} & \min_{j=1, \dots, m} \left[-\frac{AI_j(T_f)}{cf_j} + \sum_{i=1}^{N^j} \exp\left(-\frac{1}{2}\eta(t_0, T_f, T_i^j)\right) y^{\sqrt{\varphi(t_0, T_f, T_i^j)} \frac{k_i^j}{cf_j}} P(t_0, T_f, T_i^j) \right] \\ & + \min_{j=1, \dots, m} \left[-\frac{AI_j(T_f)}{cf_j} + \sum_{i=1}^{N^j} \exp\left(-\frac{1}{2}\eta(t_0, T_f, T_i^j)\right) y^{-\sqrt{\varphi(t_0, T_f, T_i^j)} \frac{k_i^j}{cf_j}} P(t_0, T_f, T_i^j) \right] \end{aligned} \right\} \cdot \quad (6.12) \\ & \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\ln y)^2\right] dy \end{aligned}$$

Demonstração: Ver Oliveira (2002, página 47).

6.2.2 Especificação da função volatilidade

A especificação de um modelo HJM multifactor permite a introdução de inúmeros factores de incerteza que irão provocar choques diferenciados ao longo da estrutura de taxas de juro. Este modelo generaliza também a função de volatilidade a utilizar, i.é, não define qualquer hipótese quanto às características do processo estocástico seguido pelas taxas *forward*. Para além disso, cada factor adicional introduz um nível de complexidade superior na obtenção de estimativas, o que justifica a ponderação adequada no número de *Brownian Motions* a utilizar. Ainda assim, a função de volatilidade pode ser escolhida por forma a capturar o maior número de características desejáveis no modelo e com um número mínimo de variáveis de estado. A rapidez computacional será um dos maiores benefícios da escolha apropriada desta função.

Uma das características desejáveis para o modelo é o de este seja Markoviano. Os processos de Markov são caracterizados pela propriedade de perda de memória, ou seja, dado o valor de uma variável de estado no momento presente, o valor futuro e o valor passado da referida variável são independentes. Significa isto que o momento presente contém toda a informação necessária para prever o futuro e que condicional ao momento presente, o processo estocástico para qualquer momento posterior é independente do caminho definido pelo mesmo processo no passado.

A segunda característica desejável no processo estocástico para as taxas de juro é a homogeneidade no tempo, ou seja, a probabilidade de transição entre dois estados do processo em dois momentos de tempo, depende apenas da diferença temporal entre os dois estados e não de um momento específico, pelo que em termos analíticos, a amplitude da variação de um ponto taxa de juro entre t_1 e t_2 pode ser escrita em função da diferença $(t_2 - t_1)$. A restrição da função de volatilidade a funções determinísticas e não estocásticas garante este critério. A proposição seguinte define uma possível especificação da função de volatilidade que garante as propriedades descritas

Proposição 11) Se a taxa de juro de curto prazo é Markoviana e a função de volatilidade $\underline{\sigma}(\cdot, T): [t_0, T] \rightarrow \mathfrak{R}^n$ é homogénea no tempo, então a função de volatilidade deve ter a seguinte especificação:

$$\underline{\sigma}(t, T)' = \underline{G}' \cdot a^{-1} \cdot [I_n - e^{a(t-T)}], \text{ com } I_n \in \mathfrak{R}^{n \times n} \text{ a matriz identidade, } \underline{G} \in \mathfrak{R}^n \text{ e } a \in \mathfrak{R}^{n \times n}. \quad (6.13)$$

Demonstração: Ver Oliveira (2002, página 48).

Proposição 12) Considerando a função de volatilidade descrita em (6.13) e as funções J, η e φ definidas em (6.5), (6.10) e (6.11), então:

$$J(t_0, T_f, T) = -\underline{G}' \cdot a^{-1} \cdot \left\{ (a')^{-1} \cdot [\underline{\sigma}(t_0, T) - \underline{\sigma}(t_0, T_f) - \underline{\sigma}(T_f, T)] - \Delta(t_0, T_f) \cdot \underline{\sigma}(T_f, T) \right\} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} \eta(t_0, t, T) = & -\underline{G}' \cdot a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot [I_n - e^{a(T-t)} - e^{a(t-t_0)} - e^{a(T-t_0)}] \cdot (a^{-1})' \cdot \underline{G} \\ & - \underline{G}' \cdot a^{-1} \cdot (a')^{-1} \cdot [\underline{\sigma}(t, T) + \underline{\sigma}(t_0, t) - \underline{\sigma}(t_0, T)] \\ & - \underline{G}' \cdot a^{-1} \cdot [\Delta(t, T) + \Delta(t_0, t) - \Delta(t_0, T)] \cdot (a^{-1})' \cdot \underline{G} \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\varphi(t_0, t, T) = \underline{G}' \cdot a^{-1} \cdot \Delta(t_0, t) \cdot [I_n - 2e^{a(T-t)} + e^{(a+a')(T-t)}] \cdot (a^{-1})' \cdot \underline{G} \quad (6.16)$$

$$\Delta(t, T) := (a + a')^{-1} \cdot [e^{(a+a')(T-t)} - I_n] \quad (6.17)$$

Demonstração: Ver Oliveira (2002, proposição 11, página 49).

6.2.3 Estimação consistente da curva de taxa de juro

Na definição do modelo de não arbitragem, a estrutura inicial de taxa de juro é um *input* do modelo. Esta restrição garante que existe um ajustamento entre o modelo e o preço do subjacente verificado no mercado. A consistência da sua determinação é de igual importância à definição da função de volatilidade.

A estrutura inicial da taxa de juro é observada em mercado, no entanto, apenas um conjunto discreto de pontos da curva podem ser observados, nomeadamente aqueles para os quais existe um mercado primário com volume relevante de transações. A metodologia usual passa por interpolar estes pontos e obter uma curva contínua que os capture. Assim que esta curva é determinada e os restantes parâmetros da curva HJM são obtidos, qualquer derivado sobre taxa de juro pode ser avaliado.

O procedimento usual de calibração do modelo HJM consiste em 2 passos que serão empiricamente demonstrados no capítulo seguinte:

1. Estimação da curva inicial de taxa de juro a partir de dados de mercado (por exemplo, preços de obrigações em mercado primário);

2. Calibração dos parâmetros da equação do modelo HJM, através da minimização dos erros de *pricing* face a um determinado derivado de taxa de juro, usando a curva inicial obtida em 1). O derivado usado para a calibração do modelo não tem que ser forçosamente o derivado que se pretende avaliar financeiramente.

Poderia afirmar-se que uma estimação inicial única dos parâmetros para efeitos de avaliação fosse suficiente, uma vez que a função de volatilidade iria capturar todos os possíveis choques futuros na curva de taxa de juro, no entanto, a prática de mercado é que esta calibração seja realizada diariamente. Os motivos pelos quais tal acontece são os seguintes:

- As estratégias de *hedging* dependem directamente do modelo aplicado e seus pressupostos;
- Existe nova informação financeira diariamente, pelo que é expectável que esta seja incorporada no modelo;
- Ao incorporar informação diária no modelo, diminui-se o risco associado à escolha do modelo.

Assim, com frequência diária, a curva e os parâmetros do modelo têm de ser recalibrados com os novos preços de mercado em vigor. Será expectável portanto que a escolha do método de interpolação dos pontos da curva seja de grande importância na recalibração do modelo e que este, após recalibração, gere curvas de taxa de juro consistentes com a curva inicial, e assim sendo, a escolha do método de interpolação não deverá ser independente do modelo escolhido. É de esperar também que um método de interpolação da curva inicial da curva de taxa de juro force os parâmetros a alterar quando a sua estimação não seja consistente com o modelo utilizado, ou seja, quando o modelo não consiga acomodar da melhor forma as alterações diárias da curva de taxa de juro inicial.

O conceito de consistência entre a estimação da curva e o modelo HJM proposto foi desenvolvido por Bjork e Christensen (1999). Estes autores definiram uma família de curvas de taxa de juro que se pressupõe conseguir capturar os diversos efeitos das taxas de juro verificados no mercado e que são consistentes com o modelo HJM uma vez que incorporam parte da parametrização da curva de volatilidade do modelo proposto. Esta família vai ser descrita na próxima proposição.

Em termos práticos, através da estimação da curva inicial de taxa de juro e utilizando a metodologia proposta de seguida, alguns dos parâmetros da função de volatilidade ficam já conhecidos.

Proposição 13) Sobre o pressuposto que a matriz a é diagonal, a família de curvas de taxas de juro que é consistente com a dinâmica do modelo HJM proposto é definida através da função $\gamma: \mathfrak{R}^{2n} \times \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}$, tal que:

$$\gamma(\underline{z}, x) \equiv f(t, t+x) = \sum_{j=1}^n z_j \exp(a_j x) + \sum_{j=1}^n z_{n+j} \exp(2a_j x), \quad (6.18)$$

com z_j igual ao j -ésimo elemento do vector $\underline{z} \in \mathfrak{R}^{2n}$ e a_j corresponde ao j -ésimo elemento da diagonal da matriz a , previamente definida na Proposição 11.

Demonstração: Ver Oliveira (2002, proposição 11, página 54).

7. Resultados empíricos

7.1 Dados

Os dados recolhidos consistem em informação quantitativa e qualitativa sobre futuros e os seus cabazes de obrigações entregáveis, usando a Bloomberg como fonte de informação financeira.

