
Perpetual Caps and Floors on continuous flows: Applications in interest rates

Rita Sofia Marques Pedro

Mestrado em Matemática Financeira

Orientador:

Professor Doutor José Carlos Gonçalves Dias, Professor Catedrático,
ISCTE Business School

Co-Orientador:

Professor Fernando Correia da Silva, Integrated Researcher,
BRU-ISCTE Business Research Unit

Setembro, 2024

Departamento de Finanças

Departamento de Matemática

**Perpetual Caps and Floors on continuous flows:
Applications in interest rates**

Rita Sofia Marques Pedro

Mestrado em Matemática Financeira

Orientador:

Professor Doutor José Carlos Gonçalves Dias, Professor Catedrático,
ISCTE Business School

Co-Orientador:

Professor Fernando Correia da Silva, Integrated Researcher,
BRU-ISCTE Business Research Unit

Setembro, 2024

Dedicado à minha família e amigos mais próximos por todo o apoio que me deram ao longo deste caminho.

Agradecimento

Sempre me disseram que a dissertação de um mestrado seria um grande desafio, repleto de altos e baixos, vitórias e derrotas, mas que, no fim do dia, tudo valeria a pena. Esta tese não foi diferente. Houve momentos complicados, mas sempre tive pessoas ao meu lado que me ajudaram nas maiores adversidades.

Gostaria de expressar o meu mais sincero agradecimento aos Professores José Carlos Dias e Fernando Silva, por todo o conhecimento, ajuda e disponibilidade que demonstraram para comigo. Agradeço também pelo apoio e incentivo constantes que me deram ao longo desta etapa.

À minha família, especialmente aos meus pais, que sempre me incentivaram a dar o melhor de mim e que, nos momentos de maior aflição, estiveram sempre disponíveis para me ouvir e ajudar.

Às minhas amigas, Anita e Sofia, pelo apoio incondicional, por me terem ouvido quando este percurso se tornou difícil, por todos os conselhos e paciência, mas principalmente pela força que me deram ao longo deste projeto e por não me deixarem desistir dele.

A todos os meus amigos e familiares que, direta ou indiretamente, contribuíram para a execução desta tese e que acreditaram em mim, mesmo quando eu não acreditava.

Resumo

Os *Caps* e os *Floors* são instrumentos financeiros extremamente úteis para proteger os seus detentores contra a volatilidade das taxas de juro. Quando estendemos estes instrumentos para maturidades perpétuas, obtemos instrumentos financeiros de proteção contínua contra as flutuações das taxas de juro.

O modelo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) é um modelo matemático utilizado para descrever a evolução das taxas de juros ao longo do tempo. A sua equação diferencial estocástica é composta por um termo de reversão para a média, o *drift*, que representa a tendência da taxa de juro de retornar ao nível médio (θ) com uma velocidade de ajuste (k) e um termo de volatilidade (σ). Podemos abordar este modelo de duas formas distintas: pelas obrigações de cupão zero ou pelas taxas de juro.

Abordando o modelo CIR pelas taxas de juro, iremos determinar analiticamente a expressão que permite calcular o preço de *Caps* e *Floors* perpétuos. O problema de encontrar o preço destes instrumentos financeiros pode ser formulado por uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, uma vez que no caso perpétuo o tempo é homogéneo.

Por fim, usaremos a integração numérica, através do método da quadratura adaptativa global, para comprovar que a equação a que chegamos fornece resultados consistentes e precisos para a avaliação de *Caps* e *Floors* perpétuos no modelo CIR sem *drift*. Esta abordagem permitirá validar a aplicabilidade prática da fórmula desenvolvida.

Abstract

Caps and *Floors* are extremely useful financial instruments for protecting their holders against interest rate volatility. When we extend these instruments to perpetual maturities, we obtain financial instruments that provide continuous protection against interest rate fluctuations.

The *Cox-Ingersoll-Ross (CIR) model* is a mathematical model used to describe the evolution of interest rates over time. Its stochastic differential equation consists of a mean-reversion term, the *drift*, which represents the tendency of the interest rate to return to the mean level (θ) with an adjustment speed (k) and a volatility term (σ). We can approach this model in two distinct ways: through zero-coupon bonds or through interest rates.

Approaching the CIR model through interest rates, we will analytically determine the expression that allows us to calculate the price of perpetual *Caps* and *Floors*. The problem of finding the price of these financial instruments can be formulated by a second-order ordinary differential equation, since in the perpetual case, time is homogeneous.

Finally, we will use numerical integration, through the method of global adaptive quadrature, to verify that the equation we arrive at provides consistent and accurate results for the evaluation of perpetual *Caps* and *Floors* in the CIR model without *drift*. This approach will allow us to validate the practical application of the formula developed.

Índice

Agradecimento	iii
Resumo	v
Abstract	vii
Lista de Tabelas	xi
Lista de Figuras	xiii
Capítulo 1. Introdução	1
Capítulo 2. Modelo de Estrutura Temporal de Fator Único	3
2.1. Modelos de Estruturas Temporais Afins	6
Capítulo 3. Modelo CIR	7
3.1. Avaliação de Opções Europeias sobre Obrigações com Cupão Zero	8
3.2. Avaliação de Opções Europeias sobre Obrigações com Cupão	9
3.3. Avaliação de Opções Europeias sobre <i>Yields</i>	9
Capítulo 4. Preço de Caps e Floors no Modelo CIR Sobre <i>Yields</i>	11
4.1. Caso Particular sem Drift	12
4.2. Exemplos Numéricos	20
Capítulo 5. Conclusões	25
Referências Bibliográficas	27
Apêndice A. Demonstração da Proposição 2.1	29
Apêndice B. Demonstração da Proposição 2.2	31
Apêndice C. Demonstração da Proposição 2.3	33
Apêndice D. Demonstração da Proposição 3.1	35
Apêndice E. Demonstração da Proposição 3.2	39
Apêndice F. Demonstração da Proposição 3.3	45
Apêndice G. Demonstração da Proposição 3.4	51

Lista de Tabelas

1	Comparação do preço do <i>Cap</i> em diferentes abordagens	21
---	--	----

Lista de Figuras

- 1 Preço de um *Cap* perpétuo nos diferentes valores da taxa de juro e da volatilidade 22
- 2 Preço de um *Cap* perpétuo nos diferentes valores da taxa de juro e do preço *strike* 23

1

Introdução

Os modelos de taxas de juros desempenham um papel crucial na matemática financeira, sendo muitas vezes utilizados na avaliação de derivativos, gestão de risco e formulação de políticas económicas. Entre os diversos modelos existentes, o modelo *Cox-Ingersoll-Ross* (CIR) destaca-se pela sua capacidade de descrever a dinâmica das taxas de juros de forma realista, uma vez que assume que estas são sempre positivas. Este modelo é definido por uma equação diferencial estocástica que contém o conceito de reversão à média e um termo de volatilidade.

Os instrumentos financeiros conhecidos como *Caps* e *Floors* são derivados, uma vez que o seu valor depende de um ativo subjacente, que, neste caso, é a taxa de juro, e fornecem proteção contra variações nas taxas de juros. Um *Cap* é um contrato que estabelece um limite máximo que a taxa de juro pode assumir, garantindo que o detentor do contrato não pague uma taxa de juro superior ao limite estabelecido. Por outro lado, um *Floor* estabelece um limite mínimo para a taxa de juro, assegurando que o detentor do contrato não receba uma taxa inferior ao limite estabelecido. Estes instrumentos são amplamente utilizados por empresas e instituições financeiras para gerir o risco de taxa de juro, protegendo-se contra flutuações adversas.

Além disso, existem versões perpétuas desses instrumentos, que não possuem uma data de vencimento específica e oferecem uma proteção contínua contra as variações nas taxas de juros. Os *Caps* e *Floors* perpétuos são particularmente úteis em ambientes de mercado onde as taxas de juros são altamente voláteis e imprevisíveis. Estes instrumentos oferecem uma forma contínua de proteção, sem ser necessário renegociar ou renovar contratos periodicamente. A avaliação de *Caps* e *Floors* perpétuos no contexto do modelo CIR sem *drift* permite uma análise mais simplificada e direta dos efeitos das flutuações das taxas de juros. A ausência de *drift* significa que a taxa de juro não tende a retornar a um nível médio ao longo do tempo, o que pode ser uma suposição realista em certos cenários de mercado.

Neste trabalho, focar-nos-emos na avaliação de *Caps* e *Floors* perpétuos sem *drift* no contexto do modelo CIR. Através de métodos analíticos, iremos determinar a fórmula de avaliação destes instrumentos financeiros. Recorrendo, depois, a métodos numéricos de forma a validarmos os resultados obtidos analiticamente.

Este estudo irá contribuir para a literatura existente ao fornecer uma análise detalhada e uma fórmula prática para a avaliação de *Caps* e *Floors* perpétuos no modelo CIR sem *drift*.

2

Modelo de Estrutura Temporal de Fator Único

Este capítulo foi elaborado com base nos conceitos e perspectivas teóricas apresentados em [5].

Um modelo de estrutura temporal de taxa de juro de fator único (*single-factor model*) envolve somente uma variável de estado, a taxa de juro instantânea, r_t . São modelos com uma única equação diferencial estocástica. Existem diversos modelos de estrutura temporal de taxa de juro de fator único, uma vez que estes foram os primeiros modelos a aparecer na literatura. Este trabalho vai focar-se num deles: o Modelo CIR [1].

Estes modelos são expressos, inicialmente, na medida física ($\mathbb{P}$). No entanto, não nos é possível obter o *fair value* de derivados nesta medida, sendo necessário passar estes modelos para a medida de risco neutro ($\mathbb{Q}$).

Num modelo de estrutura temporal de fator único, a taxa de juro instantânea, r_t , segue a seguinte equação diferencial estocástica na medida física

$$dr_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t^{\mathbb{P}}, \quad (2.1)$$

onde $\mu(t, r_t)$ e $\sigma(t, r_t)$ satisfazem as condições do teorema de existência e unicidade de soluções e $dW_t^{\mathbb{P}}$ é o incremento do processo de Wiener na medida de probabilidade $\mathbb{P}$.

Os modelos de fatores únicos são assentes em duas suposições:

- (1) A existência de um ativo sem risco, que não provém do modelo e que corresponde à *money market account* composta à taxa de juro sem risco r_t . Seja B o preço desse ativo sem risco, este satisfaz a seguinte equação diferencial estocástica

$$dB_t = r_t B_t \quad (2.2)$$

Esta equação tem como solução $B_t = B_{t_0} e^{\int_{t_0}^t r_u du}$

- (2) Existência de um mercado livre de arbitragem para obrigações de cupão zero, com vencimento no momento T ($T \geq t$). Este conjunto de preços é endógeno ao modelo e pressupõem que $P(t, T)$ dependa apenas da variável de estado, r_t , ou seja,

$$P(t, T) = F(t, T, r_t), \quad (2.3)$$

onde F é uma função com três argumentos reais.

Para passar da medida física para a medida de risco neutro é necessário saber o preço do risco de mercado (*market price of risk*).

Tendo em conta a equação (2.1) e aplicando o lema de Itô à equação (2.3), obtém-se,

$$dP(t, T) = \left(\frac{\partial P(t, T)}{\partial t} + \mu(t, r_t) \frac{\partial P(t, T)}{\partial r_t} + \frac{\sigma^2(t, r_t)}{2} \frac{\partial^2 P(t, T)}{\partial r_t^2} \right) dt + \sigma(t, r_t) \frac{\partial P(t, T)}{\partial r_t} dW_t^{\mathbb{P}} \quad (2.4)$$

Dividindo ambos os membros por $P(t, T)$, obtém-se

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t^{\mathbb{P}}, \quad (2.5)$$

onde

$$\alpha(t, T) = \frac{1}{P(t, T)} \left(\frac{\partial P(t, T)}{\partial t} + \mu(t, r_t) \frac{\partial P(t, T)}{\partial r_t} + \frac{\sigma^2(t, r_t)}{2} \frac{\partial^2 P(t, T)}{\partial r_t^2} \right) \quad (2.6)$$

$$\sigma(t, T) = \frac{1}{P(t, T)} \sigma(t, T) \frac{\partial P(t, T)}{\partial r_t} \quad (2.7)$$

Consideremos um portefólio com duas obrigações de cupão zero com maturidades T_1 e T_2 e com pesos w_1 e w_2 . A dinâmica deste portefólio de valor V é dada por

$$\begin{aligned} dV_t &= V_t \left[w_1 \frac{dP(t, T_1)}{P(t, T_1)} + w_2 \frac{dP(t, T_2)}{P(t, T_2)} \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow dV_t = V_t [w_1 \alpha(t, T_1)dt + w_1 \sigma(t, T_1)dW_t^{\mathbb{P}} + w_2 \alpha(t, T_2)dt + w_2 \sigma(t, T_2)dW_t^{\mathbb{P}}] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow dV_t = V_t [w_1 \alpha(t, T_1) + w_2 \alpha(t, T_2)] dt + V_t [w_1 \sigma(t, T_1) + w_2 \sigma(t, T_2)] dW_t^{\mathbb{P}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Para o portefólio ser livre de risco, então

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ w_1 \sigma(t, T_1) + w_2 \sigma(t, T_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = -\frac{\sigma(t, T_2)}{\sigma(t, T_1) - \sigma(t, T_2)} \\ w_2 = \frac{\sigma(t, T_1)}{\sigma(t, T_1) - \sigma(t, T_2)} \end{cases} \quad (2.9)$$

Fazendo as devidas substituições na equação 2.8, verifica-se que

$$\begin{aligned} dV_t &= V_t \left[-\frac{\sigma(t, T_2)}{\sigma(t, T_1) - \sigma(t, T_2)} \alpha(t, T_1) + \frac{\sigma(t, T_1)}{\sigma(t, T_1) - \sigma(t, T_2)} \alpha(t, T_2) \right] dt + V_t \times 0 dW_t^{\mathbb{P}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow dV_t = \left[\frac{\sigma(t, T_1) \alpha(t, T_2) - \sigma(t, T_2) \alpha(t, T_1)}{\sigma(t, T_1) - \sigma(t, T_2)} \right] dt \end{aligned} \quad (2.10)$$

Como o portefólio não tem risco, para não haver arbitragens, então tem de se impor que o portefólio tem um retorno igual à taxa de juro, ou seja

$$\frac{\sigma(t, T_1) \alpha(t, T_2) - \sigma(t, T_2) \alpha(t, T_1)}{\sigma(t, T_1) - \sigma(t, T_2)} = r_t \Leftrightarrow \frac{\alpha(t, T_1) - r_t}{\sigma(t, T_1)} = \frac{\alpha(t, T_2) - r_t}{\sigma(t, T_2)} \quad (2.11)$$

Assim, conclui-se que se o mercado obrigacionista for livre de arbitragens, então existe um processo λ_t , denominado de preço de mercado do risco (*market price of risk*) tal que

$$\lambda_t = \frac{\alpha(t, T) - r_t}{\sigma(t, T)} \quad (2.12)$$

PROPOSIÇÃO 2.1. *Através das equações (2.5) e (2.12), sabe-se que, nos modelos de fatores únicos, o preço de uma obrigação de cupão zero é solução da equação diferencial parcial*

$$\frac{\partial P(t, T)}{\partial t} + [\mu(t, r_t) - \lambda_t \sigma(t, r_t)] \frac{\partial P(t, T)}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, r_t) \frac{\partial^2 P(t, T)}{\partial r_t^2} - r_t P(t, T) = 0 \quad (2.13)$$

sujeito a $P(T, T) = 1$

DEMONSTRAÇÃO. Veja o apêndice A □

No modelo de fator único definido como na equação (2.1), o preço de um derivado de taxa de juro V_t com pagamento final de $V_T = g(r_T)$, em que g é uma função de qualquer valor real, é solução da equação diferencial parcial

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + [\mu(t, r_t) - \lambda_t \sigma(t, r_t)] \frac{\partial V_t}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, r_t) \frac{\partial^2 V_t}{\partial r_t^2} - r_t V_t = 0 \quad (2.14)$$

Assim, temos todos os elementos necessários para efetuar a transição da medida física para a medida de risco neutro. Para realizar esta mudança, considere-se a equação

$$dr_t = \tilde{\mu}(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t^{\mathbb{Q}} \quad (2.15)$$

aplicando o lema de Itô a V_t

$$\begin{aligned} dV_t &= \frac{\partial V_t}{\partial t}dt + \frac{\partial V_t}{\partial r_t}dr_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_t}{\partial r_t^2} d\langle r, r \rangle_t \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow dV_t = \frac{\partial V_t}{\partial t}dt + \frac{\partial V_t}{\partial r_t} [\tilde{\mu}(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t^{\mathbb{Q}}] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_t}{\partial r_t^2} \sigma^2(t, r_t)dt \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow dV_t = \left[\frac{\partial V_t}{\partial t} + \tilde{\mu}(t, r_t) \frac{\partial V_t}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, r_t) \frac{\partial^2 V_t}{\partial r_t^2} \right] dt + \sigma(t, r_t) \frac{\partial V_t}{\partial r_t} dW_t^{\mathbb{Q}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Para que não existam oportunidades de arbitragem tem-se que:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{dV_t}{V_t} \middle| \mathcal{F}_t \right] = r_t dt \Leftrightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [dV_t | \mathcal{F}_t] = r_t V_t dt$$

Aplicando o valor esperado a ambos os membros da equação 2.16

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [dV_t | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\left[\frac{\partial V_t}{\partial t} + \tilde{\mu}(t, r_t) \frac{\partial V_t}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, r_t) \frac{\partial^2 V_t}{\partial r_t^2} \right] dt \middle| \mathcal{F}_t \right] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\sigma(t, r_t) dW_t^{\mathbb{Q}} | \mathcal{F}_t] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow r_t V_t dt = \left[\frac{\partial V_t}{\partial t} + \tilde{\mu}(t, r_t) \frac{\partial V_t}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, r_t) \frac{\partial^2 V_t}{\partial r_t^2} \right] dt \Leftrightarrow r_t V_t = \frac{\partial V_t}{\partial t} + \tilde{\mu}(t, r_t) \frac{\partial V_t}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, r_t) \frac{\partial^2 V_t}{\partial r_t^2} \end{aligned}$$

Esta equação diferencial parcial deve ser satisfeita por qualquer ativo financeiro V , tal como a equação (2.14). Portanto, estas equações têm de ser iguais. Observando as duas equações, conclui-se facilmente que estas equações só serão iguais se

$$\tilde{\mu}(t, r_t) = \mu(t, r_t) - \lambda_t \sigma(t, r_t) \quad (2.17)$$

Assim, tem-se que

- $dr_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t^{\mathbb{P}}$
- $dr_t = \tilde{\mu}(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t^{\mathbb{Q}}$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t^{\mathbb{P}} &= \tilde{\mu}(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t^{\mathbb{Q}} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t^{\mathbb{P}} &= (\mu(t, r_t) - \lambda_t\sigma(t, r_t))dt + \sigma(t, r_t)dW_t^{\mathbb{Q}} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \sigma(t, r_t)dW_t^{\mathbb{P}} &= -\lambda_t\sigma(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t^{\mathbb{Q}} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow dW_t^{\mathbb{P}} &= -\lambda_tdt + dW_t^{\mathbb{Q}}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Obtém-se assim a fórmula de equivalência entre a medida de probabilidade e a medida de risco neutro, num modelo de um fator (*single factor model*).

