

**CONTRIBUTOS PARA OS FUNDAMENTOS CATEGORIAIS
DA MATEMÁTICA DO RISCO**

Carlos Pedro dos Santos Gonçalves

Tese submetida como requisito parcial para obtenção do grau de

Doutor em Gestão
Especialidade em Métodos Quantitativos

Orientador:
Professor Doutor José Joaquim Dias Curto, Professor Auxiliar, ISCTE-IUL Business
School, Departamento de Métodos Quantitativos

Março 2010

Resumo

A matemática do risco, enquanto o ramo da matemática que apoia a ciência do risco na investigação do seu objecto, o risco, enquanto tal, não possui um corpo conceptual formal unificado.

A presente tese contribui para um tal corpo, investigando a matemática do risco a partir dos seus fundamentos, assumindo o risco, enquanto tal, como o objecto de investigação.

É reconhecido que a teoria das categorias permite introduzir um substrato matemático comum, tanto para a matemática da medição do risco como para a modelação de sistemas em situações de risco. Assim, os fundamentos da matemática do risco são trabalhados a partir do formalismo da lógica da teoria das categorias, no seio da linguagem formal \mathcal{L}_{Cat} , subjacente ao cálculo categorial, permitindo desenvolver a conexão entre o objecto da ciência do risco, o formalismo e a ciência dos sistemas, a qual constitui um substrato conceptual científico para a ciência do risco.

Investigando a conexão entre a teoria das categorias, a topologia categorial, e as noções de acaso, aleatório, estocástico, caos e aleatoriedade algorítmica, o formalismo da teoria das categorias é directamente ligado à matemática do risco e, assim, demonstra-se que o mesmo fornece um enquadramento unificado, no qual, o risco, enquanto tal, assim como a modelação dos sistemas em situações de risco podem ser apreendidos e trabalhados, a partir de uma perspectiva matemática. Apresenta-se, também, uma aplicação do formalismo à captura de turbulência multifractal, risco de sincronização e efeitos de Malcolm, com implicações para as finanças e para a gestão do risco.

Palavras-chave: risco; situação de risco; acaso; aleatório; caos; estocástico; matemática do risco; ciência do risco; ciência dos sistemas; teoria das categorias; cálculo categorial.

JEL: C02; C15; C73; G01; G32.

MSC Classifications by AMS: 18A05; 18A10; 18A15; 18C50; 03D10; 03D15; 03D32.

Abstract

Risk mathematics, as the branch of mathematics that supports risk science in the research of its object, the risk, as such, lacks a unified formal conceptual body.

The present thesis makes a contribution towards such a body, by researching risk mathematics from its foundations, assuming the risk, as such, as the object of research.

It is recognized that category theory allows the introduction of a common mathematical substratum, both for the risk measurement mathematics as well as for the modelling of systems in situations of risk. Thus, the foundations of risk mathematics are worked upon from the formalism of category theory's logic, within the formal language \mathcal{L}_{Cat} , underlying categorial calculus, which allows the development of the connection between the object of risk science, the formalism itself and systems science, which constitutes a scientific conceptual substratum for risk science.

By researching the connection between category theory, categorial topology, and the notions of *acaso*¹, aleatorial, stochastic, chaos and algorithmic randomness, category theory's formalism is directly linked to risk mathematics and, thus, it is shown to provide for a unified framework upon which risk, as such, as well as the modelling of systems in situations of risk can be apprehended and worked upon, from a mathematical perspective. It is also shown an application of the formalism to the capturing of multifractal turbulence, synchronization risk and Malcolm effects, with implications for finance and risk management.

Keywords: risk; situation of risk; *acaso*; aleatorial; chaos; stochastic; algorithmic randomness; risk mathematics; risk science; systems science; category theory; categorial calculus.

JEL: C02; C15; C73; G01; G32.

MSC Classifications by AMS: 18A05; 18A10; 18A15; 18C50; 03D10; 03D15; 03D32.

¹ A opção por se manter o termo português “acaso”, na versão inglesa do *abstract* e na versão inglesa das *keywords*, e não o termo, correspondente, em inglês, “chance”, é justificada por razões de imperativo conceptual, pois o termo “chance” não sintetiza os elementos causais de raiz sistémica formativa, exemplificados pelas respectivas dinâmicas vitais sistémicas, tal como as mesmas são interdisciplinarmente trabalhadas pela ciência do risco.

Sumário Executivo

A matemática do risco, enquanto ramo da matemática que apoia a ciência do risco na investigação do seu objecto, o risco, enquanto tal, não possui um corpo conceptual formal unificado.

A presente tese contribui para um tal corpo conceptual formal, investigando a matemática do risco a partir dos seus fundamentos, assumindo o risco, enquanto tal, como objecto de investigação.

É reconhecido que a teoria das categorias permite introduzir um substrato matemático comum, tanto para a matemática da medição do risco, como para a modelação de sistemas em situações de risco.

Assim, os fundamentos da matemática do risco são trabalhados a partir do formalismo da lógica da teoria das categorias, no seio da linguagem formal \mathcal{L}_{Cat} , subjacente ao cálculo lógico da teoria das categorias, ou cálculo categorial. O cálculo categorial trabalha a partir de uma ontologia sistémica que não é independente dos critérios de verdade científicos da ciência dos sistemas, sendo as relações lógicas, em \mathcal{L}_{Cat} , relações sistémicas e as derivações lógicas, acerca de relações, processos e padrões sistémicos.

Deste modo, o cálculo categorial permite desenvolver a conexão entre o objecto da ciência do risco, o formalismo e a ciência dos sistemas, a qual constitui um substrato conceptual científico para a ciência do risco.

Na presente tese, este cálculo lógico é expandido, sendo investigada a conexão entre a teoria das categorias, a topologia categorial, e as noções de acaso, aleatório, estocástico, caos e aleatoriedade algorítmica. O formalismo da teoria das categorias é directamente ligado à matemática do risco e, assim, demonstra-se que o mesmo fornece um enquadramento unificado, no qual, o risco, enquanto tal, assim como a modelação de sistemas em situações de risco podem ser apreendidos e trabalhados, a partir de uma perspectiva matemática.

É, também, apresentada uma aplicação do formalismo à captura de turbulência multifractal, risco de sincronização e efeitos de Malcolm, com implicações para as finanças e para a gestão do risco.

AGRADECIMENTOS

Agradece-se ao Professor Doutor José Dias Curto, pelo apoio, estímulo e orientação no desenvolvimento da investigação.

Agradece-se, igualmente, ao Professor Doutor João Pedro Nunes, Professor Doutor Jorge Dias de Deus e Professor Doutor Francisco Louçã que, gentilmente, participaram nos painéis de acompanhamento do projecto de investigação e cujas críticas, comentários e sugestões constituíram contributos importantes para o trabalho realizado.

A presente tese beneficiou, também, em aspectos fundamentais, do diálogo e debate entre Maria Odete Madeira e Peter Beamish, Biofísico e Director da CETA-Research, para ambos vão os meus agradecimentos pelo contributo dado. O pensamento e trabalho desenvolvido por Maria Odete Madeira, nos últimos anos, constituiu, igualmente, um contributo fundamental para a presente investigação.

Agradece-se, ainda, o contributo de problematização e reflexividade crítica, generosamente dado pelo “colectivo” de físicos, matemáticos e cosmólogos, nos grupos de discussão *Theory of Everything* e *Quantum Relativity*, assim como aos participantes nos grupos: *Filosofia, Sistemas, Risco*; *Filosofia, Matemática e Conhecimento*; *Filosofia, Matemática e Cosmologia* e *Filosofia Indivíduos e Sociedade*.

Por último, agradece-se à comunidade de utilizadores de Netlogo, que muito tem contribuído para a perspectiva e práticas de modelação incorporadas no trabalho desenvolvido.

DEDICATÓRIA

Aos meus pais – pelo apoio e estímulo que me deram durante todo o percurso que conduziu ao presente trabalho.

ÍNDICE GERAL DO TEXTO PRINCIPAL

Capítulo 1. – Introdução	1
1.1. <i>A metamatemática e os fundamentos da matemática do risco</i>	4
1.2. Estrutura geral do trabalho	6
Capítulo 2. Ciência do Risco e Matemática do Risco	10
2.1. A noção de risco e a ciência do risco	11
2.2. Os dois ramos aplicados da matemática do risco	12
2.3. <i>A turbulência multifractal</i> nas dinâmicas das rendibilidades de activos financeiros	17
2.4. Consequências para a teoria financeira da <i>turbulência multifractal</i> nas dinâmicas das rendibilidades de activos financeiros	30
2.5. A actual crise financeira e a necessidade da modelação microscópica	33
2.6. A MFM, a <i>teoria financeira evolucionária</i> e a modelação de sistemas em <i>situações de risco</i>	41
Capítulo 3. A Linguagem \mathcal{L}_{Cat} e os Fundamentos Categoriais da Matemática do Risco	60
3.1. A linguagem \mathcal{L}_{Cat} – sintaxe e axiomática	61
3.1.1. A estrutura formal da linguagem \mathcal{L}_{Cat}	62
3.1.2. <i>Estruturas mórficas</i> de ordem superior	69
3.2. A linguagem \mathcal{L}_{Cat} – <i>semântica, computação mórfica e aleatoriedade</i>	77
3.2.1. <i>Incompressibilidade, aleatoriedade algorítmica</i> e risco em \mathcal{L}_{Cat}	78
3.2.2. <i>(In)compressibilidade mórfica</i> e risco em \mathcal{L}_{Cat}	80
3.3. Noção de <i>categoria</i>	86

Capítulo 4. Topologia categorial	99
4.1. <i>Estruturas mononodais e o ponto geométrico</i>	101
4.1.1. <i>A categoria das categorias mononodais – \mathcal{M}_{Nod}</i>	104
4.1.2. <i>O ponto geométrico enquanto origem sistémica topológica</i>	108
4.2. <i>Os espaços de adjacência isomórfica universal, os morfismos e as categorias</i>	111
4.2.1. <i>Os espaços de adjacência isomórfica universal</i>	111
4.2.2. <i>Morfismos e categorias</i>	122
Capítulo 5. Máquinas de Turing, Categorias e Caos	131
5.1. <i>Máquinas de Turing, jogos de mercado e risco</i>	132
5.2. <i>Hipercomputação e caos</i>	148
5.2.1. <i>Sistemas dinâmicos, (in)compressibilidade e não-periodicidade</i>	149
5.2.2. <i>Turbulência multifractal, efeitos de Malcolm e risco num modelo de dois mapas não-lineares acoplados</i>	161
Capítulo 6. Conclusões	165
6.1. <i>O cálculo categorial e os fundamentos da ciência do risco</i>	166
6.2. <i>O risco nos sistemas</i>	169
6.2.1. <i>Limites da computação algorítmica e a noção de risco</i>	169
6.2.2. <i>A situação de risco</i>	172
6.2.3. <i>Modelação e origens sistémicas do risco</i>	175
6.3. <i>Criticalidade auto-organizada e turbulência multifractal</i>	179
6.4. <i>A topologia categorial</i>	180
Bibliografia	182
ANEXOS	
Anexo A. – Demonstração do Teorema 2.	192

Anexo B. – Análise Empírica	195
Anexo C. – <i>Dinâmica Não-linear</i> – Exemplos	201

ÍNDICE DE FIGURAS DO ANEXO B.

Figura 1 – <i>Risks Interconnection Map</i> do WEF para 2010 (WEF, 2010).	195
Figura 2 – Rede de risco para colapso nos preços dos activos (reais e financeiros) (WEF, 2010).	196
Figura 3 – Rede de risco para as pandemias (WEF, 2010).	197
Figura 4 – LDS para: IBM; Microsoft; General Electric; Honda Motor Co ADR.	197
Figura 5 – LDS para: PSI-20 e CAC 40.	198
Figura 6 – LDS para S&P 500, relativamente às décadas de 1950, 1960 e 1970.	199
Figura 7 – LDS para S&P 500, relativamente às décadas de 1980, 1990 e ao período de 2000 a 2009.	199
Figura 8 – LDS para S&P 500, com subdivisão da década de 1980 nos períodos de 02-01-1980 a 31-12-1985 e de 02-01-1986 a 31-12-1989.	200
Fig.9 – LDS para S&P 500, com subdivisão do período de 1986 a 1989, no subperíodo de 02-01-1986 a 22-12-1987 e de 23-12-1987 a 31-12-1989.	200

ÍNDICE DE FIGURAS DO ANEXO C.

Figura 1 – Cronogramas de 100 iterações do *mapa logístico*, com $\mu = 0.2512343454$ e para os seguintes valores do parâmetro de controlo: $a = 2$, $a = 3.2$ e $a = 4$. 201

Figura 2 – Diagramas de bifurcações para: $x(n)$ e $y(n)$, por variação de ε , quando: $a = 3$, $b = 0.5$, $r = 0.001$ (Madeira e Gonçalves, 2009). 202

Figura 3 – Diagramas de desfaseamento para $y(n)$ ($y(n-1)$ nas abcissas e $y(n)$ nas ordenadas), com $a = 3$, $b = 0.5$, $r = 0.001$ e com $\varepsilon=0.056$ (próximo de uma região de elevada variabilidade) e $\varepsilon=0.01$ (próximo de uma região central) (Madeira e Gonçalves, 2009). 203

Figura 4 – Atractores para $a = 3$, $b = 0.5$, $r = 0.001$ e com $\varepsilon=0.056$ e $\varepsilon=0.01$ (Madeira e Gonçalves, 2009). 204

Figura 5 – Sucessão cronológica com 20,000 iterações para $y(n)$, resultante de uma simulação com 30,000 iterações, as primeiras 10,000 iterações tendo sido removidas para transiente. Parâmetros: $a = 3$, $b = 0.5$, $r = 0.001$, $\varepsilon = 0.01$ (Madeira e Gonçalves, 2009). 205

Figura 6 – LDS para os dados da figura 5. (Madeira e Gonçalves, 2009). 205

Lista de Abreviações:

AMH – *Adaptive Market Hypothesis*

CBOE – *Chicago Board Options Exchange*

CME – *Chicago Mercantile Exchange*

CML – *Coupled Map Lattice* (plural: *Coupled Map Lattices* – CMLs)

CVaR – *Conditional Value-at-Risk*

fbf – *fórmula bem formada* (plural: *fórmulas bem formadas* – *fbfs*)

FSOC – *Monofractal Self-Organized Criticality* (ou *Fractal Self-Organized Criticality*)

HAI – *Hipertextual Artificial Intelligence*

I&D – *Investigação e Desenvolvimento*

IID – *Independente e Identicamente Distribuído*

IPC – *Índice de Preços no Consumidor*

LBO – *Leveraged Buyout*

LDS – *Large Deviation Spectrum*

MFM – *Microscopic Financial Modelling*

MSOC – *Multifractal Self-Organized Criticality*

PIK – *Payment in Kind*

RIM – *Risks Interconnection Map*

RMBS – *Residential Mortgage-Backed Securities*

RN-EMMQ – *Risk Neutral Equivalent Martingale Measure*

SFI – *Santa Fe Institute*

SOC – *Self-organized Criticality*

VaR – *Value-at-Risk*

WEF – *World Economic Forum*

Acerca da Notação Lógica

Utiliza-se na presente tese a notação da lógica matemática, em particular os dois símbolos \vdash e \models para a consequência sintáctica e semântica, respectivamente. No **capítulo 3**, é explicada a natureza e uso destes dois símbolos, designados no seio da lógica, respectivamente, por martelo sintáctico e martelo semântico.

Acerca do Programa Utilizado

O programa utilizado para a escrita da tese foi o CygTeXmacs o qual tem capacidade para lidar com o tipo de notação matemática necessário à presente tese. Contudo, o programa não possui corrector automático de português. Foram realizadas várias leituras da tese e houve cuidado para corrigir quaisquer *erros de typing*. Podem, no entanto, estar presentes eventuais *erros de typing*, não detectados nas repetidas leituras ao documento.

Por outro lado, o programa não trabalha a formatação *justificado* (*justify*) do mesmo modo que o *Microsoft Word*. Enquanto que o *Word* alinha o texto não colocando *hífens*, o CygTeXmacs coloca, por vezes, *hífens*, sem controlo por parte do utilizador, podendo resultar em casos de separação de sílabas, na transição de linha.

Capítulo 1. Introdução

A necessidade do desenvolvimento autónomo de uma ciência do risco começou a ser sinalizada, com maior frequência, na transição do século XX para o século XXI (Guilhou e Lagadec, [2002], 2004), em particular, após a identificação do problema transdisciplinar das *situações de risco* interconectadas e das dinâmicas de risco sistémico, consideradas em termos locais e em termos globais (Guilhou e Lagadec, [2002], 2004; Colizza e Vespignani, 2010).

Enquanto ciência fundamental, a ciência do risco evoluiu a partir da *análise do risco* (*risk analysis*), da ciência dos sistemas e das ciências da complexidade, sendo conceptualmente suportada pela filosofia do risco, pela ciência dos sistemas, pelas ciências da complexidade e pela matemática do risco.

A *análise do risco* desenvolveu-se, inicialmente, enquanto ciência aplicada, visando a avaliação do risco em diferentes contextos e sistemas, procurando capturar as dinâmicas de risco e fornecer ferramentas de avaliação do risco em quaisquer *situações sistémicas* em que se pode afirmar existir risco, como, por exemplo, (Peat, 2002): a perda de controlo num avião, devido a turbulência ou a falhas tecnológicas; a colisão de comboios; as dinâmicas das epidemias e as doenças emergentes; catástrofes ecológicas e a turbulência multifractal nas dinâmicas das rendibilidades dos preços dos activos financeiros.

Inicialmente, a *análise do risco* foi introduzida, enquanto ciência interdisciplinar, por matemáticos e engenheiros (Peat, 2002), tendo rapidamente crescido metodologicamente a partir dos problemas investigados e da sinergização de ferramentas de modelação vindas da ciência dos sistemas e das ciências da complexidade, aplicadas a diferentes *situações de risco*.

A passagem da *análise do risco* para a *ciência do risco* ocorre com a transformação do problema central, o qual, na ciência do risco, é o seu objecto, tomado enquanto problema, a saber: o risco, enquanto tal. A necessidade de investigação do risco, enquanto tal, resultou do próprio crescimento da *análise do risco* e da necessidade de desenvolvimento de ferramentas mais eficazes para lidar com sistemas complexos em rede, e em que diferentes *situações de risco*, de diferentes naturezas, se interpenetram (Tainter, 1996; Peat, 2002; Guilhou e Lagadec, [2002], 2004; Madeira, 2008; Madeira e Gonçalves, 2009; Colizza e Vespignani, 2010).

A constituição do risco, enquanto problema, pode ser sinalizada no trabalho de investigação acerca do risco, desenvolvido pelo *World Economic Forum* (WEF), na forma do seu *risk browser*¹, o qual resultou de uma síntese daquilo que cons-

titui a perspectiva dominante acerca da natureza das *situações de risco*, com impacto e relevância decisional para as sociedades humanas, a saber: a interconectividade de *situações de risco* de diferentes naturezas, tal que não é possível avaliar o risco sem um diálogo interdisciplinar para o qual o contributo da ciência do risco, ao tomar como seu objecto o risco, enquanto tal, é indispensável.

A interconectividade de *situações de risco* de diferentes naturezas é relevado pelo WEF através do seu *risk browser*, na forma do *Risks Interconnection Map*² (RIM), cuja estrutura global é apresentada na **figura 1.**, do **anexo B.**, esta estrutura evidencia a interconectividade das *situações de risco*, tipificadas a partir da sua natureza, tal que: os tamanhos dos *nós* correspondem a uma avaliação da probabilidade de concretização de ameaças; a densidade do círculo, para cada *nó*, corresponde a uma avaliação da *severidade* das perdas potenciais; a densidade de cada *arco* avalia a força da *conexão* entre as *situações de risco*.

O *risk browser* permite que, através de um *clique* num qualquer *nó* da rede do RIM, seja apresentada a *rede de risco* para cada tipo de *situação de risco*, a qual é definida a partir das adjacências. Assim, como exemplo, nas **figuras 2.** e **3.**, do **anexo B.**, são apresentadas as *redes de risco*, obtidas a partir do *risk browser*, para, respectivamente, a *situação de colapso dos preços dos activos*³ (**figura 2.**) e a *situação de pandemia* (**figura 3.**). Note-se que existe, no *mapa do risco*, uma ligação entre estes dois tipos de *situações de risco*.

A síntese apresentada pelo WEF permite sinalizar o facto de que as sociedades humanas se confrontam com situações e processos de risco produzido em rede, com dinâmicas sistémicas globais interconectadas, difíceis de perceber, interpretar, compreender e computar, para efeitos de antecipação conjectural e construção de cenários e modelos que permitam a gestão de recursos para decisão e eficácias atempadas de prevenção de risco sistémico.

Um exemplo é o caso da epidemiologia, a qual está, correntemente, a necessitar de trabalhar com uma nova abordagem para a modelação da dispersão de uma epidemia, de tal modo que se torna necessário considerar os factores económicos, financeiros, sociais e mediáticos que interferem no processamento do risco, por parte dos sistemas, e determinam, por seu turno, a própria exposição dos sistemas ao risco (Colizza e Vespignani, 2010).

Assim, para modelar a dispersão de uma epidemia ou a transição de uma epidemia para uma pandemia, torna-se necessário desenvolver modelos baseados em redes adaptativas que modelem, também, os sistemas sociais, económicos, financeiros, os *media* e a dispersão de estratégias adaptativas locais por parte dos agentes humanos, pois, todos estes factores afectam a *situação de risco epidemiológico* (Colizza e Vespignani, 2010).

1. Disponibilizado no *website*: <http://www.weforum.org/documents/riskbrowser2010/risks/>.

2. Ver *website* da nota anterior.

3. *Activo reais e activos financeiros*.

Por seu turno, cenários epidemiológicos podem ser generalizados e as mesmas ferramentas que podem servir de apoio à *epidemiologia*, na modelação da dispersão de uma epidemia por uma população, podem ser úteis na análise da dispersão de factores de risco financeiro na rede financeira e, assim, a dinâmica dos mercados pode ser capturada a partir de modelos de dispersão de expectativas, processadas pelos agentes em rede (Gonçalves, 2003; Gonçalves e Gonçalves, 2007; Gonçalves, 2010). Este é apenas um exemplo do modo como *situações de risco* se podem interconectar e de como sinergias podem ser obtidas ao nível das ferramentas, aplicadas a diferentes *situações de risco*.

Apesar do esforço científico para resolver procedimentos relacionados com critérios de exigência metodológica, orientada por e para situações potenciais e concretas de risco, sinalizado e marcado pelo ritmo de produção acelerada de risco sistémico, e ainda pelos critérios de exigência em investigação fundamental, no que diz respeito à matemática do risco, alguns problemas estruturais sobrevivem, a saber:

- Falta um corpo lógico unificado compatível com o discurso sistémico da ciência do risco;
- Falta um corpo formal que permita apoiar a ciência do risco na investigação do seu objecto, isto é, o risco, enquanto tal;
- É necessário um formalismo em que os processos em rede sejam trabalhados desde a raiz lógica, e tal que seja compatível com um trabalho matemático de múltiplas *situações de risco* interconectadas.

Falta, assim, à ciência do risco, um corpo conceptual matemático, unificado e construído a partir dos fundamentos conceptuais da ciência dos sistemas, e é precisamente para a constituição desse corpo conceptual que a presente tese visa dar um contributo, trabalhando sobre os fundamentos da matemática do risco.

Assim, o objecto da presente tese é o risco, enquanto tal, e o objectivo é a construção de uma base formal a ser incorporada na constituição do acima referido corpo conceptual matemático.

Ao trabalhar a matemática do risco, a partir dos fundamentos, a presente tese situa-se no seio da *metamatemática*, a qual é o ramo da matemática que investiga os fundamentos da própria matemática (Chaitin, 2006). Deste modo, a metodologia seguida é a da *metamatemática*, a qual passamos a explicitar, conectando-a com a investigação acerca dos fundamentos da matemática do risco e, assim, com o enquadramento disciplinar da tese e as questões metodológicas decorrentes desse mesmo enquadramento e da sua relação com o objecto e objectivo.

1.1. A *metamatemática* e os *fundamentos da matemática do risco*

A *metamatemática* visa uma eficácia na construção de um campo teórico matemático, tal que se procura investigar, a partir dos fundamentos, a relação entre o formalismo matemático e o *objecto* ou o domínio de *objectos* sob formalização, em particular no que respeita a: consistência dos argumentos (*sintaxe*); captura formal da natureza do *objecto* ou do domínio de *objectos* sob formalização (*semântica*). Assim, enquanto ferramentas centrais, a *metamatemática* serve-se de *linguagens formais*, cuja *sintaxe* reflecte a estrutura lógica abstracta do formalismo, e cuja *semântica* reflecte a relação entre o formalismo e o *objecto* ou o domínio de *objectos* sob formalização.

Na revisão dos resultados e na análise das consequências de uma investigação, desenvolvida no seio da *metamatemática*, é, também, necessário reflectir a partir daquilo que é a natureza da matemática e acerca da relação da mesma com o uso eficaz que dela é feito.

Deste modo, um trabalho de investigação que aplica estruturas disponíveis na matemática para aplicação à resolução de um dado problema, em contextos disciplinares ou interdisciplinares fora da matemática, difere quer de um trabalho de investigação que visa contributos para o desenvolvimento da própria matemática, quer de um trabalho de investigação, como é o caso da presente tese, em que a matemática é investida de uma ontologia híbrida, enquanto matemática do risco, e em que o risco se situa, no seio da matemática, como seu *objecto* e problema a ser abordado segundo os critérios e procedimentos de investigação da própria matemática, enquanto disciplina.

No primeiro caso, a reflexão e critérios metodológicos são orientados para o *objecto* de aplicação visado, assumindo a matemática, neste contexto, o papel de ferramenta para outras áreas disciplinares, sendo, assim, investida de uma eficácia exterior à matemática.

No segundo caso, é a própria matemática, enquanto disciplina, que se coloca perante si como *objecto*, problema, e *objectivo*, no que diz respeito ao seu fundamento e causalidade endógena, visando eficácias de crescimento e desenvolvimento matemático. Nesse sentido, os procedimentos e critérios metodológicos obedecem a linguagens fundamentais que operam segundo regras de legitimidade e consistência autocontidas, impostas pela própria matemática, segundo critérios de identidade e de validade lógica.

No terceiro caso, não sendo o *objecto* da matemática a própria matemática é, contudo, um *objecto*, o risco, enquanto tal, posto pela matemática no seu seio disciplinar, obrigando-a à mobilização e utilização de linguagens fundamentais, capazes de trabalhar com a ontologia do *objecto*, trazendo consequências avaliativas para a própria matemática, no sentido em que a obriga, enquanto área disciplinar, a reflectir acerca das suas linguagens disponíveis e respectivos limites.

Dada a natureza do objecto da matemática do risco ser o mesmo que o da ciência do risco (o risco, enquanto tal), este tem de ser conceptualmente trabalhado no seio de um discurso formal, o que obriga à mobilização e utilização de linguagens fundamentais, capazes de trabalhar com a ontologia sistémica do objecto, com consequências ao nível dos próprios fundamentos da matemática do risco, enquanto disciplina, consequências que têm de ser consideradas e incorporadas neste trabalho de investigação.

Em particular, o formalismo lógico e, logo, as *linguagens formais* a serem introduzidas têm de possuir um nível de generalidade acima daquele da lógica clássica, especificamente, têm de ser mais gerais do que o *cálculo de predicados*, subjacente aos principais ramos da matemática.

De facto, enquanto que, na *lógica clássica*, é visada uma eficácia ao nível do problema da validade do discurso, independentemente dos critérios de verdade científica, a matemática do risco necessita de trabalhar, a partir dos seus fundamentos e, logo, a partir do seu substrato lógico, uma ontologia sistémica que não é independente dos critérios de verdade científicos, em particular, daqueles que são trabalhados no seio da ciência dos sistemas, pois, trata-se de investigar, em termos matemáticos, o risco nos sistemas.

É necessário, assim, que as derivações lógicas da matemática do risco sejam acerca de relações, processos e padrões sistémicos, e que o sistema lógico seja capaz de lidar com a *auto-referência* associada à individuação e identidade sistémicas, algo que a lógica clássica não é capaz de fazer.

Este substrato lógico não foi, ainda, trabalhado no seio da matemática do risco. A investigação na matemática do risco tem sido desenvolvida de modo disperso, sobretudo, a partir das aplicações dos modelos das ciências da complexidade, à investigação do risco nos sistemas (Tainter, 1996; Madeira e Gonçalves, 2009; Colizza e Vespignani, 2010), mas sem que se tenha procurado uma expansão formal passível de trabalhar o risco nos sistemas e a relação entre o risco e a complexidade.

Para que se possa resolver o problema de uma matemática do risco autónoma e conceptualmente consistente com o discurso e base conceptual da ciência do risco, é necessário investigar a matemática do risco, a partir dos seus fundamentos, e trabalhar com uma lógica cuja estrutura formal tenha por base conceptual a ciência dos sistemas.

Um primeiro passo, para a resolução do problema dos fundamentos sistémicos da matemática do risco, pode ser dado a partir do reconhecimento de que entre os diferentes ramos da matemática que lidaram com o risco, em particular, a matemática da medição do risco e a modelação de sistemas em *situações de risco*, podem ser identificadas relações matemáticas entre os objectos, passíveis de serem trabalhadas no seio da *teoria matemática das categorias*.

Assim, é no seio da *teoria das categorias* que poderá ser encontrada uma solução para o problema dos fundamentos da matemática do risco. As *categorias* são estruturas em rede compostas por *objectos* e *morfismos*, o que é eficaz para a

formalização das *situações sistêmicas de risco*, por sua vez, Gonçalves e Madeira (2009) propuseram uma *linguagem formal* (\mathcal{L}_{Cat}) e uma *lógica categorial* (o *cálculo categorial*) para trabalhar, ao nível lógico, os fundamentos sistêmicos da *teoria das categorias*, demonstrando a capacidade do *cálculo categorial* para lidar com os problemas da *individuação, identidade e auto-referência*.

A linguagem \mathcal{L}_{Cat} foi construída a partir da base conceptual da ciência dos sistemas, assim, na sua estrutura formal de base, o *cálculo categorial*, enquanto *cálculo lógico*, é, não somente, consistente com as abordagens matemáticas para a medição do risco e para a modelação dos sistemas em *situações de risco*, como, também, permite trabalhar com os fundamentos conceptuais sistêmicos, necessários ao formalismo da matemática do risco.

O *cálculo categorial* trabalha a partir de uma ontologia sistémica que não é independente dos critérios de verdade científicos da ciência dos sistemas, sendo as relações lógicas, em \mathcal{L}_{Cat} , relações sistêmicas e as derivações lógicas, do *cálculo categorial*, acerca de relações, processos e padrões sistêmicos.

Estas são as vantagens que podem ser sinalizadas no *cálculo categorial*, contudo, para uma investigação acerca dos fundamentos da matemática do risco, torna-se necessário expandir o trabalho de Gonçalves e Madeira (2009), conectando as noções do *cálculo categorial* com:

- A teoria matemática da computação;
- A noção de *aleatoriedade algorítmica*;
- As noções de *acaso, aleatório, estocástico e caos*;
- A noção de *risco*.

É este trabalho de expansão conducente a uma unificação do formalismo da matemática do risco que constitui o contributo central da presente tese, como passamos a explicitar.

1.2. Estrutura geral do trabalho

Conforme foi relevado na secção anterior, embora falte, à ciência do risco, um corpo conceptual matemático, unificado e construído a partir dos fundamentos conceptuais da ciência dos sistemas, a *linguagem formal* \mathcal{L}_{Cat} permite trabalhar os fundamentos de uma matemática categorial com base no substrato conceptual da *ciência dos sistemas*, podendo ser utilizada para colmatar a lacuna acima referida. Esta questão será retomada no **capítulo 2.**, na **secção 2.2.**, a propósito da *matemática da medição do risco* e da *matemática da modelação de sistemas em situações sistêmicas de risco*.

A *teoria das categorias* constitui uma base formal para toda a matemática que lida com relações, apreensíveis, em termos sistêmicos, a partir de *morfismos*, os quais constituem, no seio da *matemática categorial*, uma formalização de uma noção de *processo* que conecta uma *origem* a um *alvo*.

Trivialmente, qualquer estrutura processual de relações dinâmicas sistêmicas que seja matematicamente apreensível em termos de funções de transição de estado, locais ou globais, pode ser apreendida, em termos formais, a partir do *cálculo categorial* (Gonçalves e Madeira, 2009), o que inclui as relações de ordem de risco subjacentes à *matemática da medição do risco* (**secção 2.2.**), assim como as principais técnicas de modelação, utilizadas para a *modelação de sistemas em situações de risco*. Nas **secções 2.3. a 2.6.** do **capítulo 2.**, procede-se a uma revisão destas mesmas técnicas de modelação, a propósito de um problema relevante e exemplar para ciência do risco aplicada, a saber: a *turbulência multi-fractal* na dinâmica das rendibilidades dos preços dos activos financeiros transaccionados em bolsa.

As **secções 2.3. a 2.6.** servem, pois, um duplo propósito, a saber: o de exemplificar um problema de aplicação da ciência do risco e o de exemplificar a evolução da perspectiva central acerca do risco nos sistemas, subjacente à ciência do risco. Acerca deste segundo propósito, segue-se, do trabalho desenvolvido no **capítulo 2.**, que é possível identificar duas linhas teóricas centrais subjacentes à modelação de sistemas em *situações de risco*, ou seja, a *teoria quântica* e a *teoria do caos*, as quais são recuperadas no **capítulo 5.**, no seio da formalização categorial das *máquinas de Turing*.

Enquanto ciência, a ciência do risco trabalha o risco, a partir da sua raiz conceptual na noção de *resicum*, do latim medieval, raiz que, juntamente com a noção de *situação de risco*, é revista na **secção 2.1.**

Apesar de fornecer um formalismo cujos fundamentos conceptuais resultam da ciência dos sistemas, torna-se necessário expandir o *cálculo categorial* para que o mesmo possa apoiar a investigação acerca dos fundamentos da matemática do risco, em particular, é necessário que sejam trabalhados, no seio do formalismo, os seguintes pontos:

- Os elementos centrais de uma *situação de risco*;
- A relação entre o risco e a computação nos sistemas.

Estes dois pontos polarizam valores de necessidade e de auto-referência formativa em processos de construção formal e respectiva generalização.

Para capturar os elementos centrais de uma *situação de risco*, e a relação entre o risco e a computação nos sistemas, torna-se necessário expandir o trabalho de Gonçalves e Madeira (2009), conectando as noções do *cálculo categorial* com os quatro pontos, referidos no final da secção anterior, que repetimos aqui:

- A teoria matemática da computação;

- A noção de *aleatoriedade algorítmica*;
- As noções de *acaso*, *aleatório*, *estocástico* e *caos*;
- A noção de *risco*.

O trabalho desenvolvido nos **capítulos 3.** a **5.** visa, precisamente, expandir o trabalho de Gonçalves e Madeira, conectando o *cálculo categorial* a estes quatro pontos centrais.

No **capítulo 3.**, é apresentada a *linguagem formal* \mathcal{L}_{Cat} na sua sintaxe (**secção 3.1.**) e semântica (**secção 3.2.**). Na apresentação da semântica lógica de \mathcal{L}_{Cat} , é estabelecida a ligação do formalismo com a teoria matemática da computação, com a noção de *aleatoriedade algorítmica* e com as noções gerais de *acaso* e de *aleatório*. Assim, a apresentação da semântica lógica é trabalhada, a partir de Gonçalves e Madeira (2009), para aplicação às noções fundamentais da matemática do risco.

A noção de *aleatoriedade algorítmica* permite sinalizar *estruturas aleatórias* no seio da matemática, enquanto estruturas *algorítmicamente incompressíveis* (Chaitin, 2006). O *cálculo categorial*, por seu turno, conforme demonstrado na **secção 3.2.**, permite trabalhar com tais estruturas aleatórias enquanto *totalidades mórficas*, assim, como permite conectar essas mesmas estruturas com *cadeias mórficas* e, logo, com modelos matemáticos de processos sistêmicos, cuja estrutura computacional pode ser formalizada a partir da noção de *computação categorial*, noção que é trabalhada na **secção 3.2.**.

Este é o ponto de partida para o desenvolvimento de um formalismo categorial de suporte à matemática do risco. Contudo, para que a matemática do risco possa ser trabalhada, torna-se necessário introduzir *estruturas categoriais* com *composição algébrica de fundamentos* (**secção 3.3.**) e introduzir uma abordagem para a *topologia categorial* (**capítulo 4.**).

A abordagem para a *topologia categorial*, desenvolvida no **capítulo 4.**, tem uma dupla funcionalidade, pois, por um lado, facilita a investigação acerca da relação entre a *computação*, as *estruturas mórficas* e o *risco*, e, por outro lado, permite capturar, em termos matemáticos, as bases sistêmicas da ciência do risco, por via da relação entre os *morfismos* e a abordagem categorial para o *cálculo tensorial*, que permite trabalhar as *teias mórficas* em termos de *functores* e de *estruturas topológicas*.

A principal vantagem da *topologia categorial*, para a matemática do risco, é a sua eficácia na captura das relações sistêmicas subjacentes aos *morfismos*, a partir da linguagem da ciência dos sistemas, por via da relação com estruturas algébricas tensoriais e das estruturas de *simplex* (introduzidas na **secção 4.2.**), o que simplifica o trabalho de ligação entre a ciência dos sistemas e a matemática do risco. No **capítulo 6.**, na **secção 6.4.**, apresenta-se uma breve revisão dos contributos para a *topologia categorial*⁴.

No **capítulo 5.**, o trabalho desenvolvido nos capítulos anteriores é expandido para trabalhar as ligações entre a matemática do risco e a matemática da computação. Na **secção 5.1.**, trabalha-se com uma *formalização categorial* das *máquinas de Turing* com *alfabetos de fita binários*, sendo apresentado um exemplo de um *jogo de apostas* que permite trabalhar os elementos estruturais de uma *situação de risco*, assim como a *computação adaptativa quântica* relacionada com a computação sistémica do risco, por parte de um sistema adaptativo complexo⁵.

Na **secção 5.2.**, o formalismo para as *máquinas de Turing*, introduzido na **secção 5.1.**, é generalizado para lidar com sistemas dinâmicos e hipercomputação, o que permite trabalhar as noções de *estocástico* e de *caos*, a partir de um enquadramento computacional, conectando-se o *caos* com uma noção de *incompressibilidade*, no seio da hipercomputação de sistemas dinâmicos.

Ainda na **secção 5.2.**, é apresentado um exemplo de um modelo de *mapa não-linear*, capaz de fazer emergir padrões de risco de *turbulência multifractal*, sinalizados para os mercados financeiros no **capítulo 2.** Este exemplo permite ilustrar a aplicação do formalismo à captura de padrões de risco, associados à sincronização dinâmica, à ocorrência de *efeitos de Malcolm* e de *criticalidade auto-organizada multifractal*, padrões centrais para a análise do risco nos sistemas económicos e financeiros.

No **capítulo 6.**, são apresentadas as principais conclusões, reflectindo-se acerca das implicações do trabalho desenvolvido e de linhas futuras de investigação que podem ser trabalhadas a partir do mesmo.

4. Breve, pois, trata-se de contributos para a própria *teoria matemática das categorias*, não sendo contributos directos para a matemática do risco.

5. No exemplo do *jogo de apostas*, o sistema considerado é uma economia de mercado.

Capítulo 2. Ciência do Risco e Matemática do Risco

A ciência do risco, conforme foi referido no capítulo anterior, trabalha a noção de risco a partir da sua raiz conceptual na noção de *resicum*, do latim medieval. Assim, na **secção 2.1.**, procede-se à revisão da noção de risco e desta raiz conceptual, assim como da abordagem sistémica assumida pela ciência do risco que trabalha com a noção de *situação sistémica de risco*.

Na **secção 2.2.**, são revistos os elementos centrais da matemática do risco, com ênfase na matemática da medição do risco. A matemática da *modelação de sistemas em situações de risco*, por seu turno, é objecto das restantes secções (**secções 2.3. a 2.6.**). A modelação é apresentada, nestas secções, a partir do problema do comportamento da rendibilidade dos preços de activos financeiros, e da ocorrência de *turbulência multifractal* nesse mesmo comportamento.

Embora se trate de uma área específica de aplicação da ciência do risco, esta é uma área exemplar ao nível da aplicação das principais técnicas de modelação e do cruzamento de diferentes disciplinas, permitindo ilustrar simultaneamente aquilo que constitui a abordagem central da ciência do risco e a evolução das principais ferramentas matemáticas e ramos da matemática agenciados pela matemática da modelação de sistemas em *situações de risco*.

Assim, o problema da *turbulência multifractal*, nas dinâmicas das rendibilidades dos preços nos mercados financeiros, constitui uma das áreas de aplicação em que a base conceptual sistémica transdisciplinar da *ciência do risco* se tem revelado eficaz, e se tem desenvolvido mais, em termos de técnicas que cruzam níveis disciplinares.

Na **secção 2.3.**, é apresentado o enquadramento teórico deste problema, em conexão com a modelação de sistemas em *situações de risco*, é, também, apresentada uma análise ilustrativa a partir de dados históricos de diferentes índices e é desenvolvida uma análise histórica do índice S&P500, dividida por décadas no sentido de se expor a relação entre a natureza e evolução das estruturas económicas e financeiras com os padrões de *turbulência multifractal* observados empiricamente.

Na **secção 2.4.**, por seu turno, avaliam-se as consequências, para a teoria financeira, da ocorrência de *turbulência multifractal* nas dinâmicas das rendibilidades dos preços dos activos financeiros, sendo apresentada a evolução das técnicas de modelação de mercado, em particular as técnicas de *modelação microscópica*, a eficácia destas técnicas na captura dos padrões de risco dos mercados, é avaliada na **secção 2.5.**, em conexão com a última crise financeira.

Na **secção 2.6.**, é apresentada a ligação entre a *modelação microscópica financeira* e a *teoria financeira evolucionária*, revê-se a evolução da modelação microscópica aplicada à economia e finanças, em conexão com a modelação de sistemas em *situações de risco*.

2.1. A noção de risco e a ciência do risco

A noção de risco tem raiz na noção do latim medieval *resicum*, aplicada em contextos associados a actividades marítimas e à lei comercial marítima (Piron, 2004), sintetizando a presença simultânea de incerteza, oportunidades e ameaças numa situação sistémica.

No seio da semiótica, existe alguma indecisão acerca da etimologia de *resicum*. Assumiu-se, no entanto, a partir da informação disponível, que *resicum* teve origem no grego *rizha* com o significado *raiz* (Piron, 2004). O argumento para esta relação genética entre *resicum* e *rizha* resulta do uso do termo *rizha* para referir a raiz de promontórios que ameaçavam os barcos.

Pode, assim, defender-se que a utilização do termo *rizha* poderá ter influenciado a introdução, durante o século XII, da noção de *resicum*, enquanto neologismo latino no direito comercial marítimo (Piron, 2004), sendo, deste modo, a noção de *resicum* utilizada para sinalizar a presença de perigos no mar que ameaçavam os barcos, isto é, enquanto nome para uma situação sistémica em que existem ameaças e incerteza.

O sentido original de *resicum* pode ser encontrado a partir de uma análise dos contextos aos quais a noção foi aplicada e dos termos com os quais ocorria em conjunção. Durante os séculos XII e XIII, a noção de *resicum* foi utilizada no mesmo contexto que outros dois termos do latim clássico, a saber (Piron, 2004): *periculum* e *fortuna*. Ambos os termos (*periculum* e *fortuna*) expressam uma relação entre acontecimentos futuros e os modos como esses acontecimentos afectam os agentes humanos.

Trabalhado a partir da sua raiz em *resicum*, a noção de *risco*, no seio da ciência do risco, conserva o sentido primitivo da noção de *resicum*, sendo aplicável a qualquer sistema que se encontre numa situação em que existe a presença de perigos (*pericula*) e oportunidades para ganhos e perdas (*fortuna*) (Piron, 2004), sinalizáveis no território de acção e de sobrevivência sistémica.

Assim considerada, a noção de risco é um nome para uma situação sistémica concreta ligada ao mecanismo de vida e morte⁶, e na qual os mecanismos homeostáticos de um sistema desempenham um papel projectivo fundamental no que diz respeito à possibilidade de antecipação e adaptação a ocorrências futuras, enraizadas e condicionadas pela configuração da situação sistémica na qual tiveram origem, e que transportam consigo ameaças à integridade sistémica e/ou oportuni-

6. Em termos sistémicos o risco pode ser pensado, conforme Madeira (2008), enquanto operador ontológico fundamental ligado ao mecanismo de vida e morte nos sistemas, veja-se, a este propósito, Madeira (2008), assim como debate ocorrido no grupo “[tt] Postbiota” entre Maria Odete Madeira e James Hughes a propósito do tema e disponibilizado nos websites: <http://postbiota.org/pipermail/tt/2008-September/date.html>, <http://postbiota.org/pipermail/tt/2008-September/003594.html> e <http://www.mail-archive.com/cosmology-mathematics-and-philosophy@googlegroups.com/msg00714.html>.

dades de expansão das condições de sobrevivência do sistema. Uma tal situação sistémica é designada, por *situação de risco*. Uma *situação de risco*, tal como esta noção é trabalhada na ciência do risco, é, assim, uma situação sistémica em que existe incerteza, oportunidades e ameaças.

A computação adaptativa do risco passa pela capacidade de um sistema adaptativo complexo de avaliar, numa dada situação sistémica, as ameaças e as oportunidades. Nos contextos humanos, esta avaliação pode passar, nos casos em que tal seja possível⁷, por uma probabilização de histórias alternativas para a *situação de risco*. A investigação das ferramentas adaptativas, disponibilizadas pela matemática, para a avaliação do risco tem sido objecto de investigação da matemática da medição do risco, que passamos a rever.

2.2. Os dois ramos aplicados da matemática do risco

A matemática da medição do risco é um ramo da matemática do risco. Tal como foi referido no **capítulo 1.**, a matemática do risco tem por objecto o risco, enquanto tal, e por objectivo a investigação matemática do risco a partir da sua origem sistémica, contudo, para além de apoiar a ciência do risco, na investigação do seu objecto, pode-se, ainda, considerar dois ramos que servem uma funcionalidade aplicativa da ciência do risco, ao nível da aplicação do seu corpo conceptual a problemas concretos de avaliação do risco, estes dois ramos são:

1. A matemática da medição do risco;
2. A modelação de sistemas em *situações de risco*.

O primeiro ramo lida com a matemática da medição do risco, visando eficácias na quantificação do risco; o segundo ramo lida com a modelação do comportamento dinâmico de sistemas em contextos de risco, visando eficácias na captura de padrões dinâmicos de risco.

A matemática da medição do risco emergiu como ramo autónomo, no seio da matemática, a partir de uma raiz disciplinar na teoria financeira e na ciência actuarial.

Esta raiz pode ser localizada na transição do problema da decisão (teoria matemática da decisão), em que o risco era um elemento integrante, para o problema da medição (teoria matemática da medição do risco), e em que o risco passou a ser o elemento central. Esta transição iniciou-se com a introdução de uma medida de risco no seio de um problema de decisão por Markowitz ([1959], 1991), marcando o nascimento da teoria da carteira (*modern portfolio theory*) (Haugen, 1997).

⁷. Veja-se a este propósito a reflexão acerca dos limites à probabilização apresentada na **secção 6.2.2.**

Markowitz formulou o problema da decisão acerca das carteiras de investimento, em termos da maximização da rendibilidade esperada e da, simultânea, minimização da variância.

Nesta teoria, a variância da carteira de investimento era utilizada como medida de risco, sendo uma quantidade a ser minimizada por um investidor avesso ao risco.

A utilização explícita de uma medida de risco num problema de decisão, neste caso, na formalização e resolução do problema da gestão de carteiras de investimento, foi essencial para o desenvolvimento do pensamento matemático acerca da medição do risco.

A variância e a sua raiz quadrada, o desvio-padrão (ou medida de volatilidade), foram as principais medidas de risco utilizadas em finanças, até muito recentemente (Jorion, 2007). Contudo, como o parâmetro de volatilidade (o desvio-padrão) mede desvios em relação a um valor central (neste caso, a média), foram propostas novas medidas de risco para medir o risco de perda extrema.

Este facto levou a uma evolução na literatura e práticas financeiras, em parte estimulado pelas crises financeiras que ocorreram desde a década de 1970, assim como por alguns casos mediáticos, a saber: o caso Orange County, o caso Barings, o caso Metallgesellschaft e o caso Daiwa (Jorion, 2007).

Estas crises e estes casos chamaram a atenção do mundo financeiro para a necessidade de controlar o risco de perdas extremas com baixa probabilidade de ocorrência, designado por *risco de cauda* (Yamai e Yoshida, 2001).

Uma das primeiras medidas de *risco de cauda*, a receber atenção generalizada pela comunidade financeira, foi o *value-at-risk* (VaR), tendo sido a principal medida de *risco de cauda* a ser incorporada em sistemas de gestão de *risco de cauda* e a ser integrada no programa regulador da banca, desenvolvido pelo Comité de Basileia (Jorion, 2007).

O passo seguinte, na literatura da medição do risco, veio da fusão da literatura actuarial sobre prémios de seguro com a literatura financeira da gestão do risco, resultando no desenvolvimento das *distorted risk measures* (Jia e Dyer, 1996; Wang, *et al.*, 1997; Machina, 2004). Medidas de risco cuja forma funcional foi desenvolvida a partir da literatura da *utilidade não esperada* (Machina, 2004). A *teoria da utilidade não esperada* é o nome comum atribuído às axiomáticas alternativas à axiomática de von Neumann e Morgenstern ([1944], 1972), tais que, a avaliação das alternativas estratégicas é feita em termos de um funcional que distorce as probabilidades, tornando os pesos de decisão não-aditivos (Machina, 2004). As *distorted risk measures* incorporam estas distorções na avaliação do risco.

Após o surgimento das *distorted risk measures*, a literatura financeira sobre a medição do risco assistiu, desde os finais da década de 1980, e princípios da década de 1990, a um crescimento de formas funcionais diferentes para medidas de risco (Jia e Dyer, 1996; Wang, *et al.*, 1997).

No entanto, alguns problemas centrais permaneceram por resolver, a saber: o problema da formalização matemática da medição do risco e o problema da identificação das propriedades que uma medida de risco deveria satisfazer.

O estudo formal acerca das propriedades desejáveis de uma medida de risco foi expandido com a axiomática, proposta por Artzner, *et al.* (1997; 1999), que deu origem à *teoria das medidas de risco coerentes* e conduziu à autonomização da *teoria das medidas de risco*, com a formação da matemática da medição do risco, enquanto ramo da matemática que tem por objecto de investigação a medição do risco, enquanto tal.

A matemática da medição do risco, enquanto ramo da matemática do risco, não se limita ao campo problemático da economia financeira. De facto, por via da *teoria das medidas de risco coerentes*, a matemática da medição do risco constituiu-se enquanto área de investigação acerca da medição do risco, considerado, este, enquanto tal. Assim, a matemática da medição do risco visa contribuir com ferramentas e metodologias de medição do risco e de avaliação da eficácia das medidas de risco, em qualquer contexto adaptativo, em que seja relevante o seu uso (Gonçalves, 2004).

Na investigação acerca do problema do *risco de cauda*, tornou-se necessário subir no nível de discurso, para lidar com os fundamentos da matemática da medição do risco e, assim, expandi-la na sua generalidade discursiva (Gonçalves, 2004), amplificando a sua eficácia a dois níveis, a saber: ao nível do fornecimento de ferramentas adaptativas relacionadas com a medição do risco e ao nível da investigação das propriedades das medidas de risco.

Gonçalves (2004) contribuiu para o avanço desta investigação, acerca dos fundamentos da matemática da medição do risco, através da proposta de uma linguagem formal, a saber: a linguagem formal $\mathcal{L}_{\text{Risk}}$.

A linguagem $\mathcal{L}_{\text{Risk}}$ sintetiza, no seu formalismo, os elementos centrais daquilo que constitui uma medida de risco, visando uma eficácia disciplinar, no sentido de permitir à matemática da medição do risco um discurso formal desambiguado e autónomo, em relação a contextos adaptativos concretos, favorecendo a generalidade aplicativa própria da matemática da medição do risco.

Esta linguagem formal resultou da identificação, na produção científica acerca da medição do risco, de um elemento central, subjacente às principias abordagens para a medição do risco, a saber (Gonçalves, 2004): *uma relação de ordem de risco*. De facto, uma medida de risco quantifica e, logo, ordena objectos probabilísticos em termos de níveis de risco. Na matemática da medição do risco, estes objectos probabilísticos são as medidas de probabilidade.