No que diz respeito à informação qualitativa, foram recolhidos todos os contratos de futuros sobre obrigações transacionados pela CBOT durante o ano de 2005 e respectivas especificações de entrega, cabaz de entregáveis e factores de conversão. Foram ainda recolhidas as especificações de todas as obrigações pertencentes aos referidos cabazes.

A informação quantitativa consistiu na recolha dos preços de *settlement* dos contratos e respectivo volume diário. Para a determinação da qualidade das estimativas dos parâmetros da curva inicial de taxa de juro, recolheu-se ainda o preço de fecho das obrigações entregáveis para igual período temporal.

Através do *site* institucional do tesouro americano, recolheu-se o CUSIP (código internacional de identificação de obrigações) e informação referente a datas de colocação de todos os leilões de dívida feitos pelo tesouro americano desde 1980 até aos dias correntes. Desta forma, após alguma segregação da informação, obteve-se as especificações e os preços de *settlement* das obrigações para as datas anteriormente referidas.

7.2 Estimação da curva inicial de taxa de juro

Cobrimo um largo espectro de maturidades, as emissões de dívida feitas pelo tesouro americano foram o suporte para determinação da dinâmica de taxa de juro usando uma especificação consistente com o modelo HJM proposto. Este modelo usa como *input* inicial a curva de taxa de juro observada em mercado, pelo que é de esperar que esta seja vital na determinação dos restantes parâmetros e na qualidade final das estimativas para o preço dos contratos de futuros. Neste sentido, foi necessário realizar uma análise qualitativa dos dados e posterior validação das estimativas obtidas.

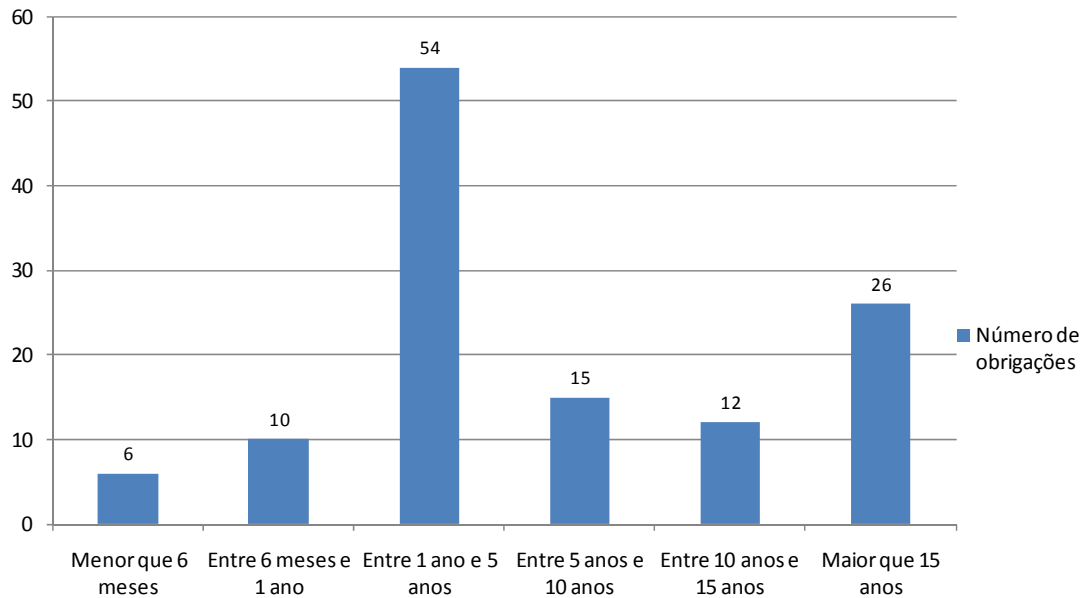
Desta forma, foram feitos diversos filtros iniciais:

- Considerou-se apenas as obrigações com data de vencimento posterior a 01/01/2005;
- Com o objectivo de manter na amostra apenas as obrigações mais líquidas, retirou-se da mesma todas observações que em cada data apresentavam um período de vida remanescente inferior a 3 meses (normalmente associadas a uma liquidez reduzida);
- Retirou-se todas as obrigações *callable* pelo facto da avaliação financeira destas obrigações ser complexa e poder distorcer os parâmetros de estimação da curva;
- Para as obrigações que foram a leilão por tranches, considerou-se como data de emissão a primeira data de ocorrência do leilão.

Após a filtragem inicial, a amostra consistia em 155 obrigações, repartidas entre *T-Notes* e *T-Bonds*, reflectindo 32.514 observações de preços de *settlement* para o referido período.

É expectável que a informação obtida seja representativa da curva de taxa de juro do período em análise. Considere-se como exemplo o perfil de maturidade residual da amostra de obrigações vivas para dia 03/01/2005, como o gráfico 1 demonstra.

Gráfico 1 – Perfil de maturidade residual a 03-01-2005



É de prever que algumas das obrigações presentes à data de 03/01/2005 pertençam à amostra durante todo o período de análise, dada a sua maturidade. As obrigações de médio prazo serão também as mais comuns na amostra uma vez que são as que apresentam maior frequência de emissão. Algumas das obrigações na amostra, nomeadamente as obrigação com maturidade residual superior a 15 anos pertencem também aos cabazes de entregáveis dos contratos de futuros em estudo.

Posteriormente, fez-se uma análise à qualidade das observações. Foram retiradas da amostra todas as obrigações para as quais subsistiam dúvidas quanto à qualidade da informação, realizando-se para tal os seguintes filtros:

- Foram retiradas 2 obrigações pela inexistência de dados financeiros;
- Foi retirada 1 obrigação por não apresentar preços *ask* e pela irregularidade da sua série de preços históricos;
- Foi realizada uma análise quanto às características principais como preços máximos e mínimos e ainda comparação entre preços *bid* e *ask* que deu origem à retirada das cotações irregulares;
- Foram retiradas as cotações das obrigações que apresentavam preços históricos para os dias feriados nos Estados Unidos e para os quais o mercado está fechado;
- Decidiu-se manter na amostra os cotações para as quais o preço *bid* era igual ao preço *ask*.

Ainda com o objectivo de manter na amostra apenas as obrigações mais líquidas e evitar distorções nos preços das mesmas (e obter a melhor fonte de informação para determinação da curva inicial da taxa de juro), calculou-se o *bid-ask spread* de cada observação considerando a seguinte fórmula:

$$s := \frac{CB^{ask} - CB^{bid}}{\frac{(CB^{ask} + CB^{bid})}{2}} \quad (7.1)$$

Utilizando a teoria de análise de dados no que diz respeito à estimação e identificação robusta de *outliers* proposta por Peter Rousseeuw (2002), estandardizou-se o valor do *bid-ask spread*, usando a mediana como medida de localização central e a mediana de todos os desvios absolutos como estimador de escala. A escolha da mediana em substituição da média como estimador de localização prende-se com a robustez desta medida, uma vez que a média é muito sensível à presença de *outliers*. Da mesma forma, o estimador de escala foi calculado através da mediana de todos os desvios absolutos da classe face à mediana da classe (em substituição do desvio padrão *standard*), seguindo a formulação:

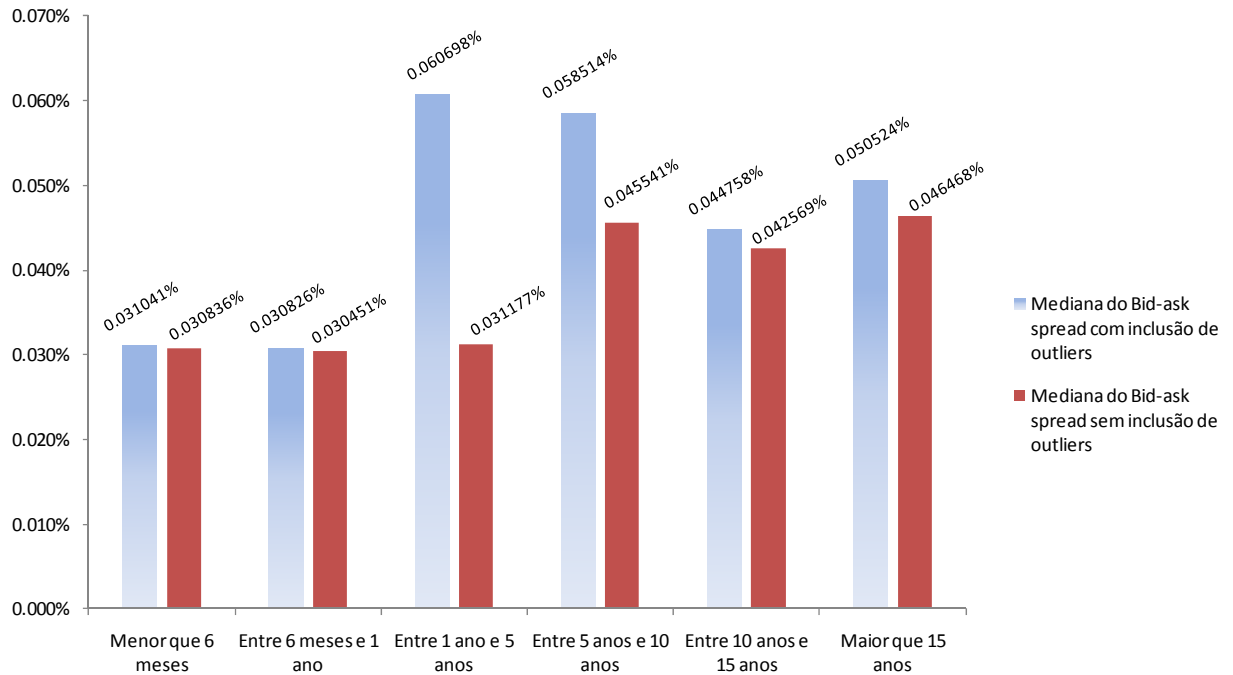
$$S = 1.483 \cdot \text{median}_{j=1, \dots, n} \left| x_j - \text{median}_{i=1, \dots, n}(x_i) \right| \quad (7.2)$$