PROPOSIÇÃO 2.2. *No modelo de fator único definido como na equação (2.1), o preço de um derivado de taxa de juro V_t com pagamento final de $V_T = g(r_T)$, em que g é uma função de qualquer valor real, é igual a*

$$V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} g(r_T) | \mathcal{F}_t \right] \tag{2.19}$$

DEMONSTRAÇÃO. Veja o apêndice B □

2.1. Modelos de Estruturas Temporais Afins

PROPOSIÇÃO 2.3. *Um modelo de fator único é chamado de modelo de estrutura temporal afim (affine term structure) se for possível escrever o preço de uma obrigação de cupão zero, no momento t , com maturidade T , como*

$$P(t, T) = e^{A(t, T) - B(t, T)r_t}, \tag{2.20}$$

onde $A(t, T)$ e $B(t, T)$ são funções determinísticas e r_t é a taxa de juro.

Se $\tilde{\mu}(t, r_t)$ e $\sigma(t, r_t)$ são da forma

$$\tilde{\mu}(t, r_t) = \alpha_t r_t + \beta_t \tag{2.21}$$

$$\sigma(t, r_t) = \sqrt{\gamma_t r_t + \delta_t}, \tag{2.22}$$

onde $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t$ e δ_t são funções determinísticas e provavelmente não homogêneas no tempo, então os modelos de fatores únicos (*single factor model*) admitem uma representação num modelo de estrutura temporal afim (affine term structure). Além disso, tem-se que $B(t, T)$ satisfaz a equação de Riccati

$$\frac{\partial B(t, T)}{\partial t} + \alpha_t B(t, T) - \frac{1}{2}\gamma_t B^2(t, T) + 1 = 0 \tag{2.23}$$

sujeita a $B(T, T) = 0$ e $A(t, T)$ satisfaz a equação diferencial ordinária

$$\frac{\partial A(t, T)}{\partial t} = \beta_t B(t, T) - \frac{1}{2}\delta_t B^2(t, T) \tag{2.24}$$

sujeita a $A(T, T) = 0$

DEMONSTRAÇÃO. Veja o apêndice C □

3

Modelo CIR

Este capítulo foi elaborado com base nos conceitos e perspectivas teóricas apresentados em [1] e [5].

Em 1985, John C.Cox, Jonathan E.Ingersoll e Stephen A.Ross apresentaram o modelo CIR como uma extensão do Modelo de Vasiček. Como tal, este modelo também é um modelo que descreve a evolução das taxas de juro. Sendo considerado um modelo de fator único. Este modelo foi criado com o intuito de tentar contornar o problema do Modelo de Vasiček assumir taxas de juros negativas.

A equação diferencial estocástica deste modelo na medida física é dada por

$$dr_t = \alpha(\mu - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t^{\mathbb{P}}, \quad (3.1)$$

onde α é a velocidade de reversão para a média, μ é o nível de longo prazo para a taxa de juro instantânea, $\sigma\sqrt{r_t}$ é a volatilidade instantânea do processo r_t e $dW_t^{\mathbb{P}}$ é o incremento do processo de Wiener na medida de probabilidade $\mathbb{P}$.

É necessário passarmos esta equação diferencial estocástica para a medida de risco neutro. Neste modelo vamos assumir que o preço de mercado do risco (*market price of risk*) é dado por $\lambda_t = \frac{\lambda\sqrt{r_t}}{\sigma}$. Assim, a equação 2.18 transforma-se em $dW_t^{\mathbb{P}} = -\frac{\lambda\sqrt{r_t}}{\sigma}dt + dW_t^{\mathbb{Q}}$. Tendo em conta estas mudanças, a equação diferencial estocástica do modelo CIR na medida de risco neutro é

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t^{\mathbb{Q}}, \quad k = \alpha + \lambda, \quad \theta = \frac{\alpha\mu}{\alpha + \lambda} \quad (3.2)$$

Tendo em conta as equações 2.21 e 2.22, é possível observar que o modelo CIR é um modelo de estrutura temporal afim (*affine term structure*), onde $\alpha_t = -k$, $\beta_t = k\theta$, $\gamma_t = \sigma^2$ e $\delta_t = 0$

PROPOSIÇÃO 3.1. *Segundo o modelo CIR, o preço de uma obrigação de cupão zero, $P(t, T)$, no momento t e com maturidade T , é dada por*

$$P(t, T) = e^{A(\tau) + B(\tau)r_t} \quad (3.3)$$

onde

$$B(\tau) = -\frac{2(e^{\gamma\tau} - 1)}{2\gamma + (k + \gamma)(e^{\gamma\tau} - 1)} \quad (3.4)$$

$$A(\tau) = \frac{2k\theta}{\sigma^2} \ln \left[\frac{2\gamma e^{(k+\gamma)\frac{\tau}{2}}}{\gamma + (k+\gamma)(e^{\gamma\tau} - 1)} \right] \quad (3.5)$$

$$\tau = T - t \quad (3.6)$$

$$\gamma = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2} \quad (3.7)$$

DEMONSTRAÇÃO. Veja o apêndice D □

3.1. Avaliação de Opções Europeias sobre Obrigações com Cupão Zero

PROPOSIÇÃO 3.2. *Assumindo que a taxa de juro de curto prazo segue a equação diferencial estocástica (3.2), então para quaisquer λ e μ não negativos tem-se que*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\lambda r_t} \exp \left(-\mu \int_{t_0}^t r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right] = \exp [\phi_{\lambda,\mu}(t - t_0) - r_{t_0} \psi_{\lambda,\mu}(t - t_0)], \quad (3.8)$$

onde

$$\phi_{\lambda,\mu}(t - t_0) = \frac{2k\theta}{\sigma^2} \ln \left[\frac{2he^{\frac{(k+h)(t-t_0)}{2}}}{\sigma^2 \lambda (e^{h(t-t_0)} - 1) + h - k + (k+h)e^{h(t-t_0)}} \right] \quad (3.9)$$

$$\psi_{\lambda,\mu}(t - t_0) = \frac{\lambda [h + k + (h - k)e^{h(t-t_0)}] + 2\mu(e^{h(t-t_0)} - 1)}{\sigma^2 \lambda (e^{h(t-t_0)} - 1) + h - k + (k+h)e^{h(t-t_0)}} \quad (3.10)$$

$$h = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2\mu} \quad (3.11)$$

DEMONSTRAÇÃO. Veja o apêndice E □

PROPOSIÇÃO 3.3. *Segundo o modelo CIR, o preço de uma opção de compra europeia sobre uma obrigação de cupão zero, $P(t, T_2)$, com strike K e maturidade T_1 , ($t \leq T_1 \leq T_2$) é dada por*

$$c_t [P(t, T_2); K; T_1] = P(t, T_2) F_{\chi^2_{\left(\frac{4k\theta}{\sigma^2}, \xi_2\right)}} \left(\frac{r^*}{L_2} \right) - K P(t, T_1) F_{\chi^2_{\left(\frac{4k\theta}{\sigma^2}, \xi_1\right)}} \left(\frac{r^*}{L_1} \right) \quad (3.12)$$

onde

$$\xi_j = \frac{8r_t \gamma^2 e^{\gamma(T_1-t)}}{\sigma^2 [e^{\gamma(T_1-t)} - 1] \{ \gamma [e^{\gamma(T_1-t)} + 1] + [k - \sigma^2 B(T_j - T_1)] [e^{\gamma(T_1-t)} - 1] \}} \quad (3.13)$$

$$L_j = \frac{\sigma^2}{2} \frac{e^{\gamma(T_1-t)} - 1}{\gamma [e^{\gamma(T_1-t)} + 1] + [k - \sigma^2 B(T_j - T_1)] [e^{\gamma(T_1-t)} - 1]} \quad (3.14)$$

para $j = 1, 2$

$$r^* = \frac{\ln(K) - A(T_2 - T_1)}{B(T_2 - T_1)} \quad (3.15)$$

e $F_{\chi^2_{(a,b)}}$ representa a função distribuição da Qui-Quadrada não central com a graus de liberdade e com parâmetro de não centralidade b .

O preço de uma opção de venda europeia sobre uma obrigação de cupão zero, $P(t, T_2)$, com strike K e maturidade T_1 , ($t \leq T_1 \leq T_2$) é dada por

$$p_t [P(t, T_2); K; T_1] = -P(t, T_2) Q_{\chi^2_{\left(\frac{4k\theta}{\sigma^2}, \xi_2\right)}} \left(\frac{r^*}{L_2} \right) + K P(t, T_1) Q_{\chi^2_{\left(\frac{4k\theta}{\sigma^2}, \xi_1\right)}} \left(\frac{r^*}{L_1} \right) \quad (3.16)$$

onde $Q_{\chi^2_{(a,b)}}$ representa a função distribuição complementar da Qui-Quadrada não central com a graus de liberdade e com parâmetro de não centralidade b .

DEMONSTRAÇÃO. Veja o apêndice F □

3.2. Avaliação de Opções Europeias sobre Obrigações com Cupão

PROPOSIÇÃO 3.4. Segundo o modelo CIR, o preço de uma opção de compra europeia sobre uma obrigação com cupão, B_t , com strike X e maturidade T ($T \leq t$) é dada por

$$c_t(B_t, X, T) = \sum_{i=1}^{N_0} k_i c_t[P(t, T_i); X_i; T] \quad (3.17)$$

onde N_0 é o número de fluxos financeiros (cash-flows), k_i , gerados pela obrigação com cupão subjacente após a data de vencimento da opção, ou seja, no momento T_i ($> T$), para $i = 1, \dots, N_0$.

$$X_i = \exp[A(T_i - T) + B(T_i - T)r^*] = P(T, T_i, r^*) \quad (3.18)$$

e a taxa de juro crítica de curto prazo r^* é a solução implícita da seguinte equação

$$\sum_{i=1}^{N_0} k_i \exp[A(T_i - T) + B(T_i - T)r^*] = X \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N_0} k_i X_i = X \quad (3.19)$$

O preço de uma opção de venda europeia é dada por

$$p_t(B_t, X, T) = \sum_{i=1}^{N_0} k_i p_t[P(t, T_i), X_i, T] \quad (3.20)$$

DEMONSTRAÇÃO. Veja o apêndice G □

3.3. Avaliação de Opções Europeias sobre Yields

Este capítulo foi elaborado com base nos conceitos e perspectivas teóricas apresentados em [1], [2] e [3].

Quando falamos de opções europeias sobre *yields*, continuamos a manter a mesma equação estocástica, como definimos em 3.2. No entanto, já não temos obrigações, portanto a proposição 3.1 já não se aplica neste caso.

PROPOSIÇÃO 3.5. Segundo Longstaff, [2], a yield to maturity, r_T , no momento t e com maturidade T é dada por

$$r_T = A(\tau) + B(\tau)r_t \quad (3.21)$$

onde

$$A(\tau) = \frac{2k\theta}{\tau\sigma^2} \ln \left[\frac{(\gamma + k + \lambda)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma}{2\gamma e^{(\gamma+k+\lambda)\frac{\tau}{2}}} \right] \quad (3.22)$$

$$B(\tau) = \frac{2e^{\gamma\tau} - 1}{\tau[(\gamma + k + \lambda)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma]} \quad (3.23)$$

$$\gamma = \sqrt{(k + \lambda)^2 + 2\sigma^2} \quad (3.24)$$

$$\tau = T - t \quad (3.25)$$

DEMONSTRAÇÃO. Veja o apêndice H □

TEOREMA 3.1 (Teorema da Separação). *Sejam $F(r_T)$ a função de payoff de um derivado r_T na maturidade τ e $P(\tau)$ o valor de uma obrigação de cupão zero na maturidade τ . Então o valor do derivado é*

$$P(\tau)\mathbb{E}[F(r_T)] \quad (3.26)$$

onde o valor esperado é dado por

$$A(T) + \frac{\sigma^2 \tau B(\tau) B(T)}{4} \chi^2(\nu, \eta) \quad (3.27)$$

onde $\chi^2(\nu, \eta)$ é uma Qui-Quadrada não central com ν graus de liberdade e com parâmetro de não centralidade η , onde

$$\nu = \frac{4\theta k}{\sigma^2} \quad (3.28)$$

$$\eta = \frac{-4\gamma^2 \tau e^{\gamma\tau} B(\tau) A(T)}{\sigma^2 (e^{\gamma\tau} - 1)^2 B(T)} + \frac{4\gamma \tau e^{\gamma\tau} B(\tau)}{\sigma^2 (e^{\gamma\tau} - 1)^2 B(T)} r_T \quad (3.29)$$

PROPOSIÇÃO 3.6. Segundo Longstaff, [2], o valor de uma opção de compra sobre yields, r_T , com strike X e maturidade τ , ($\tau < T$) é dada por

$$c(r_T; X; \tau) = P(\tau) \left[r_T Q_{\chi^2_{(\nu+4, \eta)}}(\phi) \xi - X Q_{\chi^2_{(\nu, \eta)}}(\phi) + \psi \right] \quad (3.30)$$

onde

$$\xi = \left(\gamma \tau B(\tau) (e^{\gamma\tau} - 1)^{-1} e^{\frac{\gamma\tau}{2}} \right)^2 \quad (3.31)$$

$$\phi = \frac{4(X - A(T))}{\sigma^2 \tau B(\tau) B(T)} \quad (3.32)$$

$$\psi = A(T) Q_{\chi^2_{(\nu, \eta)}}(\phi) + k\theta B(\tau) B(T) Q_{\chi^2_{(\nu+2, \eta)}}(\phi) - \xi A(T) Q_{\chi^2_{(\nu+4, \eta)}}(\phi) \quad (3.33)$$

onde $Q_{\chi^2_{(\nu, \eta)}}(\phi)$ é a função distribuição complementar da Qui-Quadrada não central com ν graus de liberdade e com parâmetro de não centralidade η .

4

Preço de Caps e Floors no Modelo CIR Sobre *Yields*

Um *Cap* é um instrumento financeiro utilizado para proteger o seu detentor contra o aumento excessivo das taxas de juros em financiamentos indexados a taxas de juros variáveis. Ao adquirir um *Cap*, o comprador paga um prémio e, em troca, tem o direito de limitar o valor máximo da taxa de juros que pode pagar - taxa de *Cap*.

Um *Cap* consiste em uma série de opções de compra europeias (*European call option*) sobre taxas de juros, conhecidas como *caplets*. Cada *caplet* aplica-se a um período específico de tempo, como um trimestre ou um semestre.

Se, em qualquer um desses períodos, a taxa de juro variável exceder a taxa *Cap*, o *Cap* é exercido e como tal o detentor do *Cap* recebe da entidade financeira a diferença entre a taxa de juro variável e a taxa de *Cap*. Ou seja, mesmo que a taxa de juro variável seja maior, o comprador do *Cap* não pagará mais do que a taxa *Cap*, protegendo-se assim contra o aumento das taxas de juros.

Caso a taxa de juro variável seja igual ou inferior à taxa de *Cap*, o *Cap* não é exercido e portanto o detentor do *Cap* paga a taxa de juro variável do mercado, que é mais baixa que a taxa de *Cap*. Logo, o comprador do *Cap* beneficia da descida das taxas de juro, uma vez que irá pagar a taxa de juro variável em vez da taxa de *Cap*.

O *Cap* oferece proteção ao limitar o impacto de aumentos nas taxas de juro, mas não impede que o comprador beneficie de uma queda nas taxas de juro. Se as taxas de juro caem, o detentor do *Cap* paga a taxa de juros mais baixa em vez da taxa de juro fixada na taxa de *Cap*.