Assim, se \mathcal{P} é uma colecção de medidas de probabilidade, uma medida de risco R é definida, no seio da matemática da medição do risco, como (Gonçalves, 2004):

$$R: \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R} \tag{1}$$

o que induz uma ordem, $>_R$, em \mathcal{P} tal que:

$$p >_R q \Leftrightarrow R(p) > R(q) \quad (2)$$

com $p, q \in \mathcal{P}$.

Alternativamente a colecções de medidas de probabilidade, pode trabalhar-se com espaços de probabilidade ou com variáveis aleatórias (Wirch, 1999), as últimas são úteis, em particular, nos casos em que não existe um conhecimento prévio das probabilidades, mas em que é possível a definição de variáveis aleatórias, reflectindo uma avaliação dos ganhos e perdas, de tal modo que seja derivável uma *medida sintéctica de probabilidade*⁸, contudo, esta abordagem não é seguida no seio das abordagens dominantes para a matemática da medição do risco, sendo a definição de uma medida sobre probabilidades efectivas (*physical measures*) a abordagem mais seguida (Wirch, 1999; Gonçalves, 2004).

As probabilidades, por seu turno, tornam-se úteis em casos em que não existe um mapeamento para valores quantitativos de ganhos e perdas com sentido adaptativo, o que ocorre, por exemplo, em contextos de cenarização e de avaliação do risco associado aos cenários, sem que seja possível uma quantificação precisa de ganhos e perdas. Quando se lida com alternativas qualitativas não quantificáveis, o conhecimento das probabilidades torna-se, assim, relevante em termos decisórios.

Gonçalves (2004), reconhecendo que diferentes famílias de medidas de risco têm subjacentes axiomáticas de ordenação de risco próprias, propôs a linguagem formal $\mathcal{L}_{\text{Risk}}$, na qual é relevada a primitividade formal da ordenação sobre a medida de risco. Esta primitividade é sustentável argumentativamente, pois, é o caso que as principais famílias de medidas de risco podem ser derivadas a partir de axiomáticas de ordenação de risco sobre uma colecção de medidas de probabilidade \mathcal{P} .

Isto é, cada medida de risco R pode ser derivada a partir de uma ordenação de risco, ordenação, esta, que restringe a forma funcional da medida de risco e as propriedades fundamentais que a mesma medida exemplifica (Gonçalves, 2004).

Embora o discurso formal de $\mathcal{L}_{\text{Risk}}$ tenha partido da teoria dos conjuntos e da lógica semântica conjuntista, a base relacional mais primitiva é uma base categorial, pois as relações de ordem de risco podem ser expressas, em termos equivalentes, enquanto *morfismos de risco*, cada *morfismo* conectando dois objectos tais que a *origem*, no *morfismo de risco*, é o objecto de maior risco e o *alvo* é o *objecto* de menor risco, em termos formais:

$$p \xrightarrow{>_R} q \quad (3)$$

8. Em termos matemáticos uma tal abordagem pode ser capturada a partir do uso do formalismo da *risk neutral valuation*.

onde a seta da origem para o alvo expressa o *movimento* $p >_R q$ (de maior para menor risco) e a seta do alvo para a origem, expressa o *movimento* $q <_R p$ (de menor para maior risco).

Esta representação de duplas setas, assumidas para o caso geral dos *morfismos*, seguindo a notação de Gonçalves e Madeira (2009), tem uma interpretação sistêmica que é tornada explícita pela *notação tensorial* apresentada no **capítulo 4.**, cujas consequências gerais para a própria *teoria das categorias* serão retomadas no **capítulo 6. (secção 6.5)**.

Deste modo, em vez de se partir de uma coleção de *objectos* \mathcal{P} , ordenável em termos de risco, pode partir-se de uma *teia mórfica*⁹ $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}$ em que a estrutura de ordenação de risco resulta da estrutura de conectividades. Assim, em vez de uma coleção \mathcal{P} à qual se acrescenta uma ordenação de risco $>_R$, parte-se de uma *teia mórfica* que corresponde a um grafo cujos *nós* são *pontos mórficos* correspondentes a medidas de probabilidade¹⁰ alternativas sobre um dado espaço mensurável (Ω, \mathcal{F}) e cujos arcos correspondem às *ligações mórficas*.

Nestas condições, as axiomáticas que determinam famílias de medidas de risco, podem ser expressas a partir de *fórmulas bem formadas (fbfs)* utilizando a estrutura lógica subjacente à *teoria das categorias*. Por seu turno, trabalhando com o formalismo de Gonçalves e Madeira (2009), segue-se que a matemática da medição do risco pode ser trabalhada a partir de um substrato conceptual sistémico, conceptualmente consistente com a ciência do risco.

Tal como a produção teórica, no seio da matemática da medição do risco, pode ser apreendida a partir de um substrato formal categorial, também a matemática da modelação de sistemas em contextos de risco pode ser apreendida a partir de um tal substrato. Pois a transição de estados de cada sistema adaptativo pode ser expressa a partir de um *morfismo*, independentemente da(s) regra(s) de transição de estados (Holland, 1996).

A existência deste substrato formal categorial constitui um facto relevante na procura por uma unidade formal no seio da matemática do risco. Contudo, seria um facto de relevância menor, não fosse a consistência das estruturas categoriais com os fundamentos sistémicos da ciência do risco e a capacidade do *cálculo categorial* para trabalhar os fundamentos da matemática do risco.

São esses fundamentos de que nos ocupamos nos restantes capítulos da tese, conforme objectivo e estrutura de trabalho definida na introdução.

Passamos, assim, de seguida, ao enquadramento da presença de *turbulência multifractal* nas rendibilidades de activos financeiros.

9. Noção introduzida por Gonçalves e Madeira (2009) a propósito dos fundamentos lógicos e sistémicos da teoria das categorias, iremos rever esta noção em maior pormenor quando procedermos à revisão da linguagem categorial \mathcal{L}_{Cat} , enquanto linguagem formal subjacente a uma lógica formal de base sistémica, para a *teoria das categorias*.

10. No caso da medição do risco incidir sobre medidas de probabilidade.

2.3. A *turbulência multifractal* nas dinâmicas das rendibilidades de activos financeiros

A *turbulência multifractal* é característica de uma classe geral de sistemas complexos em regimes turbulentos (Mandelbrot, 1997), sendo a *análise multifractal* generalizável e passível de aplicação em diferentes sistemas complexos em *situações de risco*, logo, a *turbulência multifractal* constitui um problema relevante, quer para a gestão do risco, quer para a ciência do risco.

Mandelbrot (1972) identificou o problema da *turbulência multifractal* e propôs técnicas estatísticas e modelos para capturar essa mesma turbulência. Inicialmente, o trabalho visava modelar a turbulência associada ao comportamento do vento (em particular, as rajadas de vento) e aspectos gerais da intermitência na turbulência (Mandelbrot, 1972; 1974), embora o autor tenha reconhecido, desde o começo, a importância interdisciplinar dos resultados para a análise do risco e, em particular, a sua importância para a economia (Mandelbrot, 1972).

Nos mercados financeiros, a *turbulência multifractal* conduz a variações extremas e a efeitos de escala ao nível da volatilidade que não são capturáveis pelos modelos tradicionais de volatilidade estocástica, em particular, pelos modelos de *heteroscedasticidade condicionada* (Mandelbrot, *et al.*, 1997; Mandelbrot e Hudson, 2004).

O comportamento multifractal nos mercados financeiros deverá ser capturado através de modelos que assumam uma base económica. Este problema é generalizável aos exemplos de comportamento fractal e multifractal na natureza.

Mandelbrot trabalhou com modelos de geradores em cascata, determinísticos ou aleatorizados, para capturar as estruturas multifractais. O caos dissipativo e estes geradores constituíram, assim, os mecanismos de base para a geração de padrões fractais e multifractais (Mandelbrot, 1997).

Contudo, quanto à ocorrência natural de fractais e multifractais, Mandelbrot situou a sua base explicativa em protótipos de geradores, assumindo uma semelhança perceptiva, e trabalhando a partir do gerador de padrão, isto é, sabendo que um sistema apresenta um *scaling fractal* ou um *scaling multifractal*, aplica-se um protótipo gerador desse mesmo *scaling*, independentemente da natureza de base do sistema. Esta metodologia, seguida por Mandelbrot, foi alvo de crítica no seio da física, tendo sido reconhecida a necessidade de desenvolvimento de uma teoria fundamental do fenómeno com uma base sistémica (Bak, [1996], 1999).

Duas conjecturas centrais permitiram o desenvolvimento de uma tal abordagem, a saber (Bak, [1996], 1999): quando um sistema produz padrões fractais, a fonte da fractalidade deverá ser procurada na própria actividade sistémica; nos sistemas complexos, os padrões fractais podem ser o resultado dos processos de auto-organização sistémicos.

Ambas as conjecturas apelam a uma *abordagem bottom-up*. Abordagem, esta, que foi seguida por Bak, Tang e Weisenfeld (1987), com a proposta da noção de *criticalidade auto-organizada*.

Esta noção baseia-se em duas observações empíricas dos sistemas naturais, a saber (Bak, [1996], 1999): sistemas complexos longe do equilíbrio termodinâmico, com oscilações acopladas, podem tender para regimes dinâmicos próximos de transições de fase; perto de pontos de transição de fase (*pontos críticos*) tendem a ocorrer *leis fractais*.

Bak, Tang e Weisenfeld identificaram mecanismos gerais de interacções locais capazes de produzir dinâmicas fractais. *Criticalidade auto-organizada* (SOC, *Self-Organized Criticality*) é, assim, o nome para o fenómeno dinâmico identificado por Bak, Tang e Weisenfeld (Bak *et al.*, 1987; Bak e M. Paczuski, 1995; Bak, [1996], 1999).

A SOC baseia-se no princípio de *auto-organização na criticalidade*, isto é, quando um sistema complexo longe do equilíbrio tende a auto-organizar-se perto de regimes tensionais de transição de fase, então, a região perto da *criticalidade* torna-se um atractor dinâmico, emergente a partir da própria actividade sistémica, sendo as assinaturas fractais e multifractais uma consequência da *auto-organização na criticalidade*.

A SOC tende a emergir em sistemas com interacções acopladas, e com respostas adaptativas, dependentes de níveis de energia. A noção de *sincronização* é uma noção dinâmica central para o entendimento dos fenómenos de *criticalidade auto-organizada*. As dinâmicas de sincronia e assincronia, em sistemas oscilatórios acoplados, intersectam-se com o mecanismo de base identificado por Bak, Tang e Weisenfeld, conforme foi sublinhado por Strogatz (2003).

Uma característica dos processos de SOC é a ocorrência de leis emergentes de invariância de escala, resultantes dos processos de auto-organização sistémica.

A diferença central, entre modelos de sistemas complexos que produzem SOC e modelos baseados na modelação estocástica macroscópica, reside no facto de que a modelação estocástica macroscópica encerra a invariância de escala nas suas equações, através de um mecanismo já conhecido, como sendo gerador de invariância de escala, a abordagem é *top-down*. Assim, no caso da matemática financeira, trabalha-se com um passeio aleatório com invariância de escala fractal ou multifractal, dependendo do modelo, e assume-se a sua aplicação *ab initio*.

No caso dos modelos baseados na SOC, a invariância de escala emerge a partir das relações sistémicas fundamentais, não é assumida de início, não se parte de um mecanismo global gerador de invariância de escala, parte-se, sim, de um modelo do sistema que trabalha com um conjunto de regras de interacção fundamentais, sendo que a SOC ocorre quando o sistema se auto-organiza num regime dinâmico de invariância de escala.

A ocorrência de multifractalidade, enquanto propriedade emergente, identificável em determinadas quantidades dinâmicas que caracterizam um sistema complexo, constitui um caso particular de SOC designado por MSOC (*multifractal self-organized criticality*) (Madeira e Gonçalves, 2009).

Em termos matemáticos, a multifractalidade, enquanto propriedade, pode ser capturada a partir do formalismo dos expoentes de Hölder (Tricot, 1999).

Considerando, assim, uma variável dinâmica $g(t)$, representando t o tempo, os expoentes de Hölder permitem avaliar o comportamento de escala local, assim como a irregularidade da magnitude de variação de g , entre dois momentos t' e t , magnitude, esta, que denotamos por $v(t', t)$, sendo $v(t', t)$ definida como:

$$v(t', t) = |g(t') - g(t)| \quad (4)$$

Se $g(t)$ for *hölderiana* de expoente H , então, temos (Tricot, 1999):

$$v(t', t) \leq c(t)|t' - t|^H \quad (5)$$

se $c(t)$ for uma constante \bar{c} , obtemos, para $\delta = t' - t$:

$$v(t', t) \leq v(\delta) = \bar{c} \times |\delta|^H \quad (6)$$

Assim, temos:

$$\ln(v(\delta)) = \ln(\bar{c}) + H \ln(|\delta|) \Leftrightarrow H = \frac{\ln\left(\frac{v(\delta)}{\bar{c}}\right)}{\ln(|\delta|)} \quad (7)$$

Considerando uma análise local, com $\delta \rightarrow 0$, os expoentes de Hölder locais são definíveis como (Calvet e Fisher, 2002):

$$\alpha(t, \delta) = \sup \{ \beta \geq 0: |g(t + \delta) - g(t)| = O(|\delta|^\beta), \text{ com } \delta \rightarrow 0 \} \quad (8)$$

Assumindo um intervalo de tempo $[0, T]$, e dividindo o mesmo em $N_k = b^k$ intervalos de tamanho $\delta_k = b^{-k}T$, o expoente de Hölder local de granularidade grossa, associado ao subintervalo $(t_i, t_i + \delta_k)$, é definido por (Calvet e Fisher, 2002):

$$\alpha(t_i, \delta_k) \cong \frac{\ln(|g(t_i + \delta_k) - g(t_i)|)}{\ln(\delta_k)} \quad (9)$$

esta operação gera uma sequência $\{\alpha(t_i, \delta_k)\}$, de N_k expoentes locais de granularidade grossa.

Os expoentes de Hölder de granularidade grossa permitem avaliar o comportamento de escala de $v(t', t)$ a uma escala de tempo de $\delta_k > 0$. De facto, substituindo (4) em (9) temos:

$$\alpha(t_i, \delta_k) \cong \frac{\ln(v(t_i + \delta_k, t_i))}{\ln(\delta_k)} \quad (10)$$

logo:

$$v(t_i + \delta_k, t_i) \cong \delta_k^{\alpha(t_i, \delta_k)} \quad (11)$$

No caso dos mercados financeiros, considerando as rendibilidades logarítmicas, para uma escala de tempo δ_{\min} :

$$r(t, \delta_{\min}) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-\delta_{\min}}) \quad (12)$$

em que P_t representa o preço do activo em t e $P_{t-\delta_{\min}}$ representa o preço do activo em $t - \delta_{\min}$, dadas as resoluções $\delta_k > \delta_{\min}$, temos, para os expoentes de Hölder locais de granularidade grossa:

$$\alpha(t_i, \delta_k) \cong \frac{\ln(|r(t_i + \delta_k, \delta_{\min}) - r(t_i, \delta_{\min})|)}{\ln(\delta_k)} \quad (13)$$

Considere-se, agora, para o caso geral da variável dinâmica $g(t)$, α_{\max} o valor mais elevado da sequência $\{\alpha(t_i, \delta_k)\}$, introduzida acima, e α_{\min} o valor mais baixo, obtém-se um intervalo $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, dividindo este intervalo em pequenos subintervalos de comprimento ε (Calvet e Fisher, 2002), e denotando o número de expoentes locais de granularidade grossa, contidos em $(\alpha, \alpha + \varepsilon]$, por $N_k^\varepsilon(\alpha)$, o limite, seguidamente apresentado, representa uma densidade normalizada de probabilidade de expoentes locais de Hölder, designado por *large deviation multifractal spectrum*, ou *large deviation spectrum* (LDS), (Mandelbrot, 1989; Calvet e Fisher, 2002; Gonçalves e Gonçalves, 2007):

$$f(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{\ln(N_k^\varepsilon(\alpha))}{\ln(b^k)} \right\} \quad (14)$$

O método tradicional para computar este espectro é baseado numa computação de histograma, o que conduz a problemas, principalmente no que se refere à escolha da partição (Gonçalves e Gonçalves, 2007).

O software Fraclab, que utilizamos na presente tese, por seu turno, trabalha com uma alternativa que calcula *kernels* suaves, produzindo resultados mais precisos do que as aproximações côncavas ao espectro multifractal, designadas por espectro de Legendre, obtendo-se, também, bons resultados para processos que diferem dos processos puramente multiplicativos, tradicionalmente utilizados para produzir estruturas dinâmicas multifractais (Gonçalves e Gonçalves, 2007). O algoritmo trabalha, neste caso, com um intervalo de tempo redefinido de $[0, T]$ para $[0, 1]$, sendo que, para cada nível de resolução k , se considera os 2^k intervalos diádicos que definem uma partição de $[0, 1]$. Assim, temos $\delta_k = 2^{-k}$.

A diferença entre o comportamento monofractal e o comportamento multifractal reside no facto de que, no caso monofractal, a dinâmica do sistema é dominada por um único expoente H global, os expoentes de Hölder locais tendem a situar-se, deste modo, com uma elevada probabilidade perto de H , o que significa que H é a moda de $f(\alpha)$, dominando o espectro como um pico concentrado (baixa dispersão do espectro). No caso multifractal, o espectro não é tão concentrado, existindo um intervalo de valores que indicam a presença de *multiscaling*. Em termos gerais, o espectro multifractal tem uma forma côncava, sendo a amplitude do espectro indicativa da presença de *multiscaling*, isto é, de um comportamento multifractal.

Numa qualquer análise, que trabalhe com os expoentes de Hölder de granularidade grossa, cada um dos expoentes $\alpha(t_i, \delta_k)$ fornece uma medida das irregularidades locais e dos padrões de risco associados à *turbulência multifractal*.

Os valores dos expoentes podem ser interpretados à luz de uma noção de derivada. Assim, para $\alpha(t_i, \delta_k) = 1$, assumindo δ_k pequeno, e um processo em tempo contínuo para o processo geral g (Mandelbrot, 1997):

$$|g(t_i + \delta_k) - g(t_i)| \cong \dot{g} \delta_k \quad (15)$$

o que corresponde ao caso de uma curva diferenciável, sendo \dot{g} a derivada em ordem ao tempo.

Assim, considerando o espectro multifractal $f(\alpha)$, se tivermos $f(\alpha) > 0$ para $\alpha < 1$, o processo $g(t)$ apresenta uma estrutura não-diferenciável (Mandelbrot, 1997, p.185), sendo que estamos perante um comportamento dinâmico emergente que indica a presença de saltos a todas as escalas (Vörös *et al.*, 2003).

Quanto mais α_{\min} e α_{\max} se aproximam de 1, mais a estrutura se aproxima de uma geometria diferenciável.

Quando $f(\alpha) > 0$ para $\alpha > 1$, existem comportamentos de escala em que as flutuações ocorrem de modo esparsa com fenómenos de explosões súbitas de volatilidade e turbulência (Rieidi, 1999; Vörös *et al.*, 2003), regressaremos a este ponto mais adiante na presente secção.

Na análise do LDS, existem dois elementos a ter em atenção, a saber: a amplitude do espectro ($\alpha_{\max} - \alpha_{\min}$) e a moda. Quanto maior for a amplitude do espectro, maior é a multifractalidade do sinal. Nos mercados financeiros, espectros com maior amplitude tendem a ocorrer, como veremos na análise do índice S&P500, em períodos de transição entre diferentes estruturas económicas e financeiras, assim, a multifractalidade tende a aumentar em períodos de transição.

A moda corresponde ao valor com a densidade máxima de $f(\alpha)$ e a região perto da moda corresponde a um intervalo de *scaling* mais frequente¹¹.

11. Considerando, em particular, um intervalo centrado no valor de α que maximiza $f(\alpha)$.

No **anexo B.**, apresentamos os espectros multifractais (LDS) para as rendibilidades logarítmicas diárias das acções das empresas IBM, Microsoft, General Electric (GE), e Honda Motor Co ADR, para o período de 02-01-1990 a 13-05-2009 (**figura 4.**). Apresentamos, também, os espectros multifractais (LDS) para as rendibilidades logarítmicas diárias do índice financeiro português¹² PSI-20 (para o período de 25-01-2000 a 13-05-2009) e do índice francês¹³ CAC 40 (para o período de 01-03-1990 a 13-05-2009) (**figura 5.**), juntamente com uma análise histórica decomposta em várias décadas para as rendibilidades diárias logarítmicas do índice americano¹⁴ S&P 500, obtidas para o período de 03-01-1950 a 13-05-2009 (**figuras 6. e 7.**)¹⁵. As cotações analisadas, em todos os casos, são cotações diárias ajustadas em relação à distribuição de dividendos e *splits*.

Considere-se, em primeiro lugar, o caso das acções, na **figura 4.** do **anexo B.**, todos os espectros apresentam uma regularidade de estrutura geral, a saber: a moda situa-se perto de 0.4, indicando uma elevada irregularidade na trajectória das rendibilidades; existe um decaimento com uma mudança de concavidade no final, sendo que dois dos espectros (Microsoft e GE) apresentam valores de $f(\alpha) > 0$ para $\alpha > 1$.

A alteração de concavidade de $f(\alpha)$ no final, com uma região convexa seguida de uma nova concavidade para valores de α próximos da cauda superior do espectro, em cada um dos casos, poderá estar ligada à sobreposição de dois espectros, um com uma moda próxima de 0.4 (espectro dominante) e outro com uma moda próxima de uma região de expoentes, correspondente a uma dinâmica com menor irregularidade. No caso da Microsoft e GE, contudo, a interpretação é distinta, pois a sobreposição é tal que a segunda moda se encontra numa região de expoentes de Hölder superiores a 1.

Os casos em que $f(\alpha) > 0$, para $\alpha > 1$, constituem casos atípicos (Rieidi, 1999), pois está a ser sinalizada, pelo LDS, a presença de um processo que tende a produzir maior irregularidade nas trajectórias para escalas mais longas de tempo e menor irregularidade para escalas mais curtas de tempo, assim, em termos de comportamento dinâmico, expoentes superiores a 1 tendem a ocorrer quando o processo apresenta saltos e explosões súbitas de actividade (Rieidi, 1999).

Esta classe de *scaling* foi, por exemplo, identificada na investigação acerca da intermitência a diferentes escalas no comportamento dos campos magnéticos do plasma (Vörös *et al.*, 2003), também tendo sido identificada por Rieidi (1999) noutros sistemas.

12. O nome PSI-20 é derivado de *Portuguese Stock Index* (PSI).

13. O nome CAC 40 é derivado de *Cotation Assistée en Continu* (CAC).

14. O nome S&P 500 é derivado de *Standard & Poors* (S&P). Em qualquer dos índices, o número que figura no nome, corresponde ao número de empresas que compõem o índice.

15. Dado ser composto pelas quinhentas empresas americanas com maior impacto económico e financeiro, o índice S&P 500 pode ser utilizado enquanto indicador do comportamento da própria economia americana. De facto, como será tornado evidente na análise quantitativa e histórica, os perfis e alterações dos *espectros multifractais* do S&P 500, ao longo das décadas em análise, reflectem a estrutura e evolução da economia americana.

Os dois índices europeus, PSI-20 e CAC 40, também, apresentam uma evidência de sobreposição de espectro, embora mais suave (**figura 5.** do **anexo B.**). No caso do PSI-20, o expoente dominante aproxima-se de 0.5, o que indica uma maior regularidade, contudo, o mesmo índice apresenta evidência de sobreposição de espectro, assim como $f(\alpha) > 0$ para $\alpha > 1$, sinalizando a ocorrência súbita de explosões de volatilidade e de saltos.

A moda do CAC-40 está centrada numa região inferior (embora próxima) de 0.4, o que é indicativo de uma elevada irregularidade na variação absoluta das rendibilidades logarítmicas.

Assim, em termos de perfis de risco, a *turbulência multifractal* nos mercados financeiros apresenta uma tendência para um LDS com uma moda próxima de 0.4, sinalizando uma elevada irregularidade nas variações de rendibilidade, com um risco elevado de saltos repentinos. Por outro lado, o caso de *scaling* anómalo, com valores de expoentes de Hölder superiores a 1, indica a ocorrência de transições de uma fase laminar para uma fase turbulenta, caracterizada por um *build up* de turbulência com risco de elevados saltos.

Considerando o caso do S&P 500, verifica-se que o espectro multifractal pode alterar-se ao longo do tempo, dependendo de elementos estruturais económicos e financeiros.

Assim, relativamente à década de 1950, as rendibilidades logarítmicas diárias do índice S&P 500 apresentam um espectro multifractal, com uma moda entre 0.4 e 0.45 (**figura 6.** do **anexo B.**), o que é indicativo de um perfil típico dos mercados financeiros, como vimos acima.

A década de 1950 foi uma década de expansão da economia americana, resultante do avanço da indústria americana (especialmente no que diz respeito ao complexo industrial militar), após a Segunda Guerra Mundial e com o começo daquilo que Toffler (1984) designou por *terceira vaga*, referindo-se à sociedade pós-industrial, na qual existe um predomínio da economia dos serviços sobre a economia industrial.

O espectro multifractal para a década de 1960, por seu turno, apresenta uma grande amplitude (**figura 6.** do mesmo anexo), o que poderá ser indicativo de transformações estruturais, ocorridas durante essa década, no seio da economia americana e mundial. De facto, após a Segunda Guerra Mundial, os EUA tornaram-se num centro económico e financeiro mundial, com o dólar como o padrão em relação ao qual as diferentes moedas eram avaliadas a uma taxa de câmbio fixa, padrão, este, que ficou estabelecido nos Acordos de Bretton Woods, antes do final da Segunda Guerra Mundial.

A elevada amplitude do espectro multifractal poderá estar relacionada com a natureza da década de 1960, enquanto década de transição, entre uma fase de prosperidade económica estável nos EUA, que caracterizou a década de 1950, e uma fase de crises económicas, que caracterizou a década de 1970.

O sistema de Bretton Woods garantiu uma estabilidade cambial, até ao final da década de 1960. Contudo, após 1960, o crescimento económico fora dos EUA, juntamente com a Guerra do Vietname conduziram a um défice na balança

comercial do país, déficit, este, que tinha de ser coberto pelos restantes países através da compra de moeda americana, de modo a manter fixas as taxas de câmbio em relação ao dólar, conforme os Acordos de Bretton Woods (Cooper, 2008). Este ciclo conduziu a uma diferença crescente entre os dólares em circulação e os stocks de ouro nas reservas norte-americanas. Assim que se tornou evidente que os EUA não conseguiriam garantir a convertibilidade do dólar em ouro, os governos dos restantes países começaram a pedir a conversão em ouro dos dólares que haviam comprado (Cooper, 2008).

Ciente de que este pedido de conversão das reservas externas em ouro poderia despoletar uma espiral de corrida aos bancos, Nixon anunciou, em Agosto de 1971, o encerramento da indexação do dólar ao ouro, optando-se, assim, pela desvalorização do dólar, o que marcou o fim do padrão ouro-dólar.

Com o fim da convertibilidade do dólar em ouro, iniciou-se um novo regime monetário, permitindo o desenvolvimento de políticas monetárias mais ágeis, o que teve como consequência a abertura a situações de risco económico e financeiro, caracterizadas por cenários de baixo crescimento e de inflação elevada (Cooper, 2008), o que, por seu turno, explica que a década de 1970 tenha sido uma década de elevada turbulência nos mercados financeiros. Estes factores deixaram uma marca no espectro multifractal das rendibilidades logarítmicas diárias do índice S&P 500, como é visível na **figura 6.** do **anexo B.**, em particular, se se comparar o salto ocorrido na moda entre a década de 1960 (moda situada no intervalo entre 0.45 e 0.5) e a década de 1970 (moda situada no intervalo entre 0.35 e 0.4).

A análise multifractal revela, deste modo, uma maior turbulência na década de 1970, o que é consistente com as alterações estruturais ocorridas durante essa mesma década.

A dominância do espectro numa região de maior turbulência, em 1970, pode ser explicada por um aumento da instabilidade, resultante do fim de Bretton Woods, da crise petrolífera e de novos fenómenos inflacionários (Kindleberger, 2000). A alteração estrutural do sistema implicou uma alteração da própria teoria do mercado, devido ao surgimento de novas dinâmicas económicas, em particular, no que diz respeito ao perfil das crises inflacionárias (Cooper, 2008). Seguindo a expressão geral para a lei de escala (11), o aumento da turbulência, associada a um espectro com moda numa região de elevada irregularidade, implica que as escalas de tempo curtas são caracterizadas por maiores velocidades médias de variações da rendibilidade, do que as escalas de tempo mais longas, emerge, assim, um sistema homeostático de mercado activo na auto-regulação do excesso de volatilidade de curto prazo.

O espectros multifractais para as três décadas seguintes (1980, 1990 e 2000 a 2009) são apresentados na **figura 7.** do mesmo anexo.

A década de 1980 apresenta uma estrutura atípica. A moda situa-se próximo de 0.5, o que indica uma maior regularidade na dinâmica, contudo a amplitude do espectro é superior à de 1960, com expoentes de Hölder superiores a 1, sendo que existe uma alteração na concavidade, evidenciando uma sobreposição de espectros na região abaixo de 0.2.

Assim, a década de 1980, segundo a análise multifractal, constituiu uma década de transição económica com períodos de maior regularidade e de prosperidade económica e financeira, interrompidos por períodos de elevada turbulência de mercado.

Esta análise quantitativa é confirmada por uma análise histórica. De facto, a década de 1980 foi uma época que ainda herdou turbulência económica e financeira vinda de 1970, mas houve um desenvolvimento dos mercados financeiros, e uma expansão económica e financeira.

No início da década de 1980, a elevada volatilidade foi reconhecida como um problema, tendo constituído um argumento a favor de deixar que os mercados se auto-regulassem e, assim, espontaneamente resolvessem o problema da volatilidade, um argumento decorrente das teses monetaristas de Milton Friedman (Morris, 2008).

Uma característica central dos mercados com crises de turbulência é a de uma incerteza dinâmica relativamente às variáveis macroeconómicas fundamentais. No caso da década de 1970, a incerteza crescente em relação à inflação e à própria crise traduziu-se numa maior volatilidade nas taxas de câmbio, taxas de juro, preços das mercadorias (*commodities*) e cotações do mercado de capitais.

O argumento de Friedman defendia que o problema da inflação poderia ser resolvido, se se controlasse somente a quantidade de moeda em circulação, deixando que os mercados se auto-regulassem.

Este argumento decorre, em particular, da tese de Friedman de que a inflação poderia ser controlada apenas com o controlo da quantidade de moeda, de tal modo que se a Reserva Federal se limitasse a assegurar que a quantidade de moeda crescesse aproximadamente ao mesmo ritmo da economia, então os preços manter-se-iam estáveis (Morris, 2008).

Contudo, as medidas de controlo monetário, implementadas por Volcker, utilizadas para controlar a circulação de moeda e contrariar tentativas por parte das instituições financeiras para evitar as restrições, conduziram a problemas. Em Janeiro de 1981, os fundos federais tinham atingido o nível de 19%, enquanto as obrigações do Tesouro a três meses ofereciam uma taxa de juro de 20%. A economia americana entrou em recessão no segundo trimestre. Em 1982, o crescimento do PIB teve uma taxa negativa de -1.9% (Morris, 2008). No entanto, o apoio às medidas de Volcker por parte dos dirigentes das empresas e dos dirigentes sindicais continuou.

Ainda em 1982, a tendência inflacionária terminou, mantendo-se constante o *Índice de Preços no Consumidor* (IPC), durante o segundo semestre de 1982. No final do ano, a taxa dos fundos federais desceu para cerca de 8.7%. O crescimento foi quase nulo no quarto trimestre, tendo subido para cerca de 4.5% em 1985 e para cerca de 7.5% em 1984 (Morris, 2008). Em 1985, a taxa de inflação estava controlada tendo atingido um valor de 1.9%, o valor mais baixo em vinte anos. A estabilidade de preços havia sido alcançada.

Em termos de dinâmica, a primeira metade da década de 1980 foi, assim, marcada, ainda, por um período de elevada volatilidade, em continuidade com a década de 1970, com tentativas por parte da Reserva Federal e da administração Reagan para controlarem a inflação e garantirem a estabilidade de preços, a qual foi atingida no final dessa primeira metade.

O espectro multifractal evidencia as marcas desta evolução económica e financeira, conforme pode ser verificado a partir de uma decomposição da década de 1980 em duas metades (**figura 8. do anexo B.**). Na primeira metade da década (de 02-01-1980 até 31-12-1985), a moda situa-se ainda na mesma região que o espectro da década de 1970, embora os valores de α_{\min} e α_{\max} sejam maiores do que no caso de 1970, o que evidencia uma fase de transição na estrutura económica e financeira. Ocorre, também, uma sobreposição de *scaling multifractal*, com uma concentração de massa de espectro maior na cauda superior.

O espectro permite evidenciar a natureza da primeira metade da década de 1980, enquanto década de transição económica que herdou a elevada turbulência e volatilidade da década de 1970. Na mesma figura, encontra-se o espectro para a segunda metade da década (02-01-1986 a 31-12-1989), o qual evidencia uma forma atípica. Existe, por um lado, um deslocar do espectro para uma região de maior regularidade, com uma moda próxima de 0.55, por outro lado, existe a presença de uma cauda longa e pesada na região de maior irregularidade com um alargamento da amplitude do espectro ($\alpha_{\max} - \alpha_{\min}$), sinalizando um aumento da multifractalidade na segunda metade da década de 1980.

Para compreender este fenómeno, torna-se necessário considerar em maior detalhe as transformações ocorridas durante a segunda metade da década sob análise.

Uma análise subsequente, feita ao período de 1986 a 1989, permitiu-nos identificar dois subperíodos com perfis de *scaling* distintos, a saber: o subperíodo de 02-01-1986 a 22-12-1987 e o subperíodo de 23-12-1987 a 31-12-1989.

Na **figura 9. do anexo B.**, apresentamos os espectros para os dois subperíodos. Como pode ser verificado na figura, o primeiro subperíodo foi caracterizado por um espectro multifractal com uma amplitude muito larga, e com moda entre 0.6 e 0.7. Embora a moda se situe numa zona de maior regularidade dinâmica, essa região é pouco representativa do *scaling*, pois a amplitude do espectro é muito larga, o que significa que o primeiro subperíodo pode ser sinalizado como um período de transição económica.

A natureza deste *scaling* é consistente com uma análise histórica, pois tinha-se travado a crise herdada de 1970, na primeira metade da década, passando para uma nova fase económica e financeira de transformação e reestruturação do mercado. Os mercados financeiros ganharam força, nos EUA, sob a influência da inovação financeira que começava a desenvolver-se nessa altura, em particular, no que diz respeito aos mercados de derivados (alimentados em grande parte pela sua eficácia enquanto instrumentos de *hedging* (Smithson *et al.*, 1995)).

A dinâmica dos mercados financeiros, para o período que se seguiu a 1985, foi uma dinâmica com elevada persistência, cuja origem pode ser encontrada no comportamento de sincronização otimista especulativa dos agentes. A seguinte descrição de Morris ilustra eficazmente a natureza de um mercado com moda do espectro multifractal superior a 0.5, e elevada dispersão do mesmo espectro, permitindo compreender a origem comportamental deste regime dinâmico (Morris, 2008, p.45):

“Os mercados accionistas, que estavam em estado comatoso, ganharam vida (...) A avaliar por todos os padrões históricos, as acções tinham preços agressivos. São as pistas para os deuses do mercado aparecerem no cume de uma montanha e anunciarem o fim dos negócios duvidosos. Os investidores racionais investiriam menos e procurariam consolidar os valores realizados (...) Em vez disso, os mercados enloqueceram. Os ganhos da primeira onda de negócios eram tão espectaculares que os grandes investidores, como os fundos de pensões e os legados (fundos constituídos com doações a instituições), gritavam para arranjar lugar no comboio, enquanto os novos fundos se multiplicavam como baratas (...) os mercados financeiros oferecem oportunidades de ganhos muito grandes e muito rápidos, atraindo operadores brilhantes que utilizam dinheiro emprestado pelos bancos (...) Com cada vez mais dinheiro à procura de negócios, as estruturas tornaram-se muito mais complicadas, com títulos em cima de títulos. Um dos preferidos foram as obrigações PIK (*payment in kind*/pagamento em géneros) – se não se fizesse um pagamento, o credor receberia mais obrigações. Em Wall Street brincava-se com a «espiral da morte» – os incumprimentos repetidos levavam à emissão de cada vez mais PIK (...) A década da ganância, que foi como esta febre de negócios passou a ser conhecida (...)”

O pico especulativo ocorreu em 1987 com um *crash* a 19 de Outubro de 1987. A variação diária logarítmica do S&P500 em 14 de Outubro havia sido de cerca de -0.03 , em 15 de Outubro foi cerca de -0.024 , em 16 de outubro foi de cerca de -0.053 , em 19 de Outubro foi de cerca de -0.229 . A soma dos quatro dias resulta numa variação logarítmica de cerca de -0.336 .

O *crash* de 19 de Outubro de 1987 está incluído no primeiro subperíodo em análise. Este *crash* é central para a ciência do risco aplicada às finanças, pois permite compreender a natureza do risco em mercados com elevada multifractalidade e moda numa região de maior regularidade (moda do LDS superior a 0.5).

Quando um espectro apresenta uma moda que se situa numa região de maior regularidade (moda superior a 0.5) e, simultaneamente, uma elevada amplitude com α_{\min} perto de 0.1 e α_{\max} superior a 1, estamos perante um mercado que pode apresentar períodos de regularidade dinâmica com manutenção de condições de risco, mas que podem transformar-se rapidamente em períodos de elevada volatilidade, ou ainda em períodos com *volatility buildup* e saltos súbitos. Uma das características centrais do *crash* de 1987 foi, precisamente, a sua ocorrência súbita

e difícil de explicar a partir de *market fundamentals*, conforme sinalizado por Greenspan (2007). Um mercado com um espectro com uma moda numa região de regularidade e espectro com menor amplitude não apresenta um risco tão elevado.

No caso em que o espectro tem uma amplitude baixa, a persistência tende a traduzir-se naquilo que Vaga (1990) designa por *mercados coerentes*, isto é, são mercados em que ocorrem períodos sustentados de alta ou de baixa, com volatilidade baixa e lenta.

No caso em que o espectro tem uma amplitude elevada, tendem a ocorrer amplificações do comportamento dos *fundamentals*, com flutuações elevadas e saltos, o mercado pode gerar um comportamento de euforia, com uma amplificação das expectativas positivas, seguido de pânico. Assim, as bolhas, os *crashes* e as crises financeiras são mais prováveis.

A década de 1990 e o período de 2000 a 2009 aproximam-se bastante entre si, em termos de espectro, embora o espectro de 2000 a 2009 tenha uma amplitude mais curta, do que o de 1990, o que poderá ser devido à natureza da década de 1990 enquanto período de transição de uma economia financeira com ligações internacionais, mas centrada nalgumas praças financeiras com maior liquidez, para uma economia financeira com interconectividade densa global e com *online trading*.

O espectro multifractal de 2000 a 2009 é indicativo de uma estabilidade estrutural de uma estrutura económica e financeira planetária, esta estabilidade não deverá ser confundida com uma estabilidade dinâmica ou com mais baixo risco, a dinâmica é instável, o espectro multifractal indica uma dominância de um regime com turbulência elevada, e o risco é mais elevado porque a interconectividade entre os activos e praças financeiras é maior, o que significa que as crises, quando ocorrem, ocorrem para a totalidade do ecossistema financeiro global. A maior interconectividade cria, também, correlações dinâmicas resultantes de interconexões entre activos, conduzindo a dispersão e contaminação do risco, como ocorreu com a *subprime* (regressaremos a esta questão na próxima secção).

O sistema torna-se, assim, mais sensível a crises, mas esta maior sensibilidade às crises, e o maior risco de colapso do sistema por via de uma crise, é consistente com a natureza do sistema de economia global em que vivemos. Em termos de desenvolvimento das forças produtivas estamos no seio de um período de afirmação em pleno de uma estrutura sistémica económica e financeira, a saber: o sistema económico planetário.

A crise actual confrontou o sistema financeiro e a *Federal Reserve* com o risco de colapso a 18 de Setembro de 2008, quando a *Federal Reserve* registou uma corrida aos levantamentos electrónicos, com cerca de 550 biliões de dólares a serem levantados numa questão de horas (Gonçalves, 2009).

O Tesouro injectou um montante de 105 biliões de dólares para compensar, mas rapidamente se concluiu que este montante era insuficiente para travar a vaga de levantamentos, pelo que estava a ocorrer uma corrida electrónica aos bancos, em plena crise financeira.

Decidiu-se, então, encerrar as contas e anunciar uma garantia de 250 mil dólares por conta, para impedir que o pânico se propagasse à totalidade da rede financeira. Se esta medida não tivesse sido implementada, estimava-se que na tarde de 18 de Setembro, 5.5 triliões de dólares teriam sido levantados do sistema monetário dos EUA, o que, segundo as autoridades financeiras americanas, teria conduzido ao colapso da economia americana, e no prazo de 24 horas a economia mundial teria colapsado (Durden, 2009; Gonçalves, 2009). Segundo Durden (2009), teria sido o fim do nosso sistema económico e político tal como o conhecemos.

Este caso escapou à atenção dos *media* até que Paul Kanjorski revelou estes factos na C-Span (Durden, 2009), explicando como a Federal Reserve informou os membros do Congresso acerca da corrida aos bancos e da natureza dessa corrida. De acordo com Kanjorski, o levantamento de 550 biliões de dólares ocorreu durante um período de cerca de uma ou duas horas, tendo sido estimado, por Bernanke e Paulson, o colapso do sistema económico americano para as duas da tarde e do sistema económico mundial num prazo de vinte e quatro horas, caso algo não fosse feito (Durden, 2009).

A análise por décadas dos espectros multifractais do S&P 500 permitem identificar períodos de estabilidade estrutural de afirmação de determinadas organizações estruturais das forças produtivas, e períodos de transição. O marcador central é a amplitude do espectro, quanto mais largo é o espectro maior a diversidade de *scaling local*, o que indica uma expansão da diversidade de *scaling* multifractal, esta expansão tende a caracterizar períodos de transição da organização económica e financeira, quando a amplitude do espectro é menor, com α_{\max} e α_{\min} mais próximos da moda, o período é caracterizado por uma maior estabilidade da organização económica e financeira.

Geralmente, após uma década de estabilidade estrutural, tende a ocorrer uma transição para um novo período. Encontramos, presentemente, as raízes da próxima transição económica e financeira, na indústria aeroespacial que se está a desenvolver. Durante a década de 2010 a 2020, se o sistema não colapsar, poderá ocorrer uma transição de uma economia baseada numa interconectividade planetária, para uma interconectividade interplanetária. O projecto de expansão da *internet* para o espaço, recentemente iniciado pela NASA, é um indicador de uma expansão da interconectividade planetária para além do planeta.

A vulnerabilidade do sistema económico e financeiro a crises, e o risco de colapso que se tornou evidente com a última crise, exigiram uma reflexão por parte da comunidade científica e exigem que se considere a natureza e consequências da turbulência multifractal nos mercados financeiros.

Passa-se a abordar esta última questão para, seguidamente, se rever as consequências da última crise financeira sobre a comunidade científica e a modelação do risco no seio da teoria financeira.

2.4. Consequências para a teoria financeira da *turbulência multifractal* nas dinâmicas das rendibilidades de activos financeiros

A presença de turbulência multifractal nas rendibilidades logarítmicas dos activos financeiros constitui um problema para a teoria financeira, assim como para os próprios mercados. Para a teoria financeira, a presença de turbulência multifractal tem implicações sobre a abordagem tradicional baseada na ausência de arbitragem e completude de mercados, dado que a completude não se encontra mais garantida (Pochart, 2003).

A condição de completude pode ser formalmente expressa, no seio da abordagem da *risk neutral valuation*, em termos da existência de uma única *medida de martingala equivalente neutra ao risco* (*Risk Neutral Equivalent Martingale Measure*, RN-EMMQ), não se verificando esta condição para um mercado incompleto (Focardi e Fabozzi, 2004), o que tem consequências na avaliação financeira, dado que, num mercado completo, a avaliação neutra ao risco pode ser utilizada enquanto ferramenta de avaliação, de modo a obter preços justos para os activos financeiros, sob condições de ausência de oportunidades de arbitragem, assim como permite identificar oportunidades de arbitragem, se estas existirem.

A completude também se encontra relacionada com a gestão do risco, no que diz respeito à existência de instrumentos financeiros, disponíveis para a transferência de risco (Focardi e Fabozzi, 2004), isto é, no que diz respeito à existência de instrumentos que permitem cobrir qualquer risco transaccionável. Neste sentido, a questão da completude de mercado e da arbitragem são de elevada importância para a indústria financeira.

As estratégias de *hedging* (dinâmico) que os investidores podem implementar e a capacidade para construir *replicating portfolios* situam-se na intersecção entre a teoria da dinâmica de mercado e as tecnologias de *trading* e de gestão do risco.

O modelo tradicionalmente utilizado pela teoria financeira sobre o *asset pricing* é o *movimento browniano geométrico* com volatilidade constante. A completude é, neste caso, garantida, dado que existe uma única RN-EMMQ (Focardi e Fabozzi, 2004).

Na presença de volatilidade estocástica, a qual introduz turbulência na dinâmica da rendibilidade, as condições de completude têm de ser reformuladas, com a introdução de activos apropriados que podem tornar o mercado completo, conduzindo a uma única RN-EMMQ (Focardi e Fabozzi, 2004).

Enquanto que existem soluções para a completude em modelos de volatilidade estocástica que funcionam no seio de um enquadramento de *movimento browniano* (Focardi e Fabozzi, 2004), a presença de turbulência multifractal conduz a problemas fundamentais, quer para a abordagem tradicional de avaliação baseada nos processos estocásticos, quer para a completude.

A turbulência multifractal implica, por um lado, maior risco de volatilidade do que aquele que é capturado pelos modelos de volatilidade estocástica tradicionais (em particular, no que diz respeito à classe de *heteroscedasticidade condicionada*), como foi demonstrado por Mandelbrot (Mandelbrot, *et al.*, 1997; Mandelbrot, 1997; Mandelbrot e Hudson, 2004). Por outro lado, a turbulência multifractal conduz a um segundo problema, a saber: o problema da modelação.

Estando perante comportamento de sistemas adaptativos complexos em rede, a multifractalidade financeira pode ser consistentemente considerada enquanto propriedade dinâmica emergente a partir do comportamento adaptativo dos sistemas económicos e financeiros interconectados e em coevolução (Gonçalves e Gonçalves, 2007; Gonçalves, 2010).

Assim, quando se identifica a presença de turbulência multifractal, está-se, na realidade, a identificar a presença de *criticalidade auto-organizada multifractal* (*multifractal self-organized criticality*, MSOC), conduzindo a uma necessidade de uma modelação *bottom-up*, em vez de uma modelação *top-down*, a qual pressupõe uma ordem causal de cima para baixo, que não é aquela dos sistemas em questão.

Em alternativa, a modelação estocástica macroscópica poderia recorrer a um argumento tomado a partir da mecânica estatística, trabalhando com os sistemas económicos e financeiros como se fossem gases turbulentos, sem garantia de que, pelo facto de o modelo reproduzir um espectro multifractal, se encontraria garantida a validade sistémica do modelo (Gonçalves, 2010). Problema que é agravado pela natureza evolutiva dos espectros multifractais observados empiricamente, conforme exemplificado na secção anterior, a partir da análise histórica do índice S&P 500.

Diferentes processos podem conduzir aos mesmos espectros multifractais, de tal modo que um ajuste dos espectros obtidos, no seio de um dado modelo, aos espectros estimados para os activos sob modelação é insuficiente para concluir que se está perante o modelo adequado, e, assim, nunca se pode estar certo de que se conhece a colecção de activos apropriada para recuperar uma condição de completude, isto é, nunca se pode estar certo de que a colecção de activos que garante a completude do mercado para o modelo é a colecção de activos que garante que os mercados efectivos são completos, logo, na presença de MSOC, a completude não pode ser empiricamente corroborada a não ser que fosse possível empiricamente inferir um processo estocástico para o mercado, correspondente à verdadeira dinâmica do mercado, o que poderá não ser possível, dado o facto de que a MSOC pode ser produzida por diferentes processos.

De modo a garantir a existência de completude, baseada na metodologia da *risk neutral valuation*, na abordagem dos processos estocásticos, é necessário produzir o modelo correcto da dinâmica de mercado, e se não se tem esse modelo, então está-se a trabalhar com pressupostos acerca de *hedging*, de risco e de arbitragem que não são verificados e, deste modo, poderá incorrer-se em perdas elevadas (Gonçalves, 2010).

A partir da observação da presença de *scaling multifractal*, não se segue necessariamente um processo estocástico específico. Para construir um modelo de mercado baseado na metodologia dos processos estocásticos, torna-se necessário assumir essa mesma metodologia *top-down*, mas, mesmo se o espectro do modelo for coincidente com o espectro empiricamente estimado para o mercado, o modelo poderá não coincidir com a estrutura dinâmica adaptativa do mercado numa proximidade suficiente para que seja capturada a natureza das ligações entre activos e processos coevolucionários que fazem emergir a dinâmica de mercado turbulenta e a estrutura multifractal, deste modo, não se pode garantir que a completude de mercado seja verificada para os activos transaccionados, mesmo se ocorre no modelo.

As abordagens de modelação *bottom-up*, baseadas na modelação microscópica, são alternativas à modelação macroscópica por processos estocásticos. Mas, quando se trabalha com a *Modelação Financeira Microscópica* (MFM), torna-se problemática a formulação de uma abordagem geral para a arbitragem, dado que a teorização da arbitragem, a partir de condições macroscópicas, impostas sobre o mercado deixa de fazer sentido, sendo necessário incorporar a arbitragem enquanto componente dos processos coevolucionários de mercado, promotores de eficiência, resultante de respostas adaptativas no sentido de remoção do *misspricing*.

Assim, torna-se necessário expandir a MFM para incorporar a arbitragem numa abordagem *bottom-up*, desacoplando a questão da eficiência e da eficácia da arbitragem da questão da completude, ou seja, deixando de ser necessário procurar condições de completude de mercado. Gonçalves (2010) propôs um modelo em que é incorporada uma tal abordagem *bottom-up* para a arbitragem, a partir de um modelo coevolucionário de uma economia artificial, baseado em *mapas não-lineares acoplados*, em que emerge *caos multifractal* para as rendibilidades logarítmicas das cotações de cada empresa¹⁶.

Deve ser, contudo, relevado que, apesar das consequências para a gestão financeira e, logo, para a gestão do risco, esta questão fica para além dos objectivos e temática da presente tese, pois trata-se de um problema para a *teoria financeira do pricing* de activos e para a economia financeira e não de um problema para a ciência do risco ou para a matemática do risco, assim, não será trabalhado o problema da arbitragem e da eficiência de mercado.

Embora a chamada *risk neutral valuation* não constitua, enquanto tal, parte da matemática do risco, esta pode ser incorporada, contudo, enquanto metodologia de avaliação de risco, integrável no seio da matemática da avaliação do risco, como demonstraremos no **capítulo 5. (secção 5.1.)**. Os resultados obtidos no **capítulo 5.** permitem resolver o problema da compatibilidade entre a *risk neutral valuation* e a *turbulência multifractal*, esta questão será retomada no **capítulo 6. (subsecção 6.2.1.)**, no qual são avaliadas as implicações do trabalho desenvolvido.

16. Os agentes adaptativos, no caso do modelo de Gonçalves (2010), são empresas.

Para a ciência e matemática do risco, a *turbulência multifractal* nos mercados financeiros tem consequências fundamentais, pois a dinâmica multifractal conduz a um maior risco financeiro do que aquele que é capturado no seio dos modelos de volatilidade estocástica tradicionais, como foi referido acima, e relevado por Mandelbrot (Mandelbrot, 1997; Mandelbrot, *et al.*, 1997; Mandelbrot e Hudson, 2004). Por outro lado, a MSOC diminui a eficácia das técnicas econométricas tradicionais, em que um modelo de base é especificado com uma separação entre uma componente antecipável e uma componente de ruído cuja standardização conduz a um processo de ruído IID (*Independente e Identicamente Distribuído*). Para trabalhar com MSOC, os modelos *bottom-up* são demonstráveis como sendo mais eficazes em capturar os padrões de risco (Sornette e Zhou, 2006; Zhou e Sornette, 2007; Gonçalves, 2010).