O factor de correcção 1.483 é necessário para tornar este estimador consistente com o usual estimador de escala da distribuição normal. O valor estandardizado do *bid-ask spread*, z_i , foi determinado com base em:

$$z_i = \frac{x_i - T}{S} \quad (7.3)$$

Considerou-se como *outlier* todos os valores para os quais o valor estandardizado era superior a 2.5, o que corresponde a um nível de confiança de 99%, considerando apenas a aba direita da distribuição (uma vez que à esquerda o *bid-ask spread* está limitado pelo valor zero). O gráfico seguinte apresenta os valores medianos desta variável antes e após a filtragem. As obrigações de médio e longo prazo apresentam tendencialmente um *bid-ask spread* superior (o comprador requer normalmente um prémio de risco em função da maturidade do investimento e tende a baixar o valor da sua oferta) e por conseguinte, apesar de a mediana ser calculada para as diferentes classes, estas foram as mais afectadas pela mesma.

Gráfico 2 – Mediana do *bid-ask spread* antes e após remoção de *outliers* no conjunto total de obrigações da amostra

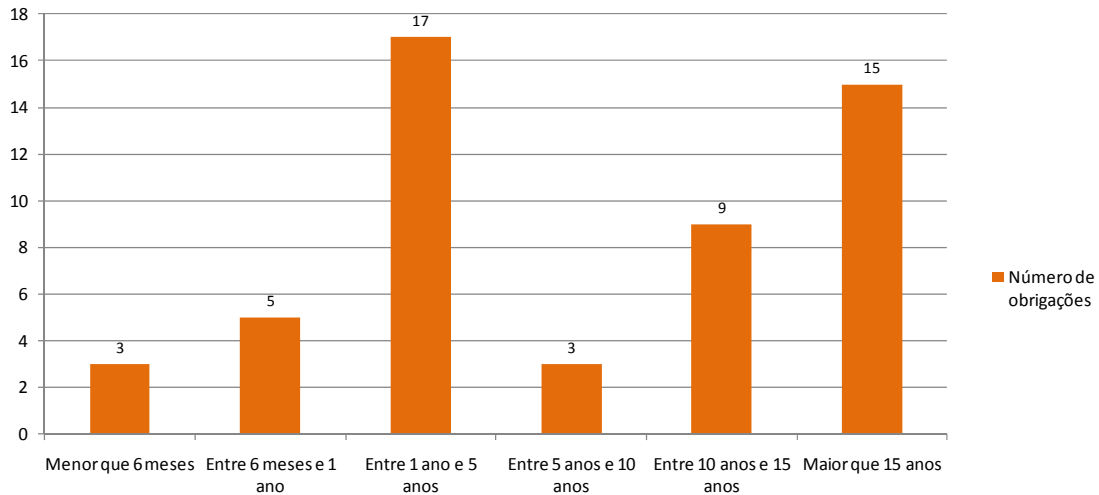


Após a retirada das observações que não cumpriam o critério anterior, o número de observações na amostra foi reduzido para 11.781, contendo preços para obrigações com o perfil de maturidades que se apresenta. O número de observações diárias desceu também de forma muito significativa.

Gráfico 3 – Número de obrigações com cotação antes e após remoção de outliers



Gráfico 4 – Perfil de maturidade residual a 03-01-2005 após a retirada de outlier



A proposição 13 foi posteriormente aplicada à informação diária de preços *mid* da amostra de obrigações mais líquidas. Os parâmetros foram estimados considerando o critério de minimização da seguinte função objectivo:

$$MAPE = \frac{\sum_{j=1}^m \left| \frac{CB_j(t) - \left[\sum_{i=1}^{N^j} P(t, T_i^j) k_i^j - AI_j(t) \right]}{CB_j(t)} \right|}{m} \quad (7.4)$$

Esta função representa o erro médio absoluto em função do valor da obrigação, denominado usualmente por MAPE. O valor de $P(t, T_i^j)$ é função directa dos parâmetros do modelo e da especificação definida na proposição 13.

O MAPE máximo obtido foi de 0.1853% para o dia 10/11/2005 e o valor mínimo obtido foi de apenas 0.0995% para o dia 14/01/2005. Importa ainda ressaltar que apesar do MAPE apresentar valores que traduzem um bom ajustamento aos preços das obrigações, este indicador acaba por ser uma média de desvios, detectando-se desvios consideráveis para algumas das obrigações na amostra. Um número alargado de obrigações na amostra contribuiu para uma maior variabilidade e volume de informação financeira. Por outro lado, a tentativa de ajustar uma curva a um volume de informação desta dimensão pode fazer com que o erro de estimação se disperse.

O gráfico 5 apresenta a distribuição do MAPE para o período em análise, em que se verifica que o último trimestre de 2005 teve em média um MAPE superior aos restantes períodos e também um menor número de observações na amostra.



Considerando um modelo de não arbitragem, a utilização da curva de taxa de juro observada no mercado garante o ajustamento perfeito do modelo ao preço do subjacente do derivado cujo valor se pretender determinar.

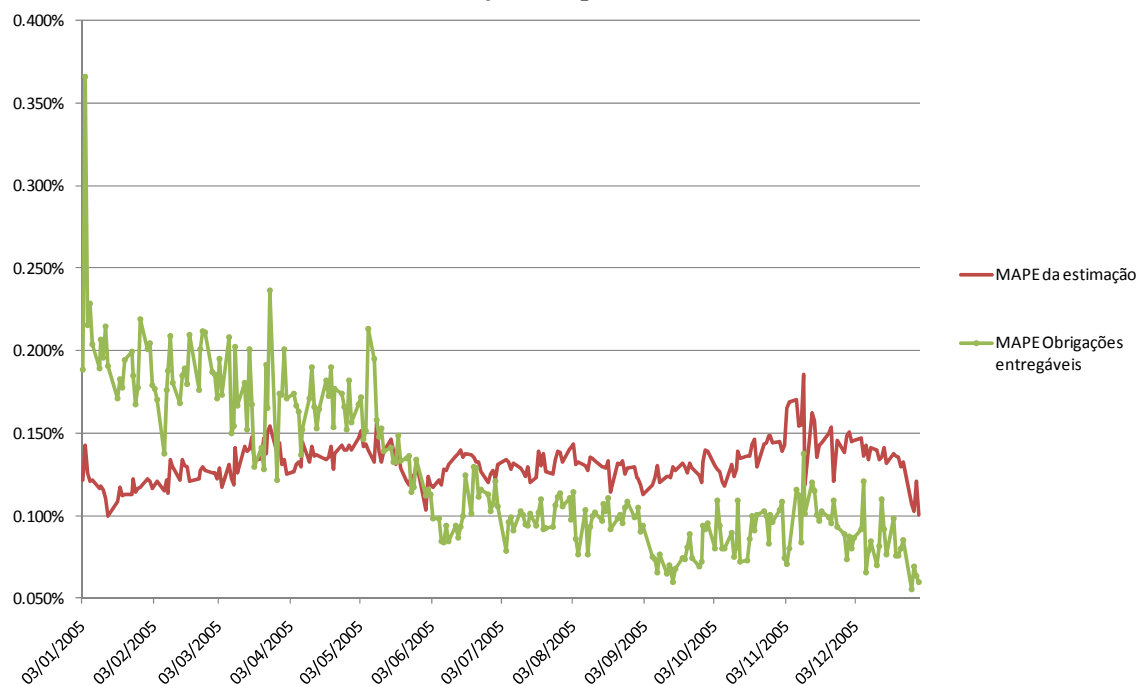
O motivo pelo qual os parâmetros da curva não foram estimados directamente com base nas obrigações entregáveis prende-se com a possibilidade de utilização de obrigações com

características diferenciadas no que diz respeito a maturidades e datas de emissão (e não apenas *T-Bonds*) e ainda com a possibilidade de selecção das obrigações segundo um critério de liquidez.

Para avaliar a aderência dos parâmetros estimados e o referido ajustamento ao preço das obrigações entregáveis, determinou-se o MAPE para todas as diferentes obrigações que estavam presentes nos cabazes de entregáveis dos diversos futuros transacionados durante 2005 e cujas datas de emissão eram anteriores a 31-12-2005. Esta nova amostra perfaz um total de 25 obrigações, sendo que 22 destas pertenciam também ao conjunto de 117 obrigações utilizadas para estimar os parâmetros da curva de taxa de juro observada nos diferentes dias de 2005.

O gráfico seguinte apresenta os resultados do ajustamento dos parâmetros ao preço das obrigações nos diferentes cabazes de entregáveis em comparação com o MAPE anteriormente apresentado.