Por outro lado, o *Floor* é um instrumento financeiro utilizado para proteger o seu comprador contra as quedas excessivas das taxas de juro em aplicações financeiras indexadas a taxas de juros variáveis. Ao contrário do *Cap*, o comprador de um *Floor*, após o pagamento de um prémio, obtém o direito de estabelecer um valor mínimo para a taxa de juro que pode vir a receber das suas aplicações financeiras - taxa de *Floor*.

Um *Floor* consiste em uma série de opções de venda europeias (*European put option*) sobre taxas de juro, conhecidas como *floorlets*. Cada *floorlet* aplica-se a um período específico de tempo, como um trimestre ou um semestre.

O *Floor* opera de forma idêntica ao *Cap*, ou seja, se a taxa de juro variável for inferior à taxa de *Floor* então o *Floor* é exercido. Como tal, na data de pagamento dos juros, o detentor do *Floor* recebe da entidade financeira a diferença entre a taxa de juro variável e a taxa de *Floor*. Caso contrário, o *Floor* não é exercido e como tal o seu detentor receberá a taxa de juro variável, podendo assim dizer que beneficiou da subida das taxas de juro.

Perante cenários de quedas nas taxas de juro, um *Floor* apresenta proteção contra estes cenários, uma vez que garante um rendimento mínimo das aplicações financeiras do seu detentor. Além desta proteção, um *Floor* não impede que o seu detentor beneficie com a subida das taxas de juro variável, visto que este receberá a taxa de juro variável caso esta seja superior à taxa de juro *Floor*.

O *Collar* é um instrumento financeiro que combina um *Cap* e um *Floor* para criar uma faixa de proteção em torno da taxa de juro de uma aplicação financeira ou de um financiamento. É estabelecido um limite máximo e um limite mínimo para a taxa de juro, protegendo o investidor contra variações extremas.

No *Collar*, o investidor adquire um *Cap* para limitar o valor máximo da taxa de juros que terá que pagar ou receber e, simultaneamente, vende um *Floor* para garantir um rendimento mínimo à instituição financeira de modo a que, esta esteja protegida contra quedas excessivas nas taxas de juro.

Assim, o *Collar* permite que o investidor beneficie de variações moderadas nas taxas de juro, enquanto limita o risco de aumentos elevados como o de quedas acentuadas, proporcionando, assim, uma proteção equilibrada e uma previsibilidade maior nos custos ou rendimentos associados às taxas de juro variáveis.

Na secção seguinte vamos calcular o preço de um *Cap* e de um *Floor* perpétuo tendo em conta o modelo CIR sem *drift*.

4.1. Caso Particular sem Drift

Nesta subsecção iremos analisar o caso particular sem *drift*, o qual é apresentado na seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 4.1. *O valor do cap perpétuo sobre yields no modelo CIR é dado por*

$$V(r, \infty) = \int_0^\infty c[r; X; T_1] dT_1 = \quad (4.1)$$

$$= \begin{cases} \left[e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r} - e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}r} \right] \left[\frac{X}{\omega} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) - \frac{(\lambda-\omega)}{2\omega} e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} \right] & , \text{ se } r \leq X \\ 1 + e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}r} \left[\frac{(\lambda-\omega)}{2\omega} e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} - \frac{(\lambda+\omega)}{2\omega} e^{\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X} + \frac{X}{\omega} \left[Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X \right) - Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) - Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}r \right) \right] \right] + \frac{X}{\omega} e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r \right) & , \text{ se } r > X \end{cases} \quad (4.2)$$

onde $\omega = \sqrt{\lambda^2 + 2\sigma^2}$ e $Ei(x)$ é a função exponencial integral de x e $c[r; X; T_1]$ é dado como está representado na equação 3.30.

O valor de um floor perpétuo sobre yields é dado por

$$F(r, \infty) = \int_0^\infty p[r; X; T_1] dT_1 = V(r, \infty) + X \int_0^\infty P(T_1) dT_1 - 1 + e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} r} \quad (4.3)$$

onde $P(T_1)$ é o preço de uma obrigação de cupão zero na maturidade T_1 .

DEMONSTRAÇÃO. Queremos calcular o preço de um cap perpétuo no modelo de CIR. Sabemos que

$$V(r, \infty) = \int_0^\infty c[r; X; T_1] dT_1$$

O caso perpétuo é homogéneo no tempo, portanto por [4] sabemos que $V(r, \infty)$ tem de satisfazer a equação

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r V''(r) + [k(\theta - r) - \lambda r] V'(r) - rV(r) + \max(r - X, 0) = 0, \quad (4.4)$$

onde r é a taxa de juro e X é o *strike*.

Vamos considerar o caso particular, com $k = 0$. Assim, ficamos com a equação diferencial

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sigma^2 r V''(r) - \lambda r V'(r) - rV(r) + \max(r - X, 0) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow r \left(V''(r) - \frac{2\lambda}{\sigma^2} V'(r) - \frac{2}{\sigma^2} V(r) \right) = -\frac{2}{\sigma^2} \max(r - X, 0) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow V''(r) - \frac{2\lambda}{\sigma^2} V'(r) - \frac{2}{\sigma^2} V(r) = -\frac{2}{r\sigma^2} \max(r - X, 0) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Se $r < X$, ficamos com a equação diferencial ordinária

$$V''(r) - \frac{2\lambda}{\sigma^2} V'(r) - \frac{2}{\sigma^2} V(r) = 0$$

Esta equação é uma equação diferencial ordinária de coeficientes constantes, portanto temos que o polinómio característico é dado por

$$P(x) = x^2 - \frac{2\lambda}{\sigma^2} x - \frac{2}{\sigma^2}$$

Vamos descobrir os valores de x que anulam o polinómio característico

$$\begin{aligned} P(x) = 0 & \Leftrightarrow x^2 - \frac{2\lambda}{\sigma^2} x - \frac{2}{\sigma^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\frac{2\lambda}{\sigma^2} \pm \sqrt{\frac{4\lambda^2}{\sigma^4} + \frac{8}{\sigma^2}}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{2\lambda}{\sigma^2} \pm \sqrt{\frac{4^2}{\sigma^2} \left(\frac{\lambda^2}{\sigma^2} + 2 \right)}}{2} \Leftrightarrow \\ & x = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2} \vee x = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 2\sigma^2}}{\sigma^2} \end{aligned}$$

Consideremos $\omega = \sqrt{\lambda^2 + 2\sigma^2}$. Assim, a solução do sistema homogéneo é

$$V_H(r) = c_1 e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} r} + c_2 e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} r}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (4.6)$$

Se $r > X$, ficamos com a equação diferencial ordinária

$$V''(r) - \frac{2\lambda}{\sigma^2}V'(r) - \frac{2}{\sigma^2}V(r) = \frac{2}{\sigma^2} \left(\frac{X}{r} - 1 \right)$$

Temos uma equação diferencial ordinária de segunda ordem não linear. Vamos usar o método da variação dos parâmetros para calcular a solução particular desta equação.

Sabe-se que a solução geral é dada pela soma da solução homogênea com a solução particular, ou seja,

$$V(r) = V_H(r) + V_P(r),$$

onde $V_P(r)$ é a solução particular.

Pelo método da variação dos parâmetros, sabemos que a solução particular vai ser dada por

$$V_P(r) = v_1(r)y_1(r) + v_2(r)y_2(r),$$

onde $y_1(r)$ e $y_2(r)$ são as soluções do sistema homogêneo.

Assim, temos que

$$\bullet \ y_1(r) = e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r} \qquad \bullet \ y_2(r) = e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}r}$$

Sabemos que $v_1(r)$ e $v_2(r)$ são soluções do sistema

$$\begin{cases} v_1'(r)y_1(r) + v_2'(r)y_2(r) = 0 \\ v_1'(r)y_1'(r) + v_2'(r)y_2'(r) = \frac{2}{\sigma^2} \left(\frac{X}{r} - 1 \right) \end{cases}$$

Matricialmente, obtemos

$$\begin{bmatrix} y_1(r) & y_2(r) \\ y_1'(r) & y_2'(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1'(r) \\ v_2'(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sigma^2} \left(\frac{X}{r} - 1 \right) \end{bmatrix}$$

Podemos resolver este sistema pelo método de Cramer. Seja A a matriz dos coeficientes, temos que

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} y_1(r) & y_2(r) \\ y_1'(r) & y_2'(r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r} & e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}r} \\ \left(\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}\right) e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r} & \left(\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}\right) e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}r} \end{vmatrix} = \left(\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}\right) e^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}r} - \left(\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}\right) e^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}r} = \\ &= -\frac{2\omega}{\sigma^2} e^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}r} \end{aligned}$$

Pelo método de Cramer temos que

$$v_1'(r) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}r} \\ \frac{2}{\sigma^2} \left(\frac{X}{r} - 1 \right) & \left(\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}\right) e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}r} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-\frac{2}{\sigma^2} \left(\frac{X}{r} - 1 \right) e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}r}}{-\frac{2\omega}{\sigma^2} e^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}r}} = \frac{1}{\omega} \left(\frac{X}{r} - 1 \right) e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r}$$

Primitivando obtemos que

$$v_1(r) = \int \frac{1}{\omega} \left(\frac{X}{r} - 1 \right) e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r} dr = \int \frac{X}{\omega r} e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r} dr - \int \frac{1}{\omega} e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r} dr$$

Para resolver a primeira primitiva precisamos de fazer uma substituição

- $u = -\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2}r \Leftrightarrow -\frac{u\sigma^2}{\lambda + \omega} = r$
- $dr = -\frac{\sigma^2}{\lambda + \omega}du$

$$\begin{aligned} v_1(r) &= \int \frac{X}{\omega r} e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r} dr - \int \frac{1}{\omega} e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r} dr = \frac{X}{\omega} \int \frac{e^u}{-\frac{u\sigma^2}{\lambda+\omega}} \left(-\frac{\sigma^2}{\lambda+\omega}\right) du - \\ &= \frac{1}{\omega} \left(-\frac{\sigma^2}{\lambda+\omega}\right) \int -\left(\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r} dr = \frac{X}{\omega} \int \frac{e^u}{u} du + \frac{\sigma^2}{\omega(\lambda+\omega)} e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r} = \\ &= \frac{X}{\omega} Ei(u) + \frac{\sigma^2}{\omega(\lambda+\omega)} e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r} = \frac{X}{\omega} Ei\left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r\right) + \frac{\sigma^2}{\omega(\lambda+\omega)} e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r}, \end{aligned}$$

onde $Ei(x)$ é a função exponencial integral de x.

Vamos calcular $v_2(r)$. Pelo método de Cramer, temos que

$$v_2'(r) = \frac{\begin{vmatrix} e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r} & 0 \\ \left(\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}\right) e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r} & \frac{2}{\sigma^2} \left(\frac{X}{r} - 1\right) \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\frac{2}{\sigma^2} \left(\frac{X}{r} - 1\right) e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r}}{-\frac{2\omega}{\sigma^2} e^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}r}} = -\frac{1}{\omega} \left(\frac{X}{r} - 1\right) e^{\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}r}$$

Primitivando obtemos que

$$v_2(r) = \int -\frac{1}{\omega} \left(\frac{X}{r} - 1\right) e^{\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}r} dr = \int -\frac{X}{\omega r} e^{\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}r} dr + \int \frac{1}{\omega} e^{\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}r} dr$$

Para resolver a primeira primitiva precisamos de fazer uma substituição

- $u = \frac{\omega - \lambda}{\sigma^2}r \Leftrightarrow \frac{u\sigma^2}{\omega - \lambda} = r$
- $dr = \frac{\sigma^2}{\omega - \lambda}du$

$$\begin{aligned} v_2(r) &= \int -\frac{X}{\omega r} e^{\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}r} dr + \int \frac{1}{\omega} e^{\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}r} dr = -\frac{X}{\omega} \int \frac{e^u}{\frac{u\sigma^2}{\omega-\lambda}} \left(\frac{\sigma^2}{\omega-\lambda}\right) du + \\ &= \frac{1}{\omega} \left(\frac{\sigma^2}{\omega-\lambda}\right) \int \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}\right) e^{\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}r} dr = -\frac{X}{\omega} \int \frac{e^u}{u} du + \frac{\sigma^2}{\omega(\omega-\lambda)} e^{\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}r} = \\ &= -\frac{X}{\omega} Ei(u) + \frac{\sigma^2}{\omega(\omega-\lambda)} e^{\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}r} = -\frac{X}{\omega} Ei\left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}r\right) + \frac{\sigma^2}{\omega(\omega-\lambda)} e^{\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}r}, \end{aligned}$$

onde $Ei(x)$ é a função exponencial integral de x.

Assim, obtemos que

$$\begin{aligned} V_P(r) &= v_1(r)y_1(r) + v_2(r)y_2(r) = \\ &= \left[\frac{X}{\omega} Ei\left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r\right) + \frac{\sigma^2}{\omega(\lambda+\omega)} e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r} \right] e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r} + \\ &+ \left[-\frac{X}{\omega} Ei\left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}r\right) + \frac{\sigma^2}{\omega(\omega-\lambda)} e^{\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}r} \right] e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}r} = \\ &= \frac{X}{\omega} e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r} Ei\left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r\right) + \frac{\sigma^2}{\omega(\lambda+\omega)} - \frac{X}{\omega} e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}r} Ei\left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}r\right) + \frac{\sigma^2}{\omega(\omega-\lambda)} = \\ &= \frac{X(\omega-\lambda)(\omega+\lambda)e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r} Ei\left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r\right) + \sigma^2(\omega-\lambda)}{\omega(\omega-\lambda)(\omega+\lambda)} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{X(\omega - \lambda)(\omega + \lambda)e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2}r} Ei\left(\frac{\omega - \lambda}{\sigma^2}r\right) + \sigma^2(\omega + \lambda)}{\omega(\omega - \lambda)(\omega + \lambda)} = \\
& = \frac{2\sigma^2 X e^{\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2}r} Ei\left(-\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2}r\right) + 2w\sigma^2 - 2\sigma^2 X e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2}r} Ei\left(\frac{\omega - \lambda}{\sigma^2}r\right)}{2w\sigma^2} = \\
& = \frac{1}{\omega} \left(X e^{\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2}r} Ei\left(-\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2}r\right) + w - X e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2}r} Ei\left(\frac{\omega - \lambda}{\sigma^2}r\right) \right)
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$V(r) = \begin{cases} c_1 e^{\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2}r} + c_2 e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2}r} & , \text{ se } r \leq X \\ c_3 e^{\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2}r} + c_4 e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2}r} + \\ + \frac{1}{\omega} \left(X e^{\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2}r} Ei\left(-\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2}r\right) + w - X e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2}r} Ei\left(\frac{\omega - \lambda}{\sigma^2}r\right) \right) & , \text{ se } r > X \end{cases} \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R} \quad (4.7)$$

Vamos aplicar condições de fronteira para simplificar $V(r)$.

Quando $r > X$, então

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow +\infty} V(r) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} c_3 e^{\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2}r} + c_4 e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2}r} + \\
&+ \frac{1}{\omega} \left(X e^{\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2}r} Ei\left(-\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2}r\right) + w - X e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2}r} Ei\left(\frac{\omega - \lambda}{\sigma^2}r\right) \right)
\end{aligned}$$

Podemos observar que $\lim_{r \rightarrow +\infty} c_3 e^{\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2}r} = +\infty$, portanto esta função diverge, como tal sabemos que $c_3 = 0$.

Como estamos no modelo CIR, sabemos que este não admite taxas de juro negativas, logo queremos

$$\lim_{r \rightarrow 0} V(r) = \lim_{r \rightarrow 0} c_1 e^{\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2}r} + c_2 e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2}r} = c_1 + c_2 < +\infty$$

Assim, concluímos que esta função não diverge, portanto $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$. Portanto

$$V(r) = \begin{cases} c_1 e^{\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2}r} + c_2 e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2}r} & , \text{ se } r \leq X \\ c_4 e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2}r} + \frac{1}{\omega} \left[X e^{\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2}r} Ei\left(-\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2}r\right) + w - X e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2}r} Ei\left(\frac{\omega - \lambda}{\sigma^2}r\right) \right] & , \text{ se } r > X \end{cases} \quad c_1, c_2, c_4 \in \mathbb{R} \quad (4.8)$$

Vamos ter de aplicar a *Value Matching Condition* e a *Smooth Pasting Condition* a este sistema. Ou seja, queremos encontrar c_1, c_2 e c_3 de forma a que $V(r)$ seja diferenciável e contínua em $r = X$. Sabemos que para que $V(r)$ seja contínua em $r = X$, então

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow X^+} V(r) &= \lim_{r \rightarrow X^-} V(r) = V(X) \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow X^+} V(r) = \lim_{r \rightarrow X^-} V(r) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow c_1 e^{\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2}X} + c_2 e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2}X} = c_4 e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2}X} + \frac{1}{\omega} \left[X e^{\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2}X} Ei\left(-\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2}X\right) + w \right. \\
&\quad \left. - X e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2}X} Ei\left(\frac{\omega - \lambda}{\sigma^2}X\right) \right] \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Para $V(r)$ ser diferenciável em $r = X$, então $V'(X^+) = V'(X^-)$.

Vamos calcular as derivadas.