Após a última crise financeira, esta maior eficácia dos modelos *bottom-up* e, assim, da MFM, tem sido motivo de reflexão acerca do futuro da modelação financeira, conforme passamos a analisar.

2.5. A actual crise financeira e a necessidade da modelação microscópica

Para compreender a reflexão acerca do futuro da modelação financeira, desenvolvida pela comunidade científica, como resultado da presente crise, torna-se necessário rever alguns elementos centrais do processo sistémico que conduziu à mesma crise.

Nos EUA, o crédito à habitação desempenha um papel chave estratégico, tanto no plano económico como no plano político, especialmente no que diz respeito às chamadas minorias (Attali, 2009).

Em 1977 a lei do *Community Reinvestment Act* levou a banca a conceder crédito à habitação às comunidades mais desfavorecidas. Contudo, desde que, em 1980, várias instituições de crédito estiveram à beira da falência devido a esses créditos de elevado risco, a banca não estava disposta a assumir o risco, o que conduziu os grupos de pressão das diversas minorias a lançar campanhas para bloquear a fusão de bancos que não respeitassem os seus compromissos de favorecer a habitação social (Attali, 2009). Deste modo, o crédito hipotecário desenvolveu-se com um tipo diferente de empréstimos, conforme a natureza de risco: *prime* para a classe rica, *Alt-A* para a classe média, e *subprime* para os mais pobres e menos capazes de honrar as suas dívidas.

É então que intermediários independentes, pagos à comissão, propõem aos candidatos com piores históricos bancários, contractos de crédito hipotecário *subprime*, de taxa progressiva, indexados ao valor da casa, de tal modo que se podia pedir mais dinheiro emprestado se os preços do imobiliário aumentassem, o que aconteceu (Attali, 2009).

Estes créditos *subprime* eram, então, comprados aos bancos por duas instituições criadas após a crise de 1929: Freddie Mac e Fannie Mae. Os bancos podiam assim propor os créditos aos seus clientes sem se exporem ao risco.

Relativamente aos créditos *Alt-A*, propunha-se carência de juros e de capital durante os primeiros anos.

O objectivo era expandir o sector imobiliário, estimulando a procura por via do crédito, com o argumento de que a expansão do sector imobiliário conduziria a um desenvolvimento económico global incitando à construção de habitação.

Para apoiar a expansão do crédito, Greenspan decidiu, em 2003, baixar as taxas de juro, o que fez expandir o crédito e a procura, conduzindo a uma subida dos preços dos bens.

As facilidades de crédito ao consumo e de crédito imobiliário conduziram a uma expansão do mercado por via do crédito. O sistema financeiro estava, então, a ser alimentado pela economia real, cujo crescimento se baseava numa expansão da procura por via do crédito, sendo que o sector do imobiliário e financeiro se alimentavam mutuamente, representando, em conjunto, 40% do crescimento do sector privado americano. O crescimento económico ocorreu, assim, nos sectores ligados ao mercado imobiliário e ao sector financeiro (Attali, 2009).

Enquanto que no imobiliário se procurava sustentar uma *bolha*, no tecido empresarial uma forma de *raids* financeiros ganhou força. Enquanto que o passivo das empresas crescia, dirigentes e financeiros procediam a operações financeiras de *repurchasing* das empresas fortemente alavancadas, impodo-lhes objectivos de rentabilidade da ordem dos 20% ao ano, para permitir o reembolso, graças aos lucros, dos empréstimos contraídos para comprar estas empresas (Attali, 2009). Constituíram-se, assim, fundos especializados (*private equity* e LBO¹⁷) para atrair as poupanças para essas operações, sobretudo rentáveis para os seus promotores.

De modo a cumprirem com os objectivos de elevada rentabilidade, as empresas eram reestruturadas, diminuindo o seu campo de actividade à dimensão e especialização que lhes permitia produzir a parte da cadeia de valor correspondente ao seu *know-how*.

Segundo Attali (2009), os postos de trabalho eram as primeiras vítimas, as actividades de *investigação e desenvolvimento* (I&D) eram as segundas e a sobrevivência das empresas a terceira. Os mercados financeiros estavam a ser utilizados para produzir ganhos de curto prazo conducentes ao colapso das empresas, assim o mercado estava a lucrar com o colapso empresarial.

A economia financeira estava, por via dos *raids* e do crédito de alto risco, a criar *situações de risco* com exposições crescentes: das empresas ao risco económico e financeiro; da economia ao risco de crédito. Este fenómeno não foi circunscrito aos EUA, o valor do imobiliário foi avaliado, em 2006, em cerca de 1.5 vezes o PIB mundial contra menos de três quartos, dez anos antes (Attali, 2009).

17. *Leveraged Buyout*. LBO ou *Leveraged Buyout* refere-se a uma operação alavancada (ou seja, financiada principalmente pelo recurso ao endividamento), para se obter o controlo do capital de uma empresa.

Por seu turno, em termos mundiais, o valor das obrigações e acções era, em 1980, coincidente com o PIB mundial, enquanto que, em meados de 2006, foi estimado como situando-se em duas vezes o PIB mundial (Attali, 2009), a esse valor pode-se juntar as emissões de produtos titulados e de derivados, de tal modo que, no conjunto, o património mundial podia ser avaliado, segundo Attali (2009), em cerca de seis vezes o PIB mundial, património, este, fortemente alavancado, o que significa que a riqueza mundial estava a ser suportada por via do endividamento.

No entanto, o problema foi agravado ainda mais por um outro processo: a *securitization* de dívida de alto risco e a diversificação financeira. A *securitization* permitiu aos bancos converterem os créditos imobiliários em produtos atractivos para os aforradores institucionais de todo o mundo. O financiamento dos bancos, e, logo, a capacidade dos bancos para responderem de forma rentável a uma procura crescente por crédito, estava fortemente dependente da capacidade de transferência de risco, especialmente no que diz respeito aos créditos de *subprime*.

O cenário é típico de um jogo, com jogadores próximos do *homo economicus*, no que diz respeito à *racionalidade* preconizada no modelo decisional do *homo economicus* e defendida no seio da teoria dos jogos tradicional.

Os bancos encontravam uma vantagem na concessão de crédito de elevado risco, desde que o risco não fosse assumido por eles. Por seu turno, os intermediários independentes, sendo pagos à comissão, tinham vantagens na expansão do crédito. Com a *securitization* dos créditos *subprime*, o sistema de crédito imobiliário podia transferir o risco para os mercados financeiros, de tal modo que o sistema de crédito imobiliário encontrava vantagens na concessão de crédito de elevado risco, pois não assumia o risco.

Dado que a economia estava a crescer como efeito do crescimento imobiliário e do crédito ao consumo, o Estado norte-americano e o sistema financeiro estavam, igualmente, a beneficiar do mercado *subprime*. Por outro lado, para o Estado norte-americano, havia o interesse adicional de financiar os conflitos militares em que se tinha envolvido, durante a administração Bush.

Os créditos *subprime* foram, então, reunidos em pacotes de produtos financeiros, a saber (Attali, 2009: 52): os RMBS (*Residential Mortgage-Backed Securities*); o grupo *equity* (os de maior risco), que alguns corretores chamavam *loss money*; o grupo *mezzanie* (de risco intermédio); os do grupo *senior* e *super-senior* (AAA). Estes produtos foram, então, transaccionados no mercado sob a forma de obrigações.

Estas operações foram bem sucedidas, devido à rendibilidade prometida aos compradores desses títulos. É aqui que entra em jogo o processo de diversificação financeira.

As entidades gestoras de fundos de investimentos, competindo entre si por clientes, constituíram uma fonte de procura para estes títulos de dívida de alto risco. A oferta era garantida pelas instituições de crédito assim como por Freddie Mac e Fannie Mae que revenderam seus créditos *subprime* sob a forma de RMBS.

Cerca de metade dos *subprime*, convertidos em *securities*, foram escoados para bancos não-americanos, expandindo o mercado para a *subprime*.

Segundo Attali, perante o êxito da *securitization* dos créditos *subprime*, o processo expandiu-se a outras dívidas sob a designação de *asset-backed securities*. Todos estes títulos tinham risco elevado, prometendo rendibilidades superiores à taxa de crescimento da economia.

Por outro lado, ainda segundo Attali (2009), o risco atribuído ao incumprimento estava a ser subavaliado propositadamente pelas empresas de *rating* que tinham interesse na expansão do mercado resultante da *securitization* de dívidas de alto risco.

Apesar dos avisos em 2006, todos aqueles que tinham meios para travar a *bolha*, tinham alguma coisa a ganhar com a mesma. Havia toda uma rede de interesses estabelecida, à qual interessava a expansão do crédito: o Estado norte-americano, o exército e as empresas petrolíferas tinham interesse em financiar os conflitos militares, nos quais os EUA estavam envolvidos, e garantir que a economia suportava os custos desses mesmos conflitos, incluindo a subida do preço do petróleo, com um crescimento económico suportado pelo recurso ao crédito; a banca, agências de *rating*, intermediários e resseguradores de crédito beneficiavam com o mecanismo de transferência de risco, por via das comissões e da revenda dos créditos (Cooper, 2008; Morris, 2008; Attali, 2009).

Attali (2009: 63, 64) descreve a emergência de uma ideologia anti-avaliação de risco do seguinte modo:

“(...) Para iludir esses raros discursos inquietantes, apareceu uma teoria, um pensamento, uma ideologia: a *atitude proactiva*. Ela consiste no convencimento de que um fim é facilmente atingível se o procurarmos com suficiente sinceridade, força e concentração. Generalizou-se na economia, na pintura, no desporto a ideia de que a obtenção de bons resultados passava obrigatoriamente pela convicção e que o bem aconteceria desde que nele se acreditasse (...) Todos se puseram a acreditar que para conseguir um bom emprego ou mantê-lo bastava ser optimista. Em particular, para ser dirigente não se pode anunciar possíveis desastres. (...)”

A negação da natureza e presença do risco serviu, então, uma função útil naquilo que era um interesse de mercado na expansão da *bolha*. Neste ponto, encontramos um elemento central de divergência entre o mercado de concorrência perfeita da teoria e os mercados efectivos – os agentes podem ter interesses colectivos sinergeticamente sincronizados na expansão de uma *bolha*.

Este fenómeno foi objecto de investigação, com consequências para a ciência do risco, no trabalho de Johnson e Fowler (2009), acerca da evolução da sobreconfiança. Johnson e Fowler identificam que um excesso de confiança poderá produzir *bolhas de mercado*, colapsos financeiros, falências de políticas, guerras e incapacidade em prever e lidar com desastres, sendo proposto um modelo evolucionário

que demonstra como a sobreconfiança poderá conduzir a uma maximização da *fitness* individual, demonstrando, assim, que uma solução que é preferida, em termos de um jogo evolucionário de curto prazo e segundo uma lógica competitiva local, pode introduzir comportamentos contra-adaptativos, bloqueando os mecanismos homeostáticos dos sistemas sociais e amplificando o risco de colapso.

Regressando ao caso, em análise, da crise financeira, esta iniciou-se, no primeiro trimestre de 2005, quando o índice de novas casas em construção caiu. No terceiro trimestre de 2005, as vendas diminuíram, e, no quarto trimestre, abrandou a subida dos preços. O valor das casas começou, então, a cair.

Os produtos financeiros, resultantes da *securitization*, começaram a ser designados de *tóxicos*, quando se começou a compreender que o capital em dívida de muitos dos empréstimos era superior ao valor das casas no mercado (Attali, 2009).

No primeiro trimestre de 2006, os incobráveis em *subprimes* aumentaram, em Agosto deu-se a primeira falência de uma instituição de crédito hipotecário que transaccionava *subprimes*. Ainda assim, o mercado das *subprimes* continuou a crescer, pois, em 2006, em cada quatro novos empréstimos um era desse tipo (Attali, 2009).

Os problemas, contudo, não se limitavam aos créditos *subprime*, ainda em 2006, a Bloomberg avaliou em 16% os créditos com atrasos de pagamento superiores a dois meses nos créditos *Alt-A*, sendo que 14% dos americanos reconheceram ter dificuldades em pagar prestações, assim, as famílias da classe média estavam com problemas financeiros.

Instalou-se, então, o pânico, conforme descreve Attali (2009: 67):

“Geralmente, o governo do país assim ameaçado escolhe este momento para dizer que vai tudo bem. Os cidadãos mais lúcidos tiram a conclusão de que a catástrofe está ao virar da esquina. E pensando-o, vendem tudo precipitadamente, desembaraçando-se de qualquer maneira dos seus activos para ficar com “liquidez”. Os mercados vão atrás, e assim como ninguém compensou os excessos de optimismo, ninguém refreia o pessimismo (...) É então que a engrenagem começa a rolar como acontece em todas as crises. O medo transforma-se em pânico, e este provoca uma fuga desordenada, com mortos entre aqueles que desejam “sair”. Porque o pânico é muito diferente do medo; provoca reacções totalmente imprevisíveis. E o pânico é também sabiamente orquestrado pelos que querem fazer crer que, se eles perderem os seus bónus indexados aos lucros e aos índices bolsistas, será o fim do mundo (...)”

O colapso de vários fundos de investimento tornou evidente um fenómeno ignorado até esta crise – o fenómeno do risco produzido pela diversificação financeira. O fenómeno é trivial, sendo ignorado na teoria da gestão de carteiras porque se assume que as correlações são estáveis e que os *crashes* e sincronizações apresentam uma probabilidade quase nula.

É um facto de que quando um investidor constitui carteiras de activos, este está a proteger-se contra o risco, pois as variações positivas dos activos tendem a compensar as variações negativas. Os fundos de investimento permitem aos investidores terem acesso a carteiras de investimento, e a uma gestão profissional das mesmas. O problema é que quando ocorre um pânico generalizado, porque existe uma sincronização nas ordens de venda, dando origem a quedas nos valores dos fundos, essas quedas podem alastrar-se à totalidade dos activos que compõem o fundo (Whitfield, 2008).

Em particular, se um fundo tem activos tóxicos e o seu valor sofre uma queda, porque, no mercado, os agentes estão a tentar desfazer-se desses activos e, ao mesmo tempo, a fechar as suas posições para obterem *liquidez* e controlarem as suas perdas, antes que o mercado caia mais, mesmo que exista outro fundo que não tenha assumido posições nos activos tóxicos mas que tenha assumido posições semelhantes noutros activos aos de fundos com activos tóxicos, então poderá incorrer em perdas por contaminação (Whitfield, 2008).

Considerando somente classes de carteiras sem activos tóxicos, quanto mais diversificada estiver uma tal carteira, maior será a probabilidade, numa dinâmica de crise com contaminação por via de activos tóxicos, de a mesma carteira diversificada sem activos tóxicos ser contaminada pelas perdas do mercado, porque a sua exposição aos sectores em queda sincronizada é maior. Numa dinâmica de pânico e *crash*, a contaminação segue uma dinâmica de risco guiada, fortemente, pela queda dos fundos de investimento (Whitfield, 2008).

Esta dinâmica de rede em crise é, tal como a própria crise, ignorada na *modern portfolio theory*. O problema não é somente um problema de volatilidades estocásticas, trata-se de um problema de modelar uma carteira de investimentos, como se esta fosse um cabaz simples de activos com rendibilidades cujas correlações são fixas, quando, na realidade, uma carteira é composta por uma rede de activos com dinâmica turbulenta acoplada e em coevolução, com dinâmicas multifractais locais (ao nível de activos individuais) e globais (ao nível da própria carteira). Uma dinâmica de sincronização adaptativa conduz a uma turbulência da rede que não é compatível com a proposta da *modern portfolio theory*.

Este fenómeno de contaminação de risco tornou-se particularmente evidente com o Global Alpha Fund da Goldman Sachs, o qual foi fortemente atingido pela crise da *subprime*, apesar de não ter investido na *subprime*. O problema, revelado pela análise de rede, foi o de que os fundos que tinham assumido posições no mercado da *subprime*, tinham, também, assumido posições em outros activos, nos quais o Global Alpha Fund tinha, igualmente, assumido posições, a queda destes outros fundos levou a uma queda do valor do fundo da Goldman Sachs (Whitfield, 2008; Gonçalves, 2009).

O risco, com origem na rede financeira e produzido pela diversificação financeira, foi identificado por John Whitfield, no artigo do *Santa Fe Institute* (SFI) *Bulletin* da Primavera de 2008 (Whitfield, 2008), no qual o autor apresenta os resultados do encontro que tomou a forma de um *forum* promovido pela SAC Capital Partners e pelo SFI em Nova Iorque, em Outubro de 2007, sobre a modelação do risco nos mercados financeiros.

A crise da *subprime* foi o tema central das discussões. Os participantes no *forum* procuraram, em particular, compreender a questão da origem dos *crashes* e do modo como os mercados poderiam ser regulados, de modo a reduzir o risco da sua futura ocorrência.

O risco de rede, associado à formação de conexões de rede, por via da formação de carteiras, foi, pela primeira vez, identificado como um problema central, ignorado na *modern portfolio theory*.

Da discussão ocorrida no *forum*, resultou a conclusão de que a estrutura de rede do mercado poderá ter *exarcebado os efeitos dos problemas no mercado hipotecário* (Whitfield, 2008), de tal modo que a *securitization*, que visava precisamente uma dispersão do risco pelo mercado, mais protegido por via de um efeito de diversificação, teve o efeito contrário de amplificação do risco, tornando os bancos insensíveis ao risco na concessão de crédito, estamos, assim, perante um sistema de bloqueio de mecanismos homeostáticos ao nível da concessão de crédito, o que era desde logo o objectivo do Estado norte-americano, pois, deste modo, as instituições de crédito tinham, como vimos, incentivo em expandirem o crédito de elevado risco, e o sistema financeiro parecia ter uma capacidade ilimitada para assimilar a dívida de alto risco.

Durante o *forum*, Aaron Brown, gestor de risco da AQR *Capital Management*, comparou este processo ao modo como uma pessoa infectada contagia os outros com a sua doença. Trata-se, na realidade, de um processo de contaminação em rede, como vimos acima.

Se activos de alto risco são introduzidos em muitas carteiras de investimento, e ocorre uma dispersão expansiva do mercado desses activos, então, todas as carteiras que têm activos em comum com as carteiras que possuem os activos de alto risco, estão expostas a um risco de *apetência sincronizada por liquidez*, ou seja, mesmo que uma carteira não possua activos tóxicos, a presença desses activos noutras carteiras pode conduzir a perdas muito elevadas (quanto maior for o risco de cauda, isto é, o risco de perda extrema do activo), se essas perdas ocorrem, então os investidores que constituíram carteiras com activos tóxicos poderão ter de vender as suas posições para compensar as perdas, o que pode conduzir a perdas súbitas e rápidas nos diferentes activos, independentemente dos *fundamentals*.

Investidores que constituíram carteiras, que têm activos em comum com as carteiras de activos tóxicos, podem ver o seu investimento a perder rapidamente valor, tanto maior será a perda quanto maior for o grau de comunalidade com carteiras de activos tóxicos, assim, para cobrir as suas perdas, e antes que o mercado caia mais, estes investidores tendem também a vender, gera-se, assim, um *efeito dominó*.

Esta dinâmica é típica do comportamento decisional efectivo dos investidores, a *apetência por liquidez* e a formação de pânico podem ocorrer por via de uma contaminação progressiva de perdas.

Este risco de rede é tanto maior quanto maior for a diversificação financeira, isto porque se todos diversificam, as comunalidades entre carteiras tendem a aumentar, ou seja, o número de activos em comum, em duas carteiras distintas, tende a aumentar. Se ocorre uma sincronização comportamental, como acontece nos *crashes*, os *efeitos dominó* tendem a ocorrer, expandindo as perdas.

A diversificação diminui, assim, o risco em condições normais, mas tende a aumentar o risco em contexto de sincronização de *fundamentals* e em contextos em que se abre uma potência de pânico sincronizado. Os activos tóxicos, por seu turno, tendem a conduzir a potências de pânico com uma elevada propensão sistémica para serem actualizadas.

No caso da crise recente, estivemos perante as duas situações: uma crise sincronizada ao nível dos *fundamentals* e uma dispersão de activos tóxicos conducentes a uma actualização de pânico.

A exposição de carteiras ao risco da rede e de sincronização comportamental na rede deveria, assim, ser considerado na modelação de risco. Assim como o efeito conjugado da diversificação e inovação financeira com a produção e dispersão de activos tóxicos.

O problema das *ligações em rede* foi, também, relevado, em 2009, pelo Comité de Basileia, na sequência da presente crise financeira¹⁸. O mesmo Comité reconhece que embora tenha sido imediato o efeito sobre os bancos, sistemas financeiros e economias situados no epicentro da crise, a mesma crise propagou-se a grupos de países cujos *canais de transmissão* (expressão do Comité que reflecte um raciocínio epidemiológico) foram indirectos, resultando de uma contracção severa da liquidez global, na disponibilidade de obtenção de crédito em bancos de diferentes países e na procura por exportações¹⁹.

Ainda segundo o Comité de Basileia²⁰, dado o âmbito e velocidade com que a crise se propagou ao globo, é necessário que os países expandam a resistência (*resilience*) dos seus sectores bancários (*sistema imunitário bancário*) a *situações de risco*, tanto com origem interna como externa.

Para uma resposta adaptativa aos pontos fracos dos mercados, revelados pela crise, o Comité de Basileia propõe-se introduzir reformas no enquadramento regulador internacional, no sentido de fortalecer *regulação microprudencial*, que poderá, por seu turno, fortalecer a resistência de instituições bancárias individuais a períodos de *stress*. Também estão a ser pensadas reformas com um enfoque *macroprudencial*, no sentido de: favorecer respostas adaptativas a *situações de risco* que se estendem a todo sistema e que podem expandir-se através do sector bancário; favorecer respostas adaptativas a uma *amplificação pró-cíclica* dessas mesmas *situações de risco*.

18. Veja-se, em particular, o documento de consulta disponibilizado em Dezembro de 2009 no *web-site*: <http://www.bis.org/publ/bcbs164.htm>.

19. Factores relevados no documento referido na **nota 8**.

20. No documento referido na **nota 8**.

O Comité de Basileia reconhece a interconectividade entre o local e o global, presente nas *situações de risco financeiro*, tal que as abordagens *micro* e *macro-prudenciais* à supervisão estão inter-relacionadas, em particular, a resistência (*resilience*) do nível local (*banco individual*) pode reduzir a ameaça de *choques sistémicos globais*. O uso do termo *choque*, neste contexto, pode, contudo, ser problemático, conforme é relevado na próxima secção a propósito do projecto da *bolsa de valores artificial* do SFI.

No *forum*, promovido pelo SFI e pela SAC Capital Partners, identificou-se também uma interconectividade das *situações de risco*, em particular, no que diz respeito ao jogo interagente da dinâmica de sincronização adaptativa da rede de investidores, da dinâmica de rede resultante dos processos de gestão de carteiras de investimento e das dinâmicas dos sistemas socio-económico, político e militar.

Esta interconectividade das *situações financeiras de risco* com *situações de risco* de diferentes naturezas, sinalizada no referido *forum*, foi trabalhada pelo *World Economic Forum*, resultando na síntese e ferramenta de trabalho que é o *Risks Interconnection Map*, conforme abordado no capítulo anterior.

A **figura 2.** do **anexo B.** constitui um exemplo ilustrativo da interconectividade entre as *situações de risco* de natureza financeira e *situações de risco* de outras naturezas.

Uma modelação financeira capaz de fazer face a estas *situações de risco* interconectadas é, apenas, possível com a construção de economias artificiais e mercados financeiros artificiais.

À defesa, por parte do SFI, da MFM, com o importar de modelos vindos da biologia, e, em particular, dos modelos de teias alimentares, para modelar os processos coevolutivos económicos e financeiros, junta-se uma tendência no seio da comunidade científica, no sentido do desenvolvimento da MFM e da chamada *teoria financeira evolucionária*, as quais incorporam: a modelação baseada em agentes, típica da MFM; a neuroeconomia e a teoria dos sistemas adaptativos complexos na modelação e análise do comportamento das economias e mercados financeiros (Stix, 2009).

A *teoria financeira evolucionária* e a MFM não constituem, contudo, novidades no seio da ciência económica. Conforme passamos a rever.

2.6. A MFM, a *teoria financeira evolucionária* e a modelação de sistemas em *situações de risco*

No ano de 1987, o mesmo ano do *crash* da década de 1980, o, já referido, *Instituto de Santa Fé* (*Santa Fe Institute*, SFI), no Novo México, dedicado à investigação nas ciências da complexidade, promoveu um *workshop* com o título *Caminhos Evolucionários da Economia Global* (*Evolutionary Paths of the Global Economy*). No final da sessão plenária, os participantes concordaram que um título mais apropriado para o *workshop*, e para a linha de investigação nesta área deveria ser: *A Economia como um Sistema Evolutivo Complexo* (*The Economy as an Evolving Complex System*) (Anderson *et al.*, 1988).

A abordagem da complexidade veio a reunir perspectivas da economia evolucionária, da biologia, da teoria da evolução de base darwinista e de base lamarciana, sendo que no SFI se desenvolveram investigações fundamentais acerca da turbulência e da SOC nos sistemas adaptativos complexos, investigações, estas, que contribuíram para o desenvolvimento da noção de economia enquanto *sistema evolutivo complexo* e para a ciência do risco aplicada à economia e finanças (Lewin, 1999).

Com o desenvolvimento das ferramentas computacionais da vida artificial e da inteligência artificial, tornou-se possível construir economias de mercado artificiais cujas condições de equilíbrio e de eficiência emergem a partir do próprio comportamento do sistema.

No seio das ciências sociais, destaca-se, em particular, o trabalho de Epstein e Axtell com o mundo artificial designado por *sugarscape*, em que criaturas artificiais se alimentam de uma *commodity* (neste caso, *açúcar*) (Epstein e Axtell, 1996). Os autores desenvolveram vários modelos de simulação de sociedades artificiais, com base no mundo artificial do *sugarscape*, demonstrando como a simulação multiagentes pode ser utilizada para a investigação no seio das ciências sociais. Os autores introduziram regras locais para o movimento dos agentes, sexo, cultura e combate.

Para a economia, no entanto, o interesse central do mundo artificial do *sugarscape* vem da construção de um modelo de economia artificial. Os autores introduziram duas *commodities*, a saber: açúcar e especiaria.

Nos outros modelos, a metodologia seguida pelos autores havia consistido na introdução de um pequeno número de regras locais para o comportamento de cada agente, permitindo investigar a sociedade que se desenvolvia a partir dessas regras locais. Para a economia artificial, a metodologia seguida foi um pouco diferente, a saber (Epstein e Axtell, 1996): os autores assumiram uma validade microscópica da teoria neoclássica, para a construção das regras acerca do comportamento de transacção dos agentes, estas regras, por seu turno, serviam de mediadores na interacção entre agentes com tempos de vida ilimitados, possuidores de preferências bem definidas e que eram reveladas aos intervenientes em cada transacção, as transacções, por seu turno, apenas teriam lugar se estas melhorassem a situação de todas as partes envolvidas (*Pareto-improving*).

A partir desta base neoclássica, os autores removeram, contudo, uma restrição fundamental, os agentes deixavam de ser *price takers*, os preços eram tomados como locais, emergindo a partir das transacções entre agentes que se encontravam em locais vizinhos no terreno do mundo artificial. O modelo inicial era, deste modo, um modelo de uma economia descentralizada, sem um acesso global a um preço de mercado, isto é, sem a existência de um leiloeiro centralizado, nem de um *market maker*.

Os resultados da simulação do modelo permitem observar a emergência, com o tempo, de um equilíbrio de preço médio convergente para um valor fundamental (Epstein e Axtell, 1996). Deste modo, Epstein e Axtell conseguiram replicar,

numa economia artificial, um mecanismo *bottom up* de auto-organização sistémica de um preço médio estável, fornecendo um fundamento sistémico para a noção económica de *mão invisível*.

Um equilíbrio económico global numa dinâmica de ponto fixo para o preço médio pode, deste modo, emergir num contexto neoclássico, a partir, somente, de interacções locais.

Os autores observaram, também, com estas regras, uma expansão da sustentabilidade biológica dos agentes, resultante da introdução da economia, embora algum cuidado deva ser assumido na interpretação deste resultado. Os agentes do *sugarscape*, com tempo de vida ilimitado, apenas podem morrer quando as suas reservas de *commodities* se esgotam. A introdução das trocas económicas conduz a uma expansão da capacidade de sobrevivência dos organismos biológicos artificiais. Este resultado, contudo, apenas permite concluir acerca de um valor evolucionário de um sistema de trocas, mais do que acerca de um valor evolucionário do sistema neoclássico de trocas, como os autores pretenderam, pois está-se a comparar um sistema sem trocas nem cooperação entre os agentes, em que o esgotamento das reservas de *commodities* de cada organismo conduz à morte, com um sistema em que se permitem trocas.

Entre um sistema de agentes sem trocas nem cooperação e um sistema de agentes neoclássicos, o valor da troca permite uma gestão local das reservas alimentares e uma redução da mortalidade, devido a escassez local de alimentos. A comparação entre um sistema de cooperação local, ou mesmo do tipo caçador-recolector tribal, e um sistema de trocas, com base numa estrutura de mercados locais, permitiria avaliar diferenças evolucionárias entre trocas de mercado, baseadas em pressupostos comportamentais neoclássicos e um sistema tribal e, assim, testar a eficácia evolucionária no mundo do *sugarscape* de uma organização económica assente em pressupostos neoclássicos.

A emergência de um equilíbrio de mercado e o fundamento sistémico da *mão invisível* são dois dos resultados centrais do modelo. O modelo tende para um preço final de equilíbrio estável, logo, existe um equilíbrio evolucionário estável para a economia de trocas. Embora este resultado pareça apoiar a teoria neoclássica, existem diferenças centrais. Uma diferença importante reside na natureza estatística do equilíbrio, o que resulta do facto de os agentes não serem *price takers*, transaccionando a preços locais, determinados por transacções locais. O sistema tende a evoluir para um equilíbrio estatístico com um desvio-padrão baixo, o que significa que o equilíbrio é dominante.

A lei de preço único é, assim, a primeira a ser abandonada neste modelo, como lei geral de mercado, para ser uma lei estatisticamente satisfeita, e emergente a partir das interacções transaccionais entre os agentes. Assim, não ocorre uma situação de equilíbrio semelhante àquela que é garantida quando existe um leiloeiro ou um *market maker* (dependendo do sistema de formação de preços) que garante um vector de preços de *market clearing*, ao qual todos os agentes, como *price takers* passam a transaccionar.

A economia artificial do mundo de *sugarscape* recupera, por outro lado, um facto central, a saber: sem agentes não há mercado. Num mercado livre, a oferta e a procura, dentro de uma abordagem *bottom up*, são forças quantizadas, resultantes do comportamento decisional colectivo dos agentes, não existem *price takers*, assumir que os agentes são *price takers* ajuda nos cálculos de fórmulas fechadas, mas é semelhante a afirmar que, num processo eleitoral democrático, os eleitores são *winner takers*, não podendo influenciar o resultado. Cada agente, enquanto tal, contribui para a formação do preço, sendo o colectivo de transacções que determina o resultado final, em termos de preço.

Perante os resultados do modelo, os autores tiveram que recorrer a uma outra noção de equilíbrio económico, a saber: a noção de equilíbrio estatístico, proposta por Foley (1994). Ao ter que recorrer a esta noção alternativa, torna-se necessário introduzir uma interpretação estatística do *first welfare theorem* da economia neoclássica, o qual afirma que os mercados fazem a alocação dos bens de acordo com os seus usos sociais óptimos, de tal modo que o equilíbrio é *Pareto-eficiente*.

Foley (1994) argumentou que a eficiência de Pareto deveria ser avaliada a partir da dispersão nas transacções, o que, no caso da economia artificial de *sugarscape*, se torna necessário (Epstein e Axtell, 1996).

Assim, num modelo de mercado livre, sem autoridade central, nem mesmo um agente de formação de preço, mesmo que se assumam os pressupostos neoclássicos ao nível microscópico, o comportamento começa a desviar-se do comportamento previsto pela economia neoclássica tradicional.

De facto, Epstein e Axtell conseguiram fazer algo que permanecia numa esfera de conjectura genérica, pois, a economia neoclássica assumia que o mercado tenderia para o equilíbrio e argumentava a partir de um plano discursivo acerca desse equilíbrio, sem que se pudesse testar a ocorrência do mesmo numa economia experimental, o que resultou numa modelação circular *top down* a partir do equilíbrio, ou seja, tomando o equilíbrio como princípio, restringiu-se os agentes para garantir o equilíbrio, quando, num modelo eficaz de uma economia de mercado, o equilíbrio deveria emergir.

Utilizando a simulação multiagentes, Epstein e Axtell forneceram à economia um exemplo da possibilidade de se construir uma economia artificial, com os pressupostos comportamentais relevantes, e observar os resultados emergentes. O que abre a possibilidade de se fazer experimentação económica com mundos virtuais.

O resultado obtido, por Epstein e Axtell, de uma economia de transacções simples, baseada em pressupostos neoclássicos, é positivo em relação ao argumento acerca da emergência de um equilíbrio, dominante em termos estatísticos, assim como é positivo em relação à *mão invisível* de Adam Smith, mas é negativo em relação ao argumento sobre o bem-estar social, pois, no modelo de *sugarscape*, agentes com as mesmas capacidades, preferências, e dotações (*endowments*) vão evoluir para diferentes níveis de bem-estar social no equilíbrio estatístico, violando o equilíbrio Walrasiano e não preservando, deste modo, as propriedades em relação ao bem-estar social, previstas nos modelos neoclássicos tradicionais (Epstein e Axtell, 1996).

A emergência de desigualdades horizontais é um comportamento dominante da economia de *sugarscape* que havia sido previsto por Foley (1994) para economias de mercado descentralizadas e caracterizadas por *equilíbrios estatísticos*.

Um segundo problema para a teoria neoclássica tradicional, resultante do trabalho de Epstein e Axtell, ocorre com a noção de eficiência. Embora o mercado seja localmente eficiente, isto é, para cada transacção local, o preço e as quantidades transaccionadas coincidem com o preço e quantidades de encontro entre oferta e procura, logo, são quantidades de equilíbrio, quando se passa à descrição agregada, as quantidades transaccionadas são sempre inferiores às quantidades obtidas a partir da intersecção entre a oferta agregada e a procura agregada.

Assim, embora ocorra uma convergência estatística para um preço de equilíbrio, esse equilíbrio estatístico ocorre em simultâneo com um mercado fora do equilíbrio, no que respeita à procura e oferta agregadas, e em equilíbrio, ao nível das transacções locais, o que significa que dado o desvio-padrão dos preços locais ser baixo, o preço médio de convergência, ou, em termos de linguagem da teoria dos jogos evolucionária, o *equilíbrio evolucionário estável*, estatisticamente representativo, corresponde a um equilíbrio local, esse equilíbrio local não conduz, contudo, a um equilíbrio macroeconómico (Epstein e Axtell, 1996).

As diferenças de resultados entre o previsto pela teoria e o mundo virtual de *sugarscape* são expectáveis, dado que existe um elemento essencial que diferencia o mundo virtual de *sugarscape* e que está ausente na economia neoclássica tradicional, a saber: no mundo virtual de *sugarscape* existe uma base biológica em jogo, que está ausente dos modelos mecanicistas da economia neoclássica tradicional.

Existe uma dinâmica evolutiva biológica interagente com uma dinâmica evolutiva económica. A partir da noção de *vida artificial*, e a partir da evidência das dinâmicas evolutiva económica e biológica, pode-se, de facto, argumentar que se está a lidar com um modelo de economia viva, o que é muito diferente dos modelos neoclássicos tradicionais (Epstein e Axtell, 1996).

O jogo entre a economia, dinâmica populacional e evolução torna-se evidente nos resultados acerca do *bem-estar social*, as transacções alteram a capacidade de sobrevivência dos organismos, que, por seu turno, realimentam o jogo de mercado mantendo-o vivo. As desigualdades existem também ao nível da capacidade de sobrevivência, pois os organismos virtuais do mundo de *sugarscape* têm que consumir as *commodities* acumuladas para sobreviverem.

O jogo de acumulação de valor encontra-se, assim, acoplado com o jogo de vida e morte, a *fitness* biológica de cada organismo é proporcional à sua *fitness* económica, isto é, a capacidade de sobrevivência de cada organismo depende da vantagem económica obtida a partir da acumulação do bem transaccionável.

Está-se, deste modo, perante um jogo sistémico, em que cada organismo se encontra numa *situação de risco* em que risco económico e risco biológico se encontram acoplados num jogo de sobrevivência.

A ocorrência de desigualdades encontra-se na intersecção entre a economia e a biologia, trata-se de desigualdades económicas associadas à capacidade de troca e de desigualdades biológicas associadas à capacidade de sobrevivência de cada organismo.

Assim, aquilo que pode ser concluído a partir de Epstein e Axtell é que, numa economia descentralizada, em que o mercado e a selecção natural estão acoplados num jogo de sobrevivência, mesmo que se assumam pressupostos neoclássicos, ocorrem diferenças entre a *fitness* (biológica e económica) de diferentes agentes.

Estes são os resultados centrais do modelo com comportamento transaccional neoclássico. Quando Epstein e Axtell alteraram os pressupostos neoclássicos, introduzindo tempos de vida finitos e permitindo que as preferências dos agentes evoluíssem com o tempo, de acordo com regras de transmissão cultural, os preços flutuaram mais, tendo o efeito da variação cultural das preferências introduzido uma variância espacial flutuante (Epstein e Axtell, 1996).

A conclusão de Epstein e Axtell foi, então, a de que quando se introduz coevolução económica, biológica e cultural, um mercado de livre concorrência descentralizado tende a auto-organizar-se longe do equilíbrio económico.

Neste contexto, as *situações de risco* complexificaram-se, pois estão em jogo processos económicos, biológicos e culturais que, por seu turno, fazem emergir dinâmicas de risco ao nível macroscópico.

Os autores foram mais longe ainda na complexificação das *situações de risco*, tendo introduzido efeitos de externalidades e poluição, mecanismos de formação de expectativas, formação de redes de crédito e de hierarquias.

Existem duas conclusões sinalizadas por Epstein e Axtell, resultantes da análise do mundo virtual *sugarscape*, que importa referir. A primeira é a de que as economias artificiais podem constituir-se como laboratórios onde se pode investigar a *performance* de regras de transacção e estruturas de redes de agentes evolutivas. A segunda conclusão é a de que uma teoria económica de economias longe do equilíbrio poderá ter uma correspondência concreta e uma maior eficácia explicativa do que uma teoria económica baseada nos modelos da economia neoclássica tradicional. Para a ciência do risco, o *sugarscape* de Epstein e Axtell constitui uma base de trabalho útil para a investigação das dinâmicas de *situações sistémicas de risco*.

Apesar de os resultados de Epstein e Axtell serem úteis para o pensamento económico acerca dos mercados, as estruturas de mercado que caracterizam os mercados financeiros apresentam uma diferença fundamental ao nível da formação dos preços, a saber: existe, para cada activo, um preço de mercado único, preço, este, que emerge do comportamento dos agentes financeiros. Assim, o contexto de múltiplos preços locais não ocorre no caso dos mercados financeiros, o que significa que existem ciclos de *feedback* permanentes entre local e global.

A ideia de construção de um mercado financeiro artificial, com o objectivo de capturar a turbulência de mercado, afastando-se dos pressupostos microscópicos neoclássicos, partiu de vários membros do SFI, no final da década de 1980.

Segundo John Holland (1996), a ideia surgiu dos resultados obtidos a partir das aplicações da computação evolutiva baseada em agentes a jogos como o dilema do prisioneiro, resultados, estes, que revelaram a eficácia dos agentes adaptativos artificiais na aprendizagem de estratégias de jogo. Dada a proximidade entre a teoria dos jogos e a economia, Brian Arthur estimulou Holland a investigar aplicações da computação evolutiva baseada em agentes à economia.

No SFI, as ideias iniciais de Holland e Arthur foram estimuladas pela interacção com Philip Anderson e Kenneth Arrow, tendo conduzido ao projecto de simulação de uma *bolsa de valores artificial* (Holland, 1996). O projecto pretendia, inicialmente, ser uma experiência conceptual, no sentido de compreender melhor a dinâmica de mercado e, em particular, os processos sistémicos associados à formação de *bolhas* e *crashes*. Tratou-se, deste modo, de um projecto de investigação interdisciplinar envolvendo a ciência do risco e a economia financeira, com o objectivo de investigar as origens sistémicas dos padrões de risco nos mercados financeiros.

Holland, Arthur, Anderson e Arrow eram críticos da perspectiva de que as *bolhas* e os *crashes* seriam o resultado de uma *exuberância irracional* e de uma degradação decisional devido a ruído exógeno, defendendo a possibilidade de as *bolhas* e os *crashes* fazerem parte do funcionamento interno do sistema, resultando do comportamento adaptativo da rede de agentes investidores (Holland, 1996).

Em termos comportamentais, os modelos cognitivos, subjacentes ao projecto da *bolsa de valores artificial*, afastavam-se do pressuposto do *homo economicus*. Os colaboradores iniciais do projecto defendiam que a dinâmica dos preços deveria evoluir, no modelo, com a dinâmica evolutiva em que *schemata* alternativos competiriam no *meme pool* dos agentes (Holland, 1996). Cada *schemata* permitiria aos agentes identificar regularidades e investir com base em regras adaptativas, os agentes aprenderiam, assim, a investir, aprendendo com os erros cometidos e alterando as suas estratégias, com base na *performance* obtida.

A formação de expectativas evolutivas constituiu, assim, uma base de trabalho para o modelo de mercado do SFI. Segundo Holland (1996), os participantes no projecto esperavam que as dinâmicas evolutivas de selecção de *schemata* adaptativos na população de agentes fizessem emergir a *bolhas especulativas* e os *crashes* subsequentes, de tal modo que a aprendizagem evolutiva foi avançada como hipótese para a replicação, no modelo computacional, da dinâmica de risco dos mercados, sem necessidade de introdução de variáveis exógenas, o que constitui uma conjectura central, para a ciência do risco, marcando uma transição no discurso e pensamento económico e financeiro acerca do risco, no que respeita ao papel desempenhado pela noção de *choque* na modelação do risco.

O uso da noção de *choque* pressupõe um raciocínio mecanicista acerca do risco, que pode não ser verificado. Uma crise, um *crash*, na conjectura do SFI não constituem *choques*, constituem, sim, processos emergentes a partir dos comportamentos adaptativo do sistema de agentes investidores.

A construção do modelo de mercado avançou com a chegada de novos colaboradores ao projecto, em particular, do físico Richard Palmer. De acordo com o modelo de vida inteligente artificial, um pequeno número de agentes adaptativos negociaria um único título, com um programa especializado (não adaptativo) a avaliar as ofertas de compra e de venda para determinar o preço corrente (o equivalente de uma média diária) (Holland, 1996).

Assumiui-se a não existência de comunicação directa entre os agentes, de tal modo que a única fonte de informação, para cada agente, em cada passo temporal, seria o preço corrente. Com base nessa informação, e no historial de preços, cada agente decidiria entre comprar, vender ou manter a sua posição, para cada *round* transaccional (sendo as transacções assumidas como ocorrendo sincronicamente no final do *round*). Foi, também, assumida a existência de um dividendo por cada título mantido, para que os agentes fossem compensados pela estratégia de manutenção da posição, sendo o valor fundamental, obtido a partir do dividendo. A medida do desempenho de qualquer agente era definida a partir do montante de riqueza acumulada através das decisões tomadas. O algoritmo de aprendizagem utilizado foi um algoritmo genético de selecção de *schemata*.

Os resultados obtidos com a simulação do mercado foram positivos em relação à hipótese de emergência de *bolhas* e *crashes*, a partir da dinâmica de aprendizagem dos agentes.

Segundo Holland (1996), numa execução típica do modelo, os agentes eram preparados, inicialmente, com *schemata* seleccionados aleatoriamente, de onde resultava um comportamento inicial irregular em relação às estratégias de investimento. Contudo, com a aprendizagem, implementada pelo algoritmo genético, emergiam regras, localmente cristalizadas durante algum tempo, que os agentes utilizavam para decidir acerca de quando comprar, vender ou manter a posição.

A dinâmica de mercado estabilizava, tornando-se semelhante à dinâmica de um passeio aleatório, conforme o previsto segundo a teoria financeira de influência neoclássica. Então, quando um agente “descobria” uma regra eficaz ao nível da identificação de inércias de mercado, investindo com base na tendência, mais agentes tenderiam a copiar a regra, ocorrendo um fenómeno de reforço de tendência e conduzindo a uma *bolha*, e, subsequentemente, a um *crash*.

Assim, as *bolhas* e os *crashes*, na *bolsa de valores artificial*, proposta pelo grupo do SFI, ocorrem por via de uma transição estratégica no mercado, em que a *análise técnica* se torna dominante (Holland, 1996).

Embora tenha constituído um avanço no seio da ciência do risco, no seio da teoria financeira e nas técnicas de modelação financeira, marcando o início da MFM, existe um problema central com a proposta do SFI, a saber: o modelo abandona a noção de *homo economicus* mas, ao mesmo tempo, assume uma função de utilidade para os agentes. As funções de utilidade encontram-se, ao nível da sua genética conceptual, comprometidas com a noção de *homo economicus*, e com critérios precisos ordenadores de preferências, sem os quais podem ocorrer desvios à teoria da utilidade esperada. Existe, deste modo, uma incompatibilidade conceptual e sistémica nos fundamentos do modelo de mercado financeiro do SFI.

Desde a década de 1990 que as finanças computacionais, a MFM e a *teoria financeira evolucionária* se desenvolveram enquanto ramos de investigação no seio da teoria financeira. Sendo uma das temáticas centrais: a construção de mercados financeiros artificiais, capazes de capturar dinâmicas de turbulência nos preços (Voit, 2001; Schredelseker e Hauser, 2008).

Com o desenvolvimento paralelo da econofísica, enquanto ramo interdisciplinar da economia que incorpora metodologias vindas da física, em particular da mecânica estatística e da mecânica quântica, na investigação dos fenómenos económicos, surgiu uma subclasse de mercados artificiais, baseados em modelos de Ising adaptados aos contextos sociais.

Os modelos de Ising, adaptados aos contextos sociais, e aplicados aos mercados financeiros, trabalham, de um modo eficaz, as noções de polarização e sincronização de sentimento de mercado (Voit, 2001). Contudo, assumem uma base conceptual vinda da *behavioral finance*, que aceita como critério de racionalidade o critério neoclássico, e assume que os processos de polarização, as *bolhas* e os *crashes* ocorrem devido a uma sincronização no *sentimento de mercado* de investidores ditos “irracionais”, designados por *noise traders*. A racionalidade estratégica, assumida pelo SFI, encontra-se, assim, ausente nestes modelos.

De entre os modelos de *noise traders*, com polarização, destaca-se o modelo de Lux e Marchesi (1999), com a capacidade de gerar complexidade de curto prazo, demonstrando que uma população de *noise traders*, com polarização sincronizada de estratégias, poderia introduzir padrões complexos de *trading* e turbulência.

Uma continuidade com os modelos de Ising, baseados na hipótese dos *noise traders*, foi quebrada em 2003, por Gonçalves, com um modelo de Ising com uma regra local de votação, para uma estrutura de grelha bidimensional com conectividade local, definida em termos de vizinhanças locais de von Neumann e com condições periódicas de fronteira.

O modelo de Gonçalves (2003), construído em Netlogo, e disponível para ser simulado *online*, assume um comportamento adaptativo baseado na neurobiologia e no processamento de informação rápido que tende a ocorrer durante uma sessão de bolsa, afastando-se dos fundamentos comportamentais do *homo economicus* neoclássico, assim como dos fundamentos comportamentais vindos da hipótese do *noise trader*. Neste mercado financeiro artificial, abandona-se a hipótese de homogeneidade de expectativas, assim como as dicotomias *racional/irracional* e *investidor racional/noise trader*.

No modelo, os agentes são assumidos como sendo heterogéneos, em particular, possuindo diferentes bases de conhecimento e experiência, de tal modo que o *background* de cada agente é diferente, assim como o padrão de *afecção* de cada agente.

O elemento activo adaptativo fundamental, neste caso, é a *afecção*. Cada agente tem a capacidade para ser *afectado* e a capacidade para *afectar*. Cada agente é *afectado* pelos *media*, pela informação individual e pela interacção com

os restantes agentes, de onde resulta um sentimento do agente em relação à alternativa estratégica de compra ou de venda.

Em termos comportamentais, existem dois elementos que distinguem este modelo dos restantes mercados financeiros artificiais, trata-se de um dos primeiros modelos a incorporar os resultados da neurobiologia da decisão, obtidos pela equipa de António Damásio, e que demonstram o papel fundamental das emoções e dos sentimentos nos processos de tomada de decisão racional.

Conforme sinalizado e argumentado por Damásio ([1994], 2000), o modelo teórico da teoria da decisão e a noção de uma razão lógica decisional desconectada das emoções é incompatível com aquilo que é a evidência neurobiológica acerca dos processos humanos de tomada de decisão. Por outro lado, o processo de tomada de decisão, assumido pela teoria da decisão tradicional é demasiado lento em comparação com um processo decisional humano, em que os *marcadores somáticos* desempenham um papel activo fundamental numa sinalização adaptativa organísmica da presença de uma ameaça ou de uma oportunidade (Damásio, [1994], 2000).

A rapidez de resposta adaptativa à informação, pressuposta pelo modelo neoclássico, torna-se apenas possível, nos mercados, se os agentes decidirem rapidamente através de uma avaliação organísmica da informação, de tal modo, que numa dinâmica rápida, um mercado dominado por *value investors* tende a reagir segundo um sentido avaliador de uma oportunidade ou ameaça à capacidade futura de criação de valor da entidade, ou entidades tituladas.

O preço reage, deste modo, ao valor fundamental, mais por via de uma intuição informada do agente no terreno do que pela aplicação de modelos de avaliação sofisticados. Dado que perspectivas futuras positivas tendem a concretizar-se numa expansão da capacidade de criação de valor, e perspectivas futuras negativas tendem a concretizar-se numa contracção da capacidade de criação de valor, o preço de mercado, num mercado dominado por *value investors* de resposta rápida, tende a ser eficiente na sua resposta adaptativa à informação, pois é afectado por informação que reflecte as fontes de oportunidades e ameaças de criação de valor.

Este comportamento pode ser observado empiricamente nos mercados financeiros, quando se analisam as variações de mercado em relação às notícias. Numa dinâmica rápida, o mercado tende a variar positivamente para boas notícias e negativamente para más notícias. A avaliação do sentimento de mercado parece constituir um elemento central para a formação de expectativas dos *traders*, quer para aqueles que se encontram no *trading floor*, quer para os *specialists*. Como exemplo, podemos considerar os casos de Ben Schwartz, *trader* da CBOE (*Chicago Board Options Exchange*), que trabalha no *trading floor*, e de Leo Melamed, que foi *chairman* da CME (*Chicago Mercantile Exchange*), ambos entrevistados no documentário da BBC de 1999, *The Midas Formula*²¹.

21. Também conhecido, na versão da PBS, pelo nome *The Trillion Dollar Bet* (ver bibliografia para os *websites*).

Segundo Ben Schwartz, quando entra na bolsa, entra com uma *mente calma* (*clear mind*), então, *a emoção aumenta até explodir* quando chega ao *trading floor* (palavras de Schwartz), a partir daí, ainda segundo Schwartz, *o mercado está sempre a mover-se, existem gritos por todo o lado, pessoas a agarrarem-se umas às outras, a fazerem tudo aquilo que for preciso para conseguir captar a atenção dos outros*.

Trata-se, neste caso, de uma descrição de uma bolsa americana com muito movimento, em que a actividade cognitiva do *trader*, que trabalha no *trading floor*, tem de ser tal que o mesmo tem de ser capaz de processar múltiplos estímulos em simultâneo, de avaliar rapidamente a sua posição e de entrar e sair no momento certo, a adrenalina e a serotonina tornam-se elementos fundamentais na actividade cognitiva de *trading* no *trading floor*.

Melamed, por seu turno, no mesmo documentário, descreve uma experiência diferente. No seu gabinete, Melamed encontra-se afastado do ruído do *trading floor*, chegando de manhã cedo ao seu escritório e tentando formular juízos de síntese acerca da direcção de flutuação de uma série de mercados distintos. Segundo Melamed, lendo os jornais, e com base na informação que lhe chega, tenta antecipar aquilo que será o sentimento de mercado, se a informação tornará o mercado optimista (*bullish*) ou pessimista (*bearish*).