Gráfico 6 – MAPE das obrigações entregáveis em comparação com MAPE obtido durante a estimação dos parâmetros



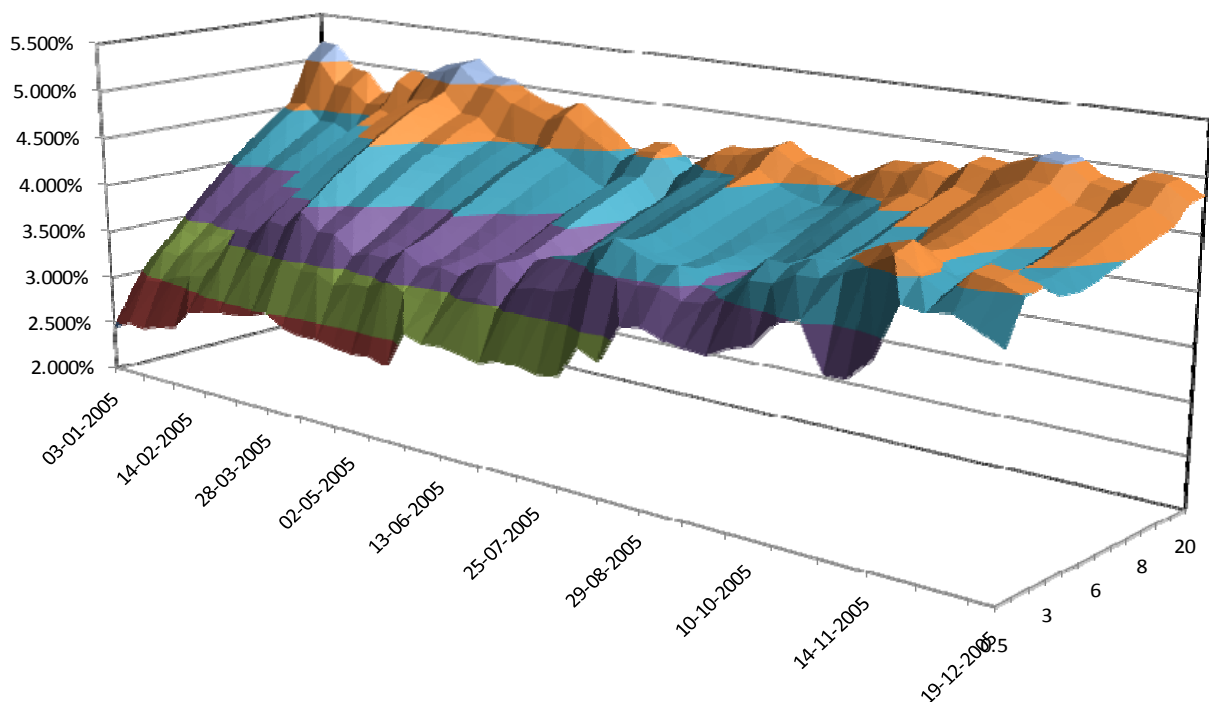
Pela observação do gráfico, podemos concluir que a curva de taxa de juro estimada para a segunda metade do ano 2005 se ajusta melhor às obrigações no cabaz de entregáveis do que durante a primeira metade do ano. O erro médio na amostra das obrigações entregáveis atinge

o máximo de 0.3657015% no início do ano e o mínimo de 0.0554% em 27-12-2005. É de esperar portanto que a qualidade das estimativas para o preço do futuro seja superior durante a segunda metade do ano de 2005.

O gráfico 7 apresenta a *surface* de curva de taxa de juro semanal estimada para o ano de 2005. A curva de taxa de juro estimada apresenta alguns valores anormais para os prazos mais curtos, nomeadamente valores muito irregulares até ao prazo de um ano e depois estabilizando, fornecendo valores mais consistentes para o médio e longo prazo. A tendência crescente da curva e os valores das taxas de juro para o médio e curto prazo são coerentes com as curvas estimadas pela Bloomberg e Agência Reuters para o mesmo período temporal. Comparou-se também a tendência da curva com a curva estimada pela empresa EconStats, (considerada a melhor fonte de dados económicos a nível mundial) verificando que se mantém a mesma coerência, excepto no que diz respeito às taxas de curto prazo e aos níveis máximos obtidos durante o primeiro semestre de 2005.

Considerando a especificação da função de volatilidade, alguns dos parâmetros do modelo ficam já conhecidos através da estimação da curva de taxa de juro inicial, pelo que estes serão determinantes para a qualidade da estimação do preço dos futuros.

Gráfico 7 – *Surface* da curva de taxa de juro estimada para 2005 (frequência semanal)



7.3 Estimativa do valor da *quality option* e *timing option*

A estimação do valor da *quality option* e a determinação da estimativa para o valor conjunto da *quality option* e *timing option* teve como objecto de estudo os contratos de futuros sobre obrigações de longo prazo (*T-Bonds*), à semelhança do que foi avaliado pelos restantes autores.

A amostra seleccionada incluiu 7 contratos de futuros diferentes com datas de vencimento entre 01-03-2005 e 30-07-2007, totalizando um conjunto de 1250 observações durante o ano de 2005, de entre as quais 676 apresentavam um volume diferente de zero. As observações com volume nulo não foram tidas em consideração na estimação dos parâmetros uma vez que o preço de *settlement* publicado pela bolsa nestas situações é feito com base na determinação da *cheapest-to-deliver* e no modelo de *cost of carry*, não reflectindo assim o preço do contrato com as referidas opções de entrega. O número médio de obrigações entregáveis nos cabazes dos futuros em análise é de 23 e, em cada dia, há 5 contratos em aberto.

A tabela 2 apresenta as características gerais dos contratos em estudo, cujas maturidades são Março, Junho, Setembro e Dezembro de 2005 e 2006.

Tabela 2 – Contratos de futuros em análise e respectivas especificações.

Contracto	Número de obrigações entregáveis	Primeiro dia de transacção	Último dia de transacção	Primeira data de entrega	Última data de entrega	Primeira notação para entrega
USH05	25	22-12-2003	21-03-2005	01-03-2005	31-03-2005	28-02-2005
USM05	24	23-03-2004	21-06-2005	01-06-2005	30-06-2005	31-05-2005
USU05	23	22-06-2004	21-09-2005	01-09-2005	30-09-2005	31-08-2005
USZ05	23	22-09-2004	20-12-2005	01-12-2005	30-12-2005	30-11-2005
USH06	23	21-12-2004	22-03-2006	01-03-2006	31-03-2006	28-02-2006
USM06	22	22-03-2005	21-06-2006	01-06-2006	30-06-2006	31-05-2006
USU06	21	22-06-2005	20-09-2006	01-09-2006	29-09-2006	31-08-2006
USZ06	20	22-09-2005	19-12-2006	01-12-2006	29-12-2006	30-11-2006
USH07	21	21-12-2005	21-03-2007	01-03-2007	30-03-2007	28-02-2007

Os contratos com datas de maturidades mais próximas são normalmente os mais negociados, como se pode comprovar pelas observações com volume não nulo e pelo volume máximo dos contratos durante 2005 na tabela 3. Para a determinação dos parâmetros utilizou-se apenas as observações com volume diferente de zero.

A data de entrada de cada obrigação no cabaz de entregáveis não era conhecida, o que não permite assegurar qual seria o impacto da *new-issue option*. Para tentar minimizar o impacto da ausência desta informação, definiu-se como momento da entrada da obrigação no cabaz a data máxima entre a primeira data de transacção do futuro e a sua respectiva data de emissão.

Tabela 3 – Contratos de futuros e volume de transação.

Contracto	Número de observações	Número de observações com volume 0	Volume médio durante 2005	Volume Máximo durante 2005
USH05	54	0	243,933.72	539,351
USM05	118	0	201,734.57	641,951
USU05	182	7	112,705.10	570,085
USZ05	243	66	79,620.99	556,394
USH06	250	152	21,221.46	365,603
USM06	196	159	16.93	1,030
USU06	132	123	0.90	106
USZ06	68	60	0.21	4
USH07	7	7	0.00	0

A determinação dos parâmetros da matriz \underline{G} foi um processo muito moroso computacionalmente dado o volume de informação diária a tratar, nomeadamente o número de obrigações entregáveis de cada futuro. As maturidades muito longas de todas as obrigações entregáveis foi também determinante no tempo de computação, não viabilizando portanto a utilização de métodos de simulação na análise em questão. A obtenção dos parâmetros foi realizada com base no critério de minimização da diferença entre o valor estimado para o futuro com *quality option* (ou o preço já descontado pelo comprador do valor financeiro das opções de entrega do vendedor) fornecido pela proposição 10 e com o preço de *settlement* diário de todos os futuros com volume não nulo de cada dia. Na determinação deste valor, utilizou-se os parâmetros da matriz \underline{a} já previamente estimados, uma vez que ficaram automaticamente conhecidos através da estimação da curva de taxa de juro inicial e especificação da função de volatilidade. Para a determinação dos restantes parâmetros, utilizou-se, para além do preço de *settlement* dos futuros, todas as suas especificações no que diz respeito a datas de entrega e ainda informação relativa às obrigações dos cabazes de entregáveis (nomeadamente factores de conversão, montantes dos seus cashflows e períodos de pagamento de cupão). A determinação da *quality option* assenta no pressuposto de que não existe *timing option*, ou seja, que a entrega do futuro pode ser feita unicamente no último dia de entrega do futuro.