- Se $r \leq X$

$$V'(r) = c_1 \left(\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} r} + c_2 \left(\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} r}$$

- Se $r > X$

$$\begin{aligned} V'(r) &= c_4 \left(\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} r} + \frac{1}{\omega} \left[X \left(\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} r} Ei \left(-\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} r \right) + X e^{\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} r} \frac{e^{-\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} r}}{r} \right. \\ &\quad \left. - X \left(\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} r} Ei \left(\frac{\omega - \lambda}{\sigma^2} r \right) - X e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} r} \frac{e^{\frac{\omega - \lambda}{\sigma^2} r}}{r} \right] = \\ &= c_4 \left(\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} r} + \frac{X}{\omega} \left[\left(\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} r} Ei \left(-\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} r \right) - \left(\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} r} Ei \left(\frac{\omega - \lambda}{\sigma^2} r \right) \right] \end{aligned}$$

Assim para que $V'(X^+) = V'(X^-)$, obtemos a equação

$$\begin{aligned} c_1 \left(\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} X} + c_2 \left(\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} X} &= c_4 \left(\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} X} + \\ \frac{X}{\omega} \left[\left(\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} X} Ei \left(-\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} X \right) - \left(\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} X} Ei \left(\frac{\omega - \lambda}{\sigma^2} X \right) \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

Combinando 4.9 e 4.10, obtemos um sistema com duas equações e três incógnitas (c_1, c_2, c_3). Assim, iremos obter um sistema possível indeterminado. No entanto, podemos acrescentar uma terceira equação

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} V(r) &= 0 \\ \Leftrightarrow c_1 e^{\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} 0} + c_2 e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} 0} &= 0 \\ \Leftrightarrow c_1 + c_2 &= 0 \\ \Leftrightarrow c_1 &= -c_2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Obtemos esta condição, pois estamos perante um contrato, $V(r)$, que nos vai dar um *payoff* que é o máximo entre $r - X$ e 0. Se r tender para zero, a probabilidade de virmos a receber um *payoff* positivo é nula, então também o valor que estamos disposto a dar por este contrato é zero.

Assim, reunindo 4.9, 4.10 e 4.11 obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} c_1 e^{\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} X} + c_2 e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} X} = c_4 e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} X} + \frac{1}{\omega} \left[X e^{\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} X} Ei \left(-\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} X \right) + \omega - X e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} X} Ei \left(\frac{\omega - \lambda}{\sigma^2} X \right) \right] \\ c_1 \left(\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} X} + c_2 \left(\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} X} = c_4 \left(\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} X} + \\ \frac{X}{\omega} \left[\left(\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} X} Ei \left(-\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} X \right) - \left(\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda - \omega}{\sigma^2} X} Ei \left(\frac{\omega - \lambda}{\sigma^2} X \right) \right] \\ c_1 = -c_2 \end{cases} \quad (4.12)$$

Podemos simplificar este sistema num sistema de duas incógnitas, uma vez que $c_1 = -c_2$.

$$\begin{cases} c_2 \left(-e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} + e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} \right) - c_4 e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} = \frac{1}{\omega} \left[X e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) + w - X e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X \right) \right] \\ c_2 \left(-\left(\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} + \left(\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} \right) - c_4 \left(\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} = \\ \frac{X}{\omega} \left[\left(\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) - \left(\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X \right) \right] \end{cases} \quad (4.13)$$

Vamos escrever o sistema de forma matricial

$$\begin{bmatrix} -e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} + e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} & -e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} \\ -\left(\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} + \left(\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} & -\left(\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega} \left[X e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) + w - X e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X \right) \right] \\ \frac{X}{\omega} \left[\left(\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) - \left(\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X \right) \right] \end{bmatrix}$$

Seja B a matriz dos coeficientes, vamos calcular o seu determinante

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} -e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} + e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} & -e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} \\ -\left(\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} + \left(\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} & -\left(\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} - \left(\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} - \left(\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} + \\ &= \left(\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} = -\frac{2\omega}{\sigma^2} e^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}X} \end{aligned}$$

Vamos calcular c_2 e c_4 pela regra de Cramer.

Vamos começar por calcular c_2

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{\omega} \left[X e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) + w - X e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X \right) \right] & -e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} \\ \frac{X}{\omega} \left[\left(\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) - \left(\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X \right) \right] & -\left(\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} \end{vmatrix}}{|B|} = \\ &= \frac{\frac{\sigma^2}{2\omega^2} \left(\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} \left[X e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) + w - X e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X \right) \right] - \\ &\quad \frac{X\sigma^2}{2\omega^2} e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} \left[\left(\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) - \left(\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X \right) \right]}{2\omega^2} = \\ &= \frac{1}{2\omega^2} \left[(\lambda-\omega)X Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) + \omega(\lambda-\omega)e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} - X(\lambda-\omega)e^{-\frac{2\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X \right) - \right. \\ &\quad \left. X(\lambda+\omega)Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) + X(\lambda-\omega)e^{-\frac{2\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2\omega^2} \left[-2X\omega Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) + \omega(\lambda-\omega)e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} \right] = \\ &= \frac{(\lambda-\omega)}{2\omega} e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} - \frac{X}{\omega} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) = -c_1 \end{aligned}$$

Vamos agora calcular c_4

$$c_4 = \frac{\begin{vmatrix} -e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} + e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} & \frac{1}{\omega} \left[X e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) - X e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X \right) \right] \\ -\left(\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} + \left(\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} & \frac{X}{\omega} \left[\left(\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) - \left(\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X \right) \right] \end{vmatrix}}{|B|}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{X\sigma^2}{2\omega^2}e^{-\frac{2\lambda}{\sigma^2}X} \left[\left(\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) - \left(\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X \right) \right] \\
&\left[e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} - e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} \right] + \frac{\sigma^2}{2\omega^2}e^{-\frac{2\lambda}{\sigma^2}X} \left[X e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) + w - X e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X \right) \right] \\
&\quad \left[\left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} + \left(\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} \right) e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} \right] = \\
&= -\frac{1}{2\omega^2} \left[\left[X e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) + w - X e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X \right) \right] \right. \\
&\quad \left[(\lambda+\omega) e^{\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X} - (\lambda-\omega) e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} \right] + X \left[(\lambda+\omega) e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) - \right. \\
&\quad \left. (\lambda-\omega) e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X \right) \right] \left[e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} - e^{\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X} \right] \Big] = \\
&= -\frac{1}{2\omega^2} \left[X(\lambda+\omega) e^{\frac{2\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) - X(\lambda-\omega) Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) + \omega(\lambda+\omega) e^{\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X} \right. \\
&\quad \left. - \omega(\lambda-\omega) e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} - X(\lambda+\omega) Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X \right) + X(\lambda-\omega) e^{-\frac{2\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X \right) \right. \\
&\quad \left. + X(\lambda+\omega) Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) - X(\lambda+\omega) e^{\frac{2\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) - \right. \\
&\quad \left. X(\lambda-\omega) e^{-\frac{2\omega}{\sigma^2}X} Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X \right) + X(\lambda-\omega) Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X \right) \right] = \\
&= -\frac{1}{2\omega^2} \left[\omega(\lambda+\omega) e^{\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X} - \omega(\lambda-\omega) e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} + 2X\omega Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) - \right. \\
&\quad \left. - 2X\omega Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X \right) \right] = \\
&= \frac{(\lambda-\omega)}{2\omega} e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} - \frac{(\lambda+\omega)}{2\omega} e^{\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X} + \frac{X}{\omega} \left[Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X \right) - Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) \right]
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\begin{cases} c_1 = \frac{X}{\omega} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) - \frac{(\lambda-\omega)}{2\omega} e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} \\ c_2 = \frac{(\lambda-\omega)}{2\omega} e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} - \frac{X}{\omega} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) \\ c_4 = \frac{(\lambda-\omega)}{2\omega} e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} - \frac{(\lambda+\omega)}{2\omega} e^{\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X} + \frac{X}{\omega} [Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2}X \right) - Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right)] \end{cases} \quad (4.14)$$

Quando $r \leq X$, obtemos a seguinte equação

$$\begin{aligned}
V(r) &= \left[\frac{X}{\omega} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) - \frac{(\lambda-\omega)}{2\omega} e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} \right] e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r} + \left[\frac{(\lambda-\omega)}{2\omega} e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{X}{\omega} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) \right] e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}r} = \\
&= \frac{X}{\omega} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) \left[e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r} - e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}r} \right] + \frac{(\lambda-\omega)}{2\omega} e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} \left[e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}r} - e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r} \right] = \\
&= \left[e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}r} - e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2}r} \right] \left[\frac{X}{\omega} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X \right) - \frac{(\lambda-\omega)}{2\omega} e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2}X} \right]
\end{aligned}$$

Quando $r > X$, temos que

$$\begin{aligned}
V(r) &= \left[\frac{(\lambda - \omega)}{2\omega} e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} X} - \frac{(\lambda + \omega)}{2\omega} e^{\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2} X} + \frac{X}{\omega} \left[Ei \left(\frac{\omega - \lambda}{\sigma^2} X \right) - Ei \left(-\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} X \right) \right] \right] e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} r} \\
&\quad + \frac{1}{\omega} \left[X e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} r} Ei \left(-\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} r \right) + w - X e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} r} Ei \left(\frac{\omega - \lambda}{\sigma^2} r \right) \right] = \\
&= \frac{(\lambda - \omega)}{2\omega} e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} X} e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} r} - \frac{(\lambda + \omega)}{2\omega} e^{\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2} X} e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} r} + \frac{X}{\omega} e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} r} Ei \left(\frac{\omega - \lambda}{\sigma^2} X \right) - \\
&\quad - \frac{X}{\omega} e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} r} Ei \left(-\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} X \right) + \frac{X}{\omega} e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} r} Ei \left(-\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} r \right) + 1 - \frac{X}{\omega} e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} r} Ei \left(\frac{\omega - \lambda}{\sigma^2} r \right) = \\
&= 1 + e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} r} \left[\frac{(\lambda - \omega)}{2\omega} e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} X} - \frac{(\lambda + \omega)}{2\omega} e^{\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2} X} + \frac{X}{\omega} \left[Ei \left(\frac{\omega - \lambda}{\sigma^2} X \right) - Ei \left(-\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} X \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - Ei \left(\frac{\omega - \lambda}{\sigma^2} r \right) \right] \right] + \frac{X}{\omega} e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} r} Ei \left(-\frac{\lambda + \omega}{\sigma^2} r \right)
\end{aligned}$$

Assim, podemos concluir o caso perpétuo no caso particular de $k = 0$

$$\begin{aligned}
V(r, \infty) &= \int_0^\infty c[r; X; T_1] dT_1 = \\
&= \begin{cases} \left[e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} r} - e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} r} \right] \left[\frac{X}{\omega} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} X \right) - \frac{(\lambda-\omega)}{2\omega} e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} X} \right], & \text{se } r \leq X \\ 1 + e^{\frac{\lambda-\omega}{\sigma^2} r} \left[\frac{(\lambda-\omega)}{2\omega} e^{-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} X} - \frac{(\lambda+\omega)}{2\omega} e^{\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2} X} + \frac{X}{\omega} \left[Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2} X \right) - Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} X \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - Ei \left(\frac{\omega-\lambda}{\sigma^2} r \right) \right] \right] + \frac{X}{\omega} e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} r} Ei \left(-\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} r \right), & \text{se } r > X \end{cases} \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Vamos calcular o preço de um *Floor* perpétuo. Segundo [2], temos que

$$p(r; X; T_1) = c(r; X; T_1) + X P(T_1) - c(r; 0; T_1) \quad (4.16)$$

onde $P(T_1)$ é uma obrigação de cupão zero com maturidade T_1 . Integrando ambos os membros obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty p(r; X; T_1) &= \int_0^\infty c(r; X; T_1) + \int_0^\infty X P(T_1) dT_1 - \int_0^\infty c(r; 0; T_1) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow F(r, \infty) = V(r, \infty) + X \int_0^\infty P(T_1) dT_1 - 1 + e^{\frac{\lambda+\omega}{\sigma^2} r} \quad (4.17)
\end{aligned}$$

onde os dois últimos termos são calculados substituindo o valor do strike por zero na equação 4.15. Foi utilizado somente o segundo ramo da equação 4.15, uma vez que este modelo não assume taxas de juro negativas. $\square$

4.2. Exemplos Numéricos

Nesta secção vamos apresentar alguns exemplos numéricos das conclusões obtidas na Proposição 4.1.

Para estes exemplos, vamos ter, por um lado, a integração numérica de

$$V(r, \infty) = \int_0^\infty c[r; X; T_1] dT_1 \quad (4.18)$$

e, por outro lado, o valor obtido pela expressão analítica 4.2.

Tendo em conta que estamos a considerar o caso particular com $k = 0$, vamos assumir este facto nas substituições numéricas. Além disso, para conseguirmos integrar numericamente, precisamos de um limite inferior e superior para o integral em causa. Neste caso, vamos considerar um limite inferior de 0 e um limite superior de 200, uma vez que este número já é considerado suficiente no contexto do problema.

Seguidamente, vamos apresentar uma tabela com os valores testados. Estes valores foram obtidos através de funções escritas em *Matlab*.

TABELA 1. Comparação do preço do *Cap* em diferentes abordagens

θ	σ	λ	r	X	Valor do <i>Cap</i> via integração numérica*	Valor do <i>Cap</i> via analítica (4.2)
0,08	0,09	0,02	0,1	0,2	0,0119625615	0,0119625640
0,08	0,09	0,02	0,1	0,05	0,3484267613	0,3484267871
0,2	0,1	0,01	0,15	0,18	0,0661282646	0,0661282852
0,2	0,1	0,01	0,15	0,1	0,2830517538	0,2830518041
0,31	0,16	0,005	0,2	0,4	0,0146305090	0,0146305112
0,31	0,16	0,005	0,2	0,27	0,0617864607	0,0617864680
0,1	0,25	0,1	0,7	0,53	0,1760003076	0,1760002941
0,1	0,25	0,1	0,7	0,3	0,4557555008	0,4557554836
0,45	0,3	0,5	0,4	0,8	0,0000573745	0,0000573744
0,45	0,3	0,5	0,4	0,24	0,1089791592	0,1089791577

*Para a integração numérica foi utilizado o método da quadratura adaptativa global

Como podemos observar, para os valores testados, nota-se que apenas existem diferenças a partir da sétima casa decimal.

De seguida, vamos ver como é que se comporta o preço do *Cap* perpétuo, se mantivermos os parâmetros λ e θ constantes e variarmos os restantes parâmetros.

Começemos por averiguar o que acontece ao preço do *Cap* perpétuo quando variamos os valores da volatilidade, σ . Considerando $\theta = 0,08$, $\lambda = 0,01$ e $X = 0,2$ obtemos o seguinte gráfico

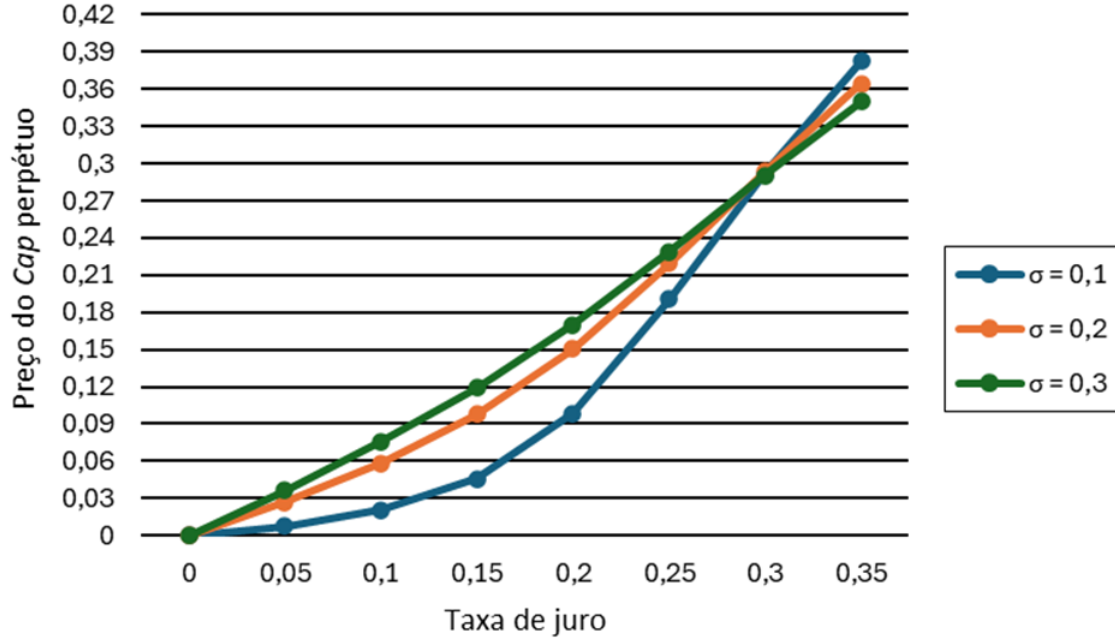


FIGURA 1. Preço de um *Cap* perpétuo nos diferentes valores da taxa de juro e da volatilidade

Tal como expectável, podemos observar que à medida que a taxa de juro aumenta, o preço do *Cap* também aumenta.

Tomando $r < 3\%$, para valores fixos da taxa de juro, é possível verificar que o preço do *Cap* aumenta à medida que a volatilidade aumenta, no entanto a taxa de crescimento começa a diminuir à medida que a taxa de juro sobe. Isto acontece pois a incerteza na trajetória das taxas de juro aumenta a probabilidade de que a taxa de juro ultrapasse o preço *strike* e desta forma ative o *Cap*, fazendo com que o detentor do mesmo receba um fluxo financeiro. Neste exemplo é possível ver que o *Cap* foi ativado quando a taxa de juro ultrapassar os 2%.

Quando a taxa de juro atinge o valor do *strike*, podemos observar que o preço do *Cap* com menor volatilidade começa a aumentar, chegando mesmo a ultrapassar o preço dos outros quando $r > 3\%$. Isso ocorre porque, à medida que a taxa de juro supera o preço *strike*, a probabilidade de o *Cap* ser ativado torna-se muito alta e portanto o aumento da volatilidade tem um impacto menor sobre o preço do *Cap*.