Melamed tem acesso a informação que os *traders* no *trading floor* não têm, enquanto que os *traders* no *trading floor*, segundo Melamed, conseguem ter acesso a informação a que Melamed não tem, a saber: o *ruído*. De acordo com Melamed, os gritos e o ruído constituem informação, assim como os padrões nesse ruído, de tempos a tempos o ruído altera-se, e isso também constitui informação, assim como o medo nos olhos dos *traders* constitui, também, informação. Melamed descreve, deste modo, um processamento de informação bastante distinto daquele que é assumido como base comportamental e computacional para o *homo economicus*.

Com o desenvolvimento da neuroeconomia sabemos, hoje, que os pressupostos comportamentais do *homo economicus* não têm fundamento empírico, tal como não o tem a teoria da decisão tradicional, quando procura constituir-se enquanto teoria acerca do modo como os humanos decidem.

No seio de uma teoria financeira de base neoclássica, agentes como Melamed ou Schwartz seriam considerados como encontrando-se próximos de *noise traders*, contudo esse não é o caso. Encontramos em Melamed e em Schwartz o reconhecimento de um valor adaptativo das emoções na decisão racional. Quando Schwartz se refere ao sentimento do mercado como um todo refere-se a uma rotatividade graviticamente sincronizada num ponto expectacional adaptativo.

A *afecção* de cada *trader* pelos outros *traders*, pelas notícias e pela informação local que lhe chega, desencadeia um processamento de informação teorizante. A própria informação contém teoria, pois as notícias financeiras chegam ao mercado com análise produzida pelos próprios *media*. A escolha das palavras nos textos e comunicações dos *media* são escolhas que reflectem uma base de conhecimentos e um processo teorizante. Os *media*, principalmente os *media financeiros*, produzem expectativas que são difundidas para o mercado.

Por seu turno, cada *trader* é afectado de modo diferente pela informação, dependendo da sua formação de base, da sua experiência de vida, da sua experiência de *trading*, do seu padrão de conectividade com a rede.

É esta dinâmica que o modelo de Gonçalves (2003) procura capturar. O objetivo do modelo, quando este foi construído, foi o de avaliar a dinâmica emergente num mercado financeiro artificial para um mercado composto somente por *value investors*.

O modelo trabalha com três sistemas fundamentais, a saber: *a entidade criadora de valor*, os *media* e o *mercado*. Os *media* enviam, em cada *round* de transacção, informação sob a forma de notícias com análise para o mercado, informação, essa, que pode incorporar expectativas positivas ou negativas. No primeiro caso, as expectativas são no sentido de uma expansão da capacidade de criação de valor da *entidade criadora de valor*, no segundo caso, as expectativas são de uma contracção da capacidade de criação de valor da *entidade criadora de valor*.

O *valor* da *entidade criadora de valor* assume-se como podendo ser dividido em unidades fundamentais, assim, por exemplo, no caso de uma empresa (*entidade criadora de valor*) as acções são unidades fundamentais pelas quais o valor pode ser dividido. São estas unidades fundamentais que são transaccionadas no modelo de mercado.

Para além da informação sintetizada nas notícias, cada investidor, no modelo, pode trabalhar informação diferenciada, a qual pode, também, ser positiva ou negativa.

Cada agente é afectado de modo diferente pelas notícias, o que significa que o peso dado às notícias ou à informação adicional trabalhada pelo agente difere de agente para agente.

Se estes fossem os únicos elementos, a dinâmica do preço tenderia para um mercado sem sincronização de sentimento estratégico dos agentes e com uma dinâmica final descrita pelo passeio aleatório. Contudo, esta dinâmica deve-se somente à ausência de sincronização, o que significa que não existe uma polarização gravítica forte nem para a subida, nem para a descida, pois o número de agentes que acreditam na expansão da capacidade de criação de valor por parte da *entidade de criação de valor*, aproxima-se, sempre, do número de agentes que acreditam na contracção da capacidade de criação de valor por parte da *entidade de criação de valor*. O mercado, sem sincronização, pode, assim, ser descrito, na sua dinâmica estocástica, por uma soma de variáveis aleatórias de Bernoulli.

Quando se introduz interacção social adaptativa, a rede de agentes transforma-se numa rede adaptativa não-linear. O modelo assume que os *value investors* estão ligados em rede, de tal modo que as expectativas de cada agente, em relação à expansão ou contracção da capacidade de criação de valor da *entidade criadora de valor*, e o sentimento estratégico acerca da compra ou da venda dependem da interacção entre cada agente e os seus vizinhos na rede.

No modelo, assume-se que cada agente tem uma propensão de base para ser contaminado pela interpretação dos vizinhos, na rede, acerca das notícias e informação local. Uma vez mais, assume-se uma heterogeneidade dos agentes, de tal modo que cada agente tem uma propensão individual de base para ser contaminado pelas expectativas dos vizinhos. Por outro lado, a propensão efectiva para a contaminação de expectativas, ou *grau de afecção*, em cada *round* de transacção, apresenta o seguinte comportamento adaptativo, para cada agente:

- Se uma *boa/má notícia*, reportada pelos *media*, no *round* anterior, for confirmada por um movimento de mercado no mesmo sentido, então a propensão de cada agente para ser contaminado pelas expectativas dos vizinhos (*grau de afecção*), para o *round seguinte*, é definida como sendo igual à propensão de base do agente, adicionada de uma magnitude igual ao valor absoluto da rendibilidade logarítmica;
- Se uma *boa/má notícia*, reportada pelos *media*, no *round* anterior, não for confirmada por um movimento de mercado no mesmo sentido, então, a propensão de cada agente para ser contaminado pelos vizinhos (*grau de afecção*), para o *round seguinte*, é definida como sendo igual à propensão de base do agente, subtraída de uma magnitude igual ao valor absoluto da rendibilidade logarítmica.

A intuição de base, para esta regra adaptativa, pode ser explicada, considerando, como exemplo, um cenário pessimista. Assuma-se, então, que os *media* reportam notícias com um sentido negativo para as expectativas, ou seja, as expectativas incorporadas nas notícias vão no sentido de uma contracção da capacidade de criação de valor da *entidade criadora de valor*.

Considere-se, também, o caso em que este conteúdo expectacional das notícias é confirmado por um movimento de mercado no mesmo sentido, o mercado apenas confirma uma má notícia com um movimento de mercado no mesmo sentido, se existirem mais agentes a venderem do que a comprarem, então, existe um maior número de *value investors* pessimistas (*bearish*), do que optimistas (*bullish*), de tal modo que a gravidade de mercado tende a polarizar seguindo um sentido de rotatividade negativo. Neste caso, por via do comportamento adaptativo assumido acima, no *round* seguinte, os agentes vão ficar mais sensíveis às expectativas dos vizinhos, o *grau de afecção* de cada agente aumenta em relação ao seu valor de base.

Se, no *round* seguinte, as notícias forem positivas, então tende a ocorrer uma sobre-reacção (dependendo do valor do *grau de afecção*) que pode ser corrigida no *round* subsequente, no caso de as notícias voltarem a ser positivas, pois diminui o *grau de afecção* (os vizinhos não foram um bom preditor das notícias). Se, pelo contrário, voltam a ocorrer más notícias, então, o pessimista tende a alastrar-se, com uma amplificação ainda maior do *grau de afecção* para o *round* subsequente, o que explica descidas subsequentes do preço com uma sincronização cada vez maior nas vendas e, logo, saltos maiores no preço.

O modelo introduz, assim, uma dinâmica adaptativa, dependente da sincronização intra-rede de agentes e entre o mercado e os *media*. Trata-se do primeiro modelo a assumir um papel determinante dos *media* numa dinâmica adaptativa do mercado, de tal modo que as expectativas incorporadas nas notícias contribuem para a dinâmica adaptativa do mercado.

No caso de Bachelier (1900), assumia-se sinais de informação diversificados e locais, sendo cada agente afectado somente pelo sinal local, o que conduzia a uma dinâmica puramente mecanicista. Ao incluir os *media*, o modelo de Gonçalves (2003) permite internalizar, na sua própria dinâmica, o efeito de expectativas incorporadas na informação veiculada pelos *media* e o papel central que os *media* e, em particular, os *media financeiros* desempenham na dinâmica adaptativa do mercado.

O modelo consegue gerar uma dinâmica adaptativa complexa com turbulência, ocorrem clusters de volatilidade e transições de fase rápidas com avalanches de contaminação de expectativas que se alastram ao mercado.

Contudo, o modelo tende a produzir uma distribuição bimodal. Como solução, Sornette e Zhou (Sornette e Zhou, 2006; Zhou e Sornette, 2007) introduziram um termo de inércia responsável por uma diminuição na adaptabilidade do *grau de afecção*.

Embora este termo de inércia permita resolver o problema da bimodalidade, trata-se de uma solução com problemas, pois apenas elimina a bimodalidade para um mercado praticamente insensível às notícias, o que não é o caso dos verdadeiros mercados. Para parâmetros de sensibilidade às notícias com valores mais elevados, o mercado regressa a uma bimodalidade.

Por seu turno, a proposta de Gonçalves (2003) para os mesmos parâmetros trabalhados por Sornette e Zhou, gera uma distribuição não bimodal, o que significa que o termo de inércia não constitui uma solução relevante para o problema da bimodalidade.

Um outro problema, com a proposta de Sornette e Zhou, tem uma raiz conceptual, os autores interpretaram incorrectamente os pressupostos económicos de base do mercado, embora tenham trabalhado com *value investors*, os mesmos *value investors* são pensados, por Sornette e Zhou, ainda à luz da noção de *noise traders*, mais especificamente, *noise traders* que estão a tentar antecipar o comportamento do mercado, o que não está de acordo com os pressupostos comportamentais do modelo e da própria regra de adaptação. Uma consequência é a interpretação inversa daquilo que constitui a eficiência de mercado do modelo, regressaremos a esta questão mais adiante na presente secção.

Apesar dos problemas que evidencia, o trabalho de Sornette e Zhou conseguiu demonstrar que a dinâmica fundamental, gerada pelo modelo, replica os parâmetros de *turbulência multifractal* dos mercados.

Uma outra via diferente da de Sornette e Zhou foi proposta por Gonçalves (2005), introduzindo dois outros tipos de agentes, a saber: especuladores e *technical investors* designados por *trend followers*. Neste modelo, os especuladores

jogam um jogo minoritário com o mercado, procurando prever o comportamento do mercado, e, assim, vender em alta e comprar em baixa. Os *trend followers*, por seu turno, podem seleccionar entre uma estratégia de simples *trend following* ou de *contrarian investing*. Nem os especuladores, nem os *trend followers*, procuram prever o sentido do valor fundamental, em vez disso o seu referente adaptativo é o próprio mercado.

O resultado da inclusão destas duas classes de investidores é o desaparecimento da bimodalidade para valores não negligenciáveis de afecção pelas expectativas incorporadas nas notícias. Outras linhas de investigação também foram crescendo, todas elas centradas em aplicações e desenvolvimentos a partir do primeiro mercado artificial proposto por Gonçalves (2003), dentro destas linhas, destacam-se os seguintes trabalhos:

- Bizzotto *et al.* (2005) – fusão do modelo de Gonçalves com o modelo de Lux e Marchesi;
- Caldana *et al.* (2006) – introdução de três classes de agentes: *fundamentalists*, *imitators* e *stubborns*;
- Cecconi e Zappacosta (2008) – inclusão *value investors* e *technical investors* para explicar o comportamento das correlações entre os dividendos e as rendibilidades de mercado;
- Burian (2008) – extensão do modelo com custos de transacção;
- Tasca (2009) – modelo que manteve a heterogeneidade dos agentes e a assimetria de informação, mas explorando uma ecologia de investidores informados e de *noise traders*.

Qualquer um destes modelos trabalha com um contexto distinto da teoria neoclássica, e com uma dinâmica adaptativa do *grau de afecção*, que conduz a uma noção de *eficiência adaptativa* emergente, compatível com a *hipótese de eficiência adaptativa* (*Adaptive Market Hypothesis*, AMH) proposta por Lo (2004; 2005).

Lo também rejeita a dicotomia racional/irracional que serve de ponto de divergência entre a teoria financeira de influência neoclássica e as finanças comportamentais. A base para esta rejeição é a mesma que foi assumida por Gonçalves (2003) para rejeitar a referida dicotomia, a saber: os resultados empíricos vindos da neurociência aplicada aos processos cognitivos decisoriais humanos.

Lo procura reconciliar a noção de eficiência de mercado com os resultados vindos da neurociência, propondo um novo enquadramento conceptual para modelos baseados numa racionalidade sistémica adaptativa.

Assim, Lo trabalha com as noções de competição, adaptação e selecção natural aplicando-as às interacções financeiras. O autor é crítico daquilo que é defendido pelas finanças comportamentais, que seguem a base conceptual da psicologia social, como sendo desvios à racionalidade e enviesamentos comportamentais (por

exemplo, aversão às perdas, sobreconfiança, sub-reacção, *mental accounting*), Lo argumenta que, na verdade, se está perante comportamentos consistentes com uma racionalidade evolutiva, produzida, em termos sistémicos, por organismos numa corrida adaptativa, num ambiente em permanente mudança.

Trata-se da noção de racionalidade comportamental, assumida pelo pensamento neoclássico e pelas finanças comportamentais que é posta em causa. Os defensores das finanças comportamentais, baseando-se nos resultados da psicologia social, criticaram os defensores da eficiência dos mercados, apenas no sentido em que os humanos pareciam desviar-se dos comportamentos considerados racionais, no entanto, aquilo que era considerado comportamento racional pelos defensores da eficiência dos mercados era considerado racional pelos defensores das finanças comportamentais (Shleifer, 2000). Subjacente a ambos os pensamentos encontra-se uma mesma base conceptual – a teoria da decisão clássica. Desvios comportamentais, em relação aos resultados da teoria da decisão clássica, eram considerados como enviesamentos cognitivos e desvios à racionalidade.

A hipótese de uma racionalidade adaptativa no comportamento de mercado tem raízes nas ciências da complexidade e na ciência do risco, em particular, nos trabalhos do SFI acerca do comportamento dos sistemas adaptativos complexos. O mercado artificial do SFI trabalha, já, com uma racionalidade adaptativa, apesar de ainda assumir uma função de utilidade. Os modelos propostos por Gonçalves (2003; 2005) constituem a primeira classe de modelos de mercado a quebrar totalmente com ambos os paradigmas (neoclássico e das finanças comportamentais baseadas na psicologia social) e a demonstrar como uma racionalidade evolutiva e uma cognição em rede consegue replicar os padrões de risco e de *turbulência multifractal* dos mercados efectivos.

É nesse sentido que estes modelos têm vindo a ser considerados como exemplos de modelos que trabalham com a AMH (*adaptive market hypothesis*) (Tasca, 2009; Brit Cruise, 2009).

Para além da AMH, a proposta de Gonçalves (2003; 2005) pode, também, ser situada no seio da ciência que investiga o fenómeno da sincronização nos sistemas. Strogatz (2003) designou, pelo termo *sync*, este ramo científico.

A *sync* constitui uma base de suporte à investigação, quer no seio das ciências da complexidade, ao nível da emergência de padrões complexos, quer no seio da ciência do risco, na investigação acerca dos padrões de risco, emergentes a partir da sincronização sistémica (Strogatz, 2003). Os modelos de mercado, propostos por Gonçalves, foram os primeiros a introduzir, na modelação de mercado, uma dinâmica adaptativa baseada exclusivamente na computação dos processos de sincronização entre sistemas adaptativos complexos, com reenvios permanentes entre processos *bottom up* e *top down*.

De facto, a dinâmica adaptativa do *grau de afecção* computa a sincronização entre mercado e notícias com consequências na produção de sincronizações locais entre os agentes que, por seu turno, produzem sincronizações globais em termos de compra ou de venda.

Assim, a dinâmica adaptativa do *grau de afecção* de cada agente conduz a uma dinâmica emergente coevolutiva entre os processos de teorização adaptativa produzidos pelos agentes no mercado e as expectativas incorporadas na informação divulgada pelos *media*, dinâmica esta que produz uma permanente corrida evolutiva e turbulência de mercado, com a ocorrência de *bolhas* e *crashes*.

A partir do modelo de Gonçalves (2003), Gonçalves e Gonçalves (2007) propuseram um outro mercado financeiro artificial baseado na teoria quântica dos jogos, tendo sido o primeiro modelo de teoria quântica dos jogos cujos resultados foram testados empiricamente, relativamente à captura de *turbulência multifractal* (Gonçalves e Gonçalves, 2007; Piotrowski e Sladkowski, 2008; Sapsin e Soloviev, 2009).

O modelo de Gonçalves e Gonçalves (2007) trabalha com a teoria quântica dos campos, sendo uma proposta de uma teoria bosónica para jogos quânticos evolucionários, que abre uma linha de investigação no seio da matemática do risco, em que a modelação quântica é aplicada à modelação de sistemas em *situações de risco*.

Os modelos quânticos de mercado fazem parte da econofísica quântica, a qual se tem orientado principalmente para a modelação financeira (Gonçalves e Gonçalves, 2007; Piotrowski e Sladkowski, 2008).

Sapsin e Soloviev (2009), contudo, sintetizando e analisando os principais trabalhos desenvolvidos no seio da econofísica quântica, com uma revisão completa daquilo que é a história e o estado da arte no seio do novo ramo da econofísica, argumentam que, a partir dos trabalhos desenvolvidos no seio da econofísica quântica, se poderá configurar um novo paradigma para a modelação social, assim como para a modelação dos sistemas complexos.

Sapsin e Soloviev defendem que, para que esse paradigma seja desenvolvido, será necessário um desenvolvimento de uma econofísica quântica relativista. Sendo as noções de quantidade observável e de tempo, noções centrais a serem trabalhadas no seio de uma tal abordagem.

O trabalho de síntese conjectural de Sapsin e Soloviev pode ser considerado em termos de uma reflexão acerca do formalismo, baseado na teoria quântica, para matemática do risco aplicada à modelação de sistemas em *situações de risco*. Um formalismo quântico, trabalhado a partir da *teoria quântica dos jogos*, tem como base conceptual a teoria da *computação quântica*, a qual é capturável, matematicamente, no seio do formalismo categorial.

Embora o formalismo quântico seja eficaz na modelação de sistemas em *situações de risco* e na captura de padrões de turbulência, existe uma outra abordagem de modelação, desenvolvida no seio da dinâmica não-linear, com elevada relevância para a ciência do risco, trata-se da modelação da dinâmica coevolutiva de sistemas adaptativos complexos, através de mapas não-lineares acoplados, também conhecidos por *coupled map lattices* (CMLs).

Esta abordagem foi seguida por Gonçalves (2010) para a construção de uma economia artificial com um mercado financeiro. Ao contrário dos modelos centrados somente na dinâmica de mercado, este último modelo, assume uma expli-

cação alternativa para a *turbulência multifractal*, que parte da conjectura acerca dessa mesma *turbulência* como tendo uma base na estrutura coevolutiva entre economia e mercado.

Trata-se, neste caso, de uma quebra com uma linha de pensamento da MFM aplicada à modelação do risco nos mercados, que assume a origem dos padrões de risco nos mercados como tendo origem no comportamento adaptativo dos investidores, tal que a fonte da *turbulência multifractal* tem uma fonte financeira no comportamento adaptativo dos investidores. Esta conjectura acerca da origem comportamental adaptativa financeira da *turbulência* financeira tem raízes, conforme revisto acima no trabalho desenvolvido no SFI nos pressupostos subjacentes ao projecto da *bolsa de valores artificial*. Trata-se de uma conjectura também seguida nas principais abordagens dos modelos de Ising e dos modelos de jogos quânticos referidos na presente secção.

Apesar do interesse conjectural, em termos de avaliação de cenários de fontes possíveis de *turbulência multifractal*, esta conjectura seguida por estes modelos, não é necessariamente corroborada pelos factos empíricos.

De facto, conforme a análise por décadas do índice S&P 500, apresentada na **secção 2.3.**, parece existir uma relação entre a estrutura multifractal e a estrutura económica. Não é eficazmente e consistentemente sustentável considerar apenas um jogo coevolutivo financeiro em que não existe interactividade entre empresas e mercados financeiros, tal que se ignora uma coevolução entre economia real e mercados financeiros.

Deste modo, os modelos da MFM deverão evoluir para modelos integrados em que empresas jogam um jogo competitivo e encontram-se em coevolução com o mercado, o modelo proposto por Gonçalves (2010) constitui um exemplo desta abordagem, demonstrando que um modelo de coevolução entre economia e finanças pode ser eficaz na produção de *turbulência multifractal*.

Esta proposta permite identificar uma nova abordagem acerca da modelação de sistemas em *situações de risco*, em que o ambiente não é trabalhado somente em termos dos constrangimentos evolutivos, fontes de recursos, ameaças ou oportunidades mas é, também, trabalhado enquanto elemento sistémico activo, tal que um sistema aberto coevolui com o ambiente (composto por outros sistemas).

Neste contexto é eficaz a noção de Morin ([1977], 1997; [1980], 1999) de *auto-organização* no sentido em que a auto-organização de um sistema processa-se com o meio e existem reenvios permanentes do sistema para o meio e do meio para o sistema (Madeira e Gonçalves, 2009).

Neste contexto, os CMLs são ferramentas úteis. Os CMLs têm sido trabalhados a partir de uma transversalidade interdisciplinar com efeitos sinérgicos e com elevada eficácia explicativa na captura de padrões de risco que ocorrem na dinâmica coevolutiva de sistemas adaptativos complexos, e, deste modo, os CMLs têm assumido um papel central na investigação interdisciplinar acerca do risco nos sistemas, logo, são de uma relevância elevada para a ciência do risco.

Tendo sido inicialmente propostos por Kaneko (1986), para a modelação da turbulência na física, os CMLs expandiram-se enquanto ferramenta, sendo aplicados: na investigação sobre a dinâmica da turbulência e risco nos sistemas complexos (Kaneko, 1986; 1990; 1994; Beck, 2002; Hilgers e Beck, 1997; Basalto *et al.*, 2005; Gonçalves, 2010).

Em termos matemáticos, os modelos matemáticos de CMLs constituem uma expansão da dinâmica não-linear e, em particular, da *teoria do caos*, para sistemas com um elevado número de graus de liberdade.

Enquanto que os CMLs podem ser relevados, pela importância que assumem, a *teoria do caos* e a dinâmica não-linear constituem ferramentas úteis para uma investigação acerca dos fundamentos da matemática do risco, que é o caso da presente tese. Em particular, pela relevância das duas noções relacionadas de *caos* e *estocasticidade*.

A identificação de estruturas mórnicas aleatórias no seio do formalismo do *cálculo categorial* constitui um primeiro passo, para o desenvolvimento de uma abordagem para um formalismo autónomo de uma matemática do risco que tenha por objecto o risco, enquanto tal. Assim, é necessário trabalhar a noção de *aleatoriedade algorítmica* trabalhada no seio do *cálculo categorial* (trabalho que é desenvolvido no **capítulo 3.**). Contudo, para que se possa avançar para uma autonomização formal da matemática do risco, é necessário expandir o formalismo para além da noção de *aleatoriedade algorítmica* e trabalhar as noções de *estocasticidade* e de *caos* no seio o cálculo categorial, conectando o formalismo com a modelação de sistemas, em *situações de risco*.

Da revisão conceptual, apresentada na presente secção, foi possível identificar duas linhas teóricas centrais subjacentes à modelação de sistemas em *situações de risco*, a saber: a *teoria quântica* e a *teoria do caos*. Ambas estas linhas de pensamento teórico são recuperadas no **capítulo 5.**, no seio da formalização categorial das *máquinas de Turing*, conforme relevado no **capítulo 1.**

Conectando o trabalho desenvolvido nos **capítulos 3.** e **5.**, com o trabalho desenvolvido no presente capítulo, segue-se que pode ser identificada, na presente tese, uma abordagem fundamental para a matemática do risco, a qual parte da noção de *aleatoriedade algorítmica* na teoria matemática da computação, para conectá-la com a produção computacional de padrões com estruturas sinalizáveis como aleatórias em sistemas computacionais (digitais ou analógicos (*caos*)), formalizados a partir de uma generalização categorial das *máquinas de Turing*.

Assim, a partir da investigação acerca da aleatoriedade na matemática e seguindo, em particular, os trabalhos de Chaitin e a *teoria do caos*, torna-se possível trabalhar de modo unificado aquilo que constitui a base conceptual sistémica e as principais ferramentas matemáticas, utilizadas pela ciência do risco.

É esta investigação que passamos a desenvolver a partir da linguagem \mathcal{L}_{Cat} e dos padrões produzidos por *estruturas computacionais mórnicas*.

Capítulo 3. A Linguagem \mathcal{L}_{Cat} e os Fundamentos Categoriais da Matemática do Risco

As categorias são estruturas matemáticas elementares compostas por *objectos* e *morfismos*. A teoria das categorias foi introduzida por Eilenberg e Mac Lane (1945), resultando da observação de que diferentes sistemas matemáticos têm propriedades em comum e podem ser simplificados no seio de um discurso formal que trabalhe apenas com estruturas de *objectos* e *morfismos* (Eilenberg e Mac Lane, 1945; Mac Lane, 1998).

No que diz respeito à matemática do risco, a teoria das categorias apresenta uma eficácia em três pontos, a saber: ambos os ramos aplicados da matemática do risco (a matemática da medição do risco e a modelação de sistemas em *situações de risco*) são apreensíveis a partir do formalismo categorial; a lógica de base é mais simplificada ao nível da axiomática, do que seria se se utilizasse a lógica clássica; o formalismo categorial é passível de ser abordado a partir de uma lógica sistémica, intersectando-se com a base conceptual da ciência do risco que resulta da ciência dos sistemas.

A linguagem \mathcal{L}_{Cat} foi proposta enquanto contributo para a investigação acerca dos fundamentos lógicos e sistémicos da *teoria das categorias*, conduzindo a uma autonomização desta *teoria das categorias* em relação à *teoria dos conjuntos* (Gonçalves e Madeira, 2009), autonomização, esta, que é necessária para o programa de investigação que visa investigar a *teoria das categorias*, enquanto alternativa à *teoria dos conjuntos* para a investigação acerca dos fundamentos da matemática (Lawvere e Schanuel, 2005).

O *cálculo categorial*, enquanto cálculo lógico construído no seio de \mathcal{L}_{Cat} , quebra com o uso do cálculo de predicados e da semântica conjuntista, resultando do reconhecimento da possibilidade de abordar a teoria das categorias, a partir de um pensamento sistémico e de uma lógica que é própria às estruturas categoriais, distinta do cálculo de predicados e que não necessita de trabalhar com conjuntos ao nível da semântica, ao contrário da proposta de Mac Lane (1998) que assume uma sintaxe categorial e uma semântica conjuntista.

Esta diferença ao nível da sintaxe e semântica constituem uma vantagem para a matemática do risco, pois uma construção formal desta matemática a partir da base conjuntista, que foi o caminho inicialmente seguido na presente tese, conduz a uma diversidade de leis lógicas e estruturas matemáticas não directamente relacionadas com a matemática do risco mas que têm de ser assumidas para a construção das estruturas conjuntistas.

O *cálculo categorial*, formalizado enquanto cálculo lógico para as estruturas categoriais, agiliza o formalismo da matemática do risco, permitindo que apenas os elementos fundamentais à teoria sejam formalizados sem a necessidade de elementos supérfluos relacionados com estruturas matemáticas alheias à matemática do risco.

Assim, nas **secções 3.1.** e **3.2.**, são apresentados os elementos centrais do *cálculo categorial*. Na **secção 3.1.**, revê-se a sintaxe da linguagem formal \mathcal{L}_{Cat} e são apresentadas as leis lógicas fundamentais do *cálculo categorial*, enquanto que, na **secção 3.2.**, é introduzida a semântica lógica e a *teoria da computação categorial*, sendo trabalhado o problema da *aleatoriedade algorítmica em cadeias infinitas de morfismos*, o que conduz aos primeiros resultados directamente conectados com os fundamentos da matemática do risco.

Na **secção 3.3.**, introduz-se a noção de *categoria* a partir de uma *lei algébrica de composição de fundamentos mórficos* numa *teia mórfica*. O trabalho desenvolvido na **secção 3.3.** serve de base ao trabalho desenvolvido no próximo capítulo, acerca da *topologia categorial*, que, por seu turno, é utilizada nos restantes capítulos da tese. Deste modo, o trabalho desenvolvido na **secção 3.3.**, assim como o trabalho desenvolvido no próximo capítulo, permitem expandir a base teórica sistémica e a eficácia do formalismo para a investigação acerca dos fundamentos da matemática do risco.

Enquanto nota sobre a notação utilizada, importa relevar que o martelo sintáctico \vdash é utilizado no sentido de derivação lógica no seio de \mathcal{L}_{Cat} , tal que $\phi \vdash \phi'$ significa que a *fórmula bem formada* de \mathcal{L}_{Cat} ϕ' se deriva da *fórmula bem formada* ϕ , sendo esta derivação o resultado de *leis lógicas* que são introduzidas ao longo do trabalho. Quando se escreve $\vdash \phi$ está-se a afirmar a validade formal de ϕ . Por seu turno, o martelo semântico \models é usado no sentido usual da *teoria dos modelos*, embora com algumas especificidades resultantes da semântica não conjuntista, conforme se explica na **secção 3.2.**.

Qualquer derivação formal, sinalizada pelo uso do martelo sintáctico \vdash , tem uma interpretação sistémica, no seio da *teoria das categorias*, assim, seguindo Gonçalves e Madeira (2009), cada *lei lógica* introduzida tem de ter um fundamento sistémico, tal que a validade formal tenha sempre por base os critérios de verdade da ciência dos sistemas.

3.1. A linguagem \mathcal{L}_{Cat} – sintaxe e axiomática

O *cálculo categorial* trabalha com *objectos* e *morfismos*, sendo os *objectos* trabalhados enquanto *sistemas individuados*, logo, cada *objecto* encontra-se numa relação de coincidência rotativa consigo mesmo, sinalizada pela introdução do *morfismo de identidade* (Gonçalves e Madeira, 2009).

Sistemicamente, cada *objecto* pode ser identificado a partir da sua *posição e movimento* em *relações mórficas*, ou *morfismos*, as quais são definidas enquanto relações binárias, em que um dos *objectos* toma a posição da *origem* e o outro a posição do *alvo*²², sendo o *fundamento* da relação uma *propriedade binária* que é somente exemplificada pelos dois *objectos* nas suas posições respectivas, enquanto *origem* e *alvo*²³.

22. Nos casos em que *origem* e *alvo* coincidem trata-se de um *automorfismo*. Um exemplo de *automorfismo* é o *morfismo de identidade*.

23. Este pressuposto será removido no final da secção, sendo avaliadas as consequências da sua remoção.

Os *morfismos* são, assim, direccionais e totalmente especificados pelas posições dos *objectos* e pelo *fundamento*, logo, cada *morfismo* pode ser denotado pelos *objectos*, pelo *fundamento* e por um sistema simbólico de duplas setas (Gonçalves e Madeira, 2009):

$$x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} y \quad (16)$$

sendo a seta superior a seta da *origem* que conecta o *objecto origem* x , enquanto *origem* no *morfismo*, com o *objecto alvo* y , e a seta inferior é a seta do *alvo* que conecta o *objecto alvo* y , enquanto *alvo* no *morfismo*, com o *objecto origem* x .

A dupla seta sinaliza a relação sistémica no seu carácter de *necessidade*, ou seja, a *origem* encontra-se dirigida para o *alvo*, enquanto *origem* no *morfismo* de fundamento f , e o *alvo* encontra-se dirigido para a *origem*, enquanto *alvo* no *morfismo* de fundamento f (Gonçalves e Madeira, 2009).

Em alguns casos, poderá ser útil considerar um duplo *fundamento*:

$$x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{f'} \end{array} y \quad (17)$$

o que sinaliza que, no *morfismo*, a *origem* se dirige para o *alvo*, enquanto *origem*, segundo o *fundamento mórfico* f e o *alvo* dirige-se para a *origem*, enquanto *alvo*, segundo o *fundamento mórfico* f' .

O duplo fundamento constitui uma extensão à notação da *teoria das categorias* tradicional, esta e outras excepções serão abordadas no final da presente secção. Assim, começamos por apresentar a linguagem \mathcal{L}_{Cat} tal como a mesma foi introduzida por Gonçalves e Madeira (2009).

3.1.1. A estrutura formal da linguagem \mathcal{L}_{Cat}

A *linguagem formal* \mathcal{L}_{Cat} é constituída por *variáveis-objecto* x, y, z , que ocorrem, nas *fórmulas bem formadas (fbfs)* da linguagem, enquanto variáveis livres denotando *objectos*. Mais *variáveis-objecto* podem ser obtidas, quando necessário, acrescentando linhas, ou seja: $x', y', z', x'', y'', z'', \dots$, expandindo-se, assim, os *nomes de variáveis-objecto*.

Para cada *variável-objecto* introduzem-se as setas duplas para as *conexões mórficas identitárias* $\begin{array}{c} \text{id}_x \text{id}_y \text{id}_z \text{id}_{x'} \text{id}_{y'} \text{id}_{z'} \\ \xrightarrow{\quad} \xrightarrow{\quad} \xrightarrow{\quad} \xrightarrow{\quad} \xrightarrow{\quad} \xrightarrow{\quad} \end{array}, \dots$, de tal modo que, juntamente com as *variáveis-objecto*, estes símbolos formam a base formal identitária de \mathcal{L}_{Cat} , a saber: o fragmento designado por $\mathcal{L}_{\text{Cat}}^{\text{Id}}$, o qual permite trabalhar a questão da *identidade de objectos*.

Considerando, primeiramente, $\mathcal{L}_{\text{Cat}}^{\text{Id}}$, e introduzindo O como denotando qualquer um dos nomes de *variáveis-objecto*, os tipos de *fbfs* de $\mathcal{L}_{\text{Cat}}^{\text{Id}}$ são:

- O (*pontos mórficos*)

- $O \xrightarrow{\text{id}_O} O$ (*teia mórfrica de identidade de nível 1*)
- $O \xrightarrow{\text{id}_O} O \xrightarrow{\text{id}_O} \dots O \xrightarrow{\text{id}_O} O$ (*teia mórfrica de identidade de nível $(n - 1)$*)

O último caso pode também ser denominado de *cadeia*-($n - 1$), assumindo que O é repetido n vezes e, assim, encontra-se conectado consigo próprio pelo seu *morfismo de identidade* $n - 1$ vezes²⁴.

Assume-se, como regra geral para \mathcal{L}_{Cat} , e, logo, para $\mathcal{L}_{\text{Cat}}^{\text{Id}}$, que, sempre que uma *variável-objecto* é repetida numa *fbf*, esta denota o mesmo *objecto*, e que diferentes variáveis, numa mesma *fbf*, denotam *objectos* distintos.

Com estas regras, torna-se possível abordar as *leis lógicas de identidade*, fundamentais para o *cálculo categorial*:

- \mathbf{L}_1 (*validade formal da identidade*): $\vdash x \xrightarrow{\text{id}_x} x$
- \mathbf{L}_2 (*desdobragem do ponto mórfrico*): $\dots x \dots \vdash \dots x \xrightarrow{\text{id}_x} x \dots$
- \mathbf{L}_3 (*dobragem no ponto mórfrico*): $\dots x \xrightarrow{\text{id}_x} x \dots \vdash \dots x \dots$

Estas três leis lógicas são suficientes para especificar totalmente a base sistémica da *teoria categorial* acerca da *identidade de objectos*.

Assim, a primeira lei expressa o *princípio da reflexividade da identidade*, afirmando uma validade formal da conexão *mórfrica* de um *objecto* a si mesmo na sua *identidade*.

A segunda e terceira leis aplicam-se aos *pontos mórfricos* ou a quaisquer *fbfs* em que x ou $x \xrightarrow{\text{id}_x}$ ocorra, o que explica a introdução do marcador de três pontos ‘...’.

A segunda lei diz respeito à validade da *desdobragem* de um qualquer *ponto mórfrico*, que ocorra numa *fbf*, num *morfismo de identidade*. Em termos sistémicos, esta lei pode ser interpretada a partir da proposição que afirma que sempre que um *objecto* de nome x é introduzido num *acto de referência*, no seio do formalismo, o mesmo *objecto* é assumido, no discurso, enquanto existente e, assim, enquanto *identidade*.

Quando um nome para um *objecto* é introduzido num discurso formal do *cálculo categorial*, o *objecto* torna-se o *referente* de um *acto de referência* que afirma algo acerca do *objecto* utilizando o seu *nome*, pelo que, segundo \mathbf{L}_2 , ao utilizar-se o *nome* do *objecto*, reconhece-se esse *objecto* enquanto *existente* e, assim, necessariamente o *objecto* está a ser tomado na sua *identidade*, tal que ao afirmar x também se afirma $x \xrightarrow{\text{id}_x}$.

24. O termo *teia mórfrica* é o termo empregue por Gonçalves e Madeira para designar as *estruturas mórfricas* genéricas de \mathcal{L}_{Cat} . Segue-se, assim, no trabalho desenvolvido, a terminologia de Gonçalves e Madeira (2009).

A terceira lei lógica diz respeito à validade da dobragem, numa *fbf*, do *morfismo de identidade* num *ponto mórfico*, pois o *morfismo de identidade* é uma explicitação da *conexão automórfica identitária* de qualquer *ponto mórfico*, tal que: se, numa *fbf*, ocorre um *morfismo de identidade*, então, pode-se substituir, sem perda de integridade sistémica, o *morfismo de identidade* pelo *ponto mórfico* correspondente, o que explica a possibilidade, referida por Mac Lane (1998), de se representar um *ponto mórfico* com uma seta circular expressando a *conexão mórfica de identidade*, a qual acompanha o *objecto* em quaisquer *relações mórficas* em que o mesmo ocorra.

A segunda lei pode ser simplificada numa única lei lógica de equivalência e, assim, em vez das três leis lógicas temos as duas leis:

- \mathbf{L}_1 (*validade formal da identidade*): $\vdash x \overset{\text{id}_x}{\rightleftarrows} x$
- \mathbf{L}_2 (*dobragem/desdobragem do ponto mórfico*): $\dots x \dots \dashv\vdash \dots x \overset{\text{id}_x}{\rightleftarrows} x \dots$

que passam a ser assumidas a partir deste ponto²⁵.

Estes são os elementos centrais de $\mathcal{L}_{\text{Cat}}^{\text{Id}}$. Para obtermos \mathcal{L}_{Cat} , necessitamos de acrescentar as *conexões mórficas não identitárias*: $\overset{f}{\rightleftarrows}, \overset{g}{\rightleftarrows}, \overset{h}{\rightleftarrows}, \overset{f'}{\rightleftarrows}, \overset{g'}{\rightleftarrows}, \overset{h'}{\rightleftarrows}, \dots$, sendo as *fbfs* fundamentais:

- $O \overset{F}{\rightleftarrows} O$ (*morfismo singular*)
- $O_1 \overset{F_1}{\rightleftarrows} O_2 \overset{F_2}{\rightleftarrows} \dots O_{n-1} \overset{F_{n-1}}{\rightleftarrows} O_n$ (*cadeia-(n - 1)*)

em que as letras O e O_i ($i = 1, 2, \dots, n$) denotam quaisquer *nomes de variáveis-objecto*, e F e F_i ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) denotam quaisquer *nomes de fundamentos para conexões mórficas*.

Para além destas fórmulas, também assumimos, como uma regra de formação de *fbfs*, que *morfismos singulares* e *cadeias-(n - 1)* podem ser acoplados a *fbfs* que satisfaçam as regras de $\mathcal{L}_{\text{Cat}}^{\text{Id}}$ e as leis \mathbf{L}_1 e \mathbf{L}_2 , assim, por exemplo as seguintes fórmulas são *bem formadas*:

$$\begin{array}{c} \text{id}_x \quad f \quad \text{id}_y \\ x \rightleftarrows x \rightleftarrows y \rightleftarrows y \\ f \quad g \quad \text{id}_z \quad h \\ x \rightleftarrows y \rightleftarrows z \rightleftarrows z \rightleftarrows x' \end{array}$$

25. Neste caso, substituiu-se \mathbf{L}_2 e \mathbf{L}_3 por uma única lei \mathbf{L}_2 que contém a formulação das duas leis anteriores, denotamos esta lei lógica mais geral por \mathbf{L}_2 por uma questão de simplicidade de notação. Este critério é seguido sempre que se proceder a substituições de leis lógicas do *cálculo categorial* por outras leis lógicas mais gerais. Importa sublinhar que as designações enumerativas das *leis* não são relevantes, o relevante é a descrição de cada *lei*, que é sintetizada pelo nome da mesma.

Os *pontos mórficos*, os *morfismos singulares* e as *cadeias mórficas* são assumidos como fazendo parte dos blocos de construção das *teias mórficas* gerais, constituindo, eles próprios, *teias mórficas elementares*. Deste modo, numa *teia mórfica*, um *ponto* aparece isolado ou, em alternativa, ocorre num ou mais *morfismos singulares*, ou numa ou mais *cadeias mórficas*.

Cada *fbf* de \mathcal{L}_{Cat} constitui uma estrutura formal de uma *teia mórfica geral*, exemplificável por diferentes *teias mórficas* particulares, obtidas a partir da substituição de cada uma das variáveis livres de *objectos* e *fundamentos* por *constantes lógicas*, substituição, esta, que introduz, no seio de \mathcal{L}_{Cat} , uma instanciação da *teia mórfica geral*. Cada *teia mórfica*, que seja construída com variáveis ou constantes lógicas que obedeça às regras de formação de *fbfs* acima introduzidas, constitui uma *fbf*, decomponível a partir de *fbfs* elementares, assim, considere-se o seguinte exemplo:

$$x' \quad y \xrightleftharpoons[f]{g} x \xrightleftharpoons{g} z \quad (18)$$

$$x' \xrightleftharpoons{h} y \xrightleftharpoons[f]{g} x \xrightleftharpoons{g} z \quad (19)$$

$$\begin{array}{c} x' \xrightleftharpoons{h} y \xrightleftharpoons[f]{g} x \xrightleftharpoons{g} z \\ \quad \quad \quad \downarrow \uparrow_{f'} \\ \quad \quad \quad y' \end{array} \quad (20)$$

A primeira *teia mórfica* é composta pelas seguintes *fbfs* elementares:

- *Ponto mórfico*: x'
- *Morfismo singular*: $x \xrightleftharpoons{f} y$
- *Morfismo singular*: $x \xrightleftharpoons{g} z$

A segunda *teia mórfica* é composta pelas seguintes *fbfs* elementares:

- *Morfismo singular*: $x \xrightleftharpoons{g} z$
- *Cadeia mórfica*: $x \xrightleftharpoons[f]{h} y \xrightleftharpoons{g} x'$

A terceira *teia mórfica* é composta pelas seguintes *fbfs* elementares:

- *Morfismo singular*: $x \xrightleftharpoons{g} z$
- *Cadeia mórfica*: $y' \xrightleftharpoons{f'} x \xrightleftharpoons[f]{h} y \xrightleftharpoons{g} x'$

Em termos de classificação de *teias mórnicas*, a segunda e a terceira são designadas como *totalmente conectadas*, dado que todos os *objectos* são conectados por um *morfismo*. A primeira é dita *desconectada*, pois existe um *ponto mórnic* isolado dos restantes.

Quaisquer das *leis lógicas*, introduzidas no seio do formalismo de \mathcal{L}_{Cat} , são aplicáveis localmente às componentes de *teias mórnicas*.

Considerando as leis sobre identidade \mathbf{L}_1 e \mathbf{L}_2 , as seguintes seis leis são dedutíveis enquanto teoremas (Gonçalves e Madeira, 2009):

- $\mathbf{T}_1: \dots x \xrightarrow{\text{id}_x} x \xrightarrow{f} y \dots \vdash \dots x \xrightarrow{f} y \dots$
- $\mathbf{T}_2: \dots x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\text{id}_y} y \dots \vdash \dots x \xrightarrow{f} y \dots$
- $\mathbf{T}_3: \dots x \xrightarrow{\text{id}_x} x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\text{id}_y} y \dots \vdash \dots x \xrightarrow{f} y \dots$
- $\mathbf{T}_4: \dots x \xrightarrow{f} y \dots \vdash \dots x \xrightarrow{\text{id}_x} x \xrightarrow{f} y \dots$
- $\mathbf{T}_5: \dots x \xrightarrow{f} y \dots \vdash \dots x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\text{id}_y} y \dots$
- $\mathbf{T}_6: \dots x \xrightarrow{f} y \dots \vdash \dots x \xrightarrow{\text{id}_x} x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\text{id}_y} y \dots$

Os teoremas \mathbf{T}_1 , \mathbf{T}_2 , \mathbf{T}_4 e \mathbf{T}_5 conduzem a uma *formulação lógica* das *leis de identidade*, introduzidas usualmente como axiomas no seio da teoria das categorias (Lawvere e Schanuel, 2005; Mac Lane, 2000), embora no corrente caso ocorram como teoremas.

Considerados em conjunto, os seis teoremas expressam um princípio ontológico sistémico, subjacente à natureza sistémica do *objecto categorial*, a saber: sempre que um *objecto* se encontra numa *relação mórnic*, o mesmo encontra-se nessa mesma relação enquanto posição de si mesmo, em si mesmo (*ponto mórnic*), logo, enquanto *entidade* e, assim, enquanto *identidade*, seja este objecto a *origem* ou o *alvo* no *morfismo* (Gonçalves e Madeira, 2009).

Considere-se, agora, a *cadeia mórnic*:

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \quad (21)$$

Neste caso, y é o *alvo* de x , sob o *fundamento* f , e encontra-se na *origem* de z , sob o *fundamento* g . Nesta *cadeia*, o último *objecto* não se encontra directamente ligado a x por uma *relação mórnic*, existe uma *ligação mórnic indirecta*. Seguindo a teoria dos grafos, pode-se afirmar que z tem uma *separação de dois graus* em relação a x , na *cadeia*, por *grau* entendendo-se o número de *ligações mórnicas* que residem no *caminho mórnic* de x para z .

Considerando esta *relação mórfrica indirecta* e os *fundamentos* f e g , pode ser introduzida uma nova *relação mórfrica* que liga directamente x a z e que constitui um *morfismo* cujo *fundamento* é dependente do percurso e condicional a f e a g , podendo ser expresso como $g \circ f$, adicionando o símbolo \circ a \mathcal{L}_{Cat} , temos, então:

$$x \xrightarrow{g \circ f} z \quad (22)$$

tratando-se, neste caso, de um *morfismo composto* (Gonçalves e Madeira, 2009).

Considerando a operação de composição, esta pode ser acrescentada enquanto *lei lógica*²⁶:

- \mathbf{L}_3 (*morfismo composto*): $\dots x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \dots \vdash \dots x \xrightarrow{g \circ f} z \dots$

Uma vez mais, os três pontos sinalizam que \mathbf{L}_3 pode ser aplicada a partes de *teias mórfricanas*.

Importa sublinhar que \mathbf{L}_3 não pode ser lida como uma regra de substituição, assim, por exemplo, a *teia mórfrica* dada pela *cadeia* $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$ não pode ser reduzida ao *morfismo singular* $x \xrightarrow{g \circ f} z$, pois uma tal redução retiraria à *teia mórfrica* aquilo que constitui o *fundamento sistémico* da composição, sendo uma redução imprópria de cada *morfismo* na cadeia ao seu *fundamento*, conforme foi argumentado por Gonçalves e Madeira (2009), que demonstraram que a remoção daquilo que constitui a *totalidade mórfrica* $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$ e a sua substituição por $x \xrightarrow{g \circ f} z$ vai contra a própria teoria, nos seus fundamentos ontológicos e lógicos.

A lei lógica \mathbf{L}_3 deve, assim, ser entendida como uma regra para a adição de novas *ligações mórfricanas* (*dependentes do percurso*) em *teias mórfricanas*, tal que, em qualquer localidade em que ocorre uma *cadeia-2*, podem ser formados *triângulos mórfricanos*, pela aplicação de \mathbf{L}_3 . Assim, para o caso de $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z$, em vez de uma redução de uma *cadeia-2* a um *morfismo singular*, tem-se a formação da seguinte estrutura:



26. Utiliza-se a designação \mathbf{L}_3 pois, até este ponto, estão a ser consideradas duas *leis lógicas*: \mathbf{L}_1 e \mathbf{L}_2 . Não existe qualquer relação entre \mathbf{L}_3 e a anteriormente apresentada *lei lógica* \mathbf{L}_3 para a *dobragem no ponto mórfrico* ($\dots x \xrightarrow{\text{id}_x} x \dots \vdash \dots x \dots$), que foi substituída pela *lei lógica* mais geral \mathbf{L}_2 ($\dots x \dots \vdash \vdash \dots x \xrightarrow{\text{id}_x} x \dots$).

Deste modo, a *lei de composição* \mathbf{L}_3 indica que os triângulos mórficos podem ser formados sempre que se identifica, numa qualquer *teia mórfica*, uma *cadeia-2*.

A *teoria das categorias* assume sempre a validade desta lei, contudo, no contexto da matemática da medição do risco, esta lei pode ser violada, de tal modo que a existência de *morfismos compostos* pode não se encontrar garantida à partida, como veremos mais adiante, para as modificações ao *cálculo categorial*, relevantes para a matemática do risco.

Assumindo, por enquanto, a validade da composição, importa considerar o caso de *cadeias*-($n - 1$) para $n > 3$ e o modo de definição de *morfismos compostos*. Considere-se o caso de $n = 4$:

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \xrightarrow{h} x' \quad (24)$$

Neste caso, existe um caminho começando em x e terminando em x' , que passa primeiro, e em sequência, por y e por z . Existe, deste modo, uma *separação de três graus* entre x e x' . Esta separação pode ser considerada de dois modos, cada um conduzindo a uma das duas representações da associação da operação de composição de *morfismos*, a saber:

$$x \xrightarrow{h \circ (g \circ f)} x' \quad (25)$$

$$x \xrightarrow{(h \circ g) \circ f} x' \quad (26)$$

Segundo a primeira representação, x é ligado a x' por um *morfismo composto*, pois x pode ser ligado a z por um *morfismo composto* com *origem* em x e com *fundamento* $g \circ f$ e z encontra-se na *origem* de x' num *morfismo* com *fundamento* h . A segunda representação, por seu turno, é tal que x é ligado a x' por um *morfismo composto*, pois y pode ser ligado a x' por um *morfismo composto* com *origem* em y e com *fundamento* $h \circ g$, sendo que y é o *alvo* de x num *morfismo singular* com *fundamento* f .

Ambas as representações expressam um modo distinto de argumentar acerca da *ligação composta* sequencial com *fundamento* $h \circ g \circ f$, de tal modo que pode ser introduzida a seguinte *lei lógica de associatividade da composição*:

- \mathbf{L}_4 (*associatividade da composição*): $\dots x \xrightarrow{h \circ (g \circ f)} y \dots \dashv\vdash \dots x \xrightarrow{(h \circ g) \circ f} y \dots$

Embora esta lei lógica seja relevante no seio da *teoria das categorias*, a mesma perde alguma relevância no *cálculo categorial* baseado nas *teias mórficas* (Gonçalves e Madeira, 2009), pois, neste caso, \mathbf{L}_4 assim como a própria composição são o resultado de propriedades da natureza das *teias mórficas* enquanto *grafos dirigidos*, propriedades que são resultantes de uma análise das conectividades locais, de tal modo que, dada uma *cadeia-3* $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \xrightarrow{h} x'$, pode-se, desde logo, ligar x a x' por um *morfismo composto* $x \xrightarrow{h \circ g \circ f} x'$.

Pode-se seguir este mesmo argumento para uma qualquer *cadeia*-($n - 1$) numa *teia mórfrica*, $\dots O_1 \xrightleftharpoons{F_1} O_2 \xrightleftharpoons{F_2} \dots O_{n-1} \xrightleftharpoons{F_{n-1}} O_n \dots$, em que O_1 se encontra separado de O_n por $n - 1$ graus de separação e existe um *caminho mórfrico* de O_1 para O_n , sob os *morfismos* com os fundamentos F_1, F_2, \dots, F_{n-1} , podendo-se, assim, definir um *morfismo composto*, ligando O_1 a O_n tal que:

$$O_1 \xrightleftharpoons{F_{n-1} \circ F_{n-2} \circ \dots \circ F_2 \circ F_1} O_n \quad (27)$$

sem qualquer necessidade de parênteses (Gonçalves e Madeira, 2009).