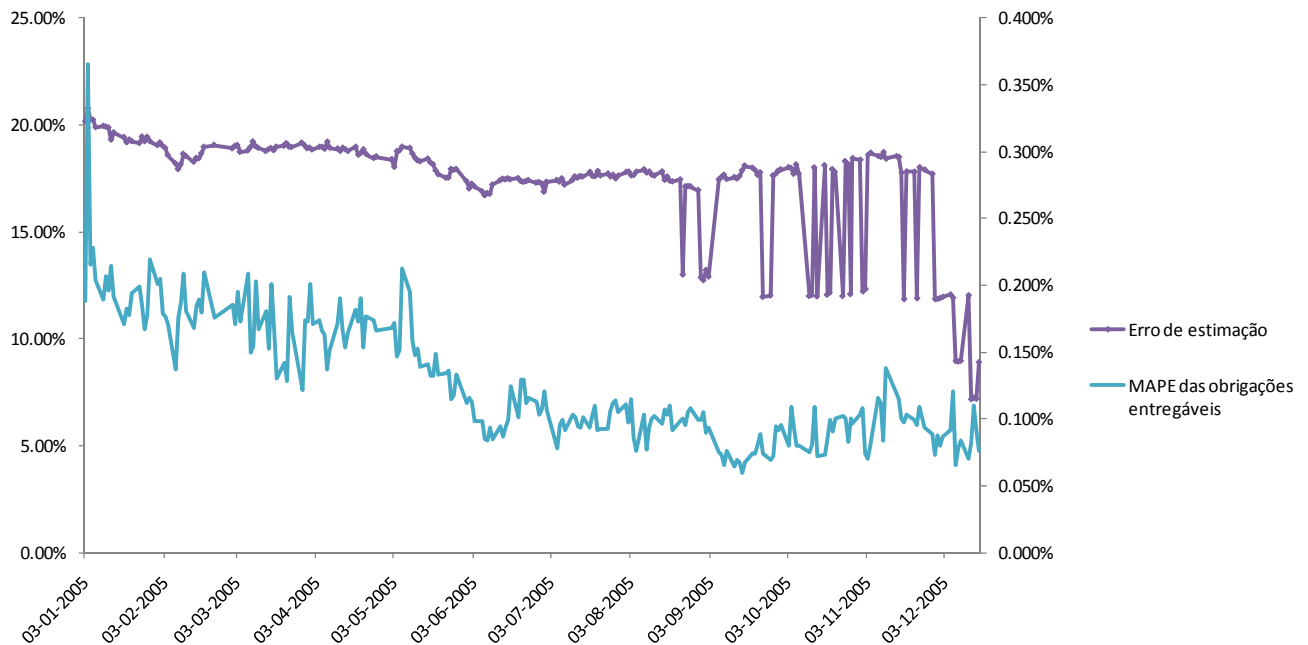
Utilizando estes parâmetros, determinou-se $F(t_0, T_f, T_i^j)$ e o preço do futuro sem *quality option*, ou seja, sem considerar a possibilidade de escolha da obrigação a entregar no vencimento, com base na proposição 7.

Para avaliar a qualidade do ajustamento do preço determinado através modelo ao preço observado em mercado determinou-se o erro de estimação diário. Este foi calculado como a

diferença entre o preço de mercado do futuro e a estimativa para o preço do futuro com *quality option* para todos os contratos com volume não nulo transacionados durante cada dia. Tendo em conta os resultados obtidos pela mesma metodologia aplicada por Nunes e Oliveira (2003), este foi bastante superior ao esperado inicialmente, apresentando uma média de 17,27% (com um valor máximo de 20,75% e um mínimo de 0,7%). Este erro apresenta no entanto uma distribuição bastante desigual ao longo do período em análise, uma vez que foi bastante inferior durante a segunda metade do ano 2005.

Como o gráfico 8 demonstra, a tendência de descida do erro de estimação durante o segundo semestre de 2005 evidencia alguma relação com o MAPE das obrigações entregáveis observado durante a estimação da curva de taxa de juro. Para comprovar esta relação, calculou-se o coeficiente de Pearson entre as duas séries e este revelou uma correlação linear positiva de magnitude 0,525, pelo que se depreende que a qualidade da estimação depende directamente da qualidade da estimativa inicial da curva de taxa de juro. Esta relação de dependência é ainda mais notória considerando que a estimação da curva de taxa de juro inicial fornece à partida 3 dos parâmetros do modelo, os elementos da diagonal da matriz \underline{a} .

Gráfico 8 – Erro de estimação e MAPE das obrigações entregáveis



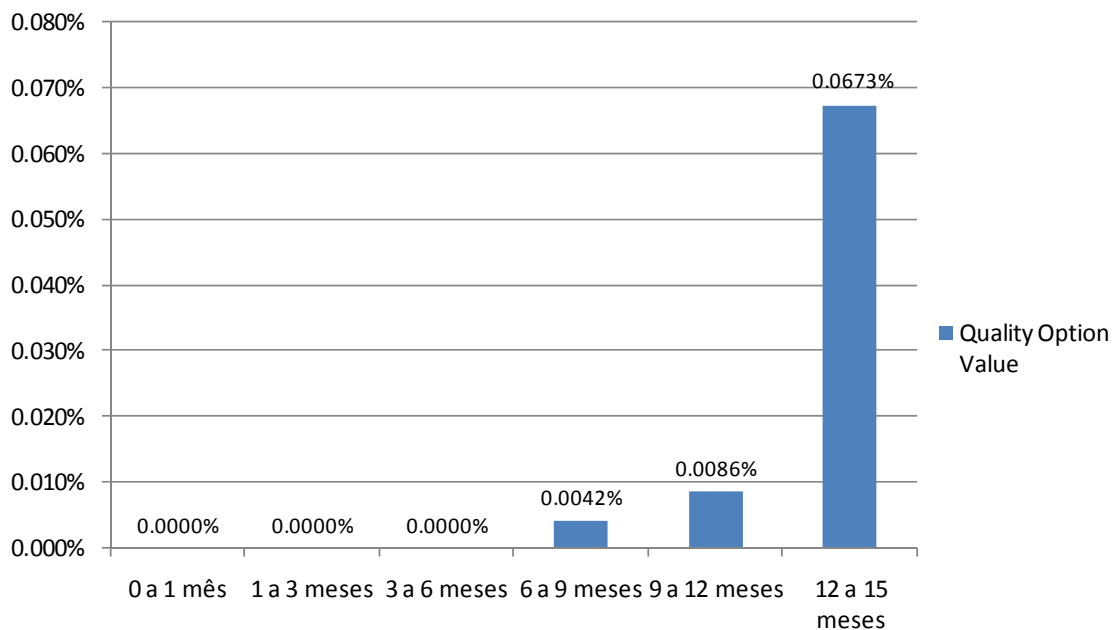
Com base nas estimativas para o preço do futuro com e sem opção de entrega, determinou-se a magnitude da *quality option* em função do preço do futuro. Para a grande maioria destas

observações com volume não nulo na amostra, o valor da *quality option* era aproximadamente zero ou de valor negativo e ainda muito próximo de zero.

A magnitude da *quality option* está directamente ligada à dificuldade de convergência do modelo para diversos dias durante o período em análise, comprovado pelo erro de estimação obtido.

Uma vez que o valor negativo para a *quality option* não tem sentido financeiramente, tomou-se este como zero. Em 96% das 676 observações válidas, o valor estimado para a *quality option* foi nulo. Para as restantes 4% de observações, o valor médio da *quality option* foi de 0.0572%. Considerando a totalidade das obrigações, o valor médio da *quality option* foi 0.002259%, portanto de significância financeira irrelevante e bastante inferior à magnitude sugerida pelos autores referidos e obtida pelos diversos estudos. A análise da estimativa da *quality option* revela uma tendência crescente com o tempo até à maturidade, sendo nula até ao prazo de 6 meses e mais relevante para os prazos superiores como evidenciado no gráfico 9.

Gráfico 9 – Estimativa da *quality option* em função do tempo até à maturidade do contrato



O facto mais relevante desta análise é o de que a maioria das observações com valor não nulo para a *quality option* foram obtidas para o último trimestre de 2005, o que é resultado do enviesamento na qualidade da estimação para esta parte do ano de 2005.

Importa ainda lembrar que a taxa de juro é o dado económico que mais afecta a estimação do preço dos futuros. Como pode ser comprovado pela solução analítica fornecida, o preço do

futuro tem por base o desconto de *cashflows* e a taxa de juro estimada será assim determinante para o resultado dessa soma algébrica de *cashflows* descontados.

De seguida são apresentadas as características da distribuição das estimativas para a *quality option*, considerando a substituição dos valores negativos por zero.

Tabela 4 – Características da distribuição da *quality option*

	T-Bond
Média	0.0023%
Mediana	0.0000%
Máximo	0.1672%
Mínimo	0.0000%
Desvio Padrão	0.0151%
Kurtosis	68.58
Achatamento	7.97

Durante a última parte do período em análise e na qual a estimação da curva de taxa de juro inicial tinha obtido um erro bastante inferior, as estimativas do valor da *quality option* são consistentes para os diversos dias. Considere-se como exemplo as estimativas obtidas para o contrato de Junho de 2006 representadas na tabela 5 e 6.

Tabela 5 – Estimativas obtidas para o contrato de Junho de 2006.