Vamos ver o que acontece ao preço de um *Cap* perpétuo quando variamos os valores do preço *strike*, X . Considerando $\theta = 0,08$, $\lambda = 0,01$ e $\sigma = 0,2$ obtemos o seguinte gráfico

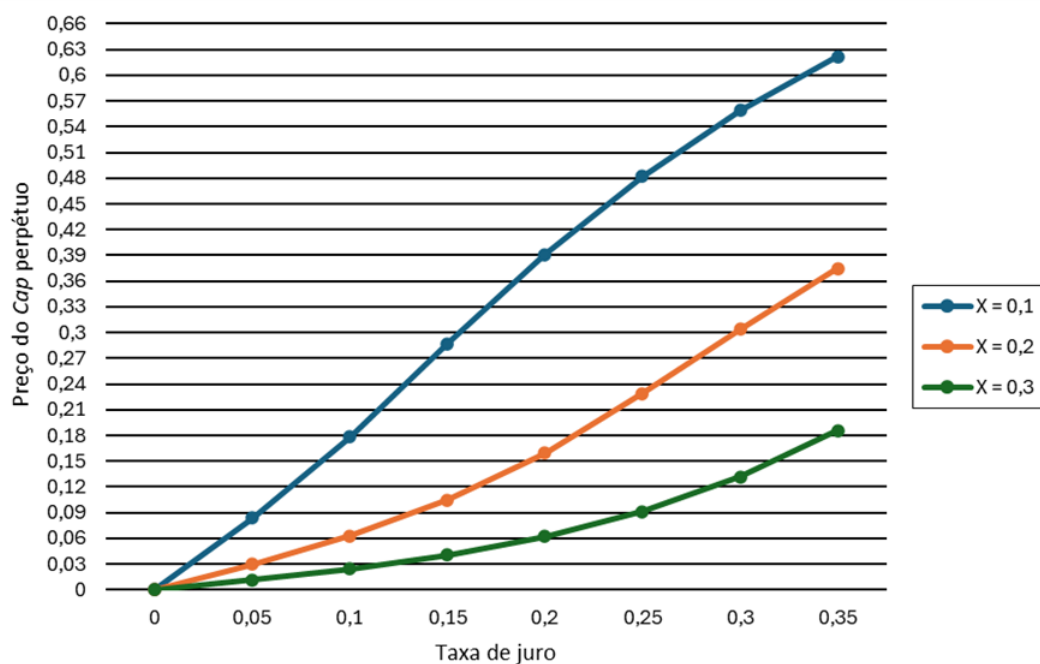


FIGURA 2. Preço de um *Cap* perpétuo nos diferentes valores da taxa de juro e do preço *strike*

Como podemos observar à medida que a taxa de juro aumenta, também o preço do *Cap* perpétuo aumenta, no entanto este aumento é maior quanto menor é o preço *strike*. Além disso, podemos observar que para uma taxa de juro fixa, à medida que o preço *strike* aumenta, o preço do *Cap* diminui.

Concluindo, temos que *Caps* com *strikes* mais baixos são mais caros, porque existe uma maior probabilidade destes gerarem fluxos, pois é mais provável que a taxa de juro ultrapasse o preço *strike*, $r > X$ ativando, desta forma, o *Cap*, fazendo com que a entidade detentora do mesmo receba um fluxo financeiro. Por outro lado, *strikes* mais altos são mais baratos, pois a probabilidade destes ultrapassarem a taxa de juro é menor, fazendo com que o *Cap* não seja ativado.

5

Conclusões

Nesta dissertação, tendo em conta o modelo CIR sem *drift*, conseguimos encontrar uma fórmula analítica para o preço de *Caps* e *Floors*.

Apesar de estarmos perante um instrumento financeiro teórico, este pode ser realista em certos mercados, uma vez que é um conceito de proteção contínua contra a volatilidade das taxas de juros, que é uma necessidade real em mercados voláteis. Com a ausência de *drift* estamos a assumir que a taxa de juro não tem uma tendência definida de retorno a um nível médio ao longo do tempo. Esta suposição pode ser realista em certos cenários de mercado, como mercados emergentes e períodos de crise económica, onde as taxas de juro são altamente voláteis e imprevisíveis.

A ausência de *drift* é uma simplificação que pode não capturar todas as dinâmicas do mercado real, no entanto a fórmula desenvolvida pode ser utilizada por profissionais do mercado financeiro para criar estratégias de proteção contínua contra a volatilidade das taxas de juro, especialmente em mercados emergentes e durante períodos de instabilidade económica.

Para futuras pesquisas, seria valioso explorar a inclusão do *drift* e analisar como isso afeta a avaliação de *Caps* e *Floors* neste modelo. Posteriormente, seria importante avaliar estes instrumentos financeiros tendo em conta uma maturidade finita. Além disso, seria interessante, também, ver se mantendo algumas variáveis constantes e outras não, se o preço do *Cap* se comporta de maneira semelhante ao caso sem *drift*. Apesar de ainda haver um longo caminho a percorrer nesta área, a fórmula desenvolvida ao longo desta dissertação para a avaliação de *Caps* e *Floors* perpétuos sem *drift* contribui significativamente para a literatura existente.

Referências Bibliográficas

- [1] Cox, John C., Ingersoll Jr., Jonathan E., Ross, Stephen A. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53(2):385–408, 1985.
- [2] Longstaff, Francis A. The valuation of options on yields. *Journal of Financial Economics*, 26:97-121, 1990.
- [3] Chesney, Marc, Elliott, Robert J., Gibson, Rajna. Analytical Solutions for the Pricing of American Bond and Yield Options. *Mathematical Finance*, 3:277–294, July 1993.
- [4] Shackleton, Mark B., Wojakowski, Rafal. Finite maturity caps and floors on continuous flows. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 31:3843–3859, 2007.
- [5] Nunes, João P. Modelos da Estrutura Temporal de Taxas de Juro - Handouts. *ISCTE Business School*, Agosto 2023.
- [6] Lamberton, Didier, Lapeyre, Bernard. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman & Hall/CRC, London, 1996.

A

Demonstração da Proposição 2.1

Considere-se a equação (2.12)

$$\frac{\alpha(t, T) - r_t}{\sigma(t, T)} = \lambda_t \Leftrightarrow \alpha(t, T) - r_t = \lambda_t \sigma(t, T)$$

Pelas equações (2.6) e (2.7) tem-se que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{P(t, T)} \left[\frac{\partial P(t, T)}{\partial t} + \mu(t, r_t) \frac{\partial P(t, T)}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, r_t) \frac{\partial^2 P(t, T)}{\partial r_t^2} \right] - r_t = \lambda_t \frac{\sigma(t, r_t)}{P(t, T)} \frac{\partial P(t, T)}{\partial r_t} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{P(t, T)} \left[\frac{\partial P(t, T)}{\partial t} + \mu(t, r_t) \frac{\partial P(t, T)}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, r_t) \frac{\partial^2 P(t, T)}{\partial r_t^2} \right] - \lambda_t \frac{\sigma(t, r_t)}{P(t, T)} \frac{\partial P(t, T)}{\partial r_t} = r_t \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{P(t, T)} \left[\frac{\partial P(t, T)}{\partial t} + \mu(t, r_t) \frac{\partial P(t, T)}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, r_t) \frac{\partial^2 P(t, T)}{\partial r_t^2} - \lambda_t \sigma(t, r_t) \frac{\partial P(t, T)}{\partial r_t} \right] = r_t \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{\partial P(t, T)}{\partial t} + [\mu(t, r_t) - \lambda_t \sigma(t, r_t)] \frac{\partial P(t, T)}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, T) \frac{\partial^2 P(t, T)}{\partial r_t^2} = r_t P(t, T) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{\partial P(t, T)}{\partial t} + [\mu(t, r_t) - \lambda_t \sigma(t, r_t)] \frac{\partial P(t, T)}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, T) \frac{\partial^2 P(t, T)}{\partial r_t^2} - r_t P(t, T) = 0 \end{aligned}$$

B

Demonstração da Proposição 2.2

Na medida de risco neutro, temos a equação (2.15), onde r_t é um processo de Itô e $W_t^{\mathbb{Q}}$ é um processo de Wiener. Tendo em conta as equações (2.14) e (2.17), estamos perante as condições necessárias para aplicar a fórmula de Feynman-Kac, obtendo desta forma que

$$V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} g(r_T) | \mathcal{F}_t \right]$$

C

Demonstração da Proposição 2.3

Demonstre-se, primeiro, as condições a que as equações (2.23) e (2.24) estão sujeitas, ou seja, a $A(T, T) = 0$ e $B(T, T) = 0$. Sabe-se que a equação (2.13) está sujeita a $P(T, T) = 1$, logo

$$P(T, T) = 1 \Leftrightarrow e^{A(T, T) - B(T, T)r_t} = 1 \Leftrightarrow A(T, T) = 0 \wedge B(T, T) = 0$$

De seguida, prove-se as equações 2.23 e 2.24. Tendo em conta as equações 2.13, 2.17, 2.21 e 2.22 tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(t, T)}{\partial t} + [\mu(t, r_t) - \lambda_t \sigma(t, r_t)] \frac{\partial P(t, T)}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, r_t) \frac{\partial^2 P(t, T)}{\partial r_t^2} - r_t P(t, T) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial P(t, T)}{\partial t} + \tilde{\mu}(t, r_t) \frac{\partial P(t, T)}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, r_t) \frac{\partial^2 P(t, T)}{\partial r_t^2} - r_t P(t, T) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial P(t, T)}{\partial t} + [\alpha_t r_t + \beta_t] \frac{\partial P(t, T)}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\gamma_t r_t + \delta_t} \right)^2 \frac{\partial^2 P(t, T)}{\partial r_t^2} - r_t P(t, T) &= 0 \end{aligned}$$

Sabe-se que $P(t, T) = e^{A(t, T) - B(t, T)r_t}$, portanto calcule-se as derivadas da expressão acima

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial P(t, T)}{\partial t} &= \left[\frac{\partial A(t, T)}{\partial t} - \frac{\partial B(t, T)}{\partial t} r_t \right] e^{A(t, T) - B(t, T)r_t} = \\ &= \left[\frac{\partial A(t, T)}{\partial t} - \frac{\partial B(t, T)}{\partial t} r_t \right] P(t, T) \\ \bullet \frac{\partial P(t, T)}{\partial r_t} &= -B(t, T) e^{A(t, T) - B(t, T)r_t} = -B(t, T) P(t, T) \\ \bullet \frac{\partial^2 P(t, T)}{\partial r_t^2} &= -B(t, T) \times (-B(t, T)) e^{A(t, T) - B(t, T)r_t} = B^2(t, T) P(t, T) \end{aligned}$$

Fazendo as substituições das derivadas na expressão obtida, fica-se com

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial A(t, T)}{\partial t} - \frac{\partial B(t, T)}{\partial t} r_t \right] P(t, T) + [\alpha_t r_t + \beta_t] (-B(t, T) P(t, T)) + \frac{1}{2} (\gamma_t r_t + \delta_t) B^2(t, T) P(t, T) &= \\ = r_t P(t, T) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial A(t, T)}{\partial t} - \frac{\partial B(t, T)}{\partial t} r_t - [\alpha_t r_t + \beta_t] B(t, T) + \frac{1}{2} (\gamma_t r_t + \delta_t) B^2(t, T) &= r_t \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow r_t \left(-\frac{\partial B(t, T)}{\partial t} - \alpha_t B(t, T) + \frac{1}{2} \gamma_t B^2(t, T) - 1 \right) + \frac{\partial A(t, T)}{\partial t} - \beta_t B(t, T) + \frac{1}{2} \delta_t B^2(t, T) &= 0 \end{aligned}$$

Daqui obtém-se a equação (2.23)

$$-\frac{\partial B(t, T)}{\partial t} - \alpha_t B(t, T) + \frac{1}{2} \gamma_t B^2(t, T) - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial B(t, T)}{\partial t} + \alpha_t B(t, T) - \frac{1}{2} \gamma_t B^2(t, T) + 1 = 0$$

e a equação (2.24)

$$\frac{\partial A(t, T)}{\partial t} - \beta_t B(t, T) + \frac{1}{2} \delta_t B^2(t, T) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial A(t, T)}{\partial t} = \beta_t B(t, T) - \frac{1}{2} \delta_t B^2(t, T)$$

D

Demonstração da Proposição 3.1

Dado que o modelo CIR é um modelo de estrutura temporal afim, então sabemos que tem de satisfazer as equações 2.21 e 2.22.

Seja $P(t, T) = e^{A(t, T) - \bar{B}(t, T)r_t}$, onde $\bar{B} = -B(t, T)$. Pela equação 2.23 temos que:

$$\frac{\partial \bar{B}(t, T)}{\partial t} + \alpha_t \bar{B}(t, T) - \frac{1}{2} \gamma_t \bar{B}^2(t, T) + 1 = 0 \quad , \bar{B}(0, 0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\partial B(t, T)}{\partial t} + (-k)(-B(t, T)) - \frac{1}{2} \sigma^2 B^2(t, T) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\partial B(t, T)}{\partial t} + kB(t, T) - \frac{1}{2} \sigma^2 B^2(t, T) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

Como $\frac{\partial B(t, T)}{\partial t} = \frac{\partial B(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial B(t, T)}{\partial t} = -\frac{\partial B(\tau)}{\partial \tau}$. Logo

$$\frac{\partial B(\tau)}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2}{2} B^2(\tau) - kB(\tau) - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{dB(\tau)}{\frac{\sigma^2}{2} B^2(\tau) - kB(\tau) - 1} = d\tau$$

O denominador é uma equação de segundo grau com raízes $B(\tau) = \frac{k \pm \gamma}{\sigma^2}$, onde $\gamma = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2} \Leftrightarrow \sigma^2 = \frac{(\gamma - k)(\gamma + k)}{2}$. Assim, podemos reescrever a equação como

$$\begin{aligned} \frac{dB(\tau)}{\frac{\sigma^2}{2} B^2(\tau) - kB(\tau) - 1} = d\tau &\Leftrightarrow \frac{dB(\tau)}{\frac{\sigma^2}{2} \left[B(\tau) - \frac{k+\gamma}{\sigma^2} \right] \left[B(\tau) - \frac{k-\gamma}{\sigma^2} \right]} = d\tau \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{dB(\tau)}{\frac{\gamma^2 - k^2}{4} \left[B(\tau) - \frac{2}{\gamma - k} \right] \left[B(\tau) - \frac{k - \gamma}{\frac{\gamma^2 - k^2}{2}} \right]} = d\tau &\Leftrightarrow \frac{dB(\tau)}{\frac{1}{2} \left[B(\tau) - \frac{2}{\gamma - k} \right] \frac{\gamma^2 - k^2}{2} \left[B(\tau) - \frac{k - \gamma}{\frac{\gamma^2 - k^2}{2}} \right]} = d\tau \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{dB(\tau)}{\left[\frac{1}{2} B(\tau) + \frac{1}{k - \gamma} \right] \left[-\frac{k^2 - \gamma^2}{2} B(\tau) - (k - \gamma) \right]} = d\tau \end{aligned}$$

Podemos dividir esta fração numa soma:

$$\frac{1}{\left[\frac{1}{2} B(\tau) + \frac{1}{k - \gamma} \right] \left[-\frac{k^2 - \gamma^2}{2} B(\tau) - (k - \gamma) \right]} = \frac{a}{\left[\frac{1}{2} B(\tau) + \frac{1}{k - \gamma} \right]} + \frac{b}{\left[-\frac{k^2 - \gamma^2}{2} B(\tau) - (k - \gamma) \right]} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-a(k^2-\gamma^2)}{2} + \frac{b}{2} = 0 \\ -a(k-\gamma) + \frac{b}{k-\gamma} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{k^2-\gamma^2}{2\gamma} \\ a = \frac{1}{2\gamma} \end{cases}$$

Assim, obtemos que

$$\frac{dB(\tau)}{\left[\frac{1}{2}B(\tau) + \frac{1}{k-\gamma}\right] \left[-\frac{k^2-\gamma^2}{2}B(\tau) - (k-\gamma)\right]} = d\tau \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2\gamma}dB(\tau)}{\frac{1}{2}B(\tau) + \frac{1}{k-\gamma}} + \frac{\frac{k^2-\gamma^2}{2\gamma}dB(\tau)}{-\frac{k^2-\gamma^2}{2}B(\tau) - (k-\gamma)} = d\tau$$

Integrando de ambos os lados obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \ln \left(\left| \frac{1}{2}B(\tau) + \frac{1}{k-\gamma} \right| \right) - \frac{1}{\gamma} \ln \left(\left| -\frac{k^2-\gamma^2}{2}B(\tau) - (k-\gamma) \right| \right) &= \tau + c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln \left(\left| \frac{-\frac{k^2-\gamma^2}{2}B(\tau) - (k-\gamma)}{\frac{1}{2}B(\tau) + \frac{1}{k-\gamma}} \right| \right) &= -\gamma(\tau + c) \Leftrightarrow -\frac{k^2-\gamma^2}{2}B(\tau) - (k-\gamma) = \\ = \left(\frac{1}{2}B(\tau) + \frac{1}{k-\gamma} \right) e^{-\gamma(\tau+c)} \vee -\frac{k^2-\gamma^2}{2}B(\tau) - (k-\gamma) &= -\left(\frac{1}{2}B(\tau) + \frac{1}{k-\gamma} \right) e^{-\gamma(\tau+c)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow B(\tau) = \frac{\frac{(k-\gamma)^2 + e^{-\gamma(\tau+c)}}{k-\gamma}}{\frac{-(k^2-\gamma^2) - e^{-\gamma(\tau+c)}}{2}} \vee B(\tau) &= \frac{\frac{(k-\gamma)^2 - e^{-\gamma(\tau+c)}}{k-\gamma}}{\frac{-(k^2-\gamma^2) + e^{-\gamma(\tau+c)}}{2}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow B(\tau) = \frac{2(k-\gamma)^2 + 2e^{-\gamma(\tau+c)}}{-(k^2-\gamma^2)(k-\gamma) - (k-\gamma)e^{-\gamma(\tau+c)}} \vee \\ \vee B(\tau) = \frac{2(k-\gamma)^2 - 2e^{-\gamma(\tau+c)}}{-(k^2-\gamma^2)(k-\gamma) + (k-\gamma)e^{-\gamma(\tau+c)}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow B(\tau) = \frac{-2(k-\gamma)^2 - 2e^{-\gamma(\tau+c)}}{(k^2-\gamma^2)(k-\gamma) + (k-\gamma)e^{-\gamma(\tau+c)}} \vee \\ \vee B(\tau) = \frac{-2(k-\gamma)^2 + 2e^{-\gamma(\tau+c)}}{(k^2-\gamma^2)(k-\gamma) - (k-\gamma)e^{-\gamma(\tau+c)}} \end{aligned}$$

Sabemos que $B(0,0) = 0$, portanto vamos calcular o valor da constante c .