A remoção dos parênteses é, também, fundamentada pelo facto de que não é necessário nenhuma abordagem triangulada progressiva, pressuposta na associação, para se produzir a *ligação composta* de O_1 a O_n , de tal modo que, para $n = 3$, temos um triângulo, para $n = 4$, temos um quadrado e, para $n = 5$, temos um pentágono, ou seja, para n geral a associação conduz a um *polígono mórfrico* com n lados (Gonçalves e Madeira, 2009).

De facto, temos, em termos gerais:

$$\dots O_1 \xrightleftharpoons{F_1} O_2 \xrightleftharpoons{F_2} \dots O_{n-1} \xrightleftharpoons{F_{n-1}} O_n \dots \vdash \dots O_1 \xrightleftharpoons{F_{n-1} \circ F_{n-1} \circ \dots \circ F_2 \circ F_1} O_n \dots \quad (28)$$

O que resulta de uma aplicação recursiva de **L₃**.

Com as quatro *leis lógicas*, introuzidas acima, a *teoria das categorias* de primeira ordem pode ser trabalhada no seio de \mathcal{L}_{Cat} , sendo a natureza sistémica das *estruturas categoriais* de primeira ordem capturada, em termos formais, pelas quatro leis acima introduzidas e pelos seis teoremas, tal que a axiomática introduzida permite capturar, em termos lógicos, a estrutura sistémica em rede das *categorias* no seio de um *cálculo lógico categorial* baseado em *teias mórfricas*, embora apenas com a introdução de uma operação algébrica de *composição de fundamentos* (**secção 3.3.**) é que será possível estabelecer uma correspondência directa com aquilo que constituem as *propriedades algébricas* das *categorias*.

Para lidar com a matemática do risco, em particular no que diz respeito à modelação de sistemas, torna-se, contudo, necessário ir para além do formalismo de primeira ordem.

3.1.2. *Estruturas mórfricas* de ordem superior

Gonçalves e Madeira (2009) formalizaram \mathcal{L}_{Cat} para que seja possível lidar, no seio do formalismo, com estruturas de ordem superior, introduzindo os parêntesis de três pontos $::$, na sintaxe da linguagem, enquanto *marcador de fronteira*, isto é, para sinalizar *totalidades sistémicas* passíveis de serem trabalhadas enquanto *objectos categoriais*.

Em termos de sintaxe, a única restrição assumida, acerca de *fbfs* com o *marcador de fronteira*, é que o mesmo deverá conter ou *pontos mórfricos* ou *teias mórfricas totalmente conectadas* (isto é, sem *pontos mórfricos isolados*).

Quando se escreve $:A:$, em que A é uma *fbf* instanciada ou por um *ponto mórfico* ou por uma *teia mórfica totalmente conectada*, a *totalidade mórfica* A está a ser abordada, no seio de \mathcal{L}_{Cat} , enquanto tal, isto é, enquanto *sistema/objecto*. Importa trabalhar este uso do *marcador de fronteira*.

A partir do momento em que o *marcador de fronteira* é introduzido, sinalizando A , esse mesmo A é sinalizado *enquanto totalidade individuada*, logo, possuidor de uma *identidade* que, como qualquer outra *identidade*, exemplifica um *eidos* de *unidade* (Lat: *unitas, atis*), sistemicamente definida enquanto propriedade exemplificada por quaisquer *identidades* tais como: entes ou entidades, processos, situações (Gonçalves e Madeira, 2009). A *unidade* é aquilo que, nos sistemas, constitui a sua coesão interna, consistência e coerência, necessárias à manutenção das respectivas integridades.

Esta é uma questão sistémica fundamental na teoria das categorias de ordem superior e no *cálculo categorial*, pelo que é necessária a sua expressão formal. De facto, a partir do momento em que A é sinalizado enquanto *totalidade individuada* e, assim, enquanto *identidade*, o mesmo A é sinalizado no seu movimento auto-referente de *reconexão* (*religere*) a si mesmo, em si mesmo, enquanto posição de si, expresso pelo (*auto*-)morfismo de *identidade*, assim temos a *lei (onto)lógica* (Gonçalves e Madeira, 2009):

$$:A: \dashv\vdash :A: \stackrel{\text{id}_{:A:}}{\rightleftharpoons} :A: \quad (29)$$

segundo a qual, a *totalidade individuada* denotada por A é sinalizada, enquanto tal, pelo *marcador de fronteira*, e *morficamente reconectada* (*religere*) consigo mesma pelo *morfismo de identidade* de A .

Uma qualquer *teia mórfica totalmente conectada* pode ser sinalizada enquanto *totalidade mórfica*, o que conduz à seguinte *lei (onto)lógica*:

$$A \dashv\vdash :A: \quad (30)$$

Considerando esta lei e a anterior o seguinte resultado pode ser deduzido, como veremos mais adiante:

$$A \dashv\vdash :A: \stackrel{\text{id}_{:A:}}{\rightleftharpoons} :A: \quad (31)$$

A partir destes resultados, as leis de \mathbf{L}_1 a \mathbf{L}_4 (inclusive) podem ser revistas incorporando os elementos (onto)lógicos relacionados com o uso dos marcadores de fronteira, assim, introduzindo W, W' e W'' para denotar *pontos mórficos* ou *teias mórficas totalmente conectadas*, sinalizadas pelos respectivos *marcadores de fronteira*, e utilizando a letra A para denotar um *ponto mórfico* ou uma *teia mórfica totalmente conectada* sem *marcador de fronteira* temos:

- \mathbf{L}_1 (*validade formal da identidade*):

$$\vdash W \stackrel{\text{id}_W}{\rightleftharpoons} W$$

- L_2 (*individuação*):

$$A \dashv\vdash : A :$$

- L_3 (*religare*):

$$\dots : A : \dots \dashv\vdash \dots : A : \overset{\text{id}_{:A:}}{\rightleftharpoons} : A : \dots$$

- L_4 (*adição/remoção de marcador de fronteira*):

$$\dots x \dots \dashv\vdash \dots : x : \dots$$

- L_5 (*morfismo composto*²⁷):

$$\dots W \overset{F}{\rightleftharpoons} W' \overset{F'}{\rightleftharpoons} W'' \dots \vdash \dots W \overset{F' \circ F}{\rightleftharpoons} W'' \dots$$

- L_6 (*associatividade da composição*):

$$\dots W \overset{F'' \circ (F' \circ F)}{\rightleftharpoons} W'' \dots \dashv\vdash \dots W \overset{(F'' \circ F') \circ F}{\rightleftharpoons} W'' \dots$$

A primeira *lei* constitui uma generalização da *lei de validade formal da identidade a totalidades mórficas*. Assim, seguindo L_1 , quer W seja um *ponto mórfico*, quer seja uma *teia mórfica totalmente conectada*, a *identidade é formalmente válida*.

A segunda e terceira *leis* foram trabalhadas acima. A quarta *lei* é apenas aplicável a *pontos mórficos*, isto é, apenas relativamente a *pontos mórficos* é que se pode acrescentar ou retirar *marcadores de fronteira*, pois relativamente a *teias mórficas totalmente conectadas*, a conectividade alterar-se-ia sem os *marcadores*²⁸.

A quinta e sexta *leis* correspondem à generalização da composição e da associatividade da composição.

As seis leis lógicas acima definem um sistema formal, subjacente aos fundamentos da base sistémica e matemática da *teoria das categorias*, denotamos este sistema por $\mathcal{F}_{\text{Cat}}^0$.

Como um qualquer sistema formal, $\mathcal{F}_{\text{Cat}}^0$ pode ser utilizado na derivação de leis lógicas válidas no seio da *teoria das categorias*. Duas *leis* relevantes, dedutíveis a partir de $\mathcal{F}_{\text{Cat}}^0$, são as seguintes:

- $A \dashv\vdash : A : \overset{\text{id}_{:A:}}{\rightleftharpoons} : A :$

27. Admite-se a possibilidade de W , W' ou W'' corresponderem à mesma entidade sistémica, o mesmo sendo o caso para F , F' ou F'' (o último símbolo ocorrendo em L_6).

28. Assim, $x \overset{f}{\rightrightarrows} y : \overset{g}{\rightleftharpoons} : z \overset{h}{\rightrightarrows} x'$ é diferente de $x \overset{f}{\rightrightarrows} y \overset{g}{\rightleftharpoons} z \overset{h}{\rightrightarrows} x'$, no primeiro caso o *morfismo com fundamento* g tem a *totalidade mórfica* $x \overset{f}{\rightrightarrows} y$ como *origem* e a *totalidade mórfica* $z \overset{h}{\rightrightarrows} x'$ como *alvo*, enquanto que no segundo caso o *morfismo com fundamento* g tem y como *origem* e z como *alvo*.

- $\dots x \dots \dashv \vdash \dots x \overset{\text{id}_x}{\rightleftarrows} x \dots$

De facto, considerando, em primeiro lugar, a lei $A \dashv \vdash :A; \overset{\text{id}_{:A;}}{\rightleftarrows} :A;$, temos o *metateorema*:

Metateorema 1: É o caso que $A \dashv \vdash :A; \overset{\text{id}_{:A;}}{\rightleftarrows} :A;$, dadas as leis \mathbf{L}_2 e \mathbf{L}_3 .

Demonstração:

Considere-se, em primeiro lugar, a consequência sintáctica $A \dashv \vdash :A; \overset{\text{id}_{:A;}}{\rightleftarrows} :A; :$

1. A (premissa)
2. $:A;$ (1., por aplicação de \mathbf{L}_2 (*individuação*))
3. $:A; \overset{\text{id}_{:A;}}{\rightleftarrows} :A;$ (2., por aplicação de \mathbf{L}_3 (*religere*)) Q.E.D.

Considere-se, agora, a consequência sintáctica $A \dashv \vdash :A; \overset{\text{id}_{:A;}}{\rightleftarrows} :A; :$

1. $:A; \overset{\text{id}_{:A;}}{\rightleftarrows} :A;$ (premissa)
2. $:A;$ (1., por aplicação de \mathbf{L}_3 (*religere*))
3. A (2., por aplicação de \mathbf{L}_2 (*individuação*)) Q.E.D.

Encontra-se assim demonstrado $A \dashv \vdash :A; \overset{\text{id}_A}{\rightleftarrows} :A;$, enquanto *lei lógica*. Q.E.D.

Por outro lado, relativamente a $\dots x \dots \dashv \vdash \dots x \overset{\text{id}_x}{\rightleftarrows} x \dots$, temos o *metateorema*:

Metateorema 2: É o caso que $\dots x \dots \dashv \vdash \dots x \overset{\text{id}_x}{\rightleftarrows} x \dots$, dadas as leis \mathbf{L}_3 e \mathbf{L}_4 .

Demonstração:

Considere-se, em primeiro lugar, a consequência sintáctica $\dots x \dots \dashv \vdash \dots x \overset{\text{id}_x}{\rightleftarrows} x \dots :$

1. $\dots x \dots$ (premissa)

2. $\dots; x; \dots$ (1., por aplicação de \mathbf{L}_4 (*adição de marcador*))

3. $\dots; x; \stackrel{\text{id}_{;x;}}{\rightleftharpoons} ; x; \dots$ (2., por aplicação de \mathbf{L}_3 (*religere*))

4. $\dots x \stackrel{\text{id}_x}{\rightleftharpoons} x \dots$ (3., por aplicação de \mathbf{L}_4 (*remoção de marcador*))
Q.E.D.

Considere-se, agora, a consequência sintáctica $\dots x \dots \dashv \vdash \dots x \stackrel{\text{id}_x}{\rightleftharpoons} x \dots$:

1. $\dots x \stackrel{\text{id}_x}{\rightleftharpoons} x \dots$ (premissa)

2. $\dots; x; \stackrel{\text{id}_{;x;}}{\rightleftharpoons} ; x; \dots$ (1., por aplicação de \mathbf{L}_4 (*adição de marcador*))

3. $\dots; x; \dots$ (2., por aplicação de \mathbf{L}_3 (*religere*))

4. $\dots x \dots$ (2., por aplicação de \mathbf{L}_4 (*remoção de marcador*))
Q.E.D.

Encontra-se assim demonstrado $\dots x \dots \dashv \vdash \dots x \stackrel{\text{id}_x}{\rightleftharpoons} x \dots$, enquanto *lei lógica*. Q.E.D.

Enquanto que $\dots x \dots \dashv \vdash \dots x \stackrel{\text{id}_x}{\rightleftharpoons} x \dots$ foi introduzida como axioma anteriormente, passa, agora, a ser derivada no seio de $\mathcal{F}_{\text{Cat}}^0$.

Para além das leis lógicas $A \dashv \vdash ; A; \stackrel{\text{id}_A}{\rightleftharpoons} ; A;$ e $\dots x \dots \dashv \vdash \dots x \stackrel{\text{id}_x}{\rightleftharpoons} x \dots$ serem deriváveis no seio de $\mathcal{F}_{\text{Cat}}^0$, os teoremas \mathbf{T}_1 a \mathbf{T}_6 , para o caso mais geral de estruturas de ordem superior, são também deriváveis, como passamos a demonstrar. Considerando \mathbf{T}_1 a \mathbf{T}_3 temos o seguinte *metateorema*:

Metateorema 3: É o caso que as seguintes *leis lógicas* são válidas em $\mathcal{F}_{\text{Cat}}^0$:

$$\dots W \stackrel{\text{id}_W}{\rightleftharpoons} W \stackrel{f}{\rightleftharpoons} W' \dots \vdash \dots W \stackrel{f}{\rightleftharpoons} W' \dots \quad (32)$$

$$\dots W \stackrel{f}{\rightleftharpoons} W' \stackrel{\text{id}_{W'}}{\rightleftharpoons} W' \dots \vdash \dots W \stackrel{f}{\rightleftharpoons} W' \dots \quad (33)$$

$$\dots W \stackrel{\text{id}_W}{\rightleftharpoons} W \stackrel{f}{\rightleftharpoons} W' \stackrel{\text{id}_{W'}}{\rightleftharpoons} W' \dots \vdash \dots W \stackrel{f}{\rightleftharpoons} W' \dots \quad (34)$$

sendo que W e W' denotam *pontos mórficos* ou *teias mórficas totalmente conectadas*, sinalizadas pelos respectivos *marcadores de fronteira*.

Demonstração:

Para (32) temos:

1. $\dots W \xrightleftharpoons{\text{id}_W} W \xrightleftharpoons{f} W' \dots$ (premissa)
2. $\dots W \xrightleftharpoons{f} W' \dots$ (1., por aplicação de **L₃**, para o caso de *teias mórnicas totalmente conectadas*, sinalizadas pelos respectivos *marcadores de fronteira* e por aplicação da *lei lógica* demonstrada como válida no **metateorema 2**, para o caso de *pontos mórnicos*). Q.E.D.

Para (33) temos:

1. $\dots W \xrightleftharpoons{f} W' \xrightleftharpoons{\text{id}_{W'}} W' \dots$ (premissa)
2. $\dots W \xrightleftharpoons{f} W' \dots$ (1., por aplicação de **L₃**, para o caso de *teias mórnicas totalmente conectadas*, sinalizadas pelos respectivos *marcadores de fronteira* e por aplicação da *lei lógica* demonstrada como válida no **metateorema 2**, para o caso de *pontos mórnicos*) Q.E.D.

Para (34) temos:

1. $\dots W \xrightleftharpoons{\text{id}_W} W \xrightleftharpoons{f} W' \xrightleftharpoons{\text{id}_{W'}} W' \dots$ (premissa)
2. $\dots W \xrightleftharpoons{f} W' \xrightleftharpoons{\text{id}_{W'}} W' \dots$ (1., por aplicação de (32))
3. $\dots W \xrightleftharpoons{f} W' \dots$ (2., por aplicação de (33)) Q.E.D.

Assim, as três leis lógicas (32), (33) e (34) são válidas em $\mathcal{F}_{\text{Cat}}^0$. Q.E.D.

Considerando, agora, **T₄** a **T₆** temos o *metateorema*:

Metateorema 4: É o caso que as seguintes *leis lógicas* são válidas em $\mathcal{F}_{\text{Cat}}^0$:

$$\dots W \xrightleftharpoons{f} W' \dots \vdash \dots W \xrightleftharpoons{\text{id}_x} W \xrightleftharpoons{f} W' \dots \quad (35)$$

$$\dots W \xrightleftharpoons{f} W' \dots \vdash \dots W \xrightleftharpoons{f} W' \xrightleftharpoons{\text{id}_y} W' \dots \quad (36)$$

$$\dots W \xrightleftharpoons{f} W' \dots \vdash \dots W \xrightleftharpoons{\text{id}_W} W \xrightleftharpoons{f} W' \xrightleftharpoons{\text{id}_{W'}} W' \dots \quad (37)$$

em que W e W' denotam *pontos mórnicos* ou *teias mórnicas totalmente conectadas*, sinalizadas pelos respectivos *marcadores de fronteira*.

Demonstração:

Para (35) temos:

1. $\dots W \xrightleftharpoons{f} W' \dots$ (premissa)
2. $\dots W \xrightleftharpoons{\text{id}_W} W \xrightleftharpoons{f} W' \dots$ (1., por aplicação de \mathbf{L}_3 , para o caso de *teias mórficas totalmente conectadas*, sinalizadas pelos respectivos *marcadores de fronteira* e por aplicação da *lei lógica* demonstrada como válida no **metateorema 2**, para o caso de *pontos mórficos*). Q.E.D.

Para (36) temos:

1. $\dots W \xrightleftharpoons{f} W' \dots$ (premissa)
2. $\dots W \xrightleftharpoons{f} W' \xrightleftharpoons{\text{id}_{W'}} W' \dots$ (1., por aplicação de \mathbf{L}_3 , para o caso de *teias mórficas totalmente conectadas*, sinalizadas pelos respectivos *marcadores de fronteira* e por aplicação da *lei lógica* demonstrada como válida no **metateorema 2**, para o caso de *pontos mórficos*) Q.E.D.

Para (37) temos:

1. $\dots W \xrightleftharpoons{f} W' \dots$ (premissa)
2. $\dots W \xrightleftharpoons{f} W' \xrightleftharpoons{\text{id}_{W'}} W' \dots$ (1., por aplicação de (36))
3. $\dots W \xrightleftharpoons{\text{id}_W} W \xrightleftharpoons{f} W' \xrightleftharpoons{\text{id}_{W'}} W' \dots$ (2., por aplicação de (35)) Q.E.D.

Assim, as três leis lógicas (35), (36) e (37) são válidas em $\mathcal{F}_{\text{Cat}}^0$.
Q.E.D.

Estes são os elementos fundamentais do trabalho desenvolvido por Gonçalves e Madeira (2009) acerca da *sintaxe lógica* de \mathcal{L}_{Cat} e da estrutura formal do *cálculo categorial*, subjacente à *teoria matemática das categorias*, enquanto *cálculo lógico* de base sistémica.

Considerando, agora, os *fundamentos relacionais* dos *morfismos*, uma extensão útil à sintaxe de base consiste na introdução de *fundamentos mórficos* duplos, um para a seta da *origem* e outro para a seta do *alvo*, tal que se pode escrever *morfismos* do género $x \xrightleftharpoons[F']{F} y$, em que F e F' podem, ou não, ser substituídos pelo mesmo *fundamento*. Neste caso, assume-se que $\mathcal{F}_{\text{Cat}}^0$ é extensível a esta sintaxe, sendo a extensão trivialmente obtida pela substituição, nas *fbfs* genéricas, dos *fundamentos únicos* por *fundamentos duplos*.

Em termos formais, assumindo esta extensibilidade de $\mathcal{F}_{\text{Cat}}^0$, a introdução de *fundamentos duplos* em nada altera os resultados, nem a teoria.

A alteração formal ocorre quando se considera uma outra extensão ao *cálculo categorial*, a saber: a possibilidade de *fundamentos* com múltipla exemplificação.

Tradicionalmente, a *teoria das categorias* trabalha, como foi referido no início da formalização, com *fundamentos singularmente exemplificados*, isto é, *propriedades relacionais mórnicas* que são apenas exemplificadas por um único par de *objectos* (a *origem* e o *alvo*), foi esta a base conceptual assumida por Gonçalves e Madeira (2009).

Contudo, se se abre a possibilidade de *fundamentos não-singularmente exemplificados*, isto é, *propriedades relacionais mórnicas* que podem ser exemplificadas por mais do que um *par* de *objectos*, então, a operação de composição deixa de poder ser geralmente verificada, pois, a composição toma os *fundamentos* como base de definição do *morfismo composto*, contudo, quando existe mais do que um percurso com os mesmos *fundamentos*, deixa de se poder conhecer qual dos caminhos na *teia* corresponde ao caminho, a partir do qual o *morfismo composto* foi construído. Este problema ocorre, em particular, na matemática da medição do risco, pois, conforme a revisão apresentada no capítulo anterior, trabalha-se com *fundamentos* de ordenação binária que podem ocorrer em mais do que um *morfismo*, assim, importa considerar o problema em maior detalhe.

Para ilustrar o problema dos *fundamentos não-singularmente exemplificados*, no seu contexto mais geral, considere-se que temos uma *teia mórnic* composta pelas duas *cadeias*:

$$x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} y \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{f} \end{array} z \quad (38)$$

$$x \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} x' \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{f} \end{array} z \quad (39)$$

Existem dois caminhos distintos de x para z , logo, não é certo qual o caminho subjacente ao *morfismo composto*:

$$x \begin{array}{c} \xrightarrow{g \circ f} \\ \xrightarrow{g \circ f} \end{array} z \quad (40)$$

Um modo de superar esta dificuldade consiste em definir a composição a partir de uma noção de acessibilidade na *teia*, ou seja, $x \begin{array}{c} \xrightarrow{g \circ f} \\ \xrightarrow{g \circ f} \end{array} z$ significa apenas que z é acessível a partir de pelo menos um caminho na *teia mórnic* com *origem* em x . Se se segue o caminho (38) ou o caminho (39) não é relevante, é apenas relevante, para a *ligação mórnic composta*, a existência de pelo menos um caminho com os *fundamentos* f e (depois) g ($g \circ f$). Assim, continuamos a poder trabalhar com o sistema formal $\mathcal{F}_{\text{Cat}}^0$ tal como este foi introduzido.

Neste caso, a composição pode ser pensada, tal como o próprio *cálculo categorial*, à luz de uma *lógica de hipertexto*, em que uma sequência de *hiperligações* conduz de um *site* a outro, sendo repetida em diferentes conexões.

A linguagem \mathcal{L}_{Cat} pode ser considerada uma linguagem com uma sintaxe e semânticas hipertextuais. Regressaremos a esta questão, com maior detalhe, no começo do próximo capítulo. Tendo trabalhado a sintaxe de \mathcal{L}_{Cat} , passamos, agora, à semântica.

3.2. A linguagem \mathcal{L}_{Cat} – *semântica, computação mórfica e aleatoriedade*

Considerando a semântica lógica de \mathcal{L}_{Cat} , cada consequência sintáctica, assumida na secção anterior, tem uma correspondente consequência semântica, ou seja, cada martelo sintáctico pode ser substituído por um martelo semântico, o que significa que, sob qualquer instanciação das variáveis livres, numa *fbf*, que constitua, deste modo, um *modelo* dessa mesma *fbf*, as *leis lógicas básicas* têm uma correspondência semântica tal que: se temos $\phi \vdash \phi'$, onde ϕ e ϕ' são duas *fbfs*, então, podemos escrever $\phi \vDash \phi'$, logo, qualquer *modelo* de ϕ é um *modelo* de ϕ' (Gonçalves e Madeira, 2009).

O processo de instanciação e o *modelo* de uma qualquer *fbf* pode ser exemplificado, para o caso mais simples, considerando a *teia mórfica singular* composta por um único *ponto mórfico*:

$$x \tag{41}$$

Qualquer instanciação de x pode ser introduzida, em \mathcal{L}_{Cat} , por via da introdução de uma *constante lógica* que passa a denotar essa mesma instância. Assim, por exemplo, se se introduzir a *constante lógica* 1, como denotando o número 1, temos:

$$1 \vDash x \tag{42}$$

que pode ser lida como ‘o número 1 *satisfaz* x ’, ou ‘o número 1 é um *modelo* de x ’.

Embora elementar, este resultado tem implicações computacionais que se tornam relevantes, não somente para a teoria computacional de \mathcal{L}_{Cat} , como para a matemática do risco. Estas implicações tornam-se evidentes quando se considera um número real *algoritmicamente incompressível* r , no sentido em que a sua expansão binária é *algoritmicamente incompressível*, um tal número é *algoritmicamente não-computável* (Chaitin, 2006), contudo, é *mórficamente computável*.

Importa desenvolver em maior detalhe este ponto central pois a *não-computabilidade algorítmica* conduz, directamente, à noção de *aleatoriedade algorítmica*, assim, a *computabilidade mórfica* de uma *estrutura algoritmicamente aleatória* constitui uma questão central para o uso da estrutura lógica do *cálculo categorial* para trabalhar os fundamentos da matemática do risco. Passamos, assim, a desenvolver este ponto em maior detalhe, conectando-o com as noções gerais de *acaso* e *aleatório*.

3.2.1. Incompressibilidade, aleatoriedade algorítmica e risco em \mathcal{L}_{Cat}

Um número real *algorítmicamente incompressível* é tal que não existe nenhum algoritmo que permita computar a expansão binária desse mesmo real. Em termos lógicos, trata-se de uma estrutura abstracta não abordável a partir de uma teorização que siga o método axiomático, ou seja, não é possível demonstrar como verdadeira ou como falsa uma qualquer hipótese para a expansão binária do número, o que significa que existe incerteza quanto ao padrão binário correspondente, para qualquer agente humano que procure conhecer o padrão teorizando acerca do mesmo a partir do método axiomático.

Seguindo Chaitin (2006), um modo de operacionalizar este limite, no seio da matemática da computação, consiste em considerar a *incompressibilidade algorítmica* a partir do tamanho de *programas binários auto-delimitadores*, tal que se, para a expansão binária de um número real r , o *programa auto-delimitador* mais pequeno, para calcular os primeiros N bits dessa mesma expansão binária, tiver um tamanho sempre superior a $N - c$ bits, para todo o valor de N , em que c é uma constante que depende de r mas não de N , então, para cada N , o tamanho do *programa auto-delimitador* nunca pode descer muito abaixo de N (Chaitin, 2006).

Este resultado pode ser generalizado a uma qualquer estrutura Σ , expressável a partir de um padrão binário composto por uma sequência de *bits*, expressabilidade que permite definir um domínio de aplicação da matemática digital (Chaitin, 2006).

Assim, considerando uma estrutura geral Σ expressável a partir de um padrão binário composto por uma sequência de *bits algorítmicamente incompressível*, logo, *não-computável* no sentido algorítmico, segue-se que, desde que se considere uma letra Σ que denote essa estrutura (*não-computável*, no sentido algorítmico) em \mathcal{L}_{Cat} , logo, utilizada enquanto *constante lógica* que nomeia a estrutura na linguagem \mathcal{L}_{Cat} , obtém-se:

$$\Sigma \models x \tag{43}$$

e, por seu turno, aplicando o *metateorema 2*, temos:

$$\Sigma \models \Sigma \xrightarrow{\text{id}_{\Sigma}} \Sigma \tag{44}$$

a estrutura Σ encontra-se morficamente ligada a si mesma pela relação sistémica *auto-mórfica* fundamental que é o seu *morfismo de identidade*, *morfismo*, este, que é expressável pela *fbf* $\Sigma \xrightarrow{\text{id}_{\Sigma}} \Sigma$, no seio do formalismo de \mathcal{L}_{Cat} .

De facto, por exemplo, considerando o número de Chaitin, Ω , que é *algoritmicamente incompressível*, e, logo, *não-computável* no sentido algorítmico (Chaitin, 2006), temos, em termos categoriais:

$$\Omega \vDash \Omega \stackrel{\text{id}_\Omega}{\rightleftharpoons} \Omega \quad (45)$$

O que significa que, generalizando, na *computação categorial*, expressa por uma qualquer *relação mórfrica* ou *morfismo*, conectando uma *origem (input mórfrico)* a um *alvo (output mórfrico)*, os *objectos* são tomados na sua totalidade sistémica *não algoritmizada*, o que torna o *cálculo categorial* peculiarmente eficaz enquanto suporte à matemática do risco, pois, quando investigamos os fundamentos da *matemática das categorias*, encontramos na raiz da *computação categorial* e do problema dos limites à *computação algorítmica*, o ponto de base para a matemática do risco, de tal modo que a matemática do risco, a teoria matemática da computação e o *cálculo categorial* podem ser conectados na investigação acerca dos fundamentos da matemática.

Para explicitar este facto, torna-se necessário considerar o problema da *incompressibilidade algorítmica*. Na matemática, a *incompressibilidade algorítmica* relaciona-se com a noção de *aleatório* (Chaitin, 2006), conforme referido, e pode ser conectada com a noção de risco, quando se considera um sistema adaptativo complexo.

A *incompressibilidade algorítmica* é, no seio da *matemática da computação*, operacionalmente utilizada para sinalizar a presença de *aleatoriedade* num *padrão informacional* (Chaitin, 2006), pois, em termos de rede conceptual, a *incompressibilidade algorítmica*, tal como esta é trabalhada no seio da *matemática da computação*, pode ser conectada com as noções de *acaso* e de *aleatório*, trabalhadas a partir da sua raiz.

A noção de *acaso* tem origem no latim *casus*, com o sentido primitivo de *causa* ou *razão* desconhecida. Nos *sistemas concretos*, o *acaso* funciona como um *mecanismo interno espontâneo*, relacionado com o *material orgânico sistémico*, ligado ao mecanismo vital de agregação e desagregação dos mesmos sistemas, sendo o mesmo mecanismo interno espontâneo exemplificável por aquilo que nos sistemas constitui o seu *arbitriu*²⁹ ou *clinamen* (Madeira e Gonçalves, 2009).

O *acaso* não se situa ao nível dos efeitos sistémicos, mas, sim, ao nível das causas ou razões que emergem das dinâmicas dos sistemas, dentro dos parâmetros formativos, permanentemente ligados às condições iniciais que deram origem aos respectivos sistemas e das quais os mesmos dependem, em termos da sua integridade vital (Madeira e Gonçalves, 2009).

29. O termo latino *arbitriu* não deve ser confundido com a noção de *vontade livre* ou *livre arbítrio*. *Arbitriu* incorpora e desloca o sentido primitivo que o liga permanentemente ao significado de operatividade sistémica constituinte, sendo a mesma operatividade, quer em termos epistémicos, quer em termos ontológicos, necessariamente condicionada pelas leis de estrutura dos respectivos sistemas, também estas, necessariamente condicionadas pelas condições iniciais de formação dos mesmos sistemas (Madeira e Gonçalves, 2009).

Enquanto o *acaso* se situa ao nível das causas, o *aleatório* situa-se ao nível dos efeitos. A noção de *aleatório*, do latim *aleatorius*, sintetiza o significado de incerto ou contingente, dependente do *acaso sistémico*, cuja dinâmica é permanentemente condicionada pelas condições iniciais do sistema e que o sistema computa permanentemente, de modo a manter a sua integridade estrutural (Madeira e Gonçalves, 2009).

Um número real *algoritmicamente incompressível* é designado por *aleatório*, no seio da matemática, sendo, neste caso, o *aleatório* trabalhado a partir da sua raiz conceptual.

Conforme relevado por Chaitin (2006), a *não-computabilidade algorítmica* de um *número aleatório* significa que a *causa* ou *razão formativa* do número não é apreensível no seio de uma abordagem axiomática que vise uma teoria sintetizável num algoritmo, capaz de computar o número, a irreduzibilidade do *número aleatório* ao algoritmo implica, assim, um limite epistémico fundamental, ao nível da matemática, significando que de nenhum modo pode ser a *causa* ou *razão* desconhecida e, logo, o *acaso* removido da teorização algorítmica de um número reconhecido como *aleatório*.

Este resultado tem uma consequência fundamental, no que diz respeito à relação entre as tecnologias humanas e o risco, pois permite sinalizar a existência de estruturas não redutíveis a uma apreensão algorítmica, o que implica a existência de um limite de adaptabilidade relacionada com o uso da *algoritmia*, enquanto ferramenta antecipatória e explicativa de estruturas.

Assim, conforme referido no primeiro parágrafo da presente subsecção, nos limites do exercício algorítmico, pode ser sinalizada a presença de uma incerteza conducente a limites adaptativos, relacionados com o uso de ferramentas computacionais, na computação algorítmica de estruturas e na produção de *schemata adaptativos*, logo, pode ser sinalizada a presença de risco em *situações sistémicas* em que as escolhas estratégicas dependem de padrões *algoritmicamente incompressíveis* (Gell-Mann, [1994], 1997).

Tal como as noções de *acaso* e de *aleatório* se tornaram noções relevantes, quando são considerados números reais cuja expansão binária é *algoritmicamente incompressível*, estas mesmas noções tornam-se, também, relevantes quando se considera uma noção de *compressibilidade mórfica* de *cadeias mórficas*, como passamos a demonstrar.

3.2.2. (In)compressibilidade mórfica e risco em \mathcal{L}_{Cat}

Para trabalhar a questão da *compressibilidade mórfica* de *cadeias mórficas*, referida no final da subsecção anterior, torna-se necessário introduzir o *morfismo de cardinalidade* de *cadeias mórficas*.

Considere-se, em primeiro lugar, uma *cadeia*-($n - 1$):

$$O_1 \xleftrightarrow{F_1} O_2 \xleftrightarrow{F_2} \dots O_{n-1} \xleftrightarrow{F_{n-1}} O_n \quad (46)$$

em que O_i , $i = 1, 2, \dots, n$, são *totalidades mórficas* compostas por *pontos mórficos* ou por *teias mórficas totalmente conectadas*, sinalizadas, enquanto *totalidades mórficas*, pelos *marcadores de fronteira* respectivos. Defina-se, então, a cardinalidade da cadeia como sendo $n - 1$, isto é, idêntica ao número de *ligações mórficas*.

Assim, denotando por \mathcal{C}_{n-1} uma dada *cadeia*-($n - 1$), a sua cardinalidade obedece à notação usual utilizada para os conjuntos:

$$\#\mathcal{C}_{n-1} = n - 1 \quad (47)$$

Introduzindo a sequência dos inteiros não-negativos $0, 1, 2, \dots$ como constantes lógicas em \mathcal{L}_{Cat} e $\#$ como o símbolo para o *fundamento mórfico* de um *morfismo de cardinalidade*, segue-se que temos, para cada *cadeia finita*:

$$\models : O_1 \xrightarrow{F_1} O_2 \xrightarrow{F_2} \dots O_{n-1} \xrightarrow{F_{n-1}} O_n : \xrightarrow{\#} n - 1 \quad (48)$$

ou seja, cada *cadeia mórfica finita* pode ser conectada com um inteiro positivo. Sendo que, no caso de $n = 1$, temos:

$$O_1 \xrightarrow{\#} 0 \quad (49)$$

Se se denotar por \mathbb{N}_0 a *propriedade de ser um inteiro não-negativo* e por \mathcal{C}_{x-1} uma *cadeia finita genérica* de comprimento $x - 1 \geq 0$, podemos ir mais longe e introduzir a seguinte *lei lógica*:

- \mathbf{L}_7 (*cardinalidade de cadeias*): $\vdash : \mathcal{C}_{x-1} : \xrightarrow{\#} x \xrightarrow{\mathbb{N}_0} x$

A *lei \mathbf{L}_7* introduz a validade formal da cardinalidade e a própria noção de cardinalidade, ao definir a necessidade de *cadeias finitas genéricas* terem uma *cardinalidade* enquanto número inteiro não-negativo. Consideramos $\mathcal{F}_{\text{Cat}}^0$ expandido para incluir \mathbf{L}_7 .

A exemplificação da *propriedade de ser um inteiro não-negativo* encontra-se expressa, em \mathbf{L}_7 , a partir de um *automorfismo*, pois cada número inteiro não-negativo é, enquanto número, um *inteiro não-negativo*, isto é, cada *número inteiro não-negativo* encontra-se ligado a si mesmo, na sua natureza sistémica enquanto inteiro não-negativo, ou, seguindo Gonçalves e Madeira (2009), pode-se afirmar que faz parte da *rotatividade sistémica*, desse padrão numérico que é designado por *número inteiro não-negativo*, ser um número inteiro não-negativo e, logo, faz parte da sua *rotatividade sistémica* exemplificar a *propriedade de ser um número inteiro não-negativo*.

Considere-se, agora, de novo, o número Ω de Chaitin. Este número corresponde à probabilidade de uma *máquina de Turing*, seleccionada ao acaso, parar ao fim de um número finito de passos computacionais, ou seja, trata-se da probabilidade de paragem de uma *máquina de Turing* (introduziremos a abordagem categorial para estas máquinas no **capítulo 5**).

Assuma-se, então, uma *cadeia* de cardinalidade 10 composta por uma sequência de *automorfismos* de Ω , expressando a *propriedade mórfica* de conexão de Ω a si próprio enquanto probabilidade de paragem de uma máquina de Turing, *propriedade mórfica*, esta, que denotamos por ‘Turing’, temos:

$$: \overset{\text{Turing}}{\Omega} \rightleftharpoons \overset{\text{Turing}}{\Omega} \rightleftharpoons \overset{\text{Turing}}{\Omega} \dots \overset{\text{Turing}}{\Omega} \rightleftharpoons \overset{\#}{\Omega} : \rightleftharpoons 10 \quad (50)$$

Intuitivamente, pode-se notar a redundância na informação contida na *cadeia*, esta informação é compressível num *morfismo singular*:

$$: \overset{\text{Turing}}{\Omega} \rightleftharpoons \overset{\#}{\Omega} : \rightleftharpoons 1 \quad (51)$$

Não é compressível num *ponto mórfico* porque, na *cadeia* em (50), está a considerar-se o *automorfismo* $\overset{\text{Turing}}{\Omega} \rightleftharpoons \Omega$, repetido dez vezes. Diz-se, então, que a *cadeia* em (50) é *mórficamente compressível*, no sentido informacional, à *cadeia* em (51).

O número Ω é a *probabilidade de paragem* de uma *máquina de Turing* e foi demonstrado, por Chaitin, que se trata de um *número aleatório*, resultado que se encontra relacionado com o facto de o *problema da paragem*, para uma *máquina de Turing* universal, não ser computável (Chaitin, 2006).

Tome-se, então, Ω a partir desse resultado de Chaitin, e introduza-se a *cadeia* formada a partir dos dois *automorfismos* $\overset{\text{Turing}}{\Omega} \rightleftharpoons \Omega$ e $\overset{\text{Chaitin}}{\Omega} \rightleftharpoons \Omega$:

$$: \overset{\text{Turing}}{\Omega} \rightleftharpoons \overset{\text{Chaitin}}{\Omega} \rightleftharpoons \overset{\text{Turing}}{\Omega} \rightleftharpoons \overset{\text{Chaitin}}{\Omega} \rightleftharpoons \overset{\text{Turing}}{\Omega} \rightleftharpoons \overset{\text{Chaitin}}{\Omega} \rightleftharpoons \dots \overset{\text{Turing}}{\Omega} \rightleftharpoons \overset{\text{Chaitin}}{\Omega} \rightleftharpoons \overset{\#}{\Omega} : \rightleftharpoons 24 \quad (52)$$

estamos perante uma *cadeia* com cardinalidade 24 *reduzível* a:

$$: \overset{\text{Turing}}{\Omega} \rightleftharpoons \overset{\text{Chaitin}}{\Omega} \rightleftharpoons \overset{\#}{\Omega} : \rightleftharpoons 2 \quad (53)$$

Considere-se, agora, a possibilidade de se construir *cadeias infinitas*, em \mathcal{L}_{Cat} , então, tomando uma *cadeia* composta apenas pelo *objecto* Ω e pelos *morfismos* $\overset{\text{Turing}}{\Omega} \rightleftharpoons \Omega$ e $\overset{\text{Chaitin}}{\Omega} \rightleftharpoons \Omega$, pode-se considerar que uma qualquer *cadeia infinita* codifica, em termos informacionais, na sequência dos *morfismos*, uma expansão binária de um *número real*³⁰.

Então, sendo assim, existe uma *cadeia* que coincide com a expansão binária de Ω , que denotamos por $\mathcal{C}(\Omega)$, uma tal *cadeia* não é *mórficamente compressível*, constituindo uma *cadeia aleatória*, pois se fosse *mórficamente compressível* numa *cadeia finita* de cardinalidade n seria, também, *algoritmicamente compressível*.

30. Assumindo, por exemplo, a codificação Turing $\Rightarrow 0$ e Chaitin $\Rightarrow 1$.

Assim, pode ser sinalizado um argumento fundamental, a saber: assumindo a possibilidade de construção de *cadeias infinitas* em \mathcal{L}_{Cat} , a *incompressibilidade algorítmica* de Ω traduz-se na existência de uma *incompressibilidade mórfica* da cadeia $\mathcal{C}(\Omega)$.

Do mesmo modo em que a expansão binária do número de Chaitin pode ocorrer ao nível dos *morfismos*, esta pode, também, ocorrer ao nível de uma *cadeia infinita* de *objectos*, denotada por $\mathcal{C}'(\Omega)$, a qual é, também, *mórficamente incompressível*.

Assim, uma *cadeia* pode ser *compressível*, segundo o padrão de *objectos* ou de *morfismos* e pode ser *incompressível*, também, segundo o padrão de *objectos* ou de *morfismos*, podendo ser *incompressível* segundo ambos os padrões.

A partir destes resultados, segue-se que a *aleatoriedade*, sinalizada por Chaitin no seu trabalho, é, também, sinalizável em estruturas formais de \mathcal{L}_{Cat} , de tal modo que, por exemplo, nem o padrão de $\mathcal{C}(\Omega)$, nem o padrão de $\mathcal{C}'(\Omega)$ podem ser computados através de algoritmos.

O que significa que, em \mathcal{L}_{Cat} , não podemos construir um algoritmo para apreender as *cadeias* $\mathcal{C}(\Omega)$ e $\mathcal{C}'(\Omega)$. Coloca-se, então, a seguinte questão: *serão $\mathcal{C}(\Omega)$ e $\mathcal{C}'(\Omega)$ mórficamente computáveis?* A resposta a esta questão é afirmativa se, e somente se, ambas as *cadeias* puderem ser consideradas *totalidades mórficas*.

Mas o problema de decidir acerca destas *cadeias* poderem, ou não, ser consideradas *totalidades mórficas* não é uma questão que possa ser resolvida em termos lógicos, pois, isso pressuporia uma algoritmização das mesmas, trata-se de aceitar, ou não, um pressuposto ontológico fundamental, assumido na matemática contemporânea, e que foi tornado explícito e trabalhado por Cantor, no contexto da teoria dos conjuntos, o pressuposto, assumido na *teoria dos conjuntos cantoriana*, é o de que se pode tratar *agregados/conjuntos (menge) transfinitos* como *totalidades aritmetizáveis*, numa relação numérica de equivalência com o seu cardinal, pressuposto que, caso aceite, pode ser generalizado às *cadeias mórficas de cardinalidade transfinita*.

Cantor e a *teoria dos conjuntos (mengetheorie)* trabalham com *agregados/conjuntos (menge)* como *totalidades sistémicas* (Cantor, 1915, I, §1, §6; Hallet, 1996), assim, a *teoria dos conjuntos cantoriana* é apreensível em termos categoriais, podendo cada *conjunto* ser trabalhado enquanto *totalidade mórfica*.

Seguindo a abordagem sistémica subjacente ao trabalho de Cantor, a constituição sistémica do *agregado/conjunto (menge)*, enquanto totalidade, resulta, em primeiro lugar, de um *automorfismo* tal que é próprio da *rotatividade sistémica* de um determinado número de *objectos* exemplificarem, na sua *rotatividade sistémica*, cada um, e de modo independente, a mesma propriedade, logo, temos, para uma dada propriedade M introduzida enquanto *constante lógica*:

$$x \stackrel{M}{\rightleftarrows} x \quad (54)$$

Como exemplo, considerando a *propriedade de ser um número natural inferior ou igual a 3*, e denotando a mesma propriedade por M_3 , temos, para a *fbf* de \mathcal{L}_{Cat} :

$$\begin{array}{c} M_3 \\ x \rightrightarrows x \end{array} \quad (55)$$

existem três modelos para esta *fbf*:

$$\begin{array}{c} M_3 \\ 1 \rightrightarrows 1 \models x \rightrightarrows x \end{array} \quad (56)$$

$$\begin{array}{c} M_3 \\ 2 \rightrightarrows 2 \models x \rightrightarrows x \end{array} \quad (57)$$

$$\begin{array}{c} M_3 \\ 3 \rightrightarrows 3 \models x \rightrightarrows x \end{array} \quad (58)$$

pode-se reconhecer que, apesar de se estar a lidar com *objectos distintos*, existe uma propriedade comumente exemplificada, logo, pode ser sinalizada a sincronização num ponto sistémico comum que caracteriza o *conjunto/agregado (menge)*, podendo, esse ponto sistémico, ser sinalizado a partir da propriedade M_3 , tomada como *ponto mórfico*. Assim, introduzindo um *morfismo de exemplificação* de M_3 , com *ligação mórfica de fundamento* \in , obtemos a representação *mórfica* do *conjunto/agregado (menge)*:

$$\begin{array}{c} M_3 \in \quad \ni M_3 \\ 1 \rightrightarrows 1 \rightrightarrows M_3 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 2 \\ \in \updownarrow \\ 3 \\ M_3 \updownarrow \\ 3 \end{array} \quad (59)$$

Expandindo a sintaxe de \mathcal{L}_{Cat} para que *fundamentos mórficos* possam figurar na posição de *variáveis objecto* e expandindo as leis categoriais da secção anterior a esses casos, introduzimos $\overset{\in}{\rightrightarrows}$ enquanto *constante lógica* em \mathcal{L}_{Cat} e apresentamos a seguinte *lei lógica de formação* de um *agregado/conjunto (menge)* a partir da *exemplificação de automorfismos*:

- \mathbf{L}_8 (*lei de formação de agregado/conjunto (menge)*): $x \overset{f}{\rightrightarrows} x \dashv \vdash x \overset{\in}{\rightrightarrows} f$

Ou seja, a partir de um *automorfismo* resulta, sempre, a formação de um *agregado sistémico*, singular ou não singular, dependendo de f , ao qual x pertence.

Tomando \mathbf{L}_8 , em consideração, podemos derivar, a partir de (59), a *teia mórfica de pertença*, em que somente se considera os *morfismos de exemplificação*:

$$\begin{array}{c} \in \quad \ni \\ 1 \rightrightarrows M_3 \leftrightarrow 2 \\ \in \updownarrow \\ 3 \end{array} \quad (60)$$

Do mesmo modo, dada uma qualquer *teia mórfica de pertença* composta somente por *morfismos de exemplificação*, pode-se derivar os *automorfismos* subjacentes, uma vez mais, seguindo \mathbf{L}_8 .

A topologia das *teias mórficas de exemplificação* é uma topologia em estrela, cujo *ponto mórfico* central é a propriedade definidora do conjunto na sua *intensão*³¹.

Denotando uma *teia mórfica de exemplificação*, com centro f , por $f(\in)$, uma qualquer *teia mórfica de exemplificação finita* $f(\in)$ corresponde a um *agregado/conjunto* (*menge*) com um número finito de *objectos*. Uma *teia mórfica de exemplificação infinita contável*, por seu turno, e seguindo Cantor, tem de ser trabalhada enquanto totalidade sistémica, contudo, ao fazê-lo está-se a assumir uma completude de uma tal estrutura com um número infinito de *ligações mórficas*, o que pode ser ontologicamente problemático.

Assim, por exemplo, considerando os inteiros não-negativos, pode-se considerar que esse *agregado/conjunto* (*menge*) tem uma continuidade indefinidamente prolongável, logo, pode-se considerar esse *agregado/conjunto* (*menge*), em termos de uma abertura disponível para a utilização de números cada vez maiores, sempre em aberto e, deste modo, por terminar, pelo que se estaria a considerar a *propriedade de ser um número inteiro não-negativo* como uma propriedade com exemplificação aberta, existindo sempre uma disponibilidade para mais um número, logo, não se poderia falar de uma *totalidade acabada*.

Para se poder falar dos inteiros não-negativos, enquanto totalidade sistémica, Cantor teve de considerar a existência de uma *totalidade transfinita*, nome que expressa um movimento sistémico que introduz uma *rotatividade sistémica não-local*, em que a abertura associada à disponibilidade numérica se torna um problema de finitude contadora, limite que não é o do próprio sistema dos inteiros não-negativos que transcende essa finitude, logo sendo adjectivável de *transfinito*.

A *totalidade transfinita* dos *inteiros não-negativos* corresponde, pois, na *teoria cantoriana*, a uma *cardinalidade transfinita*, assim denominada porque não é comparável a nenhum inteiro não-negativo, encontra-se fora do sistema de finitude numérica cardinal expressável por cada número inteiro não-negativo. Esta *cardinalidade transfinita* é denotada por \aleph_0 .

Uma característica das *cadeias mórficas incompressíveis*, se se seguir Cantor, é que a sua cardinalidade é irreduzivelmente \aleph_0 , sendo que, tal como se considera um *agregado/conjunto* (*menge*) *transfinito* uma *totalidade*, também se pode considerar uma *cadeia mórfica incompressível* de \mathcal{L}_{Cat} uma *totalidade mórfica*.

31. Esta abordagem baseada na *intensão* em vez da *extensão* é uma característica da formulação categorial. Trata-se de uma formulação distinta daquela que é assumida na axiomática de Zermelo-Fraenkel (Jech, 2002). Contudo, para trabalharmos, em detalhe, esta questão, levar-nos-ia para além dos objectivos da presente tese. Assumimos, a partir deste ponto, por uma questão de unidade discursiva e de consistência na abordagem sistémica com a ciência do risco, a notação categorial e a abordagem baseada nas *teias mórficas de pertença* para lidar com os *agregados/conjuntos*, logo, trabalha-se com a abordagem baseada na *intensão*.

Assim, considerando $\mathcal{C}(\Omega)$ e $\mathcal{C}'(\Omega)$ enquanto *totalidades mórficas*, estas não são *algoritmicamente computáveis*, mas são *mórficamente computáveis*, enquanto *totalidades mórficas*, logo, temos:

$$:\mathcal{C}(\Omega): \stackrel{\text{id}_{:\mathcal{C}(\Omega):}}{\rightleftarrows} :\mathcal{C}(\Omega): \quad (61)$$

$$:\mathcal{C}'(\Omega): \stackrel{\text{id}_{:\mathcal{C}'(\Omega):}}{\rightleftarrows} :\mathcal{C}'(\Omega): \quad (62)$$

Para rejeitar estes resultados, ter-se-ia de rejeitar o trabalho de Cantor e a teoria dos conjuntos, assim como negar a existência do número de Chaitin, logo, as *cadeias* $\mathcal{C}(\Omega)$ e $\mathcal{C}'(\Omega)$ não existiriam enquanto entidades abstractas matemáticas.

Trabalhando a partir daquilo que é aceite no seio da matemática moderna, podemos assumir (61) e (62) como verdadeiros. A consequência é que ao nível dos fundamentos da *teoria das categorias*, encontramos *estruturas aleatórias* enquanto *totalidades mórficas*.

Por seu turno, nos casos em que tais *estruturas* são dadas por *cadeias mórficas infinitas*, segue-se que se está perante estruturas formais processuais, cuja sequência não pode ser antecipada a partir de um algoritmo, o que permite introduzir, em \mathcal{L}_{Cat} , o problema dos limites à previsibilidade num processo dinâmico, formalizado a partir de uma representação em termos de uma *cadeia mórfica*, questão central para a matemática do risco, com conexão com a modelação de sistemas em *situações de risco*.

O argumento acerca da existência de *estruturas mórficas aleatórias* em \mathcal{L}_{Cat} , trabalháveis enquanto *totalidades mórficas*, constitui o ponto de partida para uma matemática do risco com fundamentos categoriais. Contudo, torna-se necessário ir para além das provas de existência e trabalhar com *computações mórficas* passíveis de produção de *padrões aleatórios*, integrando este trabalho com a matemática do risco.

A matemática do risco, subjacente à ciência do risco, pode ser trabalhada a partir das *máquinas de Turing categoriais*, por via da formalização categorial da computação com *alfabetos discretos* e da (*hiper*)*computação* de *objectos categoriais* gerais.

Contudo, para trabalhar a formalização categorial destas *máquinas*, torna-se necessário introduzir a noção de *categoria*, a partir de uma *lei algébrica de composição de fundamentos mórficos* numa *teia mórfica* (próxima secção) e trabalhar a estrutura de base da *topologia categorial* (próximo capítulo).

3.3. Noção de *categoria*

A passagem da noção de *teia mórfica* à noção matemática de *categoria*, com uma estrutura algébrica, resulta do reconhecimento da presença de uma *lei algébrica de composição de fundamentos mórficos* numa *teia mórfica*.