Data	Contracto	Preço do futuro	Preço estimado do futuro sem quality option	Preço estimado do futuro com quality option	Quality Option
27-10-05	USM06	111.3438%	111.38005%	111.34372%	0.03263%
29-11-05	USM06	112.0313%	112.09333%	112.03131%	0.05536%
30-11-05	USM06	111.8750%	111.98525%	111.87499%	0.09855%
01-12-05	USM06	111.6563%	111.76879%	111.65622%	0.10082%
02-12-05	USM06	111.7500%	111.81738%	111.75000%	0.06029%
06-12-05	USM06	112.1250%	112.24610%	112.12500%	0.10801%
07-12-05	USM06	111.8438%	111.90461%	111.89939%	0.00466%
08-12-05	USM06	112.4688%	112.50063%	112.44638%	0.04824%
09-12-05	USM06	111.7813%	111.80154%	111.76503%	0.03267%
13-12-05	USM06	111.6875%	111.83744%	111.75252%	0.07599%
14-12-05	USM06	112.7188%	112.68546%	112.68399%	0.00130%
15-12-05	USM06	112.5625%	112.54168%	112.54063%	0.00094%
16-12-05	USM06	112.8750%	112.84514%	112.81766%	0.02436%

Tabela 6 – Parâmetros estimados para o contrato de Junho de 2006.

Data	G_1	G_2	G_3	a_1	a_2	a_3
27-10-2005	0.0011619	-0.0129302	0.0000673	-2.7971770	-0.0421430	-3.4348880
29-11-2005	-0.0008200	-0.0167394	-0.0000362	-2.7976180	-0.0429220	-3.4191060
30-11-2005	-0.0021051	-0.0193032	-0.0000495	-2.7831090	-0.0427050	-3.4234630
01-12-2005	-0.0021275	-0.0191569	-0.0000559	-2.7853270	-0.0424880	-3.4230220
02-12-2005	-0.0036257	-0.0166228	-0.0004682	-2.7839600	-0.0419360	-3.4261090
06-12-2005	-0.0008904	0.0193361	-0.0000414	-2.7847950	-0.0405950	-3.4250960
07-12-2005	-0.0000194	0.0108276	0.0000293	-2.7850860	-0.0421110	-3.4248560
08-12-2005	-0.0000188	0.0165358	0.0000284	-2.7803890	-0.0417360	-3.4275170
09-12-2005	-0.0000009	-0.0148101	-0.0000007	-2.7800520	-0.0425920	-3.4273120
13-12-2005	-0.0001107	0.0182706	-0.0000451	-2.7799550	-0.0424040	-3.4266250
14-12-2005	-0.0001095	0.0098560	-0.0000438	-2.7777360	-0.0408970	-3.4266690
15-12-2005	-0.0001093	0.0096934	-0.0000436	-2.7779910	-0.0415650	-3.4269190
16-12-2005	-0.0001104	0.0150729	-0.0000438	-2.7806670	-0.0416500	-3.4271490

Com base na equação (5.12), a estimativa do valor conjunto de ambas opções de entrega pode ser obtido através das estimativas para o valor da *quality option*, assumindo a possibilidade de entrega em diversos dias. Desta forma, a determinação da estimativa para o valor conjunto da *timing option* e *quality option* obrigou a que o processo de estimação fosse repetido tantas vezes quantos os dias de transação do mês de entrega e determinando um vector de estimativas para a *quality option*. Dada a complexidade computacional deste processo, reduziu-se o número de obrigações na amostra utilizada para determinação do valor destas opções de entrega, que foi estimado apenas para o mês de Dezembro de 2005.

No que diz respeito ao valor conjunto da *timing option* e *quality option* estimado para o mês de Dezembro de 2005, o erro de estimação foi bastante inferior ao erro de estimação obtido na estimação da *quality option* para o ano de 2005. O valor desta opção de entrega foi feito com base nas observações diárias do preço dos futuros para o referido mês e considerando todos os possíveis dias de transacção desse mês, obtendo-se 483 observações diárias (para um máximo de 23 dias de entrega e 21 dias de transacção durante o mês em causa), e 1544 simulações de preços de futuros com volume não nulo. O erro de estimação médio do preço dos futuros foi de 8.94%, variando entre 4,5% e 12,09%. Para cerca de 50% das simulações, a estimativa obtida para a *quality option* e *timing option* foi negativo, variando entre -0.001152% e 0.000210%. Dada a magnitude destes valores, para estas situações, considerou-se que o valor das opções de entrega era nulo.

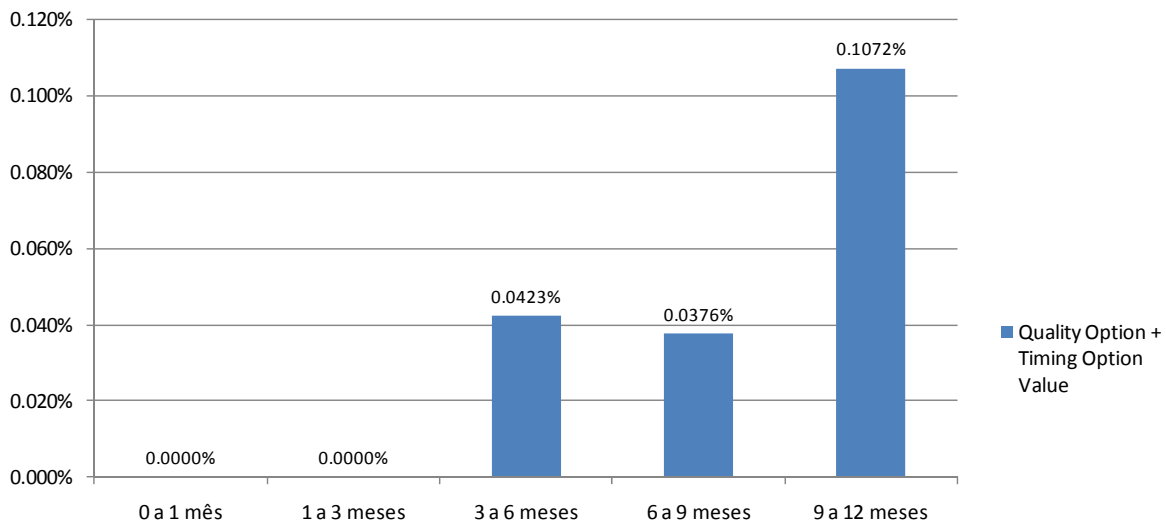
Considerando a proposição 5, determinou-se a estimativa final para o valor de ambas as opções de entrega para cada contrato e cada dia de transacção do período temporal em análise.

O valor médio desta estimativa foi de 0.02696%. Mais particularmente o valor desta estimativa era de 0 para os contratos com vencimento a 1 mês e a 3 meses (considerando a última data de entrega). Para os contratos com vencimentos a 6, 9 e 12 meses, a estimativa foi, média de 0.042327%, 0.037635% e 0.10716% respectivamente. Os valores obtidos confirmam a relação crescente entre as opções de entrega e o tempo até à maturidade dos contratos.

Como se pode observar pelo anexo 3, o valor da *quality option* estimado para cada dia de entrega tende a diminuir para as datas de mais próxima do vencimento do contrato. Este facto está relacionado com a diminuição das possibilidades de escolha do vendedor à medida que se aproxima vencimento do mesmo.

Com base nos resultados obtidos, pode-se concluir que segundo a metodologia descrita, o valor da *quality option* e *timing option* tende a ter um peso pouco significativo no preço dos futuros.

Gráfico 10 – Estimativa da *quality option* e *timing option* em função do tempo até à maturidade do contrato



7.4 Discussão

A estimativa obtida para a *quality option* presente nos contractos de futuros sobre *T-Bonds* transacionados pela CBOT mostrou-se ser irrelevante ou quase nulo, ao contrário do que se esperava, dado o número de obrigações nos cabazes de entregáveis e os estudos empíricos realizados no mesmo âmbito.

A análise da magnitude e dos resultados obtidos deve, no entanto, ter em conta um conjunto de considerações que se seguem.

A primeira consideração baseia-se na existência de um erro que não é possível mensurar ao tentar ajustar o preço do futuro com *quality option* dado pelo modelo, ao preço de mercado do futuro. Este contém todas as opções de entrega e não apenas a *quality option*. Tal facto pode ter contribuído no erro de estimação obtido para o preço dos futuros.

O erro de estimação obtido está claramente enviesado durante os primeiros meses em análise e directamente ligado à qualidade do ajustamento da curva inicial de taxa de juro, traduzida pelo MAPE das obrigações entregáveis. Apesar da estimativa da curva de taxa de juro inicial se adequar de forma bastante razoável às obrigações do tesouro com maior liquidez e que foram sujeitas a uma análise discriminante, o mesmo já não se pode dizer acerca do ajustamento desta curva aos preços das obrigações nos cabazes de entregáveis. O ajustamento da curva inicial de taxa de juro ao cabaz de obrigações entregáveis parece ter sido determinante na qualidade do modelo, uma vez que este processo influenciou as estimativas obtidas para os parâmetros da matriz a , não garantindo o ajustamento automático do preço do activo subjacente pressuposto pela aplicação da metodologia HJM e dificultando a convergência na determinação dos parâmetros da matriz G .