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{-2(k-\gamma)^2 - 2e^{-\gamma c}}{(k^2-\gamma^2)(k-\gamma) + (k-\gamma)e^{-\gamma c}} \vee 0 = \frac{2e^{-\gamma c} - 2(k-\gamma)^2}{(k^2-\gamma^2)(k-\gamma) - (k-\gamma)e^{-\gamma c}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2(k-\gamma)^2 - 2e^{-\gamma c} &= 0 \vee 2e^{-\gamma c} - 2(k-\gamma)^2 = 0 \Leftrightarrow e^{-\gamma c} = -(k-\gamma)^2 \vee e^{-\gamma c} = (k-\gamma)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow c &= -\frac{\ln(-(k-\gamma)^2)}{\gamma} \vee c = -\frac{\ln(k-\gamma)^2}{\gamma} \Leftrightarrow c = \text{Impossível} \vee c = -\frac{\ln((k-\gamma)^2)}{\gamma} \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } e^{-\gamma(\tau+c)} = e^{-\gamma\tau} e^{-\gamma\left(-\frac{\ln((k-\gamma)^2)}{\gamma}\right)} = e^{-\gamma\tau(k-\gamma)^2}$$

Logo,

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{2e^{-\gamma\tau}(k-\gamma)^2 - 2(k-\gamma)^2}{(k^2-\gamma^2)(k-\gamma) - (k-\gamma)e^{-\gamma\tau}(k-\gamma)^2} = \frac{(k-\gamma)^2(2e^{-\gamma\tau} - 2)}{(k-\gamma)^2(k+\gamma - (k-\gamma)e^{-\gamma\tau})} = \\ &= \frac{2 - 2e^{\gamma\tau}}{(k+\gamma)e^{\gamma\tau} - (k-\gamma)} = \frac{2(1 - e^{\gamma\tau})}{(k+\gamma)e^{\gamma\tau} - (k+\gamma - 2\gamma)} = \frac{2(1 - e^{\gamma\tau})}{(k+\gamma)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma} = \\ &= -\frac{2(e^{\gamma\tau} - 1)}{(k+\gamma)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma} \end{aligned}$$

Vamos agora calcular $A(\tau)$. Pela equação (2.24) temos que

$$\frac{\partial A(t, T)}{\partial t} = \beta_t B(t, T) - \frac{1}{2} \delta_t B^2(t, T) \Leftrightarrow \frac{\partial A(t, T)}{\partial t} = k\theta B(t, T)$$

sujeita a $A(0, 0) = 0$

Temos que $\sqrt{k^2 + 2\sigma^2} = \gamma \Leftrightarrow \gamma^2 - k^2 = 2\sigma^2 \Leftrightarrow (\gamma - k)(\gamma + k) = 2\sigma^2$. Portanto, podemos reescrever $B(\tau)$ como

$$\begin{aligned} B(\tau) &= -\frac{2(\gamma - k)(\gamma + k)}{2\sigma^2} \times \frac{e^{\gamma\tau} - 1}{(k + \gamma)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma} = \frac{\gamma + k}{\sigma^2} \times \frac{(k - \gamma)(e^{\gamma\tau} - 1)}{(k + \gamma)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma} = \\ &= \frac{\gamma + k}{\sigma^2} \times \frac{ke^{\gamma\tau} - k - \gamma e^{\gamma\tau} + \gamma + 2\gamma e^{\gamma\tau} - 2\gamma e^{\gamma\tau}}{ke^{\gamma\tau} - k + \gamma e^{\gamma\tau} - \gamma + 2\gamma} = \frac{\gamma + k}{\sigma^2} \times \frac{(k + \gamma)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma - 2\gamma e^{\gamma\tau}}{(k + \gamma)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma} \\ &= \frac{\gamma + k}{\sigma^2} \left[1 - \frac{2\gamma e^{\gamma\tau}}{(k + \gamma)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma} \right] = \frac{\gamma + k}{\sigma^2} \left[1 - \frac{\frac{2((k + \gamma)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma)'}{k + \gamma}}{(k + \gamma)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma} \right] \\ &= \frac{\gamma + k}{\sigma^2} - \frac{2((k + \gamma)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma)'}{\sigma^2((k + \gamma)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma)} \end{aligned}$$

Seja $f(\tau) = (k + \gamma)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma$ e $f'(\tau) = (k + \gamma)\gamma e^{\gamma\tau}$, temos que

$$B(\tau) = \frac{\gamma + k}{\sigma^2} - \frac{2f'(\tau)}{\sigma^2 f(\tau)}$$

Agora temos

$$\frac{\partial A(t, T)}{\partial t} = k\theta B(t, T) \Leftrightarrow \frac{\partial A(t, T)}{\partial t} = k\theta \left(\frac{\gamma + k}{\sigma^2} - \frac{2f'(\tau)}{\sigma^2 f(\tau)} \right)$$

Integrando de ambos os lados e tendo em conta $A(0, 0) = 0$, logo

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \frac{\partial A(s)}{\partial s} ds &= \int_0^\tau k\theta \left(\frac{\gamma + k}{\sigma^2} - \frac{2f'(\tau)}{\sigma^2 f(\tau)} \right) ds \Leftrightarrow [A(s)]_0^\tau = k\theta \left[\frac{\gamma + k}{\sigma^2} s - \frac{2}{\sigma^2} \ln |f(s)| \right]_0^\tau \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A(\tau) - A(0) = k\theta \left[\frac{\gamma + k}{\sigma^2} \tau - \frac{2}{\sigma^2} \ln |f(\tau)| - \frac{\gamma + k}{\sigma^2} \times 0 - \frac{2}{\sigma^2} \ln |f(0)| \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A(\tau) = \frac{k\theta}{\sigma^2} \left[(\gamma + k)\tau + 2 \ln \left(\frac{f(0)}{f(\tau)} \right) \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A(\tau) = \frac{k\theta}{\sigma^2} \left[(\gamma + k)\tau + 2 \ln \left(\frac{2\gamma}{(k + \gamma)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma} \right) \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A(\tau) = \frac{2k\theta}{\sigma^2} \left[(\gamma + k) \frac{\tau}{2} + \ln \left(\frac{2\gamma}{(k + \gamma)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma} \right) \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A(\tau) = \frac{2k\theta}{\sigma^2} \left[\ln \left(e^{(\gamma + k)\frac{\tau}{2}} \right) + \ln \left(\frac{2\gamma}{(k + \gamma)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma} \right) \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A(\tau) = \frac{2k\theta}{\sigma^2} \ln \left[\frac{2\gamma e^{(\gamma + k)\frac{\tau}{2}}}{(k + \gamma)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma} \right] \end{aligned}$$

E

Demonstração da Proposição 3.2

Segundo [6]. Se λ e μ são fixos, então consideremos a função $F(t - t_0, r_{t_0})$ definida por

$$F(t - t_0, r_{t_0}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\lambda r_t} \exp \left(-\mu \int_{t_0}^t r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right]$$

Esta equação é solução da seguinte equação:

$$\frac{\partial F}{\partial t} - k(\theta - r_{t_0}) \frac{\partial F}{\partial r_{t_0}} - \frac{1}{2} \sigma^2 r_{t_0} \frac{\partial^2 F}{\partial r_{t_0}^2} + \mu r_{t_0} F = 0$$

onde $F(0, r_{t_0}) = e^{-\lambda r_{t_0}}$. Podemos afirmar isto, porque $T \geq t$ e

$$M_t = \exp \left(-\mu \int_{t_0}^t r_s ds \right) F(T - t, r_t)$$

é uma martingala na medida de risco neutro. Temos que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(M_T | \mathcal{F}_{t_0}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\lambda r_T} \exp \left(-\mu \int_{t_0}^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right] = F(T - t_0, r_{t_0}) = M_{t_0}$$

Aplicando o lema de Itô a $M_t = \exp \left(-\mu \int_{t_0}^t r_s ds \right) F(T - t, r_t)$, obtemos

$$\begin{aligned} dM_t &= \frac{\partial M_t}{\partial t} dt + \frac{\partial M_t}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 M_t}{\partial r_t^2} d\langle r, r \rangle_t = \left[-\mu r_t M_t + \exp \left(-\mu \int_{t_0}^t r_s ds \right) \frac{\partial F(T - t, r_t)}{\partial t} \right] dt + \\ &\exp \left(-\mu \int_{t_0}^t r_s ds \right) \frac{\partial F(T - t, r_t)}{\partial r_t} dr_t + \frac{1}{2} \exp \left(-\mu \int_{t_0}^t r_s ds \right) \frac{\partial^2 F(T - t, r_t)}{\partial r_t^2} d\langle r, r \rangle_t = \\ &\left[-\mu r_t M_t + \exp \left(-\mu \int_{t_0}^t r_s ds \right) \frac{\partial F(T - t, r_t)}{\partial t} \right] dt + \\ &\exp \left(-\mu \int_{t_0}^t r_s ds \right) \frac{\partial F(T - t, r_t)}{\partial r_t} (k(\theta - r_t) dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t^{\mathbb{Q}}) + \\ &\frac{1}{2} \exp \left(-\mu \int_{t_0}^t r_s ds \right) \frac{\partial^2 F(T - t, r_t)}{\partial r_t^2} \sigma^2 r_t dt = \\ &= \exp \left(-\mu \int_{t_0}^t r_s ds \right) \left[-\mu r_t F(T - t, r_t) + \frac{\partial F(T - t, r_t)}{\partial t} + k(\theta - r_t) \frac{\partial F(T - t, r_t)}{\partial r_t} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sigma^2 r_t \frac{\partial^2 F(T - t, r_t)}{\partial r_t^2} \right] dt + \exp \left(-\mu \int_{t_0}^t r_s ds \right) \sigma \sqrt{r_t} \frac{\partial F(T - t, r_t)}{\partial r_t} dW_t^{\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

Como M_t é uma martingala, então o *drift* da equação é 0, portanto obtemos

$$-\mu r_t F(T-t, r_t) + \frac{\partial F(T-t, r_t)}{\partial t} + (k(\theta - r_t)) \frac{\partial F(T-t, r_t)}{\partial r_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 r_t \frac{\partial^2 F(T-t, r_t)}{\partial r_t^2} = 0$$

Substituindo r_t por r_{t_0} e multiplicando por (-1) , obtemos a equação

$$\frac{\partial F}{\partial t} - k(\theta - r_{t_0}) \frac{\partial F}{\partial r_{t_0}} - \frac{1}{2} \sigma^2 r_{t_0} \frac{\partial^2 F}{\partial r_{t_0}^2} + \mu r_{t_0} F = 0$$

Sabemos que a equação 3.8 é solução desta equação, logo

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial \phi(t-t_0)}{\partial t} - r_{t_0} \frac{\partial \psi(t-t_0)}{\partial t} \right] F + k(\theta - r_{t_0}) \psi(t-t_0) F - \frac{1}{2} \sigma^2 r_{t_0} \psi^2(t-t_0) F + \mu r_{t_0} F = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left[\frac{\partial \phi(t-t_0)}{\partial t} + k\theta \psi(t-t_0) \right] + \left[-\frac{\partial \psi(t-t_0)}{\partial t} - k\psi(t-t_0) - \frac{1}{2} \sigma^2 \psi^2(t-t_0) + \mu \right] r_{t_0} = 0 \end{aligned}$$

Assim, podemos obter $\phi(t-t_0)$ e $\psi(t-t_0)$ fazendo

$$\frac{\partial \psi(t-t_0)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \sigma^2 \psi^2(t-t_0) - k\psi(t-t_0) + \mu \quad (\text{E.1})$$

$$\frac{\partial \phi(t-t_0)}{\partial t} = -k\theta \psi(t-t_0) \quad (\text{E.2})$$

sujeitas às condições iniciais $\psi(0) = \lambda$ e $\phi(0) = 0$.

Vamos começar por calcular a equação E.1

$$\frac{\partial \psi(t-t_0)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \sigma^2 \psi^2(t-t_0) - k\psi(t-t_0) + \mu \Leftrightarrow \frac{\partial \psi(t-t_0)}{-\frac{1}{2} \sigma^2 \psi^2(t-t_0) - k\psi(t-t_0) + \mu} = \partial t$$

No denominador da fração, temos uma equação de segundo grau, portanto vamos calcular as suas raízes

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \sigma^2 \psi^2(t-t_0) - k\psi(t-t_0) + \mu = 0 & \Leftrightarrow \psi(t-t_0) = \frac{h-k}{\sigma} \quad \vee \quad \psi(t-t_0) = -\frac{k+h}{\sigma^2} \\ \frac{\partial \psi(t-t_0)}{-\frac{1}{2} \sigma^2 \psi^2(t-t_0) - k\psi(t-t_0) + \mu} = \partial t & \Leftrightarrow \frac{\partial \psi(t-t_0)}{-\frac{\sigma^2}{2} \left[\psi(t-t_0) + \frac{k-h}{\sigma^2} \right] \left[\psi(t-t_0) + \frac{k+h}{\sigma^2} \right]} = \partial t \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{-\frac{2}{\sigma^2} \partial \psi(t-t_0)}{\left[\psi(t-t_0) + \frac{k-h}{\sigma^2} \right] \left[\psi(t-t_0) + \frac{k+h}{\sigma^2} \right]} = \partial t \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \frac{-\frac{2}{\sigma^2} \partial \psi(t-t_0)}{\left[\psi(t-t_0) + \frac{k-h}{\sigma^2} \right] \left[\psi(t-t_0) + \frac{k+h}{\sigma^2} \right]} &= \frac{a}{\psi(t-t_0) + \frac{k-h}{\sigma^2}} + \frac{b}{\psi(t-t_0) + \frac{k+h}{\sigma^2}} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a \frac{k+h}{\sigma^2} + b \frac{k-h}{\sigma^2} = -\frac{2}{\sigma^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{h} \\ b = \frac{1}{h} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, obtemos que

$$\frac{-\frac{2}{\sigma^2} \partial \psi(t-t_0)}{\left[\psi(t-t_0) + \frac{k-h}{\sigma^2} \right] \left[\psi(t-t_0) + \frac{k+h}{\sigma^2} \right]} = \partial t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{h} \frac{\partial \psi(t-t_0)}{\left[\psi(t-t_0) + \frac{k+h}{\sigma^2}\right]} - \frac{1}{h} \frac{\partial \psi(t-t_0)}{\left[\psi(t-t_0) + \frac{k-h}{\sigma^2}\right]} = \partial t$$

Integrando ambos os membros, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \ln \left| \psi(t-t_0) + \frac{k+h}{\sigma^2} \right| - \frac{1}{h} \ln \left| \psi(t-t_0) + \frac{k-h}{\sigma^2} \right| &= t+c \Leftrightarrow \quad , c \in \mathbb{R} \\ \ln \left| \frac{\psi(t-t_0) + \frac{k+h}{\sigma^2}}{\psi(t-t_0) + \frac{k-h}{\sigma^2}} \right| &= h(t+c) \Leftrightarrow \left| \frac{\psi(t-t_0) + \frac{k+h}{\sigma^2}}{\psi(t-t_0) + \frac{k-h}{\sigma^2}} \right| = e^{h(t+c)} \Leftrightarrow \\ \psi(t-t_0) + \frac{k+h}{\sigma^2} &= \left[\psi(t-t_0) + \frac{k-h}{\sigma^2} \right] e^{h(t+c)} \quad \vee \\ \vee \quad \psi(t-t_0) + \frac{k+h}{\sigma^2} &= - \left[\psi(t-t_0) + \frac{k-h}{\sigma^2} \right] e^{h(t+c)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \psi(t-t_0) &= \frac{(k-h)e^{h(t+c)} - (k+h)}{\sigma^2(1 - e^{h(t+c)})} \quad \vee \quad \psi(t-t_0) = \frac{-(k-h)e^{h(t+c)} - (k+h)}{\sigma^2(1 + e^{h(t+c)})} \end{aligned}$$

Temos que $\psi(0) = \lambda$, ou seja, $t-t_0 = 0 \Leftrightarrow t = t_0$, logo