A partir do trabalho do grupo Nicolas Bourbaki³² (Bourbaki, 1989), considera-se que uma *teia mórfrica* possui uma *lei algébrica de composição de fundamentos mórfricos*, se existirem *morfismos compostos* que podem ser interpretados em termos de um *fundamento sistémico* que lhes seja específico, ou seja, para, pelo menos, uma *cadeia-2* $W \xrightleftharpoons{F} W' \xrightleftharpoons{F'} W''$ da *teia mórfrica*, existe um *fundamento mórfrico* F'' tal que:

$$W \xrightleftharpoons{F' \circ F} W'' \vDash W \xrightleftharpoons{F''} W'' \quad (63)$$

o que significa que à *composição de morfismos*, enquanto noção de *ligação mórfrica indirecta*, corresponde uma *operação de composição algébrica* entre *fundamentos mórfricos*, denotando-se esta operação pelo símbolo \odot , segue-se que, a partir de (63), se pode escrever:

$$F' \odot F = F'' \quad (64)$$

Se existir uma tal operação para cada *morfismo composto*, resultante de uma *cadeia-2*, então, seguindo o trabalho do Bourbaki, a *teia mórfrica* correspondente diz-se uma *teia magma*, pois existe uma *operação algébrica de composição* sobre os *fundamentos mórfricos*.

Seja, então, \mathcal{A} uma *teia mórfrica* e denote-se por $A_{\mathcal{A}}$ uma secção da mesma *teia* que é *totalmente conectada*, por ‘Mag’ a *propriedade de ser uma teia magma* e por ‘Comp’ a *propriedade de ser uma teia mórfrica totalmente conectada* ou um *ponto mórfrico componente* de uma dada *teia mórfrica*, a *operação de composição algébrica* pode ser introduzida do seguinte modo:

- \mathbf{L}_9 (*operação de composição algébrica de fundamentos mórfricos*):

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} F' \circ F \\ : W \rightleftharpoons W'' : \end{array} \begin{array}{c} \text{Comp} \\ \rightleftharpoons \end{array} \begin{array}{c} \in \\ : A_{\mathcal{A}} : \end{array} \begin{array}{c} \rightleftharpoons \\ \text{Mag} \end{array} \\ \vdash \\ \begin{array}{c} F' \odot F \\ : W \rightleftharpoons W'' : \end{array} \begin{array}{c} \text{id} \\ \rightleftharpoons \end{array} \begin{array}{c} F'' \\ : W \rightleftharpoons W'' : \end{array} \begin{array}{c} F'' = F' \odot F \\ : W \rightleftharpoons W'' : \end{array} \begin{array}{c} \text{Comp} \\ \rightleftharpoons \end{array} \begin{array}{c} \in \\ : A_{\mathcal{A}} : \end{array} \begin{array}{c} \rightleftharpoons \\ \text{Mag} \end{array} \end{array}$$

A aplicação recursiva de \mathbf{L}_9 , a *teias magma*, conduz de $W \xrightleftharpoons{F' \circ (F' \circ F)} W''$ a $W \xrightleftharpoons{F'' \odot (F' \odot F)} W''$ e de $W \xrightleftharpoons{(F'' \circ F') \circ F} W''$ a $W \xrightleftharpoons{(F'' \odot F') \odot F} W''$, deste modo, a questão que se coloca é a de saber se se pode escrever:

$$\begin{array}{c} F'' \odot (F' \odot F) \\ : W \rightleftharpoons W'' : \end{array} \begin{array}{c} \text{id} \\ \rightleftharpoons \end{array} \begin{array}{c} (F'' \odot F') \odot F \\ : W \rightleftharpoons W'' : \end{array} \begin{array}{c} (F'' \odot F') \odot F \\ : W \rightleftharpoons W'' : \end{array} \quad (65)$$

o que significaria que a *composição algébrica de fundamentos mórfricos* seria associativa, ou seja:

$$F'' \odot (F' \odot F) = (F'' \odot F') \odot F \quad (66)$$

32. Nicolas Bourbaki, ou Bourbaki, é o nome de um grupo de matemáticos, constituído em 1935, sendo Nicolas Bourbaki o nome utilizado pelo grupo para assinar os seus trabalhos, enquanto autor e, por vezes, enquanto co-autor (Mashaal, 2007).

onde X pode ser substituída por uma qualquer das *variáveis-objecto* de *categorias* (no caso de A_X ser um *ponto mórfico* os *marcadores de fronteira* podem ser removidos).

Ou seja, uma *categoria* é tal que: cada *ponto mórfico* ou cada *teia mórfica totalmente conectada* que a compõe constitui um exemplo de uma *teia magma*. Expandindo $\mathcal{F}_{\text{Cat}}^1$ para incluir \mathbf{L}_{12} , segue-se que a *composição algébrica de fundamentos*, com as *leis de associatividade* e de *identidade*, é, assim, uma característica das *categorias*, enquanto *teias mórficas com composição algébrica de fundamentos*.

Em \mathcal{L}_{Cat} , a partir do formalismo introduzido acima, segue-se que as *categorias* estão a ser tomadas como *objectos*, logo, cada *variável-objecto* de *categoria* serve para sinalizar a *totalidade sistémica* da *categoria*, permitindo o uso dos *marcadores de fronteira* ou a remoção dos mesmos como ocorre com as *variáveis-objectos* trabalhadas nas secções anteriores. Estes *marcadores de fronteira* podem ser utilizados mesmo no caso de *categorias* compostas por *teias mórficas* não *totalmente conectadas*.

As *leis lógicas* de \mathbf{L}_1 a \mathbf{L}_6 (inclusive) são aplicáveis a *categorias*, sendo os *morfismos* entre *categorias* designados por *functores*, para distinguir os *functores* dos restantes *morfismos*, utilizamos as setas $\overset{\varphi}{\rightrightarrows}, \overset{\chi}{\rightrightarrows}, \overset{\psi}{\rightrightarrows}, \overset{\varphi'}{\rightrightarrows}, \overset{\chi'}{\rightrightarrows}, \overset{\psi'}{\rightrightarrows}, \dots$, em que os *fundamentos mórficos* com as letras gregas representam os *fundamentos* gerais dos *functores*, os *functores de identidade* seguem o mesmo esquema denotativo que os *morfismos de identidade*, tal que temos as seguintes ligações identitárias: $\overset{\text{id}_X}{\rightrightarrows}, \overset{\text{id}_Y}{\rightrightarrows}, \overset{\text{id}_Z}{\rightrightarrows}, \overset{\text{id}_{X'}}{\rightrightarrows}, \overset{\text{id}_{Y'}}{\rightrightarrows}, \overset{\text{id}_{Z'}}{\rightrightarrows}, \dots$, assim, de \mathbf{L}_1 a \mathbf{L}_6 , e tomando X, X', X'' como denotando uma qualquer *variável-objecto* de *categoria* e Φ, Φ', Φ'' um qualquer *fundamento mórfico* de *functor*, pode-se introduzir as seguintes seis *leis fundamentais* para as *categorias*:

- \mathbf{C}_1 (*validade formal da identidade*):

$$\vdash X \overset{\text{id}_X}{\rightrightarrows} X$$

- \mathbf{C}_2 (*individuação*):

$$X \dashv\vdash : X :$$

- \mathbf{C}_3 (*religare*):

$$\dots X \dots \dashv\vdash \dots X \overset{\text{id}_X}{\rightrightarrows} X \dots$$

- \mathbf{C}_4 (*adição/remoção do marcador de fronteira*):

$$\dots X \dots \dashv\vdash \dots : X : \dots$$

- C_5 (*functor composto*):

$$\dots X \stackrel{\Phi}{\rightleftharpoons} X' \stackrel{\Phi'}{\rightleftharpoons} X'' \dots \vdash \dots X \stackrel{\Phi' \circ \Phi}{\rightleftharpoons} X'' \dots$$

- C_6 (*associatividade da composição*):

$$\dots X \stackrel{\Phi'' \circ (\Phi' \circ \Phi)}{\rightleftharpoons} X'' \dots \dashv \vdash \dots X \stackrel{(\Phi'' \circ \Phi') \circ \Phi}{\rightleftharpoons} X'' \dots$$

A lei C_4 pode ser assumida como válida, pois, estamos a utilizar símbolos de *variáveis-objecto* para denotar as *categorias* e não as próprias *teias mórnicas* subjacentes a essas mesmas *categorias*.

Para além destas *leis*, é necessário assumir algumas *leis lógicas* adicionais que formalizem os elementos centrais da natureza dos *functores*. Uma primeira lei consiste no pressuposto de uma natureza de *teia magma*, tal que se assume uma correspondência entre a *composição de functores*, assumida em C_5 , e uma *composição algébrica de fundamentos de functores*, assim temos:

- C_7 (*estrutura algébrica para cadeias*):

$$\vdots \dots X \stackrel{\Phi}{\rightleftharpoons} X' \stackrel{\Phi'}{\rightleftharpoons} X'' \dots \vdots \stackrel{\text{id}_{\mathcal{X}}}{\rightleftharpoons} \mathcal{X}$$

em que se assume que nenhuma das *letras genéricas* X , X' e X'' são substituíveis por \mathcal{X} . Da *lei lógica* C_7 , segue-se que cada *cadeia functorial* constitui uma *categoria* com uma *composição algébrica de functores*. Para a *operação de composição algébrica de functores*, utilizamos o símbolo \odot .

Para além desta *lei*, é necessário especificar os *functores de identidade* e os *functores não identitários*, segundo aquilo que é a sua natureza sistémica, tal como esta é trabalhada no seio da *teoria das categorias*.

Enquanto *estruturas mórnicas*, os *functores* são *morfismos* que *ligam* duas *categorias*, tais que (Mac Lane, 1998):

- Cada *componente sistémica nodal* da *teia mórnic* da *categoria origem* (seja o *nó* uma *totalidade mórnic* correspondente a um *ponto mórnic* ou a uma *teia mórnic totalmente conectada*, sinalizada pelos *marcadores de fronteira*) é *morficamente ligada* a uma *componente sistémica nodal* da *teia mórnic* da *categoria alvo*;
- Cada *componente de ligação mórnic singular* (*morfismo singular*) da *teia mórnic* da *categoria origem* é ligada a uma *componente de ligação mórnic singular* da *teia mórnic* da *categoria alvo*;
- Cada *functor* define um *homomorfismo* em relação à *composição algébrica de fundamentos mórnicos*.

Estas são as propriedades definidoras dos *functores*. Para introduzi-las em \mathcal{L}_{Cat} , necessitamos de introduzir uma notação para estruturas sistémicas numa *categoria*. Assim, considere-se uma categoria \mathcal{X} e seja a *teia mórfica* A uma *componente sistémica nodal* da *teia mórfica* de \mathcal{X} , denota-se por $\mathcal{X}_{:A:N}$ a *categoria* composta por A , enquanto *componente nodal*, e pelo *morfismo de identidade* de A , $\text{id}_{:A:} : A \rightrightarrows A$, com a *estrutura algébrica associativa* tal que: $\text{id}_{:A:} \circ \text{id}_{:A:} = \text{id}_{:A:}$.

Por seu turno, se A for uma *componente sistémica não-nodal* da *teia mórfica* de \mathcal{X} , denota-se por $\mathcal{X}_{:A:}$ a *categoria* que tem A como *teia mórfica subjacente*. A diferença de notação entre $\mathcal{X}_{:A:N}$ e $\mathcal{X}_{:A:}$ reside na identificação da diferença de posição de A em \mathcal{X} , assim, por exemplo, considere-se uma *categoria* \mathcal{X} composta pela seguinte *teia mórfica*:

$$: x \xrightarrow{f} y : \xrightarrow{g} z \xleftarrow{g'} y' \xleftarrow{f'} x' \quad (67)$$

Existem quatro *componentes nodais*, a saber: $x \xrightarrow{f} y$, x' , y' e z . Por seu turno, enquanto que $x \xrightarrow{f} y$ é uma *componente nodal*, pois, ocorre sinalizada pelos *marcadores de fronteira*, enquanto *totalidade mórfica*, já $x' \xleftarrow{f'} y'$ não o é, assim escreve-se $\mathcal{X}_{:x \xrightarrow{f} y:N}$ e $\mathcal{X}_{:x' \xleftarrow{f'} y':}$.

Introduza-se, agora, em \mathcal{L}_{Cat} , os símbolos $\overset{\iota}{\rightleftharpoons}$, $\overset{\iota'}{\rightleftharpoons}, \dots$ para as *ligações mórficas functoriais* dos *functores de situs*, a serem formalizados de seguida. A partir desta notação, podem ser introduzidas as *leis lógicas* para a natureza sistémica dos *functores*. No que se segue, X_W é tal que X pode ser substituído por uma qualquer *variável-objecto* de *categoria* e W pode ser substituído, como tem sido assumido até agora, por um *ponto mórfico* (necessariamente *nodal*) ou por uma *teia mórfica totalmente conectada*. Nos casos em que se lida especificamente com *estruturas nodais* em X , utiliza-se a notação X_{W_N} . Assim, temos as seguintes *leis lógicas fundamentais* para os *functores*:

- **Functor de situs:**
- **FS₁** (*regra de situs*):

$$X_{W'} \overset{\iota'}{\rightleftharpoons} X \overset{\iota}{\rightleftharpoons} X'_W \vdash W' \overset{\iota}{\rightleftharpoons} \iota(W')$$

- **FS₂** (*regra para identidade*):

$$\begin{aligned} & X_{W'} \overset{\iota'}{\rightleftharpoons} X \overset{\iota}{\rightleftharpoons} X'_W \\ & \vdash \\ & : W' \overset{\text{id}_{W'}}{\rightleftharpoons} W' : \overset{\iota}{\rightleftharpoons} : \iota(W') \overset{\iota(\text{id}_{W'})}{\rightleftharpoons} \iota(W') : \end{aligned}$$

- **FS₃** (regra para morfismos entre componentes m3rficas):

$$\begin{array}{c} X \quad \quad \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{F'} \\ \xrightarrow{F} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota'} \\ \xrightarrow{\iota} \end{array} \quad \begin{array}{c} X \\ \xrightarrow{\iota} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota} \\ \xrightarrow{\iota} \end{array} \quad \begin{array}{c} X'_W \\ \xrightarrow{\iota} \end{array} \\ \vdots \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xrightarrow{F} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota} \\ \xrightarrow{\iota} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota(F)} \\ \xrightarrow{\iota(F)} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota(F)} \\ \xrightarrow{\iota(F)} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \\ \vdots \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xrightarrow{F} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota} \\ \xrightarrow{\iota} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota(F)} \\ \xrightarrow{\iota(F)} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota(F)} \\ \xrightarrow{\iota(F)} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \end{array}$$

- **FS₄** (regras alg3bricas):

$$\begin{aligned} \iota(W') &= W \\ \iota(\text{id}_{W'}) &= \iota(F) = \text{id}_W \\ \iota(F' \odot F) &= \iota(F') \odot \iota(F) = \text{id}_W \odot \text{id}_W = \text{id}_W \end{aligned}$$

- **Functor de identidade:**

- **FID₁** (regra para estruturas nodais):

$$X_{W_N} \xrightarrow{\iota} X \xrightarrow{\text{id}_X} X \vdash W_N \xrightarrow{\text{id}_X} \text{id}_X(W_N)$$

- **FID₂** (regra para identidade):

$$X_{W_N} \xrightarrow{\iota} X \xrightarrow{\text{id}_X} X \vdash \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}_{W_N}} \\ \xrightarrow{\text{id}_X} \end{array} \begin{array}{c} W_N \\ \xrightarrow{\text{id}_X} \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}_X} \\ \xrightarrow{\text{id}_X} \end{array} \begin{array}{c} \text{id}_X(W_N) \\ \xrightarrow{\text{id}_X(\text{id}_{W_N})} \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}_X(\text{id}_{W_N})} \\ \xrightarrow{\text{id}_X(\text{id}_{W_N})} \end{array} \begin{array}{c} \text{id}_X(W_N) \\ \xrightarrow{\text{id}_X(\text{id}_{W_N})} \end{array} \vdots$$

- **FID₃** (regra para morfismos entre estruturas nodais):

$$X \quad \quad \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{F'} \\ \xrightarrow{F} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota'} \\ \xrightarrow{\iota} \end{array} \quad \begin{array}{c} X \\ \xrightarrow{\iota} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota} \\ \xrightarrow{\iota} \end{array} \quad \begin{array}{c} X'_N \\ \xrightarrow{\iota} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xrightarrow{F} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota} \\ \xrightarrow{\iota} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota(F)} \\ \xrightarrow{\iota(F)} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota(F)} \\ \xrightarrow{\iota(F)} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array}$$

- **FID₄** (regras alg3bricas):

$$\begin{aligned} \text{id}_X(W_N) &= W_N \\ \text{id}_X(F) &= F \\ \text{id}_X(F' \odot F) &= \text{id}_X(F') \odot \text{id}_X(F) = F' \odot F \end{aligned}$$

- **Functor gen3rico:**

- **F₁** (regra para estruturas nodais):

$$X_{W_N} \xrightarrow{\iota} X \xrightarrow{\Phi} X' \xrightarrow{\iota'} X_{\Phi(W_N)} \vdash W_N \xrightarrow{\Phi} \Phi(W_N)$$

- F_2 (regra para identidade):

$$X_{W_N} \xrightarrow{\iota} X \xrightarrow{\Phi} X' \vdash : W_N \xrightarrow{\text{id}_{W_N}} W_N : \xrightarrow{\Phi} : \Phi(W_N) \xrightarrow{\Phi(\text{id}_{W_N})} \Phi(W_N) :$$

- F_3 (regra para morfismos entre estruturas nodais):

$$\mathcal{X} \xrightarrow{F} X \xrightarrow{\iota} X' \vdash : W_N \xrightarrow{F} W' : \xrightarrow{\Phi} : \Phi(W) \xrightarrow{\Phi(F)} \Phi(W') :$$

- F_4 (regras algébricas):

$$\begin{aligned} \Phi(\text{id}_{W_N}) &= \text{id}_{\Phi(W_N)} \\ \Phi(F \odot G) &= \Phi(F) \odot \Phi(G) \end{aligned}$$

Importa explicar cada uma destas *leis lógicas*, a partir de cada *estrutura functorial*, a saber: o *functor de situs*; o *functor de identidade* e o *functor genérico*.

O *functor de situs* é trabalhado a partir da noção de *situs* numa *estrutura sistémica mórfica*, em que a palavra latina *situs* é tomada a partir da sua raiz primitiva com o sentido de *posição*. O *functor de situs* é uma *ligação mórfica projectiva* que liga cada *situs* de uma *estrutura componente* de uma *categoria* a um único *situs* de uma *estrutura sistémica mórfica alvo* que assume, por via das *ligações mórficas* do *functor*, uma *natureza nodal*, pois a *estrutura sistémica alvo* constitui uma *totalidade alvo* de cada *ligação mórfica*, definida pela *ligação functorial* e é tomada, pelo *functor*, na sua *identidade sistémica*.

Esta noção de *functor de situs* reenvia para a natureza *hipertextual* do *cálculo categorial*, importa, assim, tornar explícita essa natureza antes de se prosseguir com a análise do *functor de situs*.

A lógica do *cálculo categorial* pode ser considerada como sendo *hipertextual*, pois, as instâncias formalizadas, no seio do *cálculo categorial*, são trabalhadas a partir das ligações em *teia* entre cada par de *pontos mórficos*.

O *hipertexto* é um *texto em movimento*, organizado em *teia*, no qual cada *hiperligação* conecta um *site* (com raiz no latim *situs*) contendo um *objecto textual*, a um outro *site* (*situs*) contendo, também, um *objecto textual*, as *hiperligações*, quando activadas, introduzem um movimento do *primeiro site* (*situs*), que assume a *posição* de *origem*, para o *segundo site* (*situs*), que assume a *posição* de *alvo*.

As *hiperligações*, conectando dois *sites* (*situs*) de *objectos textuais*, estabelecem a conexão segundo um sentido de base na organização do próprio *hipertexto*, logo, pode ser sinalizado, em cada *hiperligação*, um *fundamento sistémico* para a mesma.

Tal como uma *teia mórfica* permite formalizar uma estrutura *hipertextual*, com os *objectos* nas suas *posições* (noção de *situs*) e as *ligações mórficas* formalizando as *hiperligações*, pode-se, também, considerar a estrutura formal de uma *teia mórfica* em \mathcal{L}_{Cat} como sendo uma *estrutura hipertextual* composta: (1) pelos nomes dos *objectos* colocados nas suas posições respectivas (noção de *situs*) e (2) pelas *ligações mórficas* com os correspondentes *fundamentos* (*hiperligações*).

Está-se, assim, perante um tipo de estrutura discursiva, distinto daquele que é visado no seio das lógicas que têm por base o *cálculo de predicados* e a *semântica conjuntista*.

A semântica da linguagem \mathcal{L}_{Cat} não é construída a partir de conjuntos, mas, sim, a partir de uma *estrutura hipertextual* que expressa, no discurso formal de \mathcal{L}_{Cat} , uma dada *estrutura sistémica* composta por *objectos* e *morfismos*. As *categorias* podem, deste modo, ser trabalhadas enquanto *estruturas hipertextuais algébricas*.

O *functor de situs* é introduzido, fazendo uso dessa mesma *estrutura hipertextual*, pois, introduz uma *ligação mórfica* entre duas *estruturas hipertextuais algébricas*, a saber: a *categoria* X (*origem*) e a *categoria* X'_W (*alvo*) composta por uma dada *totalidade mórfica* W , logo, o *functor* $X \xrightarrow{\iota} X'_W$ liga X a uma *categoria* cuja *teia mórfica subjacente* é W . Neste *morfismo*, X'_W assume uma *posição hipertextual* ocupando um *situs alvo*, devido a **FS**₁ e a **FS**₄, que nos permitem escrever a *regra de situs*:

$$X_{W'} \xrightarrow{\iota} X \xrightarrow{\iota} X'_W \vdash W' \xrightarrow{\iota} \iota(W') = W \quad (68)$$

Para explicitar o sentido desta *lei lógica*, assumamos o seguinte caso de instanciação $X = X' = \mathcal{X}$ em que \mathcal{X} tem subjacente a seguinte *teia mórfica*:

$$\begin{array}{ccccc} & f & & g & \\ a & \xleftrightarrow{\quad} & b & \xleftrightarrow{\quad} & c \\ & & d & & \end{array} \quad (69)$$

São quatro as *componentes nodais* de \mathcal{X} : a, b, c, d . Então, tome-se como exemplo:

$$\mathcal{X}_x \xrightarrow{\iota_x} \mathcal{X} \xrightarrow{\iota_b} \mathcal{X}_b \vdash x \xleftrightarrow{\iota_b} b \quad (70)$$

o que significa que ι_b toma cada *componente nodal* x , de \mathcal{X} , e estabelece uma *ligação mórfica* a b , logo, temos:

$$\begin{array}{ccccc} a & \xleftrightarrow{\quad} & b & \xleftrightarrow{\quad} & c \\ \uparrow \downarrow \iota_b & & \uparrow \downarrow \iota_b & & \uparrow \downarrow \iota_b \\ b & & b & & b \\ & & \downarrow \uparrow \iota_b & & \\ & & d & & \end{array} \quad (71)$$

De (68) segue-se que o mesmo pode ser feito para cada *objecto* de \mathcal{X} , tal que, temos:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 a & \xrightleftharpoons{f} & b & \xrightleftharpoons{g} & c \\
 \uparrow\downarrow\iota_a & & \uparrow\downarrow\iota_a & & \uparrow\downarrow\iota_a \\
 a & & a & & a
 \end{array}
 ,
 \begin{array}{ccccc}
 a & \xrightleftharpoons{f} & b & \xrightleftharpoons{g} & c \\
 \uparrow\downarrow\iota_b & & \uparrow\downarrow\iota_b & & \uparrow\downarrow\iota_b \\
 b & & b & & b \\
 & & \downarrow\uparrow\iota_b & & \\
 & & d & &
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccccc}
 a & \xrightleftharpoons{f} & b & \xrightleftharpoons{g} & c \\
 \uparrow\downarrow\iota_c & & \uparrow\downarrow\iota_c & & \uparrow\downarrow\iota_c \\
 c & & c & & c \\
 & & \downarrow\uparrow\iota_c & & \\
 & & d & &
 \end{array}
 ,
 \begin{array}{ccccc}
 a & \xrightleftharpoons{f} & b & \xrightleftharpoons{g} & c \\
 \uparrow\downarrow\iota_d & & \uparrow\downarrow\iota_d & & \uparrow\downarrow\iota_d \\
 d & & d & & d \\
 & & \downarrow\uparrow\iota_d & & \\
 & & d & &
 \end{array}
 \end{array} \tag{72}$$

Em qualquer destes casos, pode ser reconhecida a *natureza projectiva* do *functor de situs*, em (72) o *functor* pode ser pensado como um *projector* de cada *componente nodal* de \mathcal{X} sobre uma das *componentes nodais* de \mathcal{X} que assume uma posição (*situs*) de alvo.

Importa relevar, que é, também, possível considerar outras *estruturas mórnicas* distintas das *componentes* da *própria teia* subjacente a \mathcal{X} , aquilo que a regra geral (68) afirma é que \mathcal{X} pode ser *projectivamente ligada* pelo *functor de situs* a uma qualquer *estrutura mórnic pontual* ou *totalmente conectada*, assim, considerando um qualquer *ponto mórnic* k e uma *teia mórnic* A *totalmente conectada* temos:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 a & \xrightleftharpoons{f} & b & \xrightleftharpoons{g} & c \\
 \uparrow\downarrow\iota_k & & \uparrow\downarrow\iota_k & & \uparrow\downarrow\iota_k \\
 k & & k & & k \\
 & & \downarrow\uparrow\iota_k & & \\
 & & d & &
 \end{array}
 ,
 \begin{array}{ccccc}
 a & \xrightleftharpoons{f} & b & \xrightleftharpoons{g} & c \\
 \uparrow\downarrow\iota_{:A} & & \uparrow\downarrow\iota_{:A} & & \uparrow\downarrow\iota_{:A} \\
 :A & & :A & & :A \\
 & & \downarrow\uparrow\iota_{:A} & & \\
 & & d & &
 \end{array}
 \end{array} \tag{73}$$

o que torna explícita a *ligação hipertextual* de uma *teia mórnic* a um *situs*, explicando a noção de *functor de situs*.

Sendo cada *componente nodal* de uma *teia mórnic*, subjacente à *categoria* X , *ligada* pelo *functor de situs*, a uma *teia mórnic*, subjacente a uma outra *categoria* X'_W , segue-se que cada *morfismo de identidade* de cada *componente nodal* de X é *morficamente ligado* pelo *functor de situs* ao *morfismo de identidade* de W . O mesmo se passa para qualquer *morfismo* de X , em conformidade com a *natureza projectiva* do *functor de situs* que *projecta* X sobre X'_W , isto é, cada *morfismo singular* entre quaisquer duas *componentes nodais* da *teia mórnic* subjacente a X é *projectado* sobre o *morfismo de identidade* de W , pelo *functor* que *liga* X a X'_W .

Assim se explica as restantes duas *leis lógicas* do *functor de situs*, juntamente com as restantes *regras algébricas*. Constituinto, a última *regra algébrica*, a condição de *homomorfismo* para o *functor de situs*.

Os *functores de situs* são úteis no desenvolvimento da *teoria topológica das categorias*, como veremos. No caso das *leis lógicas* para os *morfismos de identidade* e das *leis lógicas* para os *morfismos genéricos*, os *functores de situs* são úteis para a sinalização de *estruturas mórficas* em X .

Relativamente aos *functores de identidade*, de **FID₁** e **FID₄** resulta que:

$$X_{W_N} \stackrel{\iota}{\rightleftharpoons} X \stackrel{\text{id}_X}{\rightleftharpoons} X \vdash W_N \stackrel{\text{id}_X}{\rightleftharpoons} \text{id}_X(W_N) = W_N \quad (74)$$

ou seja, cada *estrutura nodal* de X é *morficamente ligada* a si mesma, pelo *functor de identidade* de X . Deste modo, a *identidade* tem de ser preservada, de facto, de **FID₁**, **FID₂** e **FID₄** resulta:

$$X_{W_N} \stackrel{\iota}{\rightleftharpoons} X \stackrel{\text{id}_X}{\rightleftharpoons} X \vdash : W_N \stackrel{\text{id}_{W_N}}{\rightleftharpoons} W_N : \stackrel{\text{id}_X}{\rightleftharpoons} : W_N \stackrel{\text{id}_{W_N}}{\rightleftharpoons} W_N : \quad (75)$$

Os *morfismos* entre *estruturas nodais* são, também, *morficamente ligados* a si mesmos, como resulta de **FID₁**, **FID₃** e **FID₄**:

$$X \stackrel{F}{\vdash} W_N \stackrel{F}{\rightleftharpoons} W'_N : \stackrel{\iota}{\rightleftharpoons} X \stackrel{\text{id}_X}{\rightleftharpoons} X \vdash : W_N \stackrel{F}{\rightleftharpoons} W'_N : \stackrel{\text{id}_X}{\rightleftharpoons} : W_N \stackrel{F}{\rightleftharpoons} W'_N : \quad (76)$$

Finalmente, de **FID₄** resulta que, em relação à *composição algébrica de fundamentos mórficos*, id_X é um *homomorfismo* pois (Bourbaki, 1989):

$$\text{id}_X(F' \otimes F) = \text{id}_X(F') \otimes \text{id}_X(F) \quad (77)$$

por seu turno, dado $\text{id}_X(F') = F'$ e $\text{id}_X(F) = F$, de (77) segue-se que:

$$\text{id}(F' \otimes F) = F' \otimes F \quad (78)$$

Considerando, agora, o caso geral do *functor genérico*, a *lei lógica* **F₁** é tal que cada *estrutura nodal* W_N de X é *morficamente ligada* a uma *estrutura nodal* $\Phi(W_N)$ de X' . Assim, dado:

$$X_{W_N} \stackrel{\iota}{\rightleftharpoons} X \stackrel{\Phi}{\rightleftharpoons} X' \stackrel{\iota'}{\rightleftharpoons} X_{\Phi(W_N)} \quad (79)$$

segue-se que:

$$W_N \stackrel{\Phi}{\rightleftharpoons} \Phi(W_N) \quad (80)$$

ou seja, W_N é *morficamente ligada* a $\Phi(W_N)$ segundo o *morfismo de fundamento* Φ (que é o *fundamento do functor* de X para X').

Note-se, ainda, que dada a *teia mórfrica functorial* (79), pode-se fechar a *teia* num *quadrado mórfrico* utilizando os *functores de situs* tal que temos:

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\Phi} & X' \\
\downarrow \iota & & \downarrow \iota' \\
X_{W_N} & \xrightarrow[\iota_{W_N}]{\iota_{\Phi(W_N)}} & X_{\Phi(W_N)}
\end{array} \quad (81)$$

logo, utilizando a *composição algébrica de functores*:

$$\iota' \circ \Phi = \iota_{\Phi(W_N)} \circ \iota = \iota_{\Phi(W_N)} \quad (82)$$

$$\iota = \iota_{W_N} \circ \iota' \circ \Phi \quad (83)$$

sendo que $\iota_{\Phi(W_N)}$ é o *fundamento* de um *isomorfismo functorial* de X_{W_N} para $X_{\Phi(W_N)}$, com inverso em ι_{W_N} , pois, temos:

$$\iota_{\Phi(W_N)} \circ \iota_{W_N} = \text{id}_{\Phi(W_N)} \quad (84)$$

$$\iota_{W_N} \circ \iota_{\Phi(W_N)} = \text{id}_{W_N} \quad (85)$$

que satisfazem a condição geral para que um *morfismo/functor* seja um *isomorfismo*, pois, para um *morfismo de fundamento* f de W para W' ser um *isomorfismo*, tem de existir um *morfismo* de W' para W de *fundamento* f' , com $f' \circ f = \text{id}_W$ e $f \circ f' = \text{id}_{W'}$, sendo f' o inverso de f na *operação de composição algébrica de fundamentos*, por seu turno, para um *functor de fundamento* Φ de X para X' ser um *isomorfismo*, tem de existir um outro *functor de fundamento* Φ' de X' para X tal que $\Phi' \circ \Phi = \text{id}_X$ e $\Phi \circ \Phi' = \text{id}_{X'}$, condições que são satisfeitas para $\iota_{\Phi(W_N)}$.

Ao *ligar morficamente estruturas nodais* da *categoria origem* à *categoria alvo*, o *functor* tem, necessariamente, de *ligar morficamente* os *morfismos de identidade* das *estruturas nodais* da *categoria origem* aos *morfismos de identidade* das *estruturas nodais* correspondentes na *categoria alvo*, assim, de \mathbf{F}_2 e \mathbf{F}_4 resulta:

$$X_{W_N} \xrightarrow{\iota_{W_N}} X \xrightarrow{\Phi} X' \vdash : W_N \xrightarrow{\text{id}_{W_N}} W_N \vdash : \Phi(W_N) \xrightarrow{\text{id}_{\Phi(W_N)}} \Phi(W_N) \vdash : \quad (86)$$

Por outro lado, dadas estas correspondências, segue-se que se $W \xrightarrow{F} W'$ é uma *componente* da *teia mórfrica* subjacente à *categoria origem*, então, segue-se que o *functor* tem de *ligar* os *alvos* dos *objectos* W e W' (respectivamente, $\Phi(W)$ e $\Phi(W')$) por um *morfismo de fundamento* $\Phi(F)$, o que explica a *lei lógica* \mathbf{F}_3 .

A condição final para o *functor* é a sua natureza enquanto *homomorfismo* em relação à *composição algébrica de fundamentos mórficos*, ou seja:

$$\Phi(F' \odot F) = \Phi(F') \odot \Phi(F) \quad (87)$$

Estes são os elementos centrais, de que necessitamos, acerca da *noção de categoria* e dos *morfismos entre categorias* (os *functores*). Dado este formalismo, estamos em condições de trabalhar a *teoria topológica das categorias*.

Capítulo 4. *Topologia categorial*

As *noções topológicas*, no seio da *teoria das categorias*, têm sido trabalhadas a partir da noção de *topos* (Artin, *et al.*, 1972; Mac Lane, 1998; Lawvere e Schanuel, 2005; Garner, 2009), um *topos (elementar)* é definido como uma *categoria* com *limites finitos*, um *classificador de sub-objecto*, e *fechada no sentido cartesiano* (Mac Lane, 1998). Trata-se de uma definição que visa uma construção com propriedades úteis para a recuperação e generalização de noções vindas da *teoria dos conjuntos*, nomeadamente a noção de *função característica* generalizada para facilitar a investigação das propriedades topológicas de estruturas matemáticas, no seio de um *formalismo categorial*.

Deste modo, dada a restrição assumida do universo de discurso, a noção de *topos*, trabalhada no seio da *matemática das categorias*, assume um papel operativo e não serve de base para uma investigação topológica das categorias, enquanto tais, dado que nem todas as *categorias* satisfazem as condições de um *topos* (Lawvere e Schanuel, 2005).

Quando se trabalha a matemática do risco, a partir dos seus fundamentos categoriais, torna-se necessário trabalhar com a *topologia categorial*. A *teoria do topos* não é compatível com um tal trabalho.

Não somente a noção de *topos* se encontra dependente de restrições à noção de *categoria*, como o uso do termo *topos*, neste contexto, é, como veremos, questionável, introduzindo um desvio conceptual que conduz ao problema adicional de comprometer a *topologia categorial* com elementos estruturais da *teoria dos conjuntos*, constituindo um desvio conceptual e lógico ao nível dos fundamentos da própria *matemática das categorias*.

Assim, por exemplo, Mac Lane (1998: 107) afirma que a palavra *topos* é derivada da palavra *topologia*, o que não é o caso. *Topos* é o termo primitivo grego para *o lugar do corpo*, *o lugar das coisas* (Madeira, 2009), enquanto que *topologia* é um termo formado a partir de *topos* e *logos*, termo grego para *discurso* ou *razão*.

Por seu turno, Lawvere e Schanuel (2005: 352) afirmam que *topos* significa *localização* ou *situação*, o que também não é o caso. Ainda segundo Lawvere e Schanuel (2005: 352), a noção de *topos* foi adoptada, no seio da *teoria das categorias*, com o significado de *modo de coesão* ou *categoria de variação*, o que torna explícito o desvio conceptual em relação ao conceito *topos*, tal como é assumido no seio da *topologia matemática*. De facto, segundo Madeira (2009):

“*Topos* é o termo primitivo grego para lugar, não um lugar para as coisas mas o lugar das coisas, de cada coisa, a saber: a sua extensão espacial irreductível.

Assim foi assumida a noção de *topos* por parte dos filósofos gregos, e assim foi trabalhada e expandida em termos conceptuais, ao longo do pensamento filosófico e científico ocidentais.

Subjacente à noção de *topos* está o pressuposto filosófico de que tudo que existe tem um lugar que lhe é próprio e, por isso, único (...) Platão e Aristóteles trabalharam o conceito ligando-o à noção de *arché* (*princípio*), a partir do qual a natureza das coisas poderia ser compreendida e explicada, no que dizia respeito à sua origem.”

A afirmação de Mac Lane, atrás referida, e que assume uma derivação da palavra *topos* a partir da palavra *topologia*, reflecte aquilo que constituiu o processo de introdução, na *matemática categorial*, por Grothendieck, da estrutura designada por *topos* (Artin, *et al.*, 1972; Lawvere e Schanuel, 2005; Garner, 2009). De facto, trabalhou-se a noção de *topos* para resolver problemas associados à *topologia* (Artin, *et al.*, 1972; Garner, 2009), contudo, a noção e a própria *teoria do topos* apresentam problemas estruturais, resultantes da aplicação de uma metodologia de *nomeação convencionalista* que visa uma eficácia operativa imediata mas que apenas é legítima se o *nome* corresponder à natureza matemática da noção e o nome *topos*, neste caso, não tem uma correspondência com a natureza matemática da noção.

Esta metodologia de *nomeação convencionalista* faz parte da abordagem do grupo Bourbaki, do qual Grothendieck foi membro. O termo *magma*, por exemplo, é apresentado, em definição, pelo grupo Bourbaki, no seu primeiro volume sobre álgebra (Bourbaki, 1989) sem enquadramento ou reflexão acerca do mesmo.

Esta abordagem segue-se da necessidade de uma resposta rápida de introdução de termos para noções matemáticas, sem que seja feito um enquadramento ou reflexão crítica. Quando os termos propostos, como foi o caso de *topos*, no seio da *teoria das categorias*, apresentam imprecisões conceptuais, existe o risco de replicação e amplificação de erro.

A *teoria matemática do topos* não pode ser, correctamente, designada por *teoria matemática do topos* porque a mesma não trabalha a noção de *topos* no seio da matemática, trabalha, sim, um tipo de *estrutura categorial* que se convencionou designar por *topos*, convenção, esta, que não se encontra de acordo com o conceito de *topos*, conceito, este, que é assumido no seio da *topologia matemática*.

De facto, segundo Garner (2009), a *teoria do topos* falha em capturar a natureza fundamental do *espaço topológico* em que os *pontos* têm uma prioridade conceptual sobre os *conjuntos abertos*. Num *espaço topológico*, cada *ponto* tem o seu *topos* que o acompanha enquanto *ponto*, o que legitima o nome *espaço topológico* enquanto *espaço* cuja *organização topológica* dos *topoi* dos *pontos* é inteligível a partir de uma estrutura designada por *topologia do espaço* (Simmons, 1963; Hocking e Young, 1988).

A *topologia* (Cuvillier, [1951], 1997) trabalha a natureza relacional de um espaço, a partir das relações de *posições* (noção de *situs*) entre as estruturas no espaço (Cuvillier, [1951], 1997; Simmons, 1963; Hocking e Young, 1988). Cada estrutura tem o seu *topos* e ocupa um *situs* no espaço de relações, posição, esta, da qual resulta a *topologia do espaço*.

Por seu turno, a *teoria do topos*, enquanto ramo da *teoria das categorias* está a contaminar esta última com uma tentativa de replicação de estruturas e noções vindas da *teoria dos conjuntos*, para trabalhar noções topológicas, no seio da *matemática categorial*, ignorando a natureza hipertextual das *categorias* e a necessidade de uma *topologia categorial* que investigue, de facto, a *topologia das categorias*.

O trabalho desenvolvido no presente capítulo é um passo nesse sentido, embora seja orientado pelas necessidades de ferramentas conceptuais para a *matemática do risco*, a qual necessita de elementos da *teoria topológica das categorias* para uma formalização independente da *teoria dos conjuntos*.

O presente capítulo encontra-se dividido em duas secções. Na **secção 4.1.**, é trabalhada a base elementar sistémica da *topologia categorial*, a saber: o *ponto sistémico categorial*, trabalhado a partir da noção de *estrutura nodal*. Na **secção 4.2.**, são trabalhadas as estruturas fundamentais da *topologia categorial*, a saber: os *espaços de adjacência isomórfica universal*, os quais permitem trabalhar as *categorias* a partir de *noções topológicas sistémicas*.

No trabalho desenvolvido no presente capítulo, sobe-se no nível de discurso, ou seja, enquanto que no capítulo anterior o discurso foi dominado pelo discurso lógico-matemático, pois tratava-se de trabalhar os fundamentos lógicos e matemáticos, no presente capítulo, o discurso situa-se no seio do discurso matemático propriamente dito, o qual combina linguagem formal e linguagem natural nas definições e argumentos centrais, em particular, no que se refere à derivação de resultados.

A *topologia categorial* necessita de uma matriz discursiva e argumentativa vinda da ciência dos sistemas, o que torna mais eficaz e mais apropriada a subida de nível de discurso e uma metodologia baseada na construção de estruturas sistémicas, na introdução de definições e na derivação de resultados que não passe por uma introdução permanente de *leis lógicas*. As *leis lógicas*, introduzidas no capítulo anterior, são suficientes para o trabalho matemático e fundamentos sistémicos do presente capítulo, assim como dos capítulos subsequentes.

Esta subida no nível de discurso fornece também uma maior flexibilidade de denotação no que respeita à introdução de novos símbolos e ao uso de símbolos matemáticos em conjugação com a simbologia de \mathcal{L}_{Cat} . Importa, contudo, relevar que \mathcal{L}_{Cat} , as *fbfs* e as *leis lógicas* introduzidas no capítulo anterior são respeitadas, pois, de outro modo, perder-se-ia o substrato formal.

4.1. Estruturas mononodais e o ponto geométrico

Como ponto de partida para a investigação da *topologia categorial*, começa-se por reconhecer que as *categorias* devem ser trabalhadas a partir da sua *natureza sistémica hipertextual*, logo, a investigação acerca das *estruturas nodais* e das *relações de vizinhança* de uma *categoria* constitui a base para a matemática que investiga a *topologia categorial*.

Acerca das *estruturas nodais*, a noção de *categoria mononodal* assume um papel central. No caso de um *ponto mórfico*, a correspondência *categorial* relativamente a uma *categoria mononodal* é imediata, pois, neste caso, o *morfismo de identidade* pode ser substituído, sem perda sistêmica, pelo *functor de identidade*, logo, podemos escrever:

$$x \stackrel{\text{id}_x}{\rightleftharpoons} x \quad (88)$$

podendo considerar-se x como sendo uma *categoria*, com *composição functorial*:

$$\text{id}_x \odot \text{id}_x = \text{id}_x \quad (89)$$

sendo esta operação associativa:

$$(\text{id}_x \odot \text{id}_x) \odot \text{id}_x = \text{id}_x \odot (\text{id}_x \odot \text{id}_x) = \text{id}_x \quad (90)$$

Considerando-se uma *teia mórfica totalmente conectada* A , não necessariamente uma *categoria*, e o *morfismo de identidade* $: A : \stackrel{\text{id}_{:A:}}{\rightleftharpoons} : A :$, A pode, também, ser convertida numa *categoria mononodal*, desde que sejam mantidos os *marcadores de fronteira*, ou seja, define-se a *categoria mononodal* $: A :$, convertendo-se o *morfismo de identidade* num *functor de identidade* $: A : \stackrel{\text{id}_{:A:}}{\rightleftharpoons} : A :$ tal que:

$$\text{id}_{:A:} \odot \text{id}_{:A:} = \text{id}_{:A:} \quad (91)$$

$$(\text{id}_{:A:} \odot \text{id}_{:A:}) \odot \text{id}_{:A:} = \text{id}_{:A:} \odot (\text{id}_{:A:} \odot \text{id}_{:A:}) = \text{id}_{:A:} \quad (92)$$

Uma *categoria genérica* \mathcal{X} também pode ser trabalhada enquanto *categoria mononodal*, sempre que \mathcal{X} é considerada na sua totalidade sistêmica, de tal modo que se considera a *categoria mononodal* composta por \mathcal{X} e por um único *functor*, a saber: o *functor de identidade* de \mathcal{X} .

Em termos mais gerais, dada uma qualquer *estrutura sistêmica* \mathcal{N} , considerada enquanto *totalidade sistêmica*, uma tal *estrutura* pode ser trabalhada enquanto *categoria mononodal* desde que se possa identificar um *morfismo de identidade* de \mathcal{N} enquanto *functor de identidade* $\mathcal{N} \stackrel{\text{id}_{\mathcal{N}}}{\rightleftharpoons} \mathcal{N}$, satisfazendo as *equações categoriais de identidade*, a saber:

$$\text{id}_{\mathcal{N}} \odot \text{id}_{\mathcal{N}} = \text{id}_{\mathcal{N}} \quad (93)$$

$$(\text{id}_{\mathcal{N}} \odot \text{id}_{\mathcal{N}}) \odot \text{id}_{\mathcal{N}} = \text{id}_{\mathcal{N}} \odot (\text{id}_{\mathcal{N}} \odot \text{id}_{\mathcal{N}}) \quad (94)$$

No caso de \mathcal{N} ser uma *categoria*, o *functor de identidade* resulta da *estrutura categorial* de \mathcal{N} , no caso de \mathcal{N} não ser uma *categoria*, o *functor de identidade* é tomado como coincidente com o *morfismo de identidade*, com \mathcal{N} trabalhada como se fosse um *ponto mórfico*. Em termos gerais, trabalha-se, assim, com a notação e terminologia *functorial* para as *estruturas nodais*, sendo que, pelo exposto acima, para cada *categoria mononodal* \mathcal{N} , trabalha-se com a totalidade da *estrutura* \mathcal{N} como se fosse um *ponto mórfico*.

Dado que uma *categoria mononodal* \mathcal{N} é trabalhada enquanto *totalidade nodal*, logo assumindo o valor de um *ponto mórfico*, esta pode ser *mórficamente ligada* a uma qualquer outra *categoria mononodal* \mathcal{N}' por um *isomorfismo functorial* definido por um *functor de situs* $\mathcal{N} \stackrel{\iota}{\rightleftarrows} \mathcal{N}'$ tal que:

$$:\mathcal{N} \stackrel{\text{id}_{\mathcal{N}}}{\rightleftarrows} \mathcal{N} : \stackrel{\iota}{\rightleftarrows} : \mathcal{N}' \stackrel{\text{id}_{\mathcal{N}'}}{\rightleftarrows} \mathcal{N}' : \quad (95)$$

$$\iota(\text{id}_{\mathcal{N}} \odot \text{id}_{\mathcal{N}}) = \text{id}_{\iota(\mathcal{N})} \odot \text{id}_{\iota(\mathcal{N})} = \text{id}_{\mathcal{N}'} \odot \text{id}_{\mathcal{N}'} = \text{id}_{\mathcal{N}'} \quad (96)$$

As *categorias mononodais* constituem os alicerces da *topologia categorial*, sendo apreensíveis em termos da linguagem da ciência dos sistemas, a partir de uma noção de *ponto sistémico*.

No contexto da *sistémica hipertextual*, as *categorias mononodais* permitem capturar, em termos matemáticos, uma *propriedade topológica hipertextual* que Lévy designou por *encaixamento de escalas*, referindo-se à *propriedade sistémica* exemplificada pela capacidade organizacional do *hipertexto* para se organizar de um modo *fractal*, tal que cada *nó/ponto sistémico* pode ser composto por uma *rede*, processo, este, que pode ser generalizado a diferentes escalas, de tal modo que, no limite matemático produtor de uma *estrutura hipertextual fractal*, se produz uma *rede* em que cada *nó*, em qualquer escala, é, também, uma *rede* composta por múltiplos *nós* e *arcos* (Lévy, 1990).

No contexto *categorial* das *categorias mononodais*, pode-se considerar como *nó/ponto sistémico* mais elementar o *ponto geométrico*.

De facto, quando se considera, no seio da matemática, a noção geométrica de *ponto*, a mesma noção é necessariamente assumida enquanto referência para um objecto abstracto irreduzível e que, por isso mesmo, pode legitimamente ser referido como *figura monádica* determinada pela sua necessária indivisibilidade, ou seja, a natureza de qualquer *objecto* ou *figura monádica*, seja essa *figura* abstracta ou concreta, é caracterizada pelo facto de não ser constituída por partes, ou *atmoi*. No caso considerado, a *figura monádica* é o *ponto geométrico*.

O *ponto geométrico* pode ser considerado, no seu *topos*, ocupando um *espaço topológico* composto pelo único *situs*, aquele que é ocupado pelo *ponto*. Nesse sentido, a *topologia* do *ponto geométrico* trabalha o *ponto* no seu *topos*.

Em termos *categoriais*, o *ponto geométrico*, no seu *topos*, pode ser denotado pelo símbolo \bullet , e constitui uma *categoria*, assumindo que, dado o *functor de identidade*:

$$\bullet \stackrel{\text{id}_{\bullet}}{\rightleftarrows} \bullet \quad (97)$$

é o caso que:

$$\text{id}_{\bullet} \odot \text{id}_{\bullet} = \text{id}_{\bullet} \quad (98)$$

$$(\text{id}_{\bullet} \odot \text{id}_{\bullet}) \odot \text{id}_{\bullet} = \text{id}_{\bullet} \odot (\text{id}_{\bullet} \odot \text{id}_{\bullet}) \quad (99)$$

Deste modo, assumindo (97), (98) e (99), o *ponto geométrico* pode ser considerado enquanto *categoria mononodal*.

Na *topologia categorial*, a *categoria do ponto geométrico* desempenha um papel central enquanto *origem sistémica topológica*.

Para lidar com o *ponto geométrico*, enquanto *origem sistémica topológica*, é necessário introduzir um *substrato topológico sistémico categorial*, este *substrato* é a *categoria das categorias mononodais*.

4.1.1. A categoria das categorias mononodais – \mathcal{M}_{Nod}

Introduza-se a *categoria das categorias mononodais*, denotada por \mathcal{M}_{Nod} , cujas *estruturas nodais* são as *categorias mononodais* e tal que quaisquer duas *estruturas nodais* se encontram *ligadas* por *isomorfismos* dados pelos *functores de situs* (obedecendo às condições genéricas (95) e (96)), sendo que a *composição* de dois *functores de situs*, numa *cadeia-2*, conduz a uma *composição algébrica dos fundamentos*, em que o *fundamento* do *functor composto* que *liga* a primeira *estrutura nodal* da *cadeia* à última é o *functor de situs* da primeira *estrutura nodal* para a última.

Os *morfismos functoriais* da *categoria* \mathcal{M}_{Nod} podem ser apreendidos a partir de uma *estrutura tensorial*. Neste caso, é útil utilizar uma notação em letras gregas para as *categorias mononodais*, assim, em vez da notação \mathcal{N} , \mathcal{N}' e \mathcal{N}'' , utiliza-se a notação $\mu, \nu, \gamma, \mu', \nu', \gamma', \dots$, para denotar as *categorias mononodais*.

Sejam, então, μ e ν duas *estruturas nodais* (*categorias mononodais*) de \mathcal{M}_{Nod} , um *functor de situs* de μ para ν é tal que a *ligação* entre as duas *categorias mononodais* pode ser expressa a partir de uma *notação tensorial*:

$$\mu \overset{\iota_{\mu}^{\nu}}{\rightleftarrows} \nu \quad (100)$$

tal que, no *fundamento*, o índice inferior corresponde ao índice da *origem* e o superior corresponde ao índice do *alvo*, assim, ι_{μ}^{ν} denota o *fundamento* do *functor de situs* de μ para ν . Desta notação, e devido ao facto de que (100) constitui um *isomorfismo*, resulta que o *functor inverso* é dado por:

$$\nu \overset{\iota_{\nu}^{\mu}}{\rightleftarrows} \mu \quad (101)$$

Dada a expressão *tensorial*, a investigação acerca das propriedades destes *functores* torna-se mais simplificada pelo uso de uma *álgebra tensorial*, assim, o *functor* (100) é tal que temos, para os *objectos*, a *transformação tensorial* expressa pela seguinte *equação tensorial*:

$$\nu = \iota_{\mu}^{\nu} \mu \quad (102)$$

Ou seja, a *transformação tensorial* expressa um *functor de situs* em termos de um *movimento* da *origem* μ para o *alvo* ν (noção de *morfismo*) coincidente com um *processo sistémico* de *rotatividade projectiva* de μ para ν (regressaremos a esta noção mais adiante).