Por outro lado, os dados empíricos recolhidos são apenas um dos *inputs* na estimação. Há ainda que considerar o risco associado ao modelo escolhido para modelizar o preço dos futuros. Dada a adequação e aceitação geral que modelo HJM tem tido por parte dos diversos autores na avaliação de derivados de taxa de juro, podemos concentrar a nossa atenção na dimensão do modelo ou número de variáveis de estado e ainda na especificação funcional para a dinâmica da taxa de juro observada em mercado. Um dos objectivos desta dissertação era o de averiguar a aderência do facto estilizado sobre o número de variáveis aleatórias necessárias para capturar todos os movimentos da curva. Dada a dificuldade de ajustamento da curva inicial de taxa de juro, poderá se considerar que a dimensão utilizada terá sido insuficiente para capturar a dinâmica da curva inicial de taxa de juro, a dinâmica dos futuros transacionados pela CBOT e volume de informação necessária à estimação. Considerando a especificação proposta por Bjork e Christensen para utilização de uma família de curva consistentes com o modelo HJM, a curva obtida não foi variante o suficiente para se adequar

de forma igualmente satisfatória às flutuações diárias de preços e a uma pequena alteração na amostra de obrigações em estudo.

O risco modelo reside também na especificação do processo estocástico escolhido. Este risco está associado à possibilidade do modelo proposto não se adequar aos dados em análise ou à possibilidade de que este que não produza uma quantidade suficientemente alargada de curvas que se adegue satisfatoriamente aos diversos tipos de dados. Como vimos anteriormente, a dinâmica da curva inicial de taxa de juro apresentava valores inconsistentes nos prazos mais curtos.

Por último, a curva inicial de taxa de juro foi determinada com base numa análise discriminante de obrigações do tesouro emitidas pelos EUA. A escolha da amostra teve por base filtros de liquidez calculados através do *bid-ask spread*. No entanto, nada se pode afirmar acerca da liquidez das obrigações entregáveis, que na sua grande maioria não são obrigações *on-the-run* (a nossa análise recaiu sobre futuros sobre *T-Bond* que não são as mais comuns e que têm os prazos superiores), e não serão portanto as mais líquidas, já que normalmente os investidores desviam a sua atenção para as obrigações mais recentemente emitidas em detrimento das anteriores. Este facto põe em causa a adequação da amostra utilizada para a obtenção da dinâmica inicial da curva de taxa de juro.

Para uma análise posterior, poderá considerar-se as seguintes hipóteses de estudo:

- Para a determinação da *quality option* (assumindo a inexistência de *timing option*) poderá utilizar-se como data de vencimento a primeira data de entrega do contrato ao invés da última data de entrega como foi o caso no nosso estudo. Tal como foi evidenciado na análise, o valor da *quality option*, tende a diminuir à medida que se aproxima o vencimento do contrato já que diminuem as possibilidades do vendedor. Tal pode ser um dos motivos para o valor pouco significativo desta opção de entrega.
- Escolha de uma dimensão superior. A dimensão a utilizar deve ser escolhida com parcimónia já que tem implicações relevantes no tempo de obtenção das estimativas;
- Determinação da dinâmica inicial da curva de taxa de juro utilizando as obrigações entregáveis, por forma a assegurar o ajustamento automático do modelo à curva de taxa de juro inicial. Esta alternativa permitiria um controlo mais assertivo de *outliers* já que diminuiu consideravelmente o volume de informação a utilizar. Por outro lado, diminuiu a variabilidade de *payoffs* utilizados para a determinação da mesma, e assim, só se torna viável na presença de futuros com um número relevante de obrigações nos

cabazes de entregáveis, como é o caso dos futuros transacionados pela CBOT (o mesmo não acontece para os futuros transacionados pela EUREX).

- A escolha da especificação funcional da dinâmica inicial da curva de taxa de juro deverá ser feita através da minimização do MAPE obtido com base em diferentes famílias de curvas consistentes com o modelo proposto, tal como o estudo empírico realizado por Angelini e Herzel o sugere e fornecendo assim mais graus de liberdade durante a estimação do preço do futuro.
- A análise poderá ser estendida a *On-the-run US Treasury futures*, que a CBOT deu início à transação durante o ano de 2010. Estes incidem sobre a *yield* das obrigações mais recentemente emitidas pelo tesouro dos EUA e permitem transacionar directamente sobre os pontos mais líquidos da curva taxa de juro. A liquidez financeira deste novo instrumento e o seu subjacente leva a creer que o volume de transação deste irá ser comparável aos tradicionais futuros sobre obrigações transacionados já pela CBOT.

8. Conclusões gerais

Esta dissertação apresenta uma solução analítica aproximada para avaliação da *quality option* de contratos de futuros sobre obrigações, sob uma metodologia HJM, e um estimador para o valor conjunto da *quality option* e *timing option*. A determinação da *quality option* assume como hipótese a inexistência da segunda opção referida.

A solução descrita é testada empiricamente nos contratos transacionados pela CBOT, e ao contrário do que foi o resultado empírico dos restantes estudos de diversos autores sobre os mesmos contratos, ambas as estimativas obtidas determinaram uma magnitude insignificante para o valor das opções de entrega. De acordo com os resultados obtidos, o valor médio da *quality option* e *timing option*, 3 meses antes do vencimento do contrato é nulo. Porém, o valor médio de ambas as opções de entrega é mais relevante para os contratos com datas de vencimento superiores.

A magnitude das opções de entrega foi influenciada de forma significativa pela dinâmica inicial da curva de taxa de juro. O erro de estimação dos futuros poderá ter sido influenciado pela dimensão insuficiente do vector de variáveis de estado do modelo HJM e ainda pela especificação consistente da curva de taxa de juro observada em mercado, que poderá não ser suficientemente robusta para suportar as alterações diárias na curva. O erro de estimação obtido dificulta a análise dos resultados obtidos para o valor das opções de entrega.

O estudo revela ainda que a utilização de um modelo complexo no contexto de taxas de juro estocásticas e um grande número de variáveis (nomeadamente, a dimensão do cabaz de entregáveis), tornam a obtenção da estimativa do valor das opções de entrega, um processo computacionalmente exigente e difícil de implementar.

9. Bibliografia

Monografias:

- [1] Rousseeuw, P. e A. Leroy, Robust regression and outlier detection, Wiley Series in Probability and Statistics, 2003.

Periódicos:

- [2] Arak, M., L.S. Goodman, e S. Ross (1986), The Cheapest to Deliver Bond on the Treasury Bond Futures Contract, *Advances in Futures and Options Research* 1, 49-74.
- [3] Barnhill, T. M. e W. Seale (1988), Optimal Exercises of the Switching Option in Treasury, Bond Arbitrages, *Journal of Futures Markets* 8, 517-532.
- [4] Benninga, S. e Z. Wiener (1999), An Investigation of the Cheapest-to-Deliver on Treasury Bond Futures Contracts, *Journal of Computational Finance* 2, 39-55.
- [5] Bjork, T. e B. Christensen (1999), Interest Rate Dynamics and Consistent Forward Rate Curves, *Mathematical Finance* 9, 323-349
- [6] Bjork, T. e F. Biagini (2005), On The Timing Option in a Futures Contracts, *Mathematical Finance* 17, 267-283
- [7] Boyle, P. (1989), The Quality Option and Timing Option in Futures Contracts, *Journal of Finance* 44, 101-113.
- [8] Cox, J., J. Ingersoll e S. Ross (1981), The Relation Between Forward Prices and Futures Prices, *Journal of Financial Economics* 9, 321-346.
- [9] Cox, J., J. Ingersoll e S. Ross (1985), An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices, *Econometrica* 53, 363-384.
- [10] Cox, J., J. Ingersoll e S. Ross, (1985), A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica* 53, 385-407.
- [11] Gay, G. e S. Manaster, 1984, The Quality Option Implicit in Futures Contracts, *Journal of Financial Economics* 13, 353-370
- [12] Gay, G. e Manaster, S. (1991), Equilibrium treasury bond futures pricing in the presence of implicit delivery options, *Journal of Futures Markets* 11, 623-645.
- [13] Heath, D., R. Jarrow e A. Morton (1992), Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claims Valuation, *Econometrica* 60, 77-105.
- [14] Hegde, S. (1988), An Empirical Analysis of Implicit Delivery Options in T-Bond Futures Contracts, *Journal of Banking and Finance* 12, 469-492.
- [15] Hemler, M (1990), The Quality Delivery Option in Treasury Bond Futures Contracts, *Journal of Finance* 45, 1565-1586.

- [16] Kane, A e A. Marcus (1986), The Quality Option in the Treasury Bond Futures Market: An Empirical Assessment, *Journal of Futures Markets* 6, 231-248.
- [17] Kane, A. e A. Marcus (1984), Conversion Factor Risk and Hedging in the Treasury Bond Futures Market, *Journal of Futures Markets* 4, 55-64.
- [18] Kane, A. e A. Marcus (1986), Valuation and Optimal Exercise of Wild Card Option in the Treasury Bond Futures Market, *Journal of Futures Markets* 41, 195-207.
- [19] Litterman, R. e Scheinkman, J. (1991), "Common Factors Affecting Bond Returns", *Journal of Fixed Income* 1, 54-61.
- [20] Ritchken, P. e L. Sankarasubramanian (1992), Pricing the Quality Option in Treasury Bond Futures, *Mathematical Finance* 2, 197-214.
- [21] Ritchken, P. e L. Sankarasubramanian (1995), A Multifactor Model of the Quality Option in Treasury Futures Contracts, *Journal of Financial Research* 18, 261-279.
- [22] Vasicek, O. (1977), An equilibrium characterisation of the term structure, *Journal of Financial Economics* 5, 177-188.
- [23] Vidal-Nunes, J. P e L. F. Oliveira (2003), Multifactor and Analytical Valuation of Treasury Bond Futures with and Embedded Quality Option, *The Journal of Futures Markets* 27, 275-303

Working Papers:

- [24] Angelini, F e Herzel S, Fitting HJM models with consistent families, *Working Paper*, Universita di Perugia
- [25] Carr, P. e R-R. Chen (1997), Valuing Bond Futures and the Quality Option, *Working Paper*, Morgan Stanley and Rutgers University
- [26] Chen, R.-R., (1997), Bounds for Treasury Bond Futures Prices and Embedded Delivery Options: Theory and Empirical Analysis, Rutgers University
- [27] Chen, R-R. e S-K Yeh (2005), Analytical Bounds for Treasury Bond Futures Prices, *Working Paper*, Rutgers University and Nacional Chun Hsing University

Teses:

- [28] Oliveira, L. (2002), *The Quality Option Implicit in Treasury Bond Futures Contrats: A Theoretical and Empirical Assesment*, Instituto Superior de Ciências do Trabalho e da Empresa, Setembro de 2002.