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{(k-h)e^{h(t_0+c)} - (k+h)}{\sigma^2(1 - e^{h(t_0+c)})} \quad \vee \quad \lambda = \frac{-(k-h)e^{h(t_0+c)} - (k+h)}{\sigma^2(1 + e^{h(t_0+c)})} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{h(t_0+c)} (-\lambda\sigma^2 - (k-h)) = -\lambda\sigma^2 - (k+h) \quad \vee \\ &\vee \quad e^{h(t_0+c)} (\lambda\sigma^2 + (k-h)) = -\lambda\sigma^2 - (k+h) \Leftrightarrow \\ e^{hc} &= e^{-ht_0} \frac{\lambda\sigma^2 + k+h}{\lambda\sigma^2 + k-h} \quad \vee \quad e^{hc} = -e^{-ht_0} \frac{\lambda\sigma^2 + k+h}{\lambda\sigma^2 + k-h} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow c &= \frac{1}{h} \ln \left(e^{-ht_0} \frac{\lambda\sigma^2 + k+h}{\lambda\sigma^2 + k-h} \right) \quad \vee \quad c = \frac{1}{h} \ln \left(-e^{-ht_0} \frac{\lambda\sigma^2 + k+h}{\lambda\sigma^2 + k-h} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow c = \frac{1}{h} \ln \left(e^{-ht_0} \frac{\lambda\sigma^2 + k+h}{\lambda\sigma^2 + k-h} \right) \quad \vee \quad \text{Impossível} \end{aligned}$$

Assim, obtemos

$$e^{h(t+c)} = e^{ht} \times e^{hc} = e^{ht} e^{-ht_0} \frac{\lambda\sigma^2 + k+h}{\lambda\sigma^2 + k-h} = e^{h(t-t_0)} \frac{\lambda\sigma^2 + k+h}{\lambda\sigma^2 + k-h}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \psi_{\lambda,\mu}(t-t_0) &= \frac{(k-h)e^{h(t+c)} - (k+h)}{\sigma^2(1 - e^{h(t+c)})} = \frac{(k-h)e^{h(t+t_0)} \frac{\lambda\sigma^2 + k+h}{\lambda\sigma^2 + k-h} - (k+h)}{\sigma^2 \left(1 - e^{h(t+t_0)} \frac{\lambda\sigma^2 + k+h}{\lambda\sigma^2 + k-h} \right)} = \\ &= \frac{(k-h)e^{h(t-t_0)}(\lambda\sigma^2 + k+h) - (k+h)(\lambda\sigma^2 + k-h)}{\sigma^2 (\lambda\sigma^2 + k-h - e^{h(t-t_0)}(\lambda\sigma^2 + k+h))} = \\ &= \frac{e^{h(t-t_0)}(\lambda(k-h) - 2\mu) - (\lambda(k+h) - 2\mu)}{\lambda\sigma^2(1 - e^{h(t-t_0)}) + k-h - (k+h)e^{h(t-t_0)}} = \\ &= \frac{-\lambda((k-h)e^{h(t-t_0)} - (k+h)) - 2\mu(e^{h(t-t_0)} - 1)}{\lambda\sigma^2(1 - e^{h(t-t_0)}) + k-h - (k+h)e^{h(t-t_0)}} = \\ &= \frac{\lambda(k+h + (h-k)e^{h(t-t_0)}) + 2\mu(e^{h(t-t_0)} - 1)}{\lambda\sigma^2(1 - e^{h(t-t_0)}) + k-h - (k+h)e^{h(t-t_0)}} \end{aligned}$$

Vamos agora calcular $\phi_{\lambda,\mu}(t - t_0)$. Sabemos que

$$\frac{\partial \phi(t - t_0)}{\partial t} = -k\theta\psi(t - t_0)$$

sujeita a $\phi(0) = 0$.

Integrando ambos os membros, obtemos

$$\begin{aligned} \phi_{\lambda,\mu}(t - t_0) - \phi_{\lambda,\mu}(0) &= -k\theta \int_{t_0}^t \psi(u - t_0) du \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \phi_{\lambda,\mu}(t - t_0) &= -k\theta \int_{t_0}^t \frac{\lambda(k + h + (h - k)e^{h(u-t_0)}) + 2\mu(e^{h(u-t_0)} - 1)}{\lambda\sigma^2(1 - e^{h(u-t_0)}) + k - h - (k + h)e^{h(u-t_0)}} du \\ \text{Consideremos } f(u) &= \lambda\sigma^2(1 - e^{h(u-t_0)}) + k - h - (k + h)e^{h(u-t_0)}. \text{ Sabemos que } h = \\ \sqrt{k^2 + 2\sigma^2\mu}, \text{ portanto podemos reescrever o numerador da função integranda como} \\ \lambda(k + h + (h - k)e^{h(u-t_0)}) + 2\mu(e^{h(u-t_0)} - 1) &= (2\mu + \lambda(h - k))e^{h(u-t_0)} + \lambda(k + h) - 2\mu = \\ &= \left(\frac{h^2 - k^2}{\sigma^2} + \lambda(h - k)\right)e^{h(u-t_0)} + \lambda(k + h) - \frac{h^2 - k^2}{\sigma^2} = \\ &= -\frac{h + k}{\sigma^2} \left\{ \left(-(h - k) - \frac{\lambda\sigma^2(h - k)}{h + k} \right) e^{h(u-t_0)} + (-\lambda\sigma^2 + (h - k)) \right\} = \\ &= -\frac{h + k}{\sigma^2} \left\{ \left(-(h - k) - \frac{\lambda\sigma^2(h - k)}{h + k} \right) e^{h(u-t_0)} + \lambda\sigma^2 e^{h(u-t_0)} - \lambda\sigma^2 + h - k + (k + h)e^{h(u-t_0)} \right. \\ &\quad \left. - \lambda\sigma^2 e^{h(u-t_0)} - (k + h)e^{h(u-t_0)} \right\} = \\ &= -\frac{h + k}{\sigma^2} \left\{ \left(-(h - k) - \frac{\lambda\sigma^2(h - k)}{h + k} - \lambda\sigma^2 - (k + h) \right) e^{h(u-t_0)} + f(u) \right\} \\ &= -\frac{h + k}{\sigma^2} \left\{ \left(-2h - \frac{\lambda\sigma^2(h - k)}{h + k} - \lambda\sigma^2 \right) e^{h(u-t_0)} + f(u) \right\} \end{aligned}$$

Temos que

$$\frac{\partial f(u)}{\partial u} = \lambda\sigma^2 h e^{h(u-t_0)} + (k + h)h e^{h(u-t_0)} = (\lambda\sigma^2 + k + h)h e^{h(u-t_0)}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \phi_{\lambda,\mu}(t - t_0) &= -k\theta \int_{t_0}^t \frac{-\frac{h+k}{\sigma^2} \left\{ \left(-2h - \frac{\lambda\sigma^2(h-k)}{h+k} - \lambda\sigma^2 \right) e^{h(u-t_0)} + f(u) \right\}}{f(u)} du = \\ &= -\frac{k\theta(h + k)}{\sigma^2} \int_{t_0}^t \frac{\left(2h + \frac{\lambda\sigma^2(h-k)}{h+k} + \lambda\sigma^2 \right) e^{h(u-t_0)}}{f(u)} - 1 du = \\ &= -\frac{k\theta(h + k)}{\sigma^2} [-u]_{t_0}^t - \frac{k\theta(h + k)}{\sigma^2} \frac{2h + \frac{\lambda\sigma^2(h-k)}{h+k} + \lambda\sigma^2}{(\lambda\sigma^2 + h + k)h} \int_{t_0}^t \frac{(\lambda\sigma^2 + k + h)h e^{h(u-t_0)}}{f(u)} du = \\ &= \frac{k\theta(h + k)}{\sigma^2} (t - t_0) - \frac{k\theta(h + k)}{\sigma^2} \frac{2h + \frac{\lambda\sigma^2(h-k)}{h+k} + \lambda\sigma^2}{(\lambda\sigma^2 + h + k)h} \int_{t_0}^t \frac{\frac{\partial f(u)}{\partial u}}{f(u)} du = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{k\theta(h+k)}{\sigma^2}(t-t_0) - \frac{k\theta}{\sigma^2} \frac{2h(k+h) + \lambda\sigma^2(h-k) + \lambda\sigma^2(k+h)}{(\lambda\sigma^2 + h+k)h} [\ln(f(u))]_{t_0}^t = \\
& \frac{k\theta(h+k)}{\sigma^2}(t-t_0) - \frac{k\theta}{\sigma^2} \frac{2h(k+h+\lambda\sigma^2)}{(\lambda\sigma^2 + h+k)h} [\ln(f(t)) - \ln(f(t_0))] = \\
& = \frac{k\theta(h+k)}{\sigma^2}(t-t_0) - \frac{2k\theta}{\sigma^2} \ln \left[\frac{f(t)}{h-k+k+h} \right] = \\
& = \frac{2k\theta(h+k)}{2\sigma^2}(t-t_0) - \frac{2k\theta}{\sigma^2} \ln \left[\frac{f(t)}{2h} \right] = \frac{2k\theta}{\sigma^2} \left[\frac{h+k}{2}(t-t_0) - \ln \left(\frac{f(t)}{2h} \right) \right] = \\
& = \frac{2k\theta}{\sigma^2} \left[\ln \left(e^{\frac{h+k}{2}(t-t_0)} \right) - \ln \left(\frac{f(t)}{2h} \right) \right] = \frac{2k\theta}{\sigma^2} \ln \left[\frac{2he^{\frac{h+k}{2}(t-t_0)}}{f(t)} \right] = \\
& = \frac{2k\theta}{\sigma^2} \ln \left[\frac{2he^{\frac{(k+h)(t-t_0)}{2}}}{\sigma^2 \lambda (e^{h(t-t_0)} - 1) + h - k + (k+h)e^{h(t-t_0)}} \right]
\end{aligned}$$

F

Demonstração da Proposição 3.3

Pretende-se calcular $c_t[P(t, T_2); K; T_1]$. Pela equação 2.19, sabe-se que

$$c_t[P(t, T_2); K; T_1] \Rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{T_1} r_u du} [P(T_1, T_2) - K]^+ | \mathcal{F}_t \right]$$

Seja β_t o valor da *money market account*

$$\beta_t = \beta_{t_0} \exp \left(\int_{t_0}^t r_u du \right)$$

Sabe-se que na medida de risco neutro:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\frac{X_t}{\beta_T} \middle| \mathcal{F}_t \right) = \frac{X_t}{\beta_t}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^{T_1} r_u du \right) [P(t_1, T_2) - K]^+ | \mathcal{F}_t \right] &= \\ &= \beta_{t_0} \exp \left(- \int_{t_0}^t r_u du \right) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{(P(T_1, T_2) - K)^+}{\beta_{t_0} \exp \left(\int_{t_0}^{T_1} r_u du \right)} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \beta_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{(P(T_1, T_2) - K)^+}{\beta_{T_1}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

É necessário realizar uma mudança de medida de probabilidade:

$$\mathbb{Q} \leftrightarrow \beta_t$$

$$\mathbb{Q}_1 \leftrightarrow P(t, T)$$

Aplicando esta mudança, obtém-se que

$$\begin{aligned} &= P(t, T_1) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[\frac{[P(T_1, T_2) - K]^+}{P(T_1, T_1)} \middle| \mathcal{F}_t \right] = P(t, T_1) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[\frac{[P(T_1, T_2) - K] \mathbb{I}_{\{P(T_1, T_2) > K\}}}{P(T_1, T_1)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= P(t, T_1) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[\frac{P(T_1, T_2) \mathbb{I}_{\{P(T_1, T_2) > K\}}}{P(T_1, T_1)} \middle| \mathcal{F}_t \right] - P(t, T_1) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[\frac{K \mathbb{I}_{\{P(T_1, T_2) > K\}}}{P(T_1, T_1)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

onde $\mathbb{I}$ é a função indicatriz.

Efetuada nova mudança de medida de probabilidade

$$\mathbb{Q}_1 \leftrightarrow P(t, T_1)$$

$$\mathbb{Q}_2 \leftrightarrow P(t, T_2)$$

Obtém-se

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_2} \left[\frac{P(T_1, T_2) \mathbb{I}_{\{P(T_1, T_2) > K\}}}{P(T_1, T_2)} \middle| \mathcal{F}_t \right] - P(t, T_1) K \mathbb{Q}_1 [P(T_1, T_2) > K \mid \mathcal{F}_t] = \\ & = P(t, T_2) \mathbb{Q}_2 [P(T_1, T_2) > K \mid \mathcal{F}_t] - KP(t, T_1) \mathbb{Q}_1 [P(T_1, T_2) > K \mid \mathcal{F}_t] = \\ & = P(t, T_2) \mathbb{Q}_2 [\exp [A(T_2 - T_1) + B(T_2 - T_1)r_{T_1}] > K \mid \mathcal{F}_t] - \\ & KP(t, T_1) \mathbb{Q}_1 [\exp [A(T_2 - T_1) + B(T_2 - T_1)r_{T_1}] > K \mid \mathcal{F}_t] = \\ & = P(t, T_2) \mathbb{Q}_2 [A(T_2 - T_1) + B(T_2 - T_1)r_{T_1} > \ln(K) \mid \mathcal{F}_t] - \\ & KP(t, T_1) \mathbb{Q}_1 [A(T_2 - T_1) + B(T_2 - T_1)r_{T_1} > \ln(K) \mid \mathcal{F}_t] = \\ & = P(t, T_2) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_2} \left[r_{T_1} < \frac{\ln(K) - A(T_2 - T_1)}{B(T_2 - T_1)} \middle| \mathcal{F}_t \right] - \\ & - KP(t, T_1) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} \left[r_{T_1} < \frac{\ln(K) - A(T_2 - T_1)}{B(T_2 - T_1)} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \\ & = P(t, T_2) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_2} [r_{T_1} < r^* \mid \mathcal{F}_t] - KP(t, T_1) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} [r_{T_1} < r^* \mid \mathcal{F}_t] = \end{aligned}$$

onde $r^* = \frac{\ln(K) - A(T_2 - T_1)}{B(T_2 - T_1)}$

Para resolvermos esta equação é necessário sabermos a lei de probabilidade da variável aleatória r_{T_1} nas *forward measure* $\mathbb{Q}_1$ e $\mathbb{Q}_2$. Vamos calcular a transformada de Laplace de $\frac{r_{T_1}}{L_j}$ na medida $\mathbb{Q}_j$.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_j} \left[\exp \left(-\lambda \frac{r_{T_1}}{L_j} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(-\lambda \frac{r_{T_1}}{L_j} \right) \frac{d\mathbb{Q}_j}{d\mathbb{Q}} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \\ & \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(-\lambda \frac{r_{T_1}}{L_j} \right) \frac{P(T_1, T_j) \beta_t}{P(t, T_j) \beta_{T_1}} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \\ & = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left\{ \exp \left(-\lambda \frac{r_{T_1}}{L_j} \right) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(-\int_{T_1}^{T_j} r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_{T_1} \right] \frac{\exp \left(\int_{t_0}^t r_s ds \right)}{\exp \left(\int_{t_0}^{T_1} r_s ds \right)} \middle| \mathcal{F}_t \right\}}{P(t, T_j)} \end{aligned}$$

Usando a proposição 4.2 com $\lambda = 0$ e $\mu = 1$, temos que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(-\int_{T_1}^{T_j} r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_{T_1} \right] = \exp [\phi_{0,1}(T_j - T_1) - r_{T_1} \psi_{0,1}(T_j - T_1)]$$

Assim, temos que

$$= \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left\{ \exp \left(-\lambda \frac{r_{T_1}}{L_j} \right) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(-\int_{T_1}^{T_j} r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_{T_1} \right] \frac{\exp \left(\int_{t_0}^t r_s ds \right)}{\exp \left(\int_{t_0}^{T_1} r_s ds \right)} \middle| \mathcal{F}_t \right\}}{P(t, T_j)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left\{ \exp \left(-\lambda \frac{r_{T_1}}{L_j} \right) \exp [\phi_{0,1}(T_j - T_1) - r_{T_1} \psi_{0,1}(T_j - T_1)] \frac{\exp \left(\int_{t_0}^t r_s ds \right)}{\exp \left(\int_{t_0}^{T_1} r_s ds \right)} \middle| \mathcal{F}_t \right\}}{P(t, T_j)} = \\
&= \exp [\phi_{0,1}(T_j - T_1) - A(T_j - t) - B(T_j - t)r_t] \times \\
&\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left\{ \exp \left(-\lambda \frac{r_{T_1}}{L_j} \right) \exp [-r_{T_1} \psi_{0,1}(T_j - T_1)] \frac{\exp \left(\int_{t_0}^t r_s ds \right)}{\exp \left(\int_{t_0}^{T_1} r_s ds \right)} \middle| \mathcal{F}_t \right\} = \\
&= \exp [\phi_{0,1}(T_j - T_1) - A(T_j - t) - B(T_j - t)r_t] \times \\
&\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left\{ \exp \left[- \left(\frac{\lambda}{L_j} + \psi_{0,1}(T_j - T_1) \right) r_{T_1} \right] \exp \left(- \int_t^{T_1} r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right\} =
\end{aligned}$$