Estando a lidar-se com *categorias mononodais*, torna-se necessário conhecer a *equação tensorial* para os *functores de identidade*.

Para uma qualquer *categoria mononodal* γ de \mathcal{M}_{Nod} o *functor de identidade* é, também, apreensível a partir de uma *equação tensorial*, a saber:

$$\gamma = \iota_\gamma^\gamma \gamma \quad (103)$$

logo, temos:

$$\begin{array}{c} \iota_\gamma^\gamma \\ \gamma \rightleftharpoons \gamma \end{array} \quad (104)$$

pelo que, para as *categorias* em (100), temos:

$$\begin{array}{c} \iota_\mu^\mu \\ \mu \rightleftharpoons \mu \end{array} \quad (105)$$

$$\begin{array}{c} \iota_\nu^\nu \\ \nu \rightleftharpoons \nu \end{array} \quad (106)$$

Com a extensão da *notação tensorial* para os *functores de identidade*, segue-se que toda a *estrutura mórfrica* de \mathcal{M}_{Nod} é eficazmente capturável a partir dos *functores de situs*.

Sendo assim, a *composição algébrica de fundamentos functoriais* é dada por um *produto tensorial à esquerda*³³, tal que para uma *cadeia-2*:

$$\begin{array}{c} \iota_\mu^\nu \quad \iota_\nu^\gamma \\ \mu \rightleftharpoons \nu \rightleftharpoons \gamma \end{array} \quad (107)$$

temos a *equação tensorial*:

$$\iota_\mu^\gamma = \iota_\nu^\gamma \iota_\mu^\nu \quad (108)$$

ou seja, da *composição* resulta o *functor de situs* de μ para γ .

A *composição algébrica dos fundamentos* encontra-se, assim, em concordância com uma *regra de produto tensorial à esquerda*.

Sendo assim, a natureza *categorial* de \mathcal{M}_{Nod} impõe a associatividade, ou seja:

$$\iota_\gamma^x (\iota_\nu^\gamma \iota_\mu^\nu) = (\iota_\gamma^x \iota_\nu^\gamma) \iota_\mu^\nu \quad (109)$$

o que é o caso dado (108). De facto, considere-se cada um dos termos de (109) e aplique-se (108):

$$\iota_\gamma^x (\iota_\nu^\gamma \iota_\mu^\nu) = \iota_\gamma^x \iota_\mu^\nu = \iota_\mu^x \quad (110)$$

$$(\iota_\gamma^x \iota_\nu^\gamma) \iota_\mu^\nu = \iota_\nu^x \iota_\mu^\nu = \iota_\mu^x \quad (111)$$

33. O que corresponde à expressão algébrica usual da *composição* e está de acordo com a natureza dos *functores de situs*.

logo (109) é verdadeira.

Dadas estas correspondências *tensoriais*, importa considerar a correspondente *equação tensorial* para a transformação dos *functores de identidade*. Os *functores de identidade* para μ e para ν , em (100), têm como *equações tensoriais* correspondentes, respectivamente:

$$\mu = \iota_\mu^\mu \mu \quad (112)$$

$$\nu = \iota_\nu^\nu \nu \quad (113)$$

De (102), (112) e (113) segue-se, imediatamente, que:

$$\iota_\mu^\nu (\iota_\mu^\mu \mu) = \iota_\nu^\nu \nu \quad (114)$$

logo, temos, para a *teia mórfica* correspondente a (95), uma *teia mórfica com notação tensorial*:

$$\begin{array}{c} \iota_\mu^\mu \\ \vdots \end{array} \mu \rightrightarrows \mu \begin{array}{c} \iota_\mu^\nu \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \iota_\nu^\nu \\ \vdots \end{array} \nu \rightrightarrows \nu \begin{array}{c} \iota_\nu^\nu \\ \vdots \end{array} \quad (115)$$

Relativamente à *equação algébrica* (96), esta pode ser obtida a partir de um desenvolvimento da derivação de (114). De facto, a *equação tensorial* (114) pode ser obtida utilizando (102), (112) e (113), conduzindo aos seguintes passos:

1. $\iota_\mu^\nu (\iota_\mu^\mu \mu)$;
2. $\iota_\mu^\nu (\iota_\mu^\mu \mu) = \iota_\mu^\nu \mu$ (aplicando (112));
3. $\iota_\mu^\nu (\iota_\mu^\mu \mu) = \iota_\mu^\nu \mu = \nu$ (aplicando (102));
4. $\iota_\mu^\nu (\iota_\mu^\mu \mu) = \iota_\mu^\nu \mu = \nu = \iota_\nu^\nu \nu$ (aplicando (113)).

Alternativamente, o resultado pode ser derivado da seguinte forma:

1. $\iota_\mu^\nu (\iota_\mu^\mu \mu)$;
2. $\iota_\mu^\nu ((\iota_\nu^\mu \iota_\mu^\nu) \mu)$ (aplicando (108));
3. $\iota_\mu^\nu (\iota_\nu^\mu (\iota_\mu^\nu \mu))$ (aplicando (109));
4. $\iota_\mu^\nu (\iota_\nu^\mu \nu)$ (aplicando (102));
5. $(\iota_\mu^\nu \iota_\nu^\mu) \nu$ (aplicando (109));
6. $\iota_\nu^\nu \nu$ (aplicando (108)).

Nesta derivação formal, utilizando o *cálculo tensorial*, resultante do *cálculo categorial* dos *functores de situs* em \mathcal{M}_{Nod} , é tornado explícito o *processo tensorial* relativo à *identidade* resultante do *functor de situs*.

De facto, começamos por ter a *igualdade tensorial* correspondente ao *functor de identidade* de μ , a saber: $\mu = \iota_\mu^\mu \mu$. O *functor* actua, então, sobre ambos os lados da *equação tensorial*:

$$\iota_\mu^\nu \mu = \iota_\mu^\nu (\iota_\mu^\mu \mu) \quad (116)$$

por seu turno, o *fundamento* do *functor de identidade* é decomponível no produto $\iota_\nu^\mu \iota_\mu^\nu$ tal que resulta:

$$\iota_\mu^\nu \mu = (\iota_\mu^\nu \iota_\nu^\mu) (\iota_\mu^\nu \mu) \quad (117)$$

conduzindo à *igualdade tensorial* correspondente ao *functor de identidade* de ν .

O significado *categorial* de (117) torna-se explícito quando se considera a expressão alternativa para o lado direito de (117): $\iota_\mu^\nu (\iota_\nu^\mu (\iota_\mu^\nu \mu))$. Esta expressão sintetiza em termos *tensoriais* o *processo sistémico mórfico* das *duplas setas*, pois o *processo sistémico mórfico* segue primeiro o caminho do *functor de situs* de μ para ν (termo $\iota_\mu^\nu \mu$), resultando em $\iota_\mu^\nu (\iota_\nu^\mu \nu)$, depois, o *processo sistémico mórfico* regressa a μ (termo $\iota_\nu^\mu \nu$), resultando em $\iota_\mu^\nu \mu$, para finalmente regressar a ν , o que resulta de $\iota_\mu^\nu \mu$.

O primeiro movimento de μ para ν pode ser interpretado como o *processo sistémico* definido pela *seta da origem* que segue de μ para ν , o movimento seguinte do *alvo* para a *origem* (de ν para μ) pode ser interpretado como o *processo sistémico* definido pela *seta do alvo* para a *origem* expressando a resposta do *alvo*, enquanto *alvo*. O terceiro movimento é, de novo, da *origem* para o *alvo* sendo o resultado da direccionalidade do *morfismo* (neste caso um *functor de situs*) que segue da *origem* μ para o *alvo* ν .

Regressando a (96), segue-se, dos resultados acima, que a *igualdade tensorial* correspondente a (96) é dada pela *equação tensorial*:

$$\iota_\mu^\nu ((\iota_\mu^\mu \iota_\mu^\mu) \mu) = (\iota_\nu^\nu \iota_\nu^\nu) \nu \quad (118)$$

que pode ser demonstrada como verdadeira, pois temos:

$$\begin{aligned} & \iota_\mu^\nu ((\iota_\mu^\mu \iota_\mu^\mu) \mu) = \\ & = \iota_\mu^\nu ((\iota_\nu^\mu \iota_\mu^\nu) (\iota_\nu^\mu \iota_\mu^\nu) \mu) = \\ & = (\iota_\mu^\nu (\iota_\nu^\mu \iota_\mu^\nu) \iota_\mu^\mu) (\iota_\mu^\nu \mu) = \\ & = ((\iota_\mu^\nu \iota_\nu^\mu) (\iota_\mu^\nu \iota_\nu^\mu)) (\iota_\mu^\nu \mu) = \\ & = (\iota_\nu^\nu \iota_\nu^\nu) (\iota_\mu^\nu \mu) = (\iota_\nu^\nu \iota_\nu^\nu) \nu \end{aligned} \quad (119)$$

o que demonstra (118).

A *transformação tensorial* permite explicitar algebricamente o *processo sistémico* de *rotatividade projectiva*³⁴ do *functor de situs*.

Um *morfismo*, tal como este é trabalhado em \mathcal{L}_{Cat} , estabelece uma *conectividade projectiva* segundo o *sentido* (da *origem* para o *alvo*) em que duas *estruturas sistémicas*, na sua *rotatividade sistémica*, são *conectadas*, tal que a *origem* se dirige para o *alvo*, enquanto *origem*, e o *alvo* dirige-se para a *origem* enquanto *alvo*, o que introduz uma *rotatividade* no próprio *movimento projectivo*, a *origem* conecta-se com o *alvo*, enquanto *origem*, e o *alvo* responde à *origem*, enquanto *alvo*, completando o *ciclo*. Este processo encontra-se explicitado em (117) para o *functor de situs* entre duas *categorias monodais*.

Por seu turno, ι'_μ pode ser lido em termos desta *rotatividade projectiva*, tal que o índice inferior sinaliza a *origem*, na sua *rotatividade sistémica*, e o índice superior sinaliza o *alvo*, na sua *rotatividade sistémica*, sendo ι'_μ o *fundamento* da *ligação projectiva* entre *origem* e *alvo*.

O *ponto geométrico* é uma das *estruturas nodais* de \mathcal{M}_{Nod} , tendo em conta este facto, podemos, agora, trabalhar a noção de *ponto geométrico* enquanto *origem sistémica topológica*.

4.1.2. O *ponto geométrico* enquanto *origem sistémica topológica*

Para cada *categoria monodual* μ existe um, e apenas um, *functor de situs* tal que:

$$\bullet \xrightleftharpoons{\iota'_\mu} \mu \quad (120)$$

o que significa que o *ponto geométrico* é um *ponto sistémico inicial* de \mathcal{M}_{Nod} , por seu turno, sendo $\bullet \xrightleftharpoons{\iota'_\mu} \mu$ um *isomorfismo*, o seu inverso é dado por:

$$\mu \xrightleftharpoons{\iota_\mu} \bullet \quad (121)$$

logo, existe um, e um e apenas um, *functor de situs a ligar*, enquanto *origem*, cada *categoria monodual* μ ao *ponto geométrico*, enquanto *alvo*, deste modo, o *ponto geométrico* é, também, um *ponto sistémico terminal* de \mathcal{M}_{Nod} . Assim, o *ponto geométrico* é um *ponto sistémico inicial* e um *ponto sistémico terminal* de \mathcal{M}_{Nod} .

O mesmo é o caso para qualquer outro *ponto sistémico* desta *categoria*, contudo, o *ponto geométrico* tem uma natureza *monádica*, sendo, por isso, destacado enquanto *estrutura topológica*.

34. A *rotatividade projectiva* é, no seio da ciência dos sistemas, assumida na noção de identidade sistémica ao nível dos mecanismos ontológicos de projectividade, intrínsecos aos sistemas, sinalizados ao nível das eficácias que actuam nos efeitos, e postulados ao nível das causas, como capacidades formativas que actuam na preservação da integridade dos sistemas em *interface* de sobrevivência (Madeira, 2010a; 2010b).

Considerando a *categorização da teoria dos conjuntos*, a categoria \mathcal{M}_{Nod} permite trabalhar esta última num contexto categorial distinto das *teias mórficas de exemplificação* apresentadas anteriormente. Embora a natureza *intensional* da teoria seja mantida, trata-se de uma teoria distinta, trabalhada, desde a base, a partir de noções topológicas.

Em \mathcal{M}_{Nod} , os *conjuntos* são, enquanto *categorias de categorias*, construídos a partir do *ponto geométrico* que é *morficamente ligado*, enquanto *origem*, a diferentes *pontos sistémicos/categorias* de \mathcal{M}_{Nod} , a partir dos *functores de situs*, sendo cada *ponto sistémico/categoria*, por seu turno, *morficamente ligado*, enquanto *origem*, a um *ponto sistémico/categoria* denotando a *propriedade* definidora do *conjunto*.

Assim, considere-se a *propriedade de ser um número real*, que denotamos por \mathbb{R} , a *categoria* correspondente construída em \mathcal{M}_{Nod} , denotada por $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$, é *composta* pelas *categorias monodais* x satisfazendo:

$$\bullet \begin{matrix} \iota_{\bullet}^x \\ \rightleftarrows x \\ \leftleftarrows \mathbb{R} \end{matrix} \begin{matrix} \iota_x^{\mathbb{R}} \\ \rightleftarrows \\ \leftleftarrows \end{matrix} \mathbb{R} \quad (122)$$

utilizando o *produto tensorial* temos, então:

$$\iota_{\bullet}^{\mathbb{R}} = \iota_x^{\mathbb{R}} \iota_{\bullet}^x \quad (123)$$

As parcelas em (123), ι_{\bullet}^x e $\iota_x^{\mathbb{R}}$ não são *fundamentos de ligações mórficas de exemplificação* mas, sim, *ligações de origem sistémica a alvo sistémico* dadas por *functores de situs*.

Ou seja, x *exemplifica* \mathbb{R} porque se encontra na sua *origem sistémica* em $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. A *propriedade* de ser um *número real* resulta, assim, de uma *sincronização rotativa projectiva* de cada x sobre uma *propriedade sistémica* \mathbb{R} que caracteriza os *números reais* enquanto *sistema*.

Seguindo (122), a estrutura $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ resulta de um processo de *rotatividade projectiva sistémica* tal que cada *número* encontra-se conectado ao *ponto geométrico originante* por um *movimento rotativo projectivo* e, por seu turno, a *propriedade sistémica emergente* que caracteriza o sistema dos *números reais*, encontra-se conectada com cada *número real* num processo *sincronizado de rotatividade projectiva*.

Em termos *categoriais*, esta *rotatividade projectiva* pode ser caracterizada a partir das noções de *cone sobre uma categoria* e de *cone sob uma categoria*.

Para uma *categoria genérica*, a noção de *cone* pode ser introduzida considerando \mathcal{W} como uma *categoria* composta por *estruturas nodais* W_i , com $i = 1, 2, \dots$, então, um *cone sobre* \mathcal{W} é definido como uma *estrutura mórfica* do género $W_0 \begin{matrix} \xrightarrow{f_i} \\ \rightleftarrows \\ \xrightarrow{g} \end{matrix} W_i$, tal que, para cada $W_i \begin{matrix} \xrightarrow{g} \\ \rightleftarrows \\ \xrightarrow{f_j} \end{matrix} W_j$, a seguinte *teia mórfica comuta*:

$$\begin{array}{ccc} W_0 & \begin{matrix} \xrightarrow{\text{id}_{W_0}} \\ \rightleftarrows \\ \xrightarrow{f_i} \end{matrix} & W_0 \\ \uparrow \downarrow f_i & & \uparrow \downarrow f_j \\ W_i & \begin{matrix} \xrightarrow{g} \\ \rightleftarrows \\ \xrightarrow{f_j} \end{matrix} & W_j \end{array} \quad (124)$$

ou seja, os dois percursos de W_0 a W_j apresentam uma *igualdade algébrica de fundamentos após composição*, isto é:

$$f_j = g \circ f_i \quad (125)$$

A *estrutura nodal* W_0 é designada por *vértice do cone*.

Por seu turno, um *cone sob* \mathcal{W} é definido como uma *estrutura mórfica* do género $W_i \xrightleftharpoons{f_i} W_0$, tal que, para cada $W_i \xrightleftharpoons{g} W_j$, a seguinte *teia mórfica comuta*:

$$\begin{array}{ccc} W_i & \xrightleftharpoons{g} & W_j \\ \uparrow \downarrow f_i & & \uparrow \downarrow f_j \\ W_0 & \xrightleftharpoons{\text{id}_{W_0}} & W_0 \end{array} \quad (126)$$

ou seja:

$$f_i = f_j \circ g \quad (127)$$

Assim, para um *cone sobre* uma dada *categoria*, o *vértice* ocupa um *situs* enquanto *origem*, enquanto que para um *cone sob* uma dada *categoria* o *vértice* ocupa um *situs* enquanto *alvo*.

Esta noção pode ser generalizada ao caso de *categorias de categorias* substituindo a notação dos *morfismos* intra-categoriais por *functores*.

Em (122), o *ponto geométrico* ocupa o *situs* de *vértice* de um *cone sobre* (*situs de origem*) a *categoria* $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ enquanto que \mathbb{R} ocupa o *situs* de *vértice sob* (*situs de alvo*) a *categoria* $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$. O que explica a posição de \bullet enquanto *estrutura originante* e de \mathbb{R} enquanto *propriedade sistémica emergente* a partir de uma *rotatividade projectiva sincronizada* do sistema de *categorias monodais* que compõe $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$.

O exemplo de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ pode ser generalizado para uma qualquer *subcategoria* de \mathcal{M}_{Nod} cujas *estruturas nodais* μ satisfazem a *teia mórfica*:

$$\bullet \xrightleftharpoons{\iota_{\bullet}^{\mu}} \mu \xrightleftharpoons{\iota_{\mu}^{\mathbb{P}}} \mathbb{P} \quad (128)$$

em que \mathbb{P} é uma *propriedade sistémica*, emergente a partir de uma *rotatividade projectiva sincronizada* do sistema de *categorias monodais* que compõem a *subcategoria*, denotamos uma tal *subcategoria* de \mathcal{M}_{Nod} por $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$.

Nestas *estruturas sistémicas*, o *ponto geométrico* desempenha um papel de *origem sistémica topológica*, pois, encontra-se num *cone sobre* $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$.

Cada *estrutura nodal*, com o seu *topos sistémico*, que compõe $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ pode, deste modo, ser trabalhada a partir da *rotatividade projectiva* do *ponto geométrico*.

Estas *estruturas sistêmicas categoriais* permitem trabalhar uma noção categorial de *espaço topológico*, em que a noção de *topologia* é trabalhada a partir da sua raiz primitiva em *topos*. Neste contexto, as estruturas de conjuntos abertos perdem relevância sistêmica, facto que será retomado na próxima secção.

Passamos, assim, a investigar a *natureza topológica sistêmica* das *categorias*.

4.2. Os espaços de adjacência isomórfica universal, os morfismos e as categorias

Seja $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ uma *subcategoria* de \mathcal{M}_{Nod} , cujas *estruturas nodais* μ satisfazem a *condição categorial* (128). Neste contexto, $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ pode ser abordado como um *conjunto*, pois as *estruturas nodais* de $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ formam sistema fazendo emergir uma *propriedade sistêmica* com a qual sincronizam, logo, sincronizando, também, na exemplificação dessa mesma *propriedade* definidora do *conjunto* na sua *intensão*.

Por outro lado, $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ pode também ser considerado enquanto *espaço topológico*, isto é, enquanto *organização sistêmica* de *estruturas nodais* com os seus *topoi*. É esta natureza topológica que importa considerar em maior detalhe.

4.2.1. Os espaços de adjacência isomórfica universal

Considerando $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ enquanto *espaço topológico*, as suas *estruturas nodais* são designadas por *pontos do espaço*, podendo, neste caso, aplicar-se a noção de *ponto sistêmico*.

A *categoria* $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ pode ser considerada enquanto *espaço topológico*, pois o *espaço* e a *categoria* têm uma coincidência sistêmica, isto é, o *espaço* $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ tem uma natureza *categorial*, logo, pode ser considerado, nessa sua natureza, enquanto *categoria*.

Quando se considera $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$, na sua natureza *categorial*, está-se, desde logo, a considerar o *espaço* na sua *natureza sistêmica* e *topológica*.

No seu *topos*, $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ *projecta-se*, segundo *functores de situs*, sobre cada uma das suas *estruturas nodais*, que constituem *pontos sistêmicos* de $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$, estes *functores de situs* são tais que, para um qualquer *ponto sistêmico* μ de $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$:

$$\mathcal{M}_{\mathbb{P}} \overset{\iota_{\mu}}{\rightleftarrows} \mu \quad (129)$$

com ι_{μ} tal que:

$$\iota_{\mu}(\nu) = \mu \quad (130)$$

$$\iota_{\mu}(\iota_{\nu}^{\nu}) = \iota_{\mu}^{\mu} \quad (131)$$

$$\iota_{\mu}(\iota_{\nu}^{\gamma}) = \iota_{\mu}^{\mu} \quad (132)$$

$$\iota_{\mu}(\iota_{\gamma}^{\nu} \gamma_{\nu}^{\gamma}) = \iota_{\mu}^{\mu} \iota_{\mu}^{\mu} = \iota_{\mu}^{\mu} \quad (133)$$

em que ν e γ são *pontos sistémicos* de $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$.

A condição (130) garante a *regra de situs* (\mathbf{FS}_1), a condição (131) garante a *regra para a identidade* (\mathbf{FS}_2), a condição (132) garante a *regra para morfismos entre componentes mórficas* (\mathbf{FS}_3), e, em conjunto, as quatro condições satisfazem as *regras algébricas* (\mathbf{FS}_4), o que está de acordo com a natureza de (120), enquanto *functor de situs*. Trata-se, neste caso, de uma *projectção* do *espaço* $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ sobre um dos seus *pontos sistémicos*.

O *espaço* $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ é um *sistema* e cada um dos *pontos sistémicos* de $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ são *componentes sistémicas nodais*, ou seja, *estruturas sistémicas nodais*, cada uma com o seu *topos*. O *functor de situs* $\mathcal{M}_{\mathbb{P}} \xrightleftharpoons{\iota_{\mu}} \mu$ *liga*, então, o *espaço* $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$, no seu *topos*, a um dos *pontos sistémicos*, no seu *topos*.

Esta *ligação projectiva* introduz uma estrutura peculiar de *cone categorial*, como passamos a relevar. Dado um qualquer *morfismo functorial* $\mu \xrightleftharpoons{\iota_{\mu}^{\nu}} \nu$ de $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$, é o caso que:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{P}} & \xrightleftharpoons{\text{id}_{\mathcal{M}_{\mathbb{P}}}} & \mathcal{M}_{\mathbb{P}} \\ \downarrow \iota_{\mu} & & \downarrow \iota_{\nu} \\ \mu & \xrightleftharpoons{\iota_{\mu}^{\nu}} & \nu \end{array} \quad (134)$$

o que significa que $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ é um *vértice* de um *cone sobre* $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$, o que introduz uma *volta estranha*³⁵ que caracteriza $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ enquanto *totalidade sistémica*. A *auto-referência sistémica*, característica da natureza *projectiva auto-referente* dos sistemas enquanto *individuações sistémicas* (Madeira, 2010a; 2010b), pode ser explicitamente e consistentemente formalizada, no seio do *cálculo categorial*, o que é expectável dada a base sistémica deste *cálculo*.

O resultado (134) é aplicável quer para *espaços* $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$, com *múltiplas componentes nodais*, quer para estruturas *mononodais*, de facto, dada uma qualquer *categoria monnodal*, é o caso que:

$$\begin{array}{ccc} \mu & \xrightleftharpoons{\iota_{\mu}^{\mu}} & \mu \\ \downarrow \iota_{\mu} & & \downarrow \iota_{\mu} \\ \mu & \xrightleftharpoons{\iota_{\mu}^{\mu}} & \mu \end{array} \quad (135)$$

ou seja, a *categoria monnodal* μ é, também, um *vértice* de um *cone categorial sobre* μ . Estes *cones categoriais auto-referenciais*, resultantes da *projectividade auto-referencial sistémica*, são designados por *cones projectivos auto-referenciais*.

35. Uma *volta estranha* é um *círculo de feedback*, estando ligada à *identidade sistémica*, enquanto *dinâmica disposicional rotativa auto-computável*, na qual o sistema se dobra sobre si, sem sair de si, mantendo a integridade sistémica constituinte e constitutiva (Hofstadter, [1999], 2000; 2007; Madeira, 2010b).

Os *cones projectivos auto-referenciais* permitem apreender, em termos matemáticos e sistémicos, a *natureza topológica* de um *espaço* $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$. Um *espaço* $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ diz-se, então, *topológico* porque constitui uma *totalidade sistémica individuada*, com o seu *topos*, emergente a partir um processo de *organização bottom-up* resultante das *ligações mórficas functoriais projectivas* entre uma *multiplicidade de estruturas mononodais* com os seus *topos*.

Os *espaços topológicos* $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ são *subcategorias* de \mathcal{M}_{Nod} e a sua *estrutura topológica* é primitiva em relação a *estruturas de ordenação e métrica*, pois, em termos matemáticos, os *espaços* $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ têm uma *estrutura de vizinhança*, estruturada a partir da sua *natureza categorial conectiva*, assim, a partir da noção de *adjacência na teia mórfica*, a qual, no caso dos *espaços* $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$, é dada pelos *functores de situs*, quaisquer dois *pontos* são *vizinhos* na *teia mórfica* subjacente a $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$, pois, podem ser *ligados* pelos *functores de situs*, por outro lado, devido ao facto desta *ligação* ser dada por um *isomorfismo functorial*, dados quaisquer dois *pontos sistémicos* μ e ν do *espaço* $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ podem ser considerados *dois triângulos functoriais*, a saber:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{P}} & \overset{\text{id}_{\mathcal{M}_{\mathbb{P}}}}{\rightleftarrows} & \mathcal{M}_{\mathbb{P}} \\ \uparrow \wr_{\mu} & & \uparrow \wr_{\nu} \\ \mu & \overset{\wr_{\mu}^{\nu}}{\rightleftarrows} & \nu \end{array} \quad (136)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{P}} & \overset{\text{id}_{\mathcal{M}_{\mathbb{P}}}}{\rightleftarrows} & \mathcal{M}_{\mathbb{P}} \\ \uparrow \wr_{\mu} & & \uparrow \wr_{\nu} \\ \mu & \overset{\wr_{\nu}^{\mu}}{\rightleftarrows} & \nu \end{array} \quad (137)$$

Os dois *triângulos* podem ser sintetizados num só, se se introduzir um arco não-orientado, indicando que a *ligação functorial* pode ser percorrida nas duas direcções, assim, temos:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{P}} & \overset{\text{id}_{\mathcal{M}_{\mathbb{P}}}}{\rightleftarrows} & \mathcal{M}_{\mathbb{P}} \\ \uparrow \wr_{\mu} & & \uparrow \wr_{\nu} \\ \mu & \text{———} & \nu \end{array} \quad (138)$$

em que o arco ‘———’ denota um *arco functorial de situs* que de μ para ν é percorrido segundo o *functor de situs* $\mu \overset{\wr_{\mu}^{\nu}}{\rightrightarrows} \nu$ e de ν para μ é percorrido segundo o *functor de situs* $\nu \overset{\wr_{\nu}^{\mu}}{\rightrightarrows} \mu$. Por seu turno, para o caso da *identidade* $\mu \overset{\wr_{\mu}^{\mu}}{\rightrightarrows} \mu$ temos:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{P}} & \overset{\text{id}_{\mathcal{M}_{\mathbb{P}}}}{\rightleftarrows} & \mathcal{M}_{\mathbb{P}} \\ \uparrow \wr_{\mu} & & \uparrow \wr_{\mu} \\ \mu & \text{———} & \mu \end{array} \quad (139)$$

Deste modo, o *cone auto-referente* para $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ pode ser expresso a partir da condição geral (138) (de que (139) é um caso particular), satisfeita para cada par de *pontos sistémicos* de $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$.

A *teia m3rfica* subjacente a $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ pode, assim, ser apreendida enquanto um *grafo*, no qual cada par de *n3s* se encontram *ligados*, pelo que designamos, os espa3os $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$, por *espa3os de adjac3ncia isom3rfica universal*, adjectivando-se de *isom3rfica* a *adjac3ncia*, pois cada *liga33o* no *grafo* sintetiza uma dupla liga33o segundo os *isomorfismos* definidos pelos dois *functores de situs* que *ligam* quaisquer duas *categorias mononodais* em \mathcal{M}_{Nod} (e, logo, em $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$).

De entre os *espa3os de adjac3ncia isom3rfica universal*, as *categorias mononodais* constituem os mais elementares. Assim, para cada *categoria monnodal* temos o *cone auto-referencial*:

$$\begin{array}{ccc} \mu & \text{---} & \mu \\ \uparrow \downarrow_{\iota_{\mu}} & & \uparrow \downarrow_{\iota_{\mu}} \\ \mu & \text{---} & \mu \end{array} \quad (140)$$

Por seu turno, para o *ponto geom3trico*, temos o *cone auto-referencial*:

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \text{---} & \bullet \\ \uparrow \downarrow_{\iota_{\bullet}} & & \uparrow \downarrow_{\iota_{\bullet}} \\ \bullet & \text{---} & \bullet \end{array} \quad (141)$$

As *categorias monnodais* μ e \bullet encontram-se, em \mathcal{M}_{Nod} , *morficamente ligadas* pelos *functores de situs* $\bullet \xrightleftharpoons{\iota_{\bullet}^{\mu}} \mu$ e $\mu \xrightleftharpoons{\iota_{\mu}^{\bullet}} \bullet$, logo, podem ser ligadas por um *arco functorial de situs*, isto 3:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \xrightleftharpoons{\iota_{\bullet}^{\mu}} \mu \\ \mu \xrightleftharpoons{\iota_{\mu}^{\bullet}} \bullet \end{array} \right\} \bullet \text{---} \mu \quad (142)$$

Assim, para cada par de *estruturas monnodais* μ, ν de $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ temos a *estrutura m3rfica functorial*:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{P}} & \text{---} & \mathcal{M}_{\mathbb{P}} \\ \uparrow \downarrow_{\iota_{\mu}} & & \uparrow \downarrow_{\iota_{\nu}} \\ \mu & \text{---} & \nu \\ | & & | \\ \bullet & \text{---} & \bullet \\ \downarrow \uparrow_{\iota_{\bullet}} & & \downarrow \uparrow_{\iota_{\bullet}} \\ \bullet & \text{---} & \bullet \end{array} \quad (143)$$

Deste modo, considerando todos os *pares* de *estruturas monnodais* de $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ (incluindo os pares constitu3dos pela mesma estrutura μ, μ) (140) define uma estrutura de quatro *cones*: por um lado, temos um *cone sob* e um *cone sobre* $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ com v3rtice \bullet , por outro lado, temos o *cone auto-referencial* de $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$ e o *cone auto-referencial* de \bullet . Os dois primeiros *cones* podem ser trabalhados, como um 3nico *cone functorial* de v3rtice \bullet , utilizando a notac33o do *arco functorial de situs*, notac33o, esta, que 3 utilizada em (143).

Podemos ir mais longe, e introduzir \mathbb{P} , enquanto *propriedade emergente*, e *categoria monoidal*, de onde resulta a estrutura sistémica final para o *espaço* $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{P} & \xrightleftharpoons{\iota_{\mathbb{P}}} & \mathcal{M}_{\mathbb{P}} & \text{---} & \mathcal{M}_{\mathbb{P}} & \xleftarrow{\iota_{\mathbb{P}}} & \mathbb{P} \\
 | & & \uparrow \downarrow_{\iota_{\mu}} & & \uparrow \downarrow_{\iota_{\nu}} & & | \\
 \mathbb{P} & \text{---} & \mu & \text{---} & \nu & \text{---} & \mathbb{P} \\
 | & & | & & | & & | \\
 \mathbb{P} & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \mathbb{P} \\
 & & \downarrow \downarrow_{\iota_{\bullet}} & & \downarrow \downarrow_{\iota_{\bullet}} & & \\
 & & \bullet & \text{---} & \bullet & &
 \end{array} \tag{144}$$

A partir desta *estrutura*, é possível trabalhar o processo gerador do *espaço* $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$.

Em termos fundamentais, a *base sistémica originante* encontra-se na parte inferior do diagrama em T nas *teias mórnicas functoriais*:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{P} & \text{---} & \mu & \text{---} & \nu & \text{---} & \mathbb{P} \\
 | & & | & & | & & | \\
 \mathbb{P} & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \mathbb{P} \\
 & & \downarrow \downarrow_{\iota_{\bullet}} & & \downarrow \downarrow_{\iota_{\bullet}} & & \\
 & & \bullet & \text{---} & \bullet & &
 \end{array} \tag{145}$$

Este segundo diagrama em T sintetiza a *topogénese sistémica* do *espaço* $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$. De facto, considere-se cada *ponto sistémico* μ do *espaço* $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$, temos:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{P} & \text{---} & \mu & \text{---} & \mu & \text{---} & \mathbb{P} \\
 | & & | & & | & & | \\
 \mathbb{P} & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \mathbb{P} \\
 & & \downarrow \downarrow_{\iota_{\bullet}} & & \downarrow \downarrow_{\iota_{\bullet}} & & \\
 & & \bullet & \text{---} & \bullet & &
 \end{array} \tag{146}$$

Esta estrutura em T pode, por seu turno, ser simplificada, sem perda de informação sistémica (pois a *volta estranha* é indissociável da rotatividade sistémica de cada *ponto sistémico*, com o seu *topos* (Madeira, 2010b)), assim de (146) resulta, para cada *ponto sistémico* μ de $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$:

$$\begin{array}{c}
 \bullet \text{---} \mu \\
 \backslash \quad / \\
 \mathbb{P}
 \end{array} \tag{147}$$

A *teia mórnic functorial* composta por estes *triângulos mórnicos*, obtidos para cada *ponto sistémico* de $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$, permite explicitar a *natureza sistémica* de \bullet e \mathbb{P} , no sistema de *pontos sistémicos* de $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$, a saber: são dois *pontos de sincronização global*, tais que cada *ponto sistémico* do sistema se encontra *morficamente ligado* e *sistemicamente sincronizado* com os mesmos, trata-se, assim, de *hubs centrais*.

Em termos fundamentais, o *risco*, nos sistemas, pode ser sinalizado a partir de *pontos de sincronização global*, tal que uma *ameaça* à integridade sistêmica é primitivamente matematizável em termos de uma relação entre sistema e meio em que a *totalidade sistêmica* se encontra sincronizada com a *ameaça* num *ponto crítico evolucionário*, tratando-se, na topologia sistêmica da situação de risco, de um *ponto crítico de sincronização global*. A sobrevivência do sistema depende, assim, da computação adaptativa do *ponto crítico evolucionário*.

Madeira e Gonçalves (2009) demonstraram que dois sistemas dinâmicos não-lineares desacoplados, num regime dinâmico de caos, podem *espontaneamente* sincronizar, emergindo uma dinâmica com uma estrutura de atractor que reflecte a *estrutura não-linear* da regra dinâmica de base, logo, produzindo um *ponto crítico de sincronização* em cada *iteração*.

A teorização dos *pontos críticos evolucionários*, enquanto *pontos de sincronização global* torna-se central, quando se trabalha, no seio da matemática do risco, com o *caos* em *sistemas dinâmicos não-lineares acoplados*.

Regressando à *teia mórfica functorial* (147), importa considerar a *cadeia mórfica functorial*:

$$\bullet \text{---} \mu \text{---} \mathbb{P} \quad (148)$$

Dado o *arco functorial de situs*, esta *cadeia* pode ser trabalhada a partir de duas *cadeias*, a saber:

$$\bullet \begin{matrix} \iota_{\bullet}^{\mu} \\ \rightleftarrows \\ \mu \rightleftarrows \mathbb{P} \end{matrix} \quad (149)$$

que vai do *ponto geométrico originante* para μ e para a *propriedade emergente*, e

$$\mathbb{P} \begin{matrix} \iota_{\mathbb{P}}^{\mu} \\ \rightleftarrows \\ \mu \rightleftarrows \bullet \end{matrix} \quad (150)$$

que vai da *propriedade emergente* para μ e para o *ponto geométrico originante*.

Em termos *tensoriais* resulta que:

$$\iota_{\mu}^{\mathbb{P}} \iota_{\bullet}^{\mu} = \iota_{\bullet}^{\mathbb{P}} \quad (151)$$

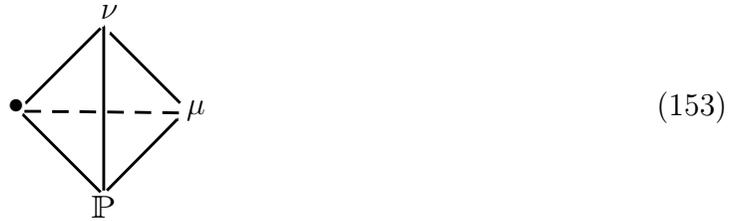
$$\iota_{\mu}^{\bullet} \iota_{\mathbb{P}}^{\mu} = \iota_{\mathbb{P}}^{\bullet} \quad (152)$$

de onde se segue o *triângulo functorial* (147), no qual se encontram sintetizadas as *relações sistêmicas fundamentais*, em particular, no que respeita àquilo que pode ser considerado o *movimento projectivo originante* do *ponto geométrico originante* para os *pontos do espaço* $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$, e dos *pontos* para a *propriedade sistêmica* que caracteriza a *totalidade sistêmica* do *espaço*, e, de novo, para os *pontos do espaço* e para o *ponto geométrico originante*.

Trata-se, assim, de um ciclo de *feedback projectivo* promotor de uma *adequabilidade mórfica* emergente no sistema, isto é, pode-se considerar como emergindo, neste ciclo, uma *adequabilidade sistémica* entre *partes, totalidade emergente e condições iniciais formativas* do sistema a partir do *ponto originante* \bullet . O *ponto geométrico, elementar*, por definição, na sua *ontologia sistémica*, torna-se *origem e alvo, source e sink* de um sistema de reenvios *projectivos*, o que, em termos matemáticos, conduz a um resultado com uma elevada importância para o pensamento sistémico acerca dos *espaços topológicos*, a saber: a expressão formal da ligação permanente entre a *origem sistémica*, os *pontos sistémicos* e as *propriedades emergentes* caracterizadoras da *totalidade sistémica*.

É possível, como foi referido na secção anterior, escolher um qualquer *ponto sistémico* de \mathcal{M}_{Nod} para *ponto originante*, a escolha do *ponto geométrico* é sustentada por argumentos ontológicos relacionados com a definição deste *ponto* no seio da geometria, enquanto *estrutura monádica*, o que o torna adequado a um contexto de pensamento matemático sistémico categorial, no qual os *espaços topológicos*, compostos por *categorias mononodais*, são trabalhados a partir de uma *morfogénese categorial topológica*.

Regresse-se, agora, ao diagrama em T (145), este diagrama pode ser simplificado, obtendo-se a *pirâmide mórfica*³⁶:



A *estrutura tetraédrica* é explicada pelas conexões sistémicas, de facto, temos dois *pontos mórficos*, logo, dois triângulos com vértices \bullet e \mathbb{P} com a estrutura geral de (147), isto é:



que correspondem aos *triângulos mórficos* para cada um dos *pontos sistémicos*.

Por seu turno, considerando os *triângulos mórficos* com \bullet ou \mathbb{P} como um dos *vértices*, mas não com \bullet e \mathbb{P} como vértices (ou exclusivo), temos os dois *triângulos mórficos*:



³⁶. Um dos *arcos functoriais* foi representado a tracejado para visualização mais fácil da representação tridimensional da estrutura piramidal.

O primeiro *triângulo* é tal que cada *ponto sistémico* é processado e processa a partir da *origem sistémica* no *ponto geométrico originante*. De facto, temos as *ligações directas*:

$$\bullet \text{---} \mu \quad (156)$$

$$\bullet \text{---} \nu \quad (157)$$

por seu turno, os dois *pontos sistémicos* são conectados por um *arco functorial*:

$$\mu \text{---} \nu \quad (158)$$

assim, o *triângulo mórfico* permite apreender a relação sistémica fundamental com a *origem*, segundo a qual, em qualquer *conectividade mórfica functorial* entre dois *pontos sistémicos* μ e ν , a *origem categorial* no *ponto geométrico originante* encontra-se sempre presente.

Esta presença pode ser explicitada a partir da análise das relações algébricas fundamentais presentes no *triângulo*, resultantes da *estrutura tensorial* dos *fundamentos mórficos* dos *functores de situs*, assim, considere-se, em primeiro lugar, as seguintes quatro igualdades:

$$\iota_{\mu}^{\nu} \iota_{\bullet}^{\mu} = \iota_{\bullet}^{\nu} \quad (159)$$

$$\iota_{\nu}^{\mu} \iota_{\bullet}^{\nu} = \iota_{\bullet}^{\mu} \quad (160)$$

$$\iota_{\mu}^{\bullet} \iota_{\nu}^{\mu} = \iota_{\nu}^{\bullet} \quad (161)$$

$$\iota_{\nu}^{\bullet} \iota_{\mu}^{\nu} = \iota_{\mu}^{\bullet} \quad (162)$$

A primeira e segunda igualdades resultam, por via da *composição functorial*, das *cadeias mórficas functoriais* $\bullet \xrightleftharpoons{\iota_{\bullet}^{\mu}} \mu \xrightleftharpoons{\iota_{\mu}^{\nu}} \nu$ e $\bullet \xrightleftharpoons{\iota_{\bullet}^{\nu}} \nu \xrightleftharpoons{\iota_{\nu}^{\mu}} \mu$, respectivamente, essa é a interpretação operativa do resultado, a interpretação sistémica, contudo, permite relevar uma consequência fundamental da *composição algébrica de fundamentos* nas *categorias*, a saber: a *origem* numa *cadeia mórfica categorial* é *recomputada* em cada *morfismo*, tal que o *ponto sistémico inicial* se conecta com todos os pontos subsequentes, ou seja, a *origem sistémica* nunca deixa de ser *recomputada*. A integridade sistémica da *ligação* entre duas estruturas depende, assim, das *condições iniciais formativas* da individuação sistémica composta pelas duas estruturas sistemicamente conectadas.

Esta natureza sistémica de *conectividade mórfica* com as *condições iniciais* é uma propriedade fundamental das *estruturas categoriais* e inseparável do pressuposto do *fecho* dos *fundamentos mórficos*, em relação à *composição algébrica de fundamentos*.

Considerando, agora, as igualdades (161) e (162), estas expressam a conectividade inversa, isto é, dos *pontos sistémicos* para o *ponto geométrico originante*. Pode-se, assim, falar de uma *sincronização sistémica* entre o *ponto geométrico originante* e os *pontos sistémicos* μ e ν , *sincronização*, esta, que é produzida pelas *cadeias* que partem de \bullet e as suas inversas, que chegam a \bullet .

Assim, a síntese sistêmica das quatro igualdades resulta das seguintes *consequências semânticas*:

$$\begin{array}{c} \mu \text{---} \nu \\ \backslash \\ \bullet \end{array} \quad \vDash \quad \begin{array}{c} \mu \text{---} \nu \\ \backslash \quad / \\ \bullet \end{array} \quad (163)$$

$$\begin{array}{c} \mu \text{---} \nu \\ / \\ \bullet \end{array} \quad \vDash \quad \begin{array}{c} \mu \text{---} \nu \\ \backslash \quad / \\ \bullet \end{array} \quad (164)$$

que são o resultado da *composição* e da *natureza isomórfica* entre estruturas *mononodais*.

Por seu turno, podemos acrescentar mais uma *consequência semântica*:

$$\begin{array}{c} \mu \quad \nu \\ \backslash \quad / \\ \bullet \end{array} \quad \vDash \quad \begin{array}{c} \mu \text{---} \nu \\ \backslash \quad / \\ \bullet \end{array} \quad (165)$$

o que, em termos sistêmicos, pode ser interpretado como significando que, a partir do momento em que se configura uma *conectividade mórfica* entre o *ponto geométrico originante* e duas *individações sistêmicas*, com os seus *topos*, as mesmas *individações sistêmicas* estão conectadas por um *arco functorial*.

A *composição algébrica dos fundamentos dos funtores de situs* (165) pode ser expressa a partir das seguintes duas igualdades:

$$l_{\bullet}^{\nu} l_{\mu}^{\bullet} = l_{\mu}^{\nu} \quad (166)$$

$$l_{\bullet}^{\mu} l_{\nu}^{\bullet} = l_{\nu}^{\mu} \quad (167)$$

A primeira igualdade sendo o resultado da *cadeia* $\mu \xrightleftharpoons{l_{\mu}^{\bullet}} \bullet \xrightleftharpoons{l_{\nu}^{\bullet}} \nu$ e a segunda igualdade sendo o resultado da *cadeia* $\nu \xrightleftharpoons{l_{\nu}^{\bullet}} \bullet \xrightleftharpoons{l_{\mu}^{\bullet}} \mu$.

Considerando, agora, o *triângulo mórfico*, em (155), para a *propriedade sistêmica emergente* \mathbb{P} , temos as *consequências semânticas*:

$$\begin{array}{c} \mu \text{---} \nu \\ \backslash \\ \mathbb{P} \end{array} \quad \vDash \quad \begin{array}{c} \mu \text{---} \nu \\ \backslash \quad / \\ \mathbb{P} \end{array} \quad (168)$$

$$\begin{array}{c} \mu \text{---} \nu \\ / \\ \mathbb{P} \end{array} \quad \vDash \quad \begin{array}{c} \mu \text{---} \nu \\ \backslash \quad / \\ \mathbb{P} \end{array} \quad (169)$$

$$\begin{array}{c} \mu \quad \nu \\ \backslash \quad / \\ \mathbb{P} \end{array} \quad \vDash \quad \begin{array}{c} \mu \text{---} \nu \\ \backslash \quad / \\ \mathbb{P} \end{array} \quad (170)$$

Quaisquer das consequências acima resultam da natureza dos *functores de situs* e da *composição algébrica de fundamentos*.

A questão sistémica central que importa ser relevada acerca do *triângulo mórfico* encontra-se na terceira *consequência semântica*. Em primeiro lugar, temos:

$$\begin{array}{c} \mu \quad \nu \\ \diagdown \quad / \\ \mathbb{P} \end{array} \quad (171)$$

o que expressa a conectividade fundamental entre quaisquer dois *pontos sistémicos* e a *propriedade emergente*. Por seu turno, é trivial que, tratando-se de duas *categorias monodais*, estes mesmos *pontos* podem ser *mórficamente ligados* segundo os *functores de situs* que caracterizam as *ligações mórficas* de \mathcal{M}_{Nod} e, logo, de uma qualquer das suas *subcategorias*.

Considerando uma teorização geométrica da *estruturação sistémica categorial* dos *espaços topológicos* $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$, trabalhada a partir dos diagramas em \mathbb{T} (145) e (146), encontra-se uma *ordem geométrica sistémica* e *topológica* fundamental que assume uma importância central na apreensão topológica das *categorias*.

De facto, considere-se, em primeiro lugar, o *espaço topológico* composto pelo *ponto mórfico originante* \bullet , denotando por $\mathbb{P}\bullet$ a *propriedade sistémica* correspondente, não temos um *triângulo mórfico*, como em (147), mas, sim, a seguinte estrutura:

$$\bullet \text{---} \mathbb{P}\bullet \quad (172)$$

que, para efeitos de teorização geométrica sistémica e topológica, pode ser considerada como equivalente a um 1-*simplex*, ou *simplex unidimensional*, Δ^1 .

Assim, denotando por $\#\Delta^{n+1}$ o número de triângulos para n *pontos sistémicos* distintos do *ponto mórfico originante* e da *propriedade* definidora do *espaço*, temos, para os casos já investigados

$$\#\Delta^1 = 0 \quad (173)$$

$$\#\Delta^2 = 1 \quad (174)$$

$$\#\Delta^3 = 4 \quad (175)$$

em que o 1-*simplex categorial* Δ^1 corresponde ao fundamento sistémico do *espaço topológico* composto pelo *ponto mórfico originante* \bullet , o 2-*simplex categorial* Δ^2 corresponde ao caso de um *triângulo mórfico* com um *ponto sistémico* distinto de \bullet e de \mathbb{P} , o 3-*simplex categorial* Δ^3 ao *tetraedro* (*pirâmide mórfica*), com dois *pontos sistémicos* de um *espaço genérico* $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$, distintos de \bullet e de \mathbb{P} . Assim, temos, respectivamente, 0, 1 e 4 *triângulos mórficos*, e estruturas geométricas a 1, 2 e 3 dimensões, respectivamente.

Para n pontos sistêmicos de um espaço genérico $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$, distintos de \bullet e de \mathbb{P} , com $n \geq 2$, temos uma *estrutura sistêmica mórfica functorial* que pode ser geometricamente visualizável enquanto um $n + 1$ -*simplex categorial* Δ^{n+1} , composto por $\#\Delta^{n+1}$ triângulos mórficos, onde $\#\Delta^{n+1}$ é tal que:

$$\#\Delta^{n+1} = n + 2 \times \binom{n}{2} + \binom{n}{3} \quad (176)$$

que corresponde ao número de faces triangulares num $n + 1$ -*simplex*. As arestas de um *simplex categorial* são, assim, *arcos functoriais de situs*, designamo-las, deste modo, por *arestas de situs*.

Dos resultados obtidos, segue-se que a *organização topológica* de um *espaço de adjacência isomórfica universal* é distinta daquela que constitui norma no seio da *topologia* baseada na *teoria moderna dos conjuntos*. De facto, nesta última, o *espaço topológico* é apresentado tal que os *pontos* são assumidos e definidos enquanto *membros* do *espaço*, sendo que a relação de pertença é assumida antes de as questões topológicas serem trabalhadas.

Por seu turno, embora a *topologia* baseada na *teoria moderna dos conjuntos*, ou *topologia conjuntista*, trabalhe com a noção de *topos* a partir da sua raiz conceptual, a sistêmica relacional necessária para trabalhar o *topos pontual* é construída a partir da estrutura de *conjuntos abertos* que permite trabalhar, por seu turno, a noção de *ponto limite*, tal que a individuação sistêmica do *ponto* é trabalhada a partir do *fim*, isto é, enquanto *limite*. Antes da sinalização sistêmica do *ponto*, a partir do *limite*, este não é sinalizável em termos de uma *sistêmica topológica*. O que explica que, na matemática, se utilize o termo *topologia de conjuntos abertos* e se discuta a *topologização do espaço*, tal que, na *topologia conjuntista*, antes da definição de uma *topologia de conjuntos abertos*, a *topologia do espaço* encontra-se por definir.

Na *topologia categorial*, não se pode falar de uma *topologização ex-post* de uma *estrutura mórfica*. Na raiz do *espaço topológico categorial*, não se encontra uma relação de pertença, mas, sim, o *espaço* constitui uma *individuação sistêmica* formada a partir de um *sistema de relações*, este sistema é, necessariamente, acompanhado do seu *topos*, facto que é trivial no seio da ciência dos sistemas e, logo, no seio da *topologia categorial*. Os *pontos sistêmicos*, com os seus *topoi*, estão na origem sistêmica do *espaço* e da sua *organização topológica*, logo, na *topologia categorial*, a *topologização* é simultânea com a *individuação*.

Um qualquer *conjunto/agregado (menge)* pode, assim, ser trabalhado a partir da sua base sistêmica e primitivamente enquanto *espaço de adjacência isomórfica universal*, logo, enquanto *espaço topológico categorial*.

Por seu turno, uma qualquer *categoria* pode ser apreendida a partir de um *espaço de adjacência isomórfica universal*, como passamos a demonstrar.

4.2.2. Morfismos e categorias

As *categorias* têm por base sistémica os *espaços de adjacência isomórfica universal*. De facto, dada uma *categoria* \mathcal{X} , as suas *estruturas nodais* constituem os *pontos sistémicos* de um *espaço de adjacência isomórfica universal*, subjacente à *categoria*, *espaço*, este, que denotamos por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathcal{X}}}$.