Fontes de informação financeira:

- [29] www.treasurydirect.gov
- [30] www.bloomberg.com
- [31] thomsonreuters.com

[32] www.econstats.com

Quality and Timing Option Value in US Treasury Bond Futures Markets

10. Anexos

Anexo 1 – Determinação da estimativa da quality option e quality option para o contrato com vencimento a 6 meses

	Delivery Date 1	Delivery Date 2	Delivery Date 3	Delivery Date 4	Delivery Date 5	Delivery Date 6	Delivery Date 7	Delivery Date 8	Delivery Date 9	Delivery Date 10	Delivery Date 11	Delivery Date 12	Delivery Date 13	Delivery Date 14	Delivery Date 15	Delivery Date 16	Delivery Date 17	Delivery Date 18	Delivery Date 19	Delivery Date 20	Delivery Date 21	Delivery Date 22	Quality Option + Timing Option (min)	
USM06	01-06-2006	02-06-2006	05-06-2006	06-06-2006	07-06-2006	08-06-2006	09-06-2006	12-06-2006	13-06-2006	14-06-2006	15-06-2006	16-06-2006	19-06-2006	20-06-2006	21-06-2006	22-06-2006	23-06-2006	26-06-2006	27-06-2006	28-06-2006	29-06-2006	30-06-2006		
01-12-2005	0.2388%	0.2334%	0.2172%	0.2118%	0.2065%	0.2013%	0.1961%	0.1810%	0.1762%	0.1713%	0.1665%	0.1617%	0.1478%	0.1433%	0.1387%	0.1343%	0.1300%	0.2388%	0.2334%	0.2172%	0.2118%	0.2065%	0.1300%	
02-12-2005	0.1943%	0.1890%	0.1731%	0.1679%	0.1627%	0.1574%	0.1525%	0.1377%	0.1328%	0.1282%	0.1236%	0.1189%	0.1055%	0.1010%	0.0967%	0.0923%	0.0881%	0.1943%	0.1890%	0.1731%	0.1679%	0.1627%	0.0881%	
06-12-2005	0.2526%	0.2467%	0.2297%	0.2241%	0.2186%	0.2128%	0.2069%	0.1913%	0.1862%	0.1815%	0.1767%	0.1715%	0.1571%	0.1525%	0.1477%	0.1429%	0.1384%	0.2526%	0.2467%	0.2297%	0.2241%	0.2186%	0.1384%	
07-12-2005	0.0278%	0.0243%	0.0239%	0.0229%	0.0219%	0.0208%	0.0175%	0.0170%	0.0165%	0.0155%	0.0149%	0.0120%	0.0115%	0.0108%	0.0101%	0.0094%	0.0070%	0.0278%	0.0243%	0.0239%	0.0229%	0.0219%	0.0070%	
08-12-2005	0.0607%	0.0585%	0.0591%	0.0586%	0.0582%	0.0579%	0.0553%	0.0558%	0.0559%	0.0552%	0.0550%	0.0525%	0.0529%	0.0525%	0.0520%	0.0515%	0.0491%	0.0607%	0.0585%	0.0591%	0.0586%	0.0582%	0.0491%	
09-12-2005	0.0459%	0.0439%	0.0442%	0.0437%	0.0433%	0.0426%	0.0402%	0.0404%	0.0405%	0.0398%	0.0396%	0.0373%	0.0375%	0.0371%	0.0366%	0.0361%	0.0339%	0.0459%	0.0439%	0.0442%	0.0437%	0.0433%	0.0339%	
12-12-2005	0.1189%	0.1131%	0.0965%	0.0910%	0.0857%	0.0799%	0.0742%	0.0592%	0.0551%	0.0500%	0.0456%	0.0407%	0.0275%	0.0235%	0.0194%	0.0154%	0.0115%	0.1189%	0.1131%	0.0965%	0.0910%	0.0857%	0.0115%	
13-12-2005	0.0879%	0.0854%	0.0864%	0.0861%	0.0856%	0.0848%	0.0817%	0.0828%	0.0831%	0.0823%	0.0823%	0.0794%	0.0802%	0.0800%	0.0795%	0.0791%	0.0762%	0.0879%	0.0854%	0.0864%	0.0861%	0.0856%	0.0762%	
14-12-2005	0.0910%	0.0885%	0.0884%	0.0829%	0.0775%	0.0718%	0.0659%	0.0505%	0.0467%	0.0415%	0.0373%	0.0323%	0.0196%	0.0155%	0.0116%	0.0079%	0.0043%	0.0910%	0.0885%	0.0884%	0.0829%	0.0775%	0.0043%	
15-12-2005	0.0348%	0.0330%	0.0333%	0.0329%	0.0326%	0.0318%	0.0297%	0.0298%	0.0301%	0.0295%	0.0294%	0.0275%	0.0278%	0.0240%	0.0197%	0.0157%	0.0115%	0.0348%	0.0330%	0.0333%	0.0329%	0.0326%	0.0115%	
16-12-2005	0.0354%	0.0336%	0.0340%	0.0336%	0.0332%	0.0324%	0.0304%	0.0305%	0.0308%	0.0301%	0.0300%	0.0280%	0.0284%	0.0280%	0.0276%	0.0272%	0.0253%	0.0354%	0.0336%	0.0332%	0.0324%	0.0326%	0.0253%	
19-12-2005	0.0108%	0.0083%	0.0078%	0.0071%	0.0063%	0.0055%	0.0033%	0.0028%	0.0027%	0.0020%	0.0017%	0.0003%	0.0001%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0108%	0.0083%	0.0078%	0.0071%	0.0063%	0.0000%	
20-12-2005	0.1346%	0.1285%	0.1106%	0.1048%	0.0991%	0.0928%	0.0867%	0.0702%	0.0660%	0.0604%	0.0560%	0.0506%	0.0365%	0.0320%	0.0275%	0.0231%	0.0187%	0.1346%	0.1285%	0.1106%	0.1048%	0.0991%	0.0187%	
21-12-2005	0.0822%	0.0762%	0.0587%	0.0531%	0.0475%	0.0414%	0.0355%	0.0203%	0.0165%	0.0117%	0.0080%	0.0038%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0822%	0.0762%	0.0587%	0.0531%	0.0475%	0.0000%	
22-12-2005	0.1666%	0.1608%	0.1439%	0.1385%	0.1329%	0.1264%	0.1202%	0.1045%	0.1012%	0.0961%	0.0921%	0.0869%	0.0734%	0.0689%	0.0644%	0.0601%	0.0558%	0.1666%	0.1608%	0.1439%	0.1385%	0.1329%	0.0558%	
23-12-2005	0.0847%	0.0791%	0.0629%	0.0577%	0.0526%	0.0462%	0.0403%	0.0261%	0.0234%	0.0197%	0.0155%	0.0113%	0.0017%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0847%	0.0791%	0.0629%	0.0577%	0.0526%	0.0000%	
27-12-2005	0.0993%	0.0935%	0.0768%	0.0713%	0.0660%	0.0592%	0.0530%	0.0378%	0.0351%	0.0315%	0.0269%	0.0222%	0.0107%	0.0072%	0.0040%	0.0013%	0.0000%	0.0993%	0.0935%	0.0768%	0.0713%	0.0660%	0.0000%	
28-12-2005	0.1027%	0.1008%	0.1030%	0.1030%	0.1031%	0.1014%	0.0984%	0.1001%	0.1013%	0.1028%	0.1025%	0.1002%	0.1029%	0.1027%	0.1027%	0.1027%	0.1005%	0.1027%	0.1027%	0.1030%	0.1030%	0.1031%	0.0984%	
29-12-2005	0.0253%	0.0225%	0.0225%	0.0217%	0.0211%	0.0193%	0.0162%	0.0158%	0.0160%	0.0165%	0.0157%	0.0134%	0.0137%	0.0131%	0.0126%	0.0121%	0.0102%	0.0253%	0.0225%	0.0225%	0.0217%	0.0211%	0.0102%	
30-12-2005	0.2003%	0.1943%	0.1772%	0.1716%	0.1662%	0.1557%	0.1486%	0.1339%	0.1309%	0.1288%	0.1235%	0.1182%	0.1059%	0.1014%	0.0969%	0.0924%	0.0880%	0.2003%	0.1943%	0.1772%	0.1716%	0.1662%	0.0880%	
																							Média	0.04233%