Pondo $\mu = 1$ e $\lambda = \frac{\lambda}{L_j} + \psi_{0,1}(T_j - T_1)$, temos que:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left\{ \exp \left[- \left(\frac{\lambda}{L_j} + \psi_{0,1}(T_j - T_1) \right) r_{T_1} \right] \exp \left(- \int_t^{T_1} r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right\} = \\
&= \exp \left[\phi_{\frac{\lambda}{L_j} + \psi_{0,1}(T_j - T_1), 1}(T_1 - t) - r_t \psi_{\frac{\lambda}{L_j} + \psi_{0,1}(T_j - T_1), 1}(T_1, t) \right]
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&= \exp [\phi_{0,1}(T_j - T_1) - A(T_j - t) - B(T_j - t)r_t] \times \\
&\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left\{ \exp \left[- \left(\frac{\lambda}{L_j} + \psi_{0,1}(T_j - T_1) \right) r_{T_1} \right] \exp \left(- \int_t^{T_1} r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right\} = \\
&= \exp [\phi_{0,1}(T_j - T_1) - A(T_j - t) - B(T_j - t)r_t] \times \\
&\exp \left[\phi_{\frac{\lambda}{L_j} + \psi_{0,1}(T_j - T_1), 1}(T_1 - t) - r_t \psi_{\frac{\lambda}{L_j} + \psi_{0,1}(T_j - T_1), 1}(T_1 - t) \right] = \\
&= \exp \left[- \left[B(T_j - t) + \psi_{\frac{\lambda}{L_j} + \psi_{0,1}(T_j - T_1), 1}(T_j - t) \right] r_t \right] \times \\
&\exp \left[\phi_{0,1}(T_j - t_1) - A(T_j - t) + \phi_{\frac{\lambda}{L_j} + \psi_{0,1}(T_j - T_1), 1}(T_1 - t) \right] = \\
&= \frac{\exp \left[- \left[B(T_j - t) + \psi_{\frac{\lambda}{L_j} + \psi_{0,1}(T_j - T_1), 1}(T_j - t) \right] r_t \right]}{\exp \left[-\phi_{0,1}(T_j - t_1) + A(T_j - t) - \phi_{\frac{\lambda}{L_j} + \psi_{0,1}(T_j - T_1), 1}(T_1 - t) \right]}
\end{aligned}$$

Usando as equações 3.9 e 3.10, temos que:

- Se $\mu = 1$, então $h = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2} = \gamma$
- Se $\lambda = 0$ e $\mu = 1$, então

$$\begin{aligned}
\phi_{0,1}(T_j - T_1) &= \frac{2k\theta}{\sigma^2} \ln \left[\frac{2\gamma e^{\frac{(k+\gamma)(T_j - T_1)}{2}}}{\gamma - k + (k + \gamma)e^{\gamma(T_j - T_1)}} \right] = \frac{2k\theta}{\sigma^2} \ln \left[\frac{2\gamma e^{\frac{(k+\gamma)(T_j - T_1)}{2}}}{-(k - \gamma) + (k + \gamma)e^{\gamma(T_j - T_1)}} \right] = \\
&= \frac{2k\theta}{\sigma^2} \ln \left[\frac{2\gamma e^{\frac{(k+\gamma)(T_j - T_1)}{2}}}{-(k + \gamma - 2\gamma) + (k + \gamma)e^{\gamma(T_j - T_1)}} \right] = \frac{2k\theta}{\sigma^2} \ln \left[\frac{2\gamma e^{\frac{(k+\gamma)(T_j - T_1)}{2}}}{(k + \gamma)(e^{\gamma(T_j - T_1)} - 1) + 2\gamma} \right] = \\
&= A(T_j - T_1)
\end{aligned}$$

- Se $\lambda = 0$ e $\mu = 1$, então:

$$\begin{aligned}\psi_{0,1}(T_j - T_1) &= \frac{2 [e^{\gamma(T_j - T_1)} - 1]}{\gamma - k + (k + \gamma)e^{\gamma(T_j - T_1)}} = \frac{2 [e^{\gamma(T_j - T_1)} - 1]}{-(k - \gamma) + (k + \gamma)e^{\gamma(T_j - T_1)}} \\ &= \frac{2 [e^{\gamma(T_j - T_1)} - 1]}{-(k + \gamma - 2\gamma) + (k + \gamma)e^{\gamma(T_j - T_1)}} = \frac{2 [e^{\gamma(T_j - T_1)} - 1]}{(k + \gamma)(e^{\gamma(T_j - T_1)} - 1) + 2\gamma} = -B(T_j - T_1)\end{aligned}$$

- Se $\lambda = \frac{\lambda}{L_j} + \psi_{0,1}(T_j - T_1)$ e $\mu = 1$, então

$$\begin{aligned}\phi_{\frac{\lambda}{L_j} + \psi_{0,1}(T_j - T_1),1}(T_1 - t) &= \phi_{\frac{\lambda}{L_j} - B(T_j - T_1),1}(T_1 - t) = \\ &= \frac{2k\theta}{\sigma^2} \ln \left[\frac{2\gamma e^{\frac{(k+\gamma)(T_1-t)}{2}}}{\sigma^2 \left(\frac{\lambda}{L_j} - B(T_j - T_1) \right) (e^{\gamma(T_1-t)} - 1) + \gamma - k + (k + \gamma)e^{\gamma(T_1-t)}} \right]\end{aligned}$$

- Se $\lambda = \frac{\lambda}{L_j} + \psi_{0,1}(T_j - T_1)$ e $\mu = 1$, então

$$\begin{aligned}\psi_{\frac{\lambda}{L_j} + \psi_{0,1}(T_j - T_1),1}(T_1 - t) &= \psi_{\frac{\lambda}{L_j} - B(T_j - T_1),1}(T_1 - t) = \\ &= \frac{\left[\frac{\lambda}{L_j} - B(T_j - T_1) \right] (k + \gamma + (\gamma - k)e^{\gamma(T_1-t)}) + 2(e^{\gamma(T_1-t)} - 1)}{\sigma^2 \left[\frac{\lambda}{L_j} - B(T_j - T_1) \right] (e^{\gamma(T_1-t)} - 1) + \gamma - k + (k + \gamma)e^{\gamma(T_1-t)}}\end{aligned}$$

Agora temos que

$$\begin{aligned}&\exp \left[-\phi_{0,1}(T_j - t_1) + A(T_j - t) - \phi_{\frac{\lambda}{L_j} + \psi_{0,1}(T_j - T_1),1}(T_1 - t) \right] = \\ &= \exp \left[-\frac{2k\theta}{\sigma^2} \ln \left[\frac{2\gamma e^{\frac{(k+\gamma)(T_j-T_1)}{2}}}{\gamma - k + (k + \gamma)e^{\gamma(T_j - T_1)}} \right] + \frac{2k\theta}{\sigma^2} \ln \left[\frac{2\gamma e^{\frac{(k+\gamma)(T_j-t)}{2}}}{\gamma - k + (k + \gamma)e^{\gamma(T_j-t)}} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{2k\theta}{\sigma^2} \ln \left[\frac{2\gamma e^{\frac{(k+\gamma)(T_1-t)}{2}}}{\sigma^2 \left(\frac{\lambda}{L_j} - B(T_j - T_1) \right) (e^{\gamma(T_1-t)} - 1) + \gamma - k + (k + \gamma)e^{\gamma(T_1-t)}} \right] \right] = \\ &= \left[\frac{2\gamma e^{\frac{(k+\gamma)(T_j-t)}{2}} [\gamma - k + (k + \gamma)e^{\gamma(T_j - T_1)}] \sigma^2 \left[\frac{\lambda}{L_j} - B(T_j - T_1) \right] [e^{\gamma(T_1-t)} - 1]}{2\gamma e^{\frac{(k+\gamma)(T_j-T_1)}{2}} [\gamma - k + (k + \gamma)e^{\gamma(T_j-t)}]} \right. \\ &\quad \left. \frac{+\gamma - k + (k + \gamma)e^{\gamma(T_1-t)}}{2\gamma e^{\frac{(k+\gamma)(T_1-t)}{2}}} \right]^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}}\end{aligned}$$

Substituindo $B(T_j - T_1)$ e L_j , vamos obter

$$\begin{aligned}&= \left[\frac{2\gamma e^{\frac{(k+\gamma)(T_j-t)}{2}} [\gamma - k + (k + \gamma)e^{\gamma(T_j - T_1)}] \sigma^2 \left[\frac{\lambda}{L_j} - B(T_j - T_1) \right] [e^{\gamma(T_1-t)} - 1]}{2\gamma e^{\frac{(k+\gamma)(T_j-T_1)}{2}} [\gamma - k + (k + \gamma)e^{\gamma(T_j-t)}]} \right. \\ &\quad \left. \frac{+\gamma - k + (k + \gamma)e^{\gamma(T_1-t)}}{2\gamma e^{\frac{(k+\gamma)(T_1-t)}{2}}} \right]^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}} =\end{aligned}$$

$$\left[\frac{[\gamma - k + (k + \gamma)e^{\gamma(T_1-t)}] [\gamma - k + (k + \gamma)e^{\gamma(T_j-T_1)}] + 2\sigma^2 [e^{\gamma(T_j-T_1)} - 1] [e^{\gamma(T_1-t)} - 1]}{\gamma [\gamma - k + (k + \gamma)e^{\gamma(T_j-t)}]} \right. \\ \left. \left(\frac{1}{2} + \lambda \right) \right]^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}} = (1 + 2\lambda)^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}}$$

Temos que

$$- \left[B(T_j - t) + \psi_{\frac{\lambda}{L_j} + \psi_{0,1}(T_j-T_1),1}(T_j - t) \right] r_t = \\ = \left[\frac{2 [e^{\gamma(T_j-T_1)} - 1]}{(k + \gamma)(e^{\gamma(T_j-T_1)} - 1) + 2\gamma} - \right. \\ \left. - \frac{\left[\frac{\lambda}{L_j} - B(T_j - T_1) \right] (k + \gamma + (\gamma - k)e^{\gamma(T_1-t)}) + 2 (e^{\gamma(T_1-t)} - 1)}{\sigma^2 \left[\frac{\lambda}{L_j} - B(T_j - T_1) \right] (e^{\gamma(T_1-t)} - 1) + \gamma - k + (k + \gamma)e^{\gamma(T_1-t)}} \right] r_t = \\ = -\frac{\lambda}{1 + 2\lambda} \xi_j$$

Assim, obtemos que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(-\lambda \frac{r_{T_1}}{L_j} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] = \frac{\exp \left(-\frac{\lambda}{1+2\lambda} \xi_j \right)}{(1 + 2\lambda)^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}}} = \frac{\exp \left(-\frac{\lambda}{1+2\lambda} \xi_j \right)}{(1 + 2\lambda)^{\frac{4k\theta}{\sigma^2 \cdot 2}}}$$

Assim, sabemos que a variável aleatória $\frac{r_{T_1}}{L_j}$, na medida $\mathbb{Q}_j$ segue uma distribuição Qui-Quadrada não centrada com $\frac{4k\theta}{\sigma^2}$ graus de liberdade e com parâmetro de não centralidade ξ_j . Ou seja,

$$\frac{r_{T_1}}{L_j} \stackrel{\mathbb{Q}_j}{\sim} \chi^2 \left(\frac{4k\theta}{\sigma^2}, \xi_j \right)$$

Logo,

$$\mathbb{Q}_j (r_{T_1} < r^* | \mathcal{F}_t) = \mathbb{Q}_j \left(\frac{r_{T_1}}{L_j} < \frac{r^*}{L_j} \middle| \mathcal{F}_t \right) = F_{\chi^2_{\left(\frac{4k\theta}{\sigma^2}, \xi_j\right)}} \left(\frac{r^*}{L_j} \right)$$

onde $F_{\chi^2_{(a,b)}}$ é a função distribuição da Qui-Quadrada não central, com a graus de liberdade e b o parâmetro de não centralidade.

Assim, obtemos que

$$c_t [P(t, T_2); K; T_1] = P(t, T_2) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_2} [r_{T_1} < r^* | \mathcal{F}_t] - KP(t, T_1) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1} [r_{T_1} < r^* | \mathcal{F}_t] = \\ = P(t, T_2) F_{\chi^2_{\left(\frac{4k\theta}{\sigma^2}, \xi_2\right)}} \left(\frac{r^*}{L_2} \right) - KP(t, T_1) F_{\chi^2_{\left(\frac{4k\theta}{\sigma^2}, \xi_1\right)}} \left(\frac{r^*}{L_1} \right)$$

Vamos calcular o valor da opção de venda, pela paridade *put-call*

$$c_t [P(t, T_2); K; T_1] - p_t [P(t, T_2); K; T_1] = P(t, T_2) - kP(t, T_1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow p_t [P(t, T_2); K; T_1] = -P(t, T_2) + kP(t, T_1) + P(t, T_2) F_{\chi^2_{\left(\frac{4k\theta}{\sigma^2}, \xi_2\right)}} \left(\frac{r^*}{L_2} \right) - \\ - KP(t, T_1) F_{\chi^2_{\left(\frac{4k\theta}{\sigma^2}, \xi_1\right)}} \left(\frac{r^*}{L_1} \right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow p_t [P(t, T_2); K; T_1] = -P(t, T_2) \left[1 - F_{\chi^2_{\left(\frac{4k\theta}{\sigma^2}, \xi_2\right)}} \left(\frac{r^*}{L_2} \right) \right] + \\
&\quad + KP(t, T_1) \left[1 - F_{\chi^2_{\left(\frac{4k\theta}{\sigma^2}, \xi_1\right)}} \left(\frac{r^*}{L_1} \right) \right] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow p_t [P(t, T_2); K; T_1] = -P(t, T_2) Q_{\chi^2_{\left(\frac{4k\theta}{\sigma^2}, \xi_2\right)}} \left(\frac{r^*}{L_2} \right) + KP(t, T_1) Q_{\chi^2_{\left(\frac{4k\theta}{\sigma^2}, \xi_1\right)}} \left(\frac{r^*}{L_1} \right)
\end{aligned}$$

onde $Q_{\chi^2_{(a,b)}}$ representa a função distribuição complementar da Qui-Quadrada não central com a graus de liberdade e com parâmetro de não centralidade b .

G

Demonstração da Proposição 3.4

Definindo a opção de compra na data de vencimento, T

$$\begin{aligned} c_T(B_T, X, T) &= \max \left\{ 0; \sum_{i=1}^{N_0} k_i P(T, T_i) - \sum_{i=0}^{N_0} k_i X_i \right\} = \max \left\{ 0; \sum_{i=1}^{N_0} k_i (P(T, T_i) - X_i) \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{N_0} k_i \max \{0; P(T, T_i) - X_i\} \end{aligned}$$

Assim, obtém-se

$$c_t(B_t, X, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[c_T(B_T, X, T) \exp \left(\int_t^T -r_u du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] = \beta_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{c_T(B_T, X, T)}{\beta_T} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Tem-se que $\mathbb{Q} \leftrightarrow \beta_t$ e $\mathbb{Q}_T \leftrightarrow P(t, T)$, onde $\mathbb{Q}_T$ é a *forward measure* associada ao numerário $P(t, T)$, logo

$$\begin{aligned} \beta_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{c_T(B_T, X, T)}{\beta_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] &= P(t, T) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T} \left[\frac{c_T(B_T, X, T)}{P(T, T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \\ P(t, T) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T} \left[\sum_{i=1}^{N_0} k_i [P(T, T_i) - X_i]^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] &= \sum_{i=0}^{N_0} k_i P(t, T) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T} \left[c_T(P(T, T_i), X_i, T) \middle| \mathcal{F}_t \right] = \\ &= \sum_{i=0}^{N_0} k_i P(t, T) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T} \left[\frac{c_T(P(T, T_i), X_i, T)}{P(T, T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \sum_{i=1}^{N_0} k_i c_t(P(T, T_i), X_i, T) \end{aligned}$$

Para o valor da opção de venda o raciocínio é análogo.

H

Demonstração da Proposição 3.5

Segundo Cox, Ingersoll, and Ross [1], a equação (25) diz-nos que a *yield to maturity* é dada por:

$$r_T(\tau) = \frac{r_t B^*(\tau) - \ln(A^*(\tau))}{\tau} = \frac{r_t B^*(\tau)}{\tau} - \frac{\ln(A^*(\tau))}{\tau}$$

onde $A^*(\tau)$ e $B^*(\tau)$, onde $\tau = T - t$, são definidos como na equação (23) de Cox, Ingersoll, and Ross [1].

Temos que

$$\frac{B^*(\tau)}{\tau} = \frac{2e^{\gamma\tau} - 1}{\tau [(\gamma + k + \lambda)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma]} = B(\tau)$$

onde $B(\tau)$ é definido como na equação 3.23.

Temos que

$$\begin{aligned} -\frac{\ln(A^*(\tau))}{\tau} &= -\frac{1}{\tau} \ln \left[\frac{2\gamma e^{(\gamma+k+\lambda)\frac{\tau}{2}}}{(\gamma + k + \lambda)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma} \right]^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}} = \\ &= \frac{2k\theta}{\tau\sigma^2} \left[-\ln \left[2\gamma e^{(\gamma+k+\lambda)\frac{\tau}{2}} \right] + \ln [(\gamma + k + \lambda)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma] \right] = \\ &= \frac{2k\theta}{\tau\sigma^2} \ln \left[\frac{(\gamma + k + \lambda)(e^{\gamma\tau} - 1) + 2\gamma}{2\gamma e^{(\gamma+k+\lambda)\frac{\tau}{2}}} \right] = A(\tau) \end{aligned}$$

onde $A(\tau)$ é definido como na equação 3.22.

Assim obtemos que

$$r_T(\tau) = \frac{r_t B^*(\tau) - \ln(A^*(\tau))}{\tau} = \frac{r_t B^*(\tau)}{\tau} - \frac{\ln(A^*(\tau))}{\tau} = A(\tau) + B(\tau)r_t$$

Obtendo assim, a equação 3.21