Os *pontos* de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathcal{X}}}$ são, assim, as *estruturas nodais* de \mathcal{X} . Deste modo, em termos de uma *construtividade sistémica topológica*, cada *categoria* pode começar por ser introduzida, a partir do seu sistema de *estruturas nodais*, enquanto um *espaço de adjacência isomórfica universal*. O passo seguinte consiste em introduzir um *campo tensorial* $\Psi_{\{\mu,\nu\}}$ que emerge a partir da conectividade entre cada par de *pontos sistémicos* de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathcal{X}}}$, em que o valor do *campo* sobre a ligação entre dois *pontos sistémicos* $\Psi_{\{\mu,\nu\}} = a_{\mu}^{\nu}$ é tal que a denota um *fundamento mórfico*, μ é a origem e ν o alvo. Note-se que, neste caso, a ordem de μ , ν no índice inferior $\Psi_{\{\mu,\nu\}}$ não é relevante, é, sim, relevante, a ordem dos índices tensoriais no valor do campo a_{μ}^{ν} , pois, conforme a *notação tensorial* utilizada, o índice inferior denota a *origem* e o superior o *alvo*.

Assim, para cada *pirâmide mórfica*, subjacente a um *morfismo* de \mathcal{X} , temos:



uma tal *pirâmide mórfica*, que denotamos por $\Delta^3(a_{\mu}^{\nu})$, permite introduzir, no seio da *topologia categorial*, uma base sistémica para um *morfismo* de μ para ν com *fundamento* a . Neste caso, passa-se a utilizar, como convenção, as letras $a, b, c, a', b', c', \dots$ para *fundamentos* de qualquer *morfismo*, o que inclui *functores* entre duas *categorias*, as letras $a, b, c, a', b', c', \dots$ podem ser substituídas pelo mesmo *fundamento*, ou denotar fundamentos distintos, tal como as letras gregas $\mu, \nu, \gamma, \mu', \nu', \gamma', \dots$, no contexto dos *pontos sistémicos*.

A direccionalidade do *morfismo*, da *origem* em μ para o *alvo* em ν , resulta da ordem dos índices na *notação tensorial* de a_{μ}^{ν} , em que o índice inferior sinaliza a *origem* e o superior o *alvo*, e a o *fundamento mórfico*, o qual pode ocorrer em mais do que um par de *pontos sistémicos*. Quando este *fundamento* é um número, designa-se a_{μ}^{ν} por *número tensorial*, pois embora a seja um número, constitui um *fundamento* de uma *ligação mórfica* de μ a ν , logo, possui uma *estrutura tensorial*, associada à natureza da própria *ligação mórfica*, os *números tensoriais* tornar-se-ão relevantes mais adiante na presente secção.

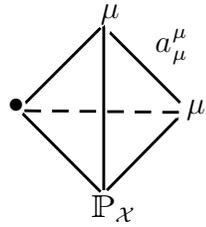
Tetraedros com um *campo tensorial* como em (177) constituem a base sistémica para o *morfismo*³⁷, no caso de (177) temos o *morfismo*:

$$\mu \xrightleftharpoons{a} \nu \quad (178)$$

ou, no caso dos *pontos sistêmicos* serem *categorias* temos o *functor*:

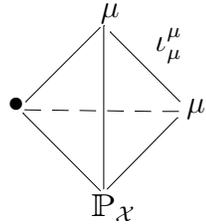
$$\mu \xrightarrow{a} \nu \quad (179)$$

No caso especial de um *automorfismo* temos $\Delta^3(a_\mu^\mu)$, tal que:



$$(180)$$

um exemplo trivial de *automorfismo* é o da *identidade* $\Delta^3(\iota_\mu^\mu)$:



$$(181)$$

Nos contextos em que não existe um *morfismo*, na *categoria* \mathcal{X} , a *ligar morficamente* dois *pontos sistêmicos* μ e ν , o campo $\Psi_{\{\mu,\nu\}}$ encontra-se ausente para a *ligação mórfrica* entre esses dois *pontos sistêmicos*, definida pelo *functor de situs* em $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X}$, ou seja, temos um *3-simplex* sem valor para a *aresta de situs* entre μ e ν . Designa-se por *base sistêmica* do campo $\Psi_{\{\mu,\nu\}}$ em $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X}$, o sistema de *pirâmides mórfricas* cujas *arestas de situs* entre os *pontos sistêmicos* de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X}$ apresentam valores para o campo. A *teia mórfrica* subjacente à *categoria* \mathcal{X} resulta, assim, da *base sistêmica* do campo.

Considerando a notação tensorial, o termo de *ligação mórfrica* a_μ^ν , numa *pirâmide mórfrica*, conduz à seguinte igualdade algébrica:

$$\nu = a_\mu^\nu \mu \quad (182)$$

Assumindo a *composição* (equação (183)), as *leis de identidade algébrica* (equação (184)) e a *associatividade da composição* (equação (185)):

$$c_\mu^\gamma = b_\nu^\gamma a_\mu^\nu \quad (183)$$

$$a_\mu^\nu = \iota_\nu^\nu a_\mu^\nu = a_\mu^\nu \iota_\mu^\mu \quad (184)$$

$$c_\gamma^{\mu'} (b_\nu^\gamma a_\mu^\nu) = (c_\gamma^{\mu'} b_\nu^\gamma) a_\mu^\nu \quad (185)$$

segue-se que uma *categoria* \mathcal{X} pode ser definida a partir de um *espaço de adjacência isomórfica universal* \mathcal{O}_X , com um *campo* $\Psi_{\{\mu,\nu\}}$ sobre a *ligação mórfrica functorial de situs* entre pares de *pontos sistêmicos* numa *pirâmide mórfrica*.

37. Note-se que, a partir desta representação do *morfismo*, qualquer *teia mórfrica* pode ser apreendida a partir desta estrutura de *simplex*.

Quando se trabalha com as *categorias*, a partir da *topologia categorial*, as *pirâmides mórficas* tornam-se, deste modo, a base conceptual sistémica e a base de trabalho matemático.

Estes resultados permitem perceber a natureza causal das ligações sistémicas nas *categorias*, de facto, pode-se argumentar que a *organização categorial* pode ser apreendida, a partir da sua base sistémica, nas estruturas sistémicas fundamentais da *topologia categorial* que são os *espaços de adjacência isomórfica universal*, o que reforça a diferença entre a *topologia conjuntista* e a *topologia categorial*.

De facto, conforme foi afirmado, na *topologia categorial*, assume-se, tradicionalmente, a *topologização do espaço* a partir de uma convenção condicionante, isto é, a partir da definição de uma condição definidora daquilo que se designa por uma *estrutura de conjuntos abertos*, satisfazendo condições capazes de definir a *noção topológica de ponto limite*, e sendo, assim, designada de *topologia*. O *espaço* é, deste modo, *topologizado* pela introdução de uma *topologia*. Sendo as estruturas fundamentais dos *conjuntos* consideradas como *pré-topológicas*.

Este processo de introdução de uma *topologia* é estranho a uma base discursiva sistémica categorial, sendo, mais do que o resultado da natureza sistémica dos próprios *espaços*, o resultado de uma eficácia operativa derivada da *teoria dos conjuntos* e do assumir do *ponto* como um dado de partida, da relação de pertença (de fundamento primitivamente lógico) como relação primitiva, e da *topologização do ponto* a partir da noção de limite, dependente de uma *estrutura de conjuntos abertos*.

No contexto categorial, independentemente da *estrutura de conjuntos abertos*, o *espaço topológico*, resultante da *projectividade* de *estruturas categoriais nodais*, é, desde logo, *topológico*, pois é o resultado de um processo de organização sistémica formativa de uma *totalidade sistémica*, com o seu *topos*, a partir de *localidades sistémicas*, com os seus *topoi*, deste modo, o *espaço* é *topologizado* a partir do momento em que se constitui enquanto *totalidade mórfica* a partir da *projectividade mórfica das partes*.

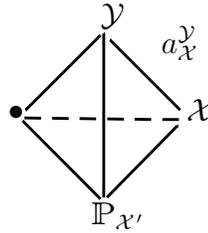
A *organização topológica* resulta das ligações entre *singularidades sistémicas*, cada uma com o seu *topos*, logo, torna-se necessário trabalhar a partir da noção de *singularidade*, noção que assume uma natureza problemática e exemplar de uma casuística patológica no seio de um *pensamento topológico conjuntista*, cujo discurso e pensamento se organiza principalmente a partir de *pontos regulares*, a *topologia categorial* pressupõe sempre as *singularidades*, qualquer *organização sistémica categorial*, logo, *topológica*, depende das *singularidades*.

Na *topologia categorial*, as *estruturas topológicas de conjuntos abertos* são o resultado das propriedades sistémicas, associadas à conectividade local entre *pontos do espaço*, logo, no contexto categorial, as *estruturas de conjuntos abertos* são uma consequência da conectividade sistémica do próprio *espaço topológico categorial* e emergem partir dos *pontos sistémicos*.

Estas são as diferenças entre a *topologia conjuntista* e a *topologia categorial*, existem, contudo, semelhanças que podem ser localizadas no que diz respeito à estrutura de vizinhança, resultante do campo $\Psi_{\{\mu,\nu\}}$ e aos *functores* que preservam essa mesma estrutura.

A noção de vizinhança numa *categoria* \mathcal{X} é definida, neste caso, a partir da *base sistêmica* do campo, pois, esses são os *pontos ligados* por *morfismos*.

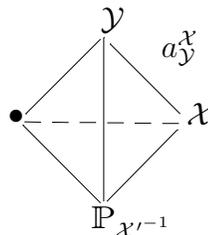
Considere-se, agora, duas *categorias* \mathcal{X} e \mathcal{Y} , enquanto *totalidades sistêmicas*, temos, então, uma *categoria* \mathcal{X}' composta somente por estas duas *categorias*, enquanto *pontos sistêmicos*, de onde resulta um *espaço de adjacência isomórfica universal* para \mathcal{X}' , composto por dois *pontos sistêmicos* e por um *arco functorial de situs*. Assumindo que o campo $\Psi_{\{\mathcal{X},\mathcal{Y}\}}$ é tal que:



(186)

então, a_X^Y corresponde ao *fundamento* de um *functor* de \mathcal{X} para \mathcal{Y} .

Se esse *functor* for tal que define uma correspondência de um-para-um entre os *pontos sistêmicos* de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathcal{X}}}$ e os *pontos sistêmicos* de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathcal{Y}}}$, e de um-para-um, entre cada *morfismo* de \mathcal{X} e cada *morfismo* de \mathcal{Y} , preservando a operação de *composição algébrica de fundamentos* e a propriedade associativa da mesma, então, esse *functor* define um *isomorfismo* entre \mathcal{X} e uma *subcategoria* de \mathcal{Y} , ou um *isomorfismo* entre \mathcal{X} e \mathcal{Y} , no caso dos dois *espaços* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathcal{X}}}$ e $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathcal{Y}}}$ terem o mesmo número de *pontos sistêmicos*, as duas *categorias* dizem-se, neste último caso, *isomorfas*. Para além da *pirâmide mórfrica* $\Delta^3(a_X^Y)$, no caso de \mathcal{X} e \mathcal{Y} serem *isomorfas*, pode-se definir a *pirâmide mórfrica* $\Delta^3(a_Y^X)$ para a *categoria inversa* \mathcal{X}'^{-1} , ou seja:



(187)

que corresponde ao *functor inverso*.

O *isomorfismo functorial* preserva a estrutura fundamental de uma *categoria*, podendo ser considerado como equivalente a uma substituição de *pontos sistêmicos* e de *fundamentos* com a manutenção da mesma estrutura (de *teia*) fundamental.

Dizemos, então, que \mathcal{X} e uma *subcategoria* \mathcal{Y}_{sub} de \mathcal{Y} são *isomorfas*, se existir um *isomorfismo functorial* de \mathcal{X} para \mathcal{Y}_{sub} , e escrevemos:

$$\mathcal{X} \prec_{a_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}} \mathcal{Y} \quad (188)$$

em que $a_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}$ corresponde ao *functor* que define o *isomorfismo* entre \mathcal{X} e \mathcal{Y}_{sub} .

Por seu turno, dizemos que \mathcal{X} e \mathcal{Y} são *isomorfas*, se existir um *isomorfismo functorial* entre as duas *categorias* e escrevemos:

$$\mathcal{X} \sim_{a_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}} \mathcal{Y} \quad (189)$$

Em termos gerais, utilizamos a notação:

$$\mathcal{X} \lesssim_{a_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}} \mathcal{Y} \quad (190)$$

para sinalizar que, sob um *functor* de *fundamento* $a_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}$, \mathcal{X} e uma *subcategoria* de \mathcal{Y} são *isomorfas* ou \mathcal{X} e \mathcal{Y} são *isomorfas*.

Trivialmente, é o caso que \mathcal{X} é *isomorfa* em relação a \mathcal{X} , ou seja, uma qualquer categoria é *isomorfa* em relação a si mesma, sendo o *functor de identidade*, um exemplo de um *isomorfismo* de \mathcal{X} para \mathcal{X} , isto é, $\mathcal{X} \sim_{\iota_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}}} \mathcal{X}$.

Por seu turno, dadas duas *categorias distintas*, \mathcal{X} e \mathcal{Y} , se $a_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}$ for tal que coincide com o *fundamento* do *functor de identidade* de \mathcal{X} , $\iota_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}}$, segue-se que \mathcal{X} é uma *subcategoria* de \mathcal{Y} , neste caso, utiliza-se $\iota_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}}$ como índice para a relação de ordem $\mathcal{X} \lesssim_{\iota_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}}} \mathcal{Y}$. Segue-se que, sendo \mathcal{X} e \mathcal{Y} distintas³⁸, é, necessariamente, o caso que $\mathcal{X} \prec_{\iota_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}}} \mathcal{Y}$, e, logo, \mathcal{X} é uma *subcategoria* de \mathcal{Y} , em termos formais:

$$\mathcal{X} \lesssim_{\iota_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}}} \mathcal{Y} \Rightarrow \mathcal{X} \prec_{\iota_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}}} \mathcal{Y} \quad (191)$$

A partir da *composição de funtores* resultam, igualmente, as seguintes implicações:

$$\mathcal{X} \prec_{a_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}} \mathcal{Y} \prec_{a_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}}} \mathcal{Z} \Rightarrow \mathcal{X} \prec_{a_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Z}}=a_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}}a_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}} \mathcal{Z} \quad (192)$$

$$\mathcal{X} \prec_{a_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}} \mathcal{Y} \sim_{a_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}}} \mathcal{Z} \Rightarrow \mathcal{X} \prec_{a_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Z}}=a_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}}a_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}} \mathcal{Z} \quad (193)$$

$$\mathcal{X} \sim_{a_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}} \mathcal{Y} \prec_{a_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}}} \mathcal{Z} \Rightarrow \mathcal{X} \prec_{a_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Z}}=a_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}}a_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}} \mathcal{Z} \quad (194)$$

$$\mathcal{X} \sim_{a_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}} \mathcal{Y} \sim_{a_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}}} \mathcal{Z} \Rightarrow \mathcal{X} \sim_{a_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Z}}=a_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{Z}}a_{\mathcal{X}}^{\mathcal{Y}}} \mathcal{Z} \quad (195)$$

38. Note-se a regra de utilização de *variáveis livres* distintas, assumida no capítulo anterior e segundo a qual duas *variáveis livres* distintas numa mesma *fórmula bem formada* denotam estruturas distintas. Embora tenhamos subido no nível de discurso as regras do substrato lógico de \mathcal{L}_{Cat} continuam a ser assumidas.

No seio da *topologia categorial*, a relação $\mathcal{X} \prec_{\iota_{\mathcal{X}}} \mathcal{Y}$ desempenha um papel central, pois, algumas propriedades, relevantes para as *estruturas topológicas*, tradicionalmente investigadas no seio da *topologia*, resultam de uma investigação acerca da *organização topológica* de uma *categoria*, a partir das relações $\mathcal{X} \prec_{\iota_{\mathcal{X}}} \mathcal{Y}$. Sempre que esta relação é verificada significa que \mathcal{X} é *morficamente ligado*, pelo seu *functor de identidade*, a \mathcal{Y} , logo, \mathcal{X} tem de ser uma *subcategoria* de \mathcal{Y} . De facto, sempre que é o caso que $\mathcal{X} \stackrel{\iota_{\mathcal{X}}}{=} \mathcal{Y}$, então, sendo \mathcal{Y} distinta de \mathcal{X} , a veracidade da *relação mórica functorial* $\mathcal{X} \stackrel{\iota_{\mathcal{X}}}{=} \mathcal{Y}$ significa que \mathcal{X} é, necessariamente, uma *subcategoria* de \mathcal{Y} .

Seja, agora, μ uma *estrutura nodal* de uma *categoria* \mathcal{X} , então, temos:

$$\mu \prec_{\iota_{\mu}^{\mathcal{X}}} \mathcal{X} \quad (196)$$

esta relação é verdadeira para cada *estrutura nodal* de \mathcal{X} .

Considere-se, agora, uma *categoria* $\mathcal{Y}(\mu)$, cujos *morfismos* são *pirâmides mórficas* do género:



(197)

onde μ é fixo. Diz-se, então, que \mathcal{X} é *topologicamente fechada* em relação a $\mathcal{Y}(\mu)$ se, e somente se:

$$\mu \prec_{\iota_{\mu}^{\mathcal{X}}} \mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{Y}(\mu) \prec_{\iota_{\mathcal{Y}(\mu)}^{\mathcal{X}}} \mathcal{X} \quad (198)$$

Ou seja, pelo facto de μ ser uma *estrutura nodal* de \mathcal{X} , segue-se que $\mathcal{Y}(\mu)$ constitui uma *subcategoria* de \mathcal{X} .

Em termos *topológicos*, o *fecho topológico categorial* de \mathcal{X} em relação a $\mathcal{Y}(\mu)$ significa que, pelo facto de μ , com o seu *topos*, ocupar um *situs* em \mathcal{X} , a *categoria* $\mathcal{Y}(\mu)$ é uma *subcategoria* de \mathcal{X} .

Este *fecho topológico categorial* constitui uma noção derivada da *topologia sistémica categorial*, não devendo ser confundida com a noção de *fecho* de um *conjunto aberto*, trabalhada no seio da *topologia conjuntista*. De facto, o *fecho topológico categorial* permite trabalhar, no contexto sistémico da *topologia categorial*, estruturas tradicionalmente trabalhadas como *conjuntos abertos*.

Um exemplo importante de *centralidade topológica organizacional* da noção de *fecho topológico categorial* é o caso dos *espaços métricos*.

Os *espaços métricos*, por seu turno, constituem exemplos importantes no seio da *topologia* e são úteis para o trabalho a desenvolver no próximo capítulo. Assim, importa considerá-los como exemplos.

Nesse sentido, considere-se uma *categoria* \mathcal{X} e o *espaço de adjacência isomórfica universal* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathcal{X}}}$ correspondente. Considere-se que existe uma noção de distância que pode ser identificada como emergindo a partir *ligações mórficas functoriais de situs* entre os *pontos sistémicos* de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathcal{X}}}$, noção de distância, esta, que é operacionalizável por uma medida $d(\cdot, \cdot)$ designada por medida de distância, com $d(\mu, \nu)$, correspondendo à distância entre os *pontos sistémicos* μ e ν de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathcal{X}}}$. Seguindo a teoria matemática dos *espaços métricos*, considere-se, adicionalmente, as seguintes condições:

- **D_1** : $d(\mu, \nu)$ é, sempre, um número real;
- **D_2** : $d(\mu, \nu) > 0$;
- **D_3** : $d(\mu, \mu) = 0$;
- **D_4** : $d(\mu, \nu) = d(\nu, \mu)$;
- **D_5** : $d(\mu, \chi) \leq d(\mu, \nu) + d(\nu, \chi)$.

Quando, num *espaço de adjacência isomórfica universal*, nas *ligações mórficas functoriais de situs*, emergir, para cada *ligação*, uma distância, enquanto propriedade quantitativa da *ligação*, matematizável por uma *medida de distância*, satisfazendo **D_1** a **D_5** , então, esse *espaço de adjacência isomórfica universal* diz-se um *espaço métrico*.

Se $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathcal{X}}}$ for um *espaço métrico*, então, \mathcal{X} é designada por *categoria da métrica* de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathcal{X}}}$ se, e somente se, em \mathcal{X} , para além dos *morfismos de identidade*, cada *morfismo* é tal que o seu *fundamento* é dado por um *número tensorial* coincidente com a *distância* e cujo índice inferior é a *origem* e o superior o *alvo*. Assim, um *morfismo* de μ para ν é dado pela *pirâmide mórfica* $\Delta^3(r_\mu^\nu)$, com $r = d(\mu, \nu)$.

A condição **D_5** tem implicações sobre a *composição*, de facto, dados $\Delta^3(r_\mu^\nu)$ e $\Delta^3(s_\nu^\chi)$, segue-se que $\Delta(t_\mu^\chi)$ obedece às seguintes duas condições:

$$t_\mu^\chi = s_\nu^\chi r_\mu^\nu \quad (199)$$

$$t \leq s + r \quad (200)$$

em que (199) resulta da *composição de fundamentos* em \mathcal{X} e (200) resulta de **D_5** .

Designamos por *morfismos métricos* os *morfismos* compostos pelas *pirâmides mórficas* $\Delta^3(r_\mu^\nu)$, com $r = d(\mu, \nu)$, na *categoria da métrica* de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathcal{X}}}$. A partir do momento em que se considera *morfismos métricos*, emerge, em termos sistémicos, uma estrutura sistémica de localidades, a partir das relações sistémicas do *espaço de adjacência isomórfica universal*.

Esta estrutura sistémica de localidades pode ser apreendida a partir da noção de vizinhança.

Seja, então, $\mathcal{V}_\varepsilon(\mu)$ definida como a *subcategoria* de \mathcal{X} (logo, $\mathcal{V}_\varepsilon(\mu) \prec_{\iota_{\mathcal{V}_\varepsilon(\mu)}}^{\mathcal{V}_\varepsilon(\mu)} \mathcal{X}$) composta pelos *morfismos* $\Delta^3(r_\mu^\nu)$, com μ fixo e ν tal que $r < \varepsilon$, então, $\mathcal{V}_\varepsilon(\mu)$ corresponde a uma *estrutura categorial* centrada em μ e que é composta pelos *morfismos* que conectam μ a *pontos sistêmicos* que distam de μ menos do que ε . Trata-se, assim, de uma noção categorial que recupera a noção topológica, da *teoria dos espaços métricos*, de *vizinhança esférica (aberta)*.

Dado um qualquer *ponto sistêmico* ν tal que:

$$\nu \prec_{\iota_\nu} \mathcal{V}_\varepsilon(\mu) \quad (201)$$

segue-se que existe um ε' tal que:

$$\mathcal{V}_{\varepsilon'}(\nu) \prec_{\iota_{\mathcal{V}_{\varepsilon'}(\nu)}}^{\mathcal{V}_{\varepsilon'}(\nu)} \mathcal{V}_\varepsilon(\mu) \quad (202)$$

ou seja, $\mathcal{V}_\varepsilon(\mu)$ é *topologicamente fechada* em relação a $\mathcal{V}_{\varepsilon'}(\nu)$.

Assim, para cada *estrutura nodal* ν em $\mathcal{V}_\varepsilon(\mu)$, existe um ε' tal que $\mathcal{V}_\varepsilon(\mu)$ é *topologicamente fechada* em relação a $\mathcal{V}_{\varepsilon'}(\nu)$.

Esta é a natureza da *organização topológica* das *vizinhanças esféricas*. Por seu turno, as *bolas* $\mathcal{B}_\varepsilon(\mu)$, compostas pelos *morfismos* $\Delta^3(r_\mu^\nu)$, com μ fixo e ν tal que $r \leq \varepsilon$, são tais que são decomponíveis em $\mathcal{V}_\varepsilon(\mu)$ e na *fronteira esférica* $\mathcal{S}_\varepsilon(\mu)$, tal que temos:

$$\mathcal{V}_\varepsilon(\mu) \prec_{\iota_{\mathcal{V}_\varepsilon(\mu)}}^{\mathcal{V}_\varepsilon(\mu)} \mathcal{B}_\varepsilon(\mu) \succ_{\iota_{\mathcal{S}_\varepsilon(\mu)}}^{\mathcal{S}_\varepsilon(\mu)} \mathcal{S}_\varepsilon(\mu) \quad (203)$$

as *bolas* $\mathcal{B}_\varepsilon(\mu)$ correspondem, no seio da *topologia conjuntista* dos *espaços métricos*, a *estruturas fechadas*, dado que incluem a *fronteira esférica*. No contexto da *topologia categorial*, a terminologia inverte-se, pois, enquanto que em $\mathcal{V}_\varepsilon(\mu)$, para cada *ponto sistêmico* ν , existe uma *vizinhança esférica* $\mathcal{V}_{\varepsilon'}(\nu)$ em relação à qual $\mathcal{V}_\varepsilon(\mu)$ é *topologicamente fechada*, já no caso de $\mathcal{B}_\varepsilon(\mu)$, para os *pontos sistêmicos* da *fronteira* $\mathcal{S}_\varepsilon(\mu)$, não se encontra um ε' não nulo tal que $\mathcal{B}_\varepsilon(\mu)$ seja *topologicamente fechada* em relação a uma outra *bola* ou *vizinhança esférica*.

Quando, no próximo capítulo, for trabalhada a *computação* e a *dinâmica não-linear*, as *bolas* $\mathcal{B}_\varepsilon(\mu)$ tornam-se noções centrais.

Como nota final, deve ser relevado que o trabalho desenvolvido no presente capítulo e, em particular, o trabalho desenvolvido na presente secção, abre a casuística categorial a estruturas contínuas, em particular, a *cadeias contínuas*.

Assim, por exemplo, sabemos que, entre dois *números reais* x e y , temos o *morfismo* $\Delta^3(r_x^y)$, com o *fundamento* dado pelo *número tensorial* r_x^y , em que $r = d(x, y) = |y - x|$, mas este mesmo *fundamento* pode ser obtido a partir de uma *composição* resultante de uma *cadeia mórfica* tal que:

$$r_x^y = r_{x_{n-1}}^y \dots r_{x_2}^{x_1} r_{x_1}^x \quad (204)$$

Estas *cadeias* podem, contudo, ser expandidas até distâncias arbitrariamente pequenas, sendo que, tal como no limite de um somatório se tem um integral, no limite da *composição algébrica de fundamentos*, no qual esta deixa de ser explicitável em termos de uma notação discreta, torna-se necessário trabalhar com uma generalização da *composição de fundamentos* a um *contínuo*, tal como se assume o *integral* para generalizar o *somatório*.

Este limite contínuo constitui uma questão de trabalho para a *matemática das categorias*, não sendo necessária e, logo, não cabendo na temática da presente tese.

Tendo-se introduzido as noções da *topologia categorial*, relevantes para o trabalho subsequente acerca da computação e da matemática do risco, podemos, agora, prosseguir para esse mesmo trabalho.

Capítulo 5. *Máquinas de Turing, Categorias e Caos*

O problema central do presente capítulo é a relação entre a computação, a *incompressibilidade algorítmica* e o risco. Tal como foi referido no **capítulo 3.**, as *máquinas de Turing* permitem localizar *estruturas aleatórias*, no seio da matemática.

Chaitin (2006) trabalha esta questão, relacionando-a com os fundamentos da matemática, mas limita-se a sinalizar a presença dessas *estruturas aleatórias*, o que é insuficiente para a matemática do risco.

No **capítulo 3.**, ficou demonstrado que a *teoria das categorias* permite trabalhar essas mesmas *estruturas aleatórias* enquanto *totalidades mórficas*, tendo sido sublinhado o facto de que o argumento acerca da existência de *estruturas aleatórias* em \mathcal{L}_{Cat} , trabalháveis enquanto *totalidades mórficas*, constitui o ponto de partida para uma matemática do risco a partir dos *fundamentos categoriais*.

Contudo, torna-se necessário ir para além do trabalho de Chaitin, e da sinalização da existência dos *padrões aleatórios*, e trabalhar com *computações mórficas* passíveis de produzirem tais padrões, integrando este trabalho com a matemática do risco, por via da formalização categorial da computação com *alfabetos discretos* e da *hipercomputação* de *objectos categoriais* gerais. É este o trabalho que será desenvolvido no presente capítulo.

Assim, na **secção 5.1.**, são trabalhadas as *máquinas de Turing* com *alfabetos discretos* e é introduzido um jogo de mercado que permite conectar as noções de *incerteza* e de *risco* com a computação adaptativa dos *payoffs* alternativos num jogo, computação, esta, que é trabalhada a partir da formalização categorial das *máquinas de Turing* com *alfabetos discretos*, da matemática dos jogos quânticos e da matemática financeira. A metodologia da *quantum risk neutral valuation* é, deste modo, utilizada em conjugação com as *máquinas de Turing binárias* para ilustrar a modelação de uma *situação de risco* e para trabalhar, em termos conceptuais, os elementos estruturais de uma *situação de risco*, os resultados obtidos são conectados com o trabalho de Savage (1972), acerca dos fundamentos da estatística.

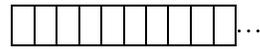
Na **secção 5.2.**, por seu turno, trabalha-se com a *hipercomputação* e com o *caos*, em particular, é trabalhado o argumento de que a *dinâmica caótica* introduz um segundo nível de *incompressibilidade* e de *aleatoriedade algorítmica* na computação, pois trata-se de *aleatoriedade algorítmica* ao nível da *hipercomputação*. As noções de *caos* e de *estocástico* são trabalhadas a partir da linguagem sistémica da ciência do risco e do formalismo categorial subjacente às *máquinas de Turing* (**subsecção 5.2.1.**). É, também, exemplificada a eficácia da *teoria do caos* na *ciência do risco*, ao nível da captura, em modelo, de *padrões estocásticos*, em particular, no que diz respeito aos *efeitos de Malcolm* e à *turbulência multifractal* (**subsecção 5.2.2.**).

Dado que tanto o *formalismo quântico* como o formalismo da *dinâmica não-linear* são capturáveis no seio do formalismo categorial de \mathcal{L}_{Cat} , evidencia o facto de que o formalismo categorial constitui uma base comum aos dois ramos centrais de modelação da ciência do risco, referidos no **capítulo 2**, a saber: a *modelação quântica* e a *dinâmica não-linear*.

5.1. Máquinas de Turing, jogos de mercado e risco

As *máquinas de Turing* (*máquinas automáticas*, ou *máquinas-a*, na terminologia utilizada por Turing (1936)) são objectos abstractos que têm por base um modelo matemático de computador, introduzido pelo autor, para lidar com o problema dos limites computacionais associados aos *processos algorítmicos* e com o problema dos limites computacionais e lógicos da *teoria dos números*.

As *máquinas-a* são assumidas como sendo compostas por uma fita infinita à direita, dividida em quadrados ou células, conforme o esquema seguinte:



e por uma cabeça de leitura que lê as *células* e insere informação nas mesmas.

Cada célula pode encontrar-se em branco ou conter informação inserida, a qual, na formalização matemática de Turing, corresponde a um *símbolo* de um determinado *alfabeto simbólico finito* composto por n *símbolos*.

Um *alfabeto simbólico* é uma construção abstracta de unidades elementares de *informação sistémica*, geralmente composto por números.

No contexto categorial, os *alfabetos simbólicos discretos* são primitivamente capturáveis a partir das estruturas mais elementares da *topologia categorial*.

Assim, considere-se o 1-*simplex* Δ^1 , apresentado no capítulo anterior, para o *espaço topológico* composto pelo *ponto mórfico originante* $\mathcal{M}_{\mathbb{P}}$:

$$\bullet \text{---} \mathbb{P} \bullet \tag{205}$$

Este 1-*simplex* pode ser utilizado para estrutura sistémica elementar, correspondendo à unidade de informação denotada por 0, correspondência que pode ser justificada considerando o número de *pontos sistémicos* num *simplex categorial*, distintos do *ponto geométrico originante*.

No nível sistémico seguinte de *espaços de adjacência isomórfica universal*, temos as estruturas genéricas para os espaços $\mathcal{M}_{\mathbb{P}_\mu}$, para os quais o *simplex categorial* correspondente, que passamos a denotar por $\Delta^1(\bullet)$, é dado por:

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} \mu \\ \diagdown \quad \diagup \\ \mathbb{P}_\mu \end{array} \tag{206}$$

Cada espaço $\mathcal{M}_{\mathbb{P}_\mu}$ tem um 2-simplex correspondente $\Delta^2(\mu)$ com a estrutura genérica (206), em termos topológicos, quaisquer dois espaços $\mathcal{M}_{\mathbb{P}_\mu}$ e $\mathcal{M}_{\mathbb{P}_\nu}$ são *isomorfos*, de facto, seguindo o trabalho desenvolvido no capítulo anterior, temos:

$$\mathcal{M}_{\mathbb{P}_\mu} \sim_{\iota_\mu^\nu} \mathcal{M}_{\mathbb{P}_\nu} \quad (207)$$

tal como os espaços, também $\Delta^2(\mu)$ é *isomorfo* em relação a $\Delta^2(\nu)$, o que conduz a uma segunda questão, a do *invariante topológico*. O *invariante topológico*, neste contexto sistémico categorial, pode ser considerado o número de pontos num *simplex categorial* que são distintos do *ponto mórfico originante* e da *propriedade sistémica emergente*.

Então, temos, para $\Delta^1(\bullet)$, 0, e, para $\Delta^2(\mu)$, 1. Seguindo a sequência de *espaços de adjacência isomórfica universal* com um número finito de pontos, e denotando o invariante topológico por $\tau(\cdot)$, temos:

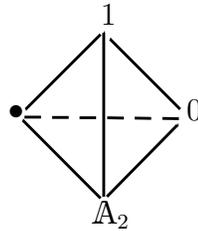
$$\tau(\Delta^1(\bullet)) = 0, \tau(\Delta^2(\mu)) = 1, \tau(\Delta^3(\mu, \nu)) = 2, \dots \quad (208)$$

O que conduz ao conjunto dos números inteiros não-negativos, capturável, em termos categoriais, a partir de um *espaço de adjacência isomórfica universal* $\mathcal{M}_{\mathbb{N}_0}$ cujos *pontos sistémicos* são os números inteiros não-negativos.

Esta introdução dos inteiros não-negativos, a partir da noção de *invariante topológico* é mais adequada à sistémica topológica categorial do que a proposta conjuntista que começa a partir da classe vazia e prossegue com as classes de equivalência de cardinalidade (Russel, [1919], 2007), embora seja possível considerar, em alternativa, no contexto categorial, a relação entre os inteiros não-negativos e a cardinalidade das *cadeias mórficas*, sendo uma alternativa de introdução, também, consistente com a sistémica categorial.

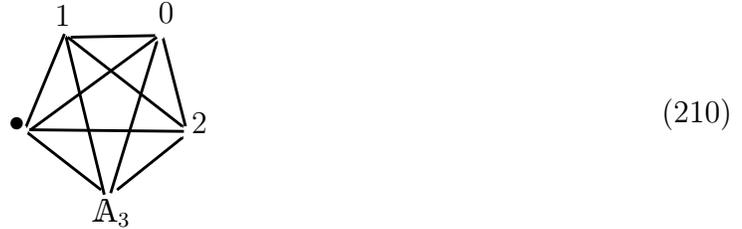
O espaço $\mathcal{M}_{\mathbb{N}_0}$ constitui o universo sistémico categorial para os *alfabetos formais discretos* que assumem uma forma numérica, *alfabetos*, estes, que foram assumidos por Turing para a formalização da sua máquina.

Assim, temos, por exemplo, o *alfabeto binário* dado pelo *espaço de adjacência isomórfica universal* $\mathcal{M}_{\mathbb{A}_2} \prec_{\substack{\mathcal{M}_{\mathbb{A}_2} \\ \iota_{\mathcal{M}_{\mathbb{A}_2}}} \mathcal{M}_{\mathbb{N}_0}$, com 3-simplex correspondente:



(209)

Relativamente às *máquinas-a*, para cada *célula* da *fita* assume-se, no *caso binário*, três estados informacionais alternativos, a saber: a *célula* pode estar em *branco* ou então conter um 0 ou um 1. Codificando o terceiro estado (*em branco*) pelo número 2, o alfabeto fundamental para as *máquinas-a* é o ternário, logo, temos o 4-simplex com a seguinte projecção bidimensional:



São três as operações elementares que se assume que uma *máquina-a* pode realizar sobre o estado de uma *célula*, a saber: insere 0 na *célula*, insere 1 na *célula* ou coloca a *célula* em *branco* (se a *célula* já estiver em *branco* esta é mantida em *branco* por esta última operação).

Estas operações são expressáveis, em termos categoriais, a partir de três *categorias* alternativas 0_n , 1_n , B_n , cuja estrutura passamos a explicitar. Considere-se, então, a *categoria* 0_n , que corresponde à operação de inserção de 0 na n -ésima *célula*, o *espaço topológico subjacente* é \mathcal{O}_{0_n} , sendo que o *simplex* subjacente tem a seguinte projecção bidimensional:



que denotamos por $\Delta^4(n_1^0, n_2^0)$.

O movimento de inserção de 0 na n -ésima *célula* é, deste modo, capturado, em termos categoriais, por uma *estrutura mórfica* com 0 como *objecto terminal*:

$$1 \overset{n}{\rightleftarrows} 0 \overset{n}{\rightleftarrows} 2 \quad (212)$$

A interpretação sistémica pode ser explicitada considerando as correspondências algébricas:

$$0 = n_1^0 1 \quad (213)$$

$$0 = n_2^0 2 \quad (214)$$

Assim, uma *máquina-a* pode inserir na n -ésima *célula* um 0, um 1 ou colocar a *célula* em branco. Neste caso, a operação seleccionada é a inserção do 0, o que é capturado pela configuração do *campo* $\Psi_{\{\mu,\nu\}}$ que é tal que as *rotatividades projectivas* de 1 e de 2 são direccionadas para 0 que é o centro e a informação que é introduzida pela *máquina-a* na *célula*.

Do mesmo modo, para as restantes duas operações, temos, respectivamente:



que denotamos por $\Delta^4(n_0^1, n_2^1)$, e:



que denotamos por $\Delta^4(n_0^2, n_1^2)$.

Para além destas três operações elementares, assume-se que a cabeça de leitura de uma *máquina-a* pode deslocar-se para a *direita* ou para a *esquerda* k casas, sem limite para o deslocamento para a direita, mas com limite à esquerda, tal que: se a cabeça de leitura estiver a ler a n -ésima *célula*, então, apenas pode deslocar-se $k = n - 1$ *células* para a esquerda, chegando ao início da *fita*. Assim, considerando um deslocamento para a direita, a *célula* seguinte a ser lida será a $n + k$ -ésima, enquanto que num deslocamento para a esquerda a *célula* seguinte a ser lida será a $n - k$ -ésima.

Em cada passo computacional, assume-se que uma *máquina-a* realiza uma das três operações elementares juntamente com um deslocamento de $+k$ (se for para a direita) ou de $-k$ se for para a esquerda, com $k \geq 0$, sendo que se $k = 0$ a cabeça de leitura não se desloca. Temos, então, as seguintes estruturas genéricas de 5-*simplex* para um passo computacional:

- $\Delta^5(n_1^0, n_2^0, \iota_0^{\pm k})$ – a *máquina-a* insere 0 na *célula* sob leitura e desloca a cabeça de leitura $\pm k$ *células*;

- $\Delta^5(n_0^1, n_2^1, l_1^{\pm k})$ – a *máquina-a* insere 1 na *célula* sob leitura e desloca a cabeça de leitura $\pm k$ *células*;
- $\Delta^5(n_0^2, n_1^2, l_2^{\pm k})$ – a *máquina-a* coloca a *célula* sob leitura em branco e desloca a cabeça de leitura $\pm k$ *células*.

Introduzindo a notação:

$$\mathbf{a}(\pm k) \equiv \Delta^5(n_1^0, n_2^0, l_0^{\pm k}) \quad (217)$$

$$\mathbf{b}(\pm k) \equiv \Delta^5(n_0^1, n_2^1, l_1^{\pm k}) \quad (218)$$

$$\mathbf{c}(\pm k) \equiv \Delta^5(n_0^2, n_1^2, l_2^{\pm k}) \quad (219)$$

Cada passo computacional constitui uma transição entre aquilo que Turing designou por *configurações de máquina* ou *configurações-m*. A transição entre duas *configurações-m* \mathbf{q}_i e \mathbf{q}_j (de \mathbf{q}_i para \mathbf{q}_j) é condicional ao estado informacional da *célula* e pode ser capturada a partir de um *morfismo* de \mathbf{q}_i para \mathbf{q}_j , os *fundamentos*, neste contexto, são tomados como *condicionais*, assim, considerando $\mathfrak{s} = 0, 1, 2$, escrevemos $\mathbf{a}(\pm k, \mathfrak{s})$ se, dado o símbolo \mathfrak{s} lido pela *máquina-a*, esta realiza as *operações* $\mathbf{a}(\pm k)$, do mesmo modo, para as restantes alternativas escrevemos $\mathbf{b}(\pm k, \mathfrak{s})$ e $\mathbf{c}(\pm k, \mathfrak{s})$.

Dadas as operações fundamentais temos os seguintes três tipos de *morfismos* genéricos alternativos:

$$\begin{array}{c} \mathbf{a}(\pm k, \mathfrak{s}) \\ \mathbf{q}_i \rightleftarrows \mathbf{q}_j \end{array} \quad (220)$$

$$\begin{array}{c} \mathbf{b}(\pm k, \mathfrak{s}) \\ \mathbf{q}_i \rightleftarrows \mathbf{q}_j \end{array} \quad (221)$$

$$\begin{array}{c} \mathbf{c}(\pm k, \mathfrak{s}) \\ \mathbf{q}_i \rightleftarrows \mathbf{q}_j \end{array} \quad (222)$$

ou, em termos de notação de *simplex categorial*:

$$\Delta^3(\mathbf{a}(\pm k, \mathfrak{s})_{\mathbf{q}_i}^{\mathbf{q}_j}) \quad (223)$$

$$\Delta^3(\mathbf{b}(\pm k, \mathfrak{s})_{\mathbf{q}_i}^{\mathbf{q}_j}) \quad (224)$$

$$\Delta^3(\mathbf{c}(\pm k, \mathfrak{s})_{\mathbf{q}_i}^{\mathbf{q}_j}) \quad (225)$$

de onde se seguem as *equações algébricas*:

$$\mathbf{q}_j = \mathbf{a}(\pm k, \mathfrak{s})_{\mathbf{q}_i}^{\mathbf{q}_j} \mathbf{q}_i \quad (226)$$

$$\mathbf{q}_j = \mathbf{b}(\pm k, \mathfrak{s})_{\mathbf{q}_i}^{\mathbf{q}_j} \mathbf{q}_i \quad (227)$$

$$\mathbf{q}_j = \mathbf{c}(\pm k, \mathfrak{s})_{\mathbf{q}_i}^{\mathbf{q}_j} \mathbf{q}_i \quad (228)$$

No primeiro caso, $(\mathbf{q}_i \xrightarrow{\mathbf{a}(\pm k, \mathfrak{s})} \mathbf{q}_j, \Delta^3(\mathbf{a}(\pm k, \mathfrak{s})_{\mathbf{q}_i}^{\mathbf{q}_j})$ e $\mathbf{q}_j = \mathbf{a}(\pm k, \mathfrak{s})_{\mathbf{q}_i}^{\mathbf{q}_j} \mathbf{q}_i$), a transição da *configuração-m* \mathbf{q}_i para a *configuração-m* \mathbf{q}_j , dado o estado de informação da *célula* sob leitura ser \mathfrak{s} , é feita por via da realização das operações $\mathbf{a}(\pm k)$.

No segundo caso, $(\mathbf{q}_i \xrightarrow{\mathbf{b}(\pm k, \mathfrak{s})} \mathbf{q}_j, \Delta^3(\mathbf{b}(\pm k, \mathfrak{s})_{\mathbf{q}_i}^{\mathbf{q}_j})$ e $\mathbf{q}_j = \mathbf{b}(\pm k, \mathfrak{s})_{\mathbf{q}_i}^{\mathbf{q}_j} \mathbf{q}_i$), a transição da *configuração-m* \mathbf{q}_i para a *configuração-m* \mathbf{q}_j , dado o estado de informação da *célula* sob leitura ser \mathfrak{s} , é feita por via da realização das operações $\mathbf{b}(\pm k)$.

No terceiro caso, $(\mathbf{q}_i \xrightarrow{\mathbf{c}(\pm k, \mathfrak{s})} \mathbf{q}_j, \Delta^3(\mathbf{c}(\pm k, \mathfrak{s})_{\mathbf{q}_i}^{\mathbf{q}_j})$ e $\mathbf{q}_j = \mathbf{c}(\pm k, \mathfrak{s})_{\mathbf{q}_i}^{\mathbf{q}_j} \mathbf{q}_i$), a transição da *configuração-m* \mathbf{q}_i para a *configuração-m* \mathbf{q}_j , dado o estado de informação da *célula* sob leitura ser \mathfrak{s} , é feita por via da realização das operações $\mathbf{c}(\pm k)$.

Considere-se, agora, duas *máquinas-a* alternativas, ambas com duas *configurações-m*, que designamos por \mathbf{q}_0 e \mathbf{q}_1 , sendo \mathbf{q}_0 a *configuração-m* inicial e \mathbf{q}_1 a *configuração-m* final. Assume-se que a cabeça de leitura se encontra a ler a primeira *célula* de uma fita em branco.

Os *morfismos* correspondentes a cada uma das duas *máquinas-a* alternativas são dados por:

$$\Delta^3(\mathbf{a}(1, 2)_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}_1}) \quad (229)$$

$$\Delta^3(\mathbf{b}(1, 2)_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}_1}) \quad (230)$$

ou, equivalentemente:

$$\mathbf{q}_0 \xrightarrow{\mathbf{a}(1,2)} \mathbf{q}_1 \quad (231)$$

$$\mathbf{q}_0 \xrightarrow{\mathbf{b}(1,2)} \mathbf{q}_1 \quad (232)$$

No primeiro caso, $(\Delta^3(\mathbf{a}(1, 2)_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}_1})$ e $\mathbf{q}_0 \xrightarrow{\mathbf{a}(1,2)} \mathbf{q}_1$), a *máquina-a* insere um 0 na *célula* sob leitura, desloca a cabeça de leitura uma *célula* para a direita, entra na *configuração-m* \mathbf{q}_1 e pára, no segundo caso, a *máquina-a* insere um 1 na *célula* sob leitura, desloca a cabeça de leitura uma *célula* para a direita, entra na *configuração-m* \mathbf{q}_1 e pára. Denotamos a primeira *máquina-a* por \mathfrak{M}_0 e a segunda *máquina-a* por \mathfrak{M}_1 .

Considere-se, agora, um jogo de mercado em que os jogadores desconhecem qual das duas *máquinas-a* será implementada e a informação disponível aos *jogadores* se encontra sincronizada com a computação da *máquina-a*, tal que apenas quando a *máquina* pára, entrando na sua *configuração final*, é que os jogadores têm acesso ao resultado final da computação. Então, estes jogadores encontram-se num contexto de incerteza, em relação à computação a ser realizada pela *máquina-a*.

Assuma-se, ainda, que cada jogador pode comprar um *bilhete de aposta* no início da computação da *máquina-a*, bilhete, este, que paga um *payoff* igual a $\phi(0)$, ao titular, se 0 for inserido na fita, e paga um *payoff* igual a $\phi(1)$, se 1 for inserido na fita, tais que $\phi(0) \geq 0$ e $\phi(1) \geq 0$, mas $\phi(0) \neq \phi(1)$.

Assuma-se, também, que existe um mercado para a compra e venda destes bilhetes, sendo o preço fixado no início da computação da *máquina-a* (quando esta se encontra na sua *configuração-m* \mathbf{q}_0), correspondendo ao preço de equilíbrio entre a procura de *bilhetes* por parte dos jogadores e a oferta de bilhetes por parte de uma agência emissora dos mesmos.

Nenhum dos jogadores, nem a agência emissora dos bilhetes, conhecem qual a *máquina-a* a ser implementada, sabem somente que ou \mathfrak{M}_0 ou \mathfrak{M}_1 será implementada, restando-lhes esperar pelo resultado que é apenas conhecido quando a *máquina-a* entra na sua *configuração-m final* (\mathfrak{q}_1).

Dado que ninguém, no mercado, sabe qual a *máquina-a* que será implementada, ninguém consegue antecipar qual o resultado que vai obter na aposta.

Para além dos bilhetes, considera-se, também, a existência de um seguro que garante um *payoff* que paga um montante M tal que:

$$M = \begin{cases} m(\phi_+ - \phi_-) & \text{se } \phi(\mathfrak{s}) = \phi_- \\ 0 & \text{se } \phi(\mathfrak{s}) = \phi_+ \end{cases} \quad (233)$$

em que $\phi(\mathfrak{s})$ é o *payoff* para o *bit* resultante da computação da *máquina de Turing* do jogo, $\phi_+ = \max(\phi(0), \phi(1))$, $\phi_- = \min(\phi(0), \phi(1))$ e:

$$m(\phi_+ - \phi_-) \leq \phi_+ \quad (234)$$

Ou seja, o seguro compensa o jogador, por um montante de $m(\phi_+ - \phi_-)$, não superior a ϕ_+ , para o caso em que a *máquina-a* implementada for aquela que conduz ao valor de *payoff* mais baixo nos *bilhetes de aposta*. Tal como existe um mercado para os *bilhetes*, existe, também, um mercado para os seguros.

Neste jogo, cada jogador pode, ainda, assumir uma posição compradora ou vendedora, num activo sem risco a uma taxa de juro sem risco de r , em regime de capitalização contínua.

Os elementos relevantes, neste caso, são o seguro e o preço de mercado do seguro, que definem um *pricing* para o risco. Procura-se, assim, uma metodologia de avaliação do seguro, tal que a estrutura do jogo e o risco sejam reflectidos no preço de mercado do seguro.

Nesse sentido, considere-se, em primeiro lugar, os elementos do jogo sem o seguro. Dado que os jogadores podem comprar o *bilhete de aposta* e financiar essa compra por via do activo sem risco, torna-se possível, a cada jogador, construir apostas com diferentes perfis de *payoffs*.

Assumindo a divisibilidade de todos os activos transaccionados em mercado e com base nesta possibilidade, segue-se que, considerando o preço de mercado Φ para os *bilhetes de aposta*, preço, este, que constitui, por pressuposto, o preço de equilíbrio entre a oferta e a procura, pode ser identificado, neste preço, uma avaliação do mercado, subjacente ao custo computacional de um 0 e de um 1, este custo designamos por *preço de Turing*, pois refere-se à computação realizada por uma *máquina de Turing*.

Acerca dos *preços de Turing*, importa considerar o seguinte teorema:

Teorema 1 (*preços de Turing*):

Seja Φ o preço de equilíbrio de mercado para um *bilhete de aposta* acerca de a computação ser realizada por uma *máquina-a* \mathfrak{M} , desconhecida, mas que pode, apenas, ser uma das duas *máquinas-a* \mathfrak{M}_0 ou \mathfrak{M}_1 , e seja r a taxa de juro sem risco, então, sob o pressuposto de divisibilidade dos bilhetes, o *preço de Turing* do *bit* 0 é:

$$\mathfrak{T}(0) = \frac{\Phi - \phi(1)e^{-r\tau}}{\phi(0) - \phi(1)} \quad (235)$$

sendo, o *preço de Turing* do *bit* 1:

$$\mathfrak{T}(1) = \frac{\Phi - \phi(0)e^{-r\tau}}{\phi(1) - \phi(0)} \quad (236)$$

Demonstração:

O *preço de Turing* do *bit* \mathfrak{s} constitui o custo da estratégia que produz como *payoffs* a função:

$$f(\mathfrak{s}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \\ 0 & \text{se } \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \end{cases} \quad (237)$$

em que \mathfrak{M} é a *máquina-a* do jogo.

Para o caso do *bit* 0, considere-se uma *posição longa* (compradora) no *bilhete de aposta* e *curta* (vendedora) no activo sem risco, tal que o montante do reembolso mais juros no final da computação da *máquina-a* é igual a $-\phi(1)$. Então, para esta estratégia, temos o seguinte perfil de *payoffs*:

$$\begin{cases} \phi(0) - \phi(1) & \text{se } \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \\ 0 & \text{se } \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \end{cases} \quad (238)$$

O custo desta estratégia é:

$$\mathfrak{A}(0) = \Phi - \phi(1)e^{-r\tau} \quad (239)$$

em que τ é o tempo de computação entre \mathfrak{q}_0 e \mathfrak{q}_1 para uma *máquina-a*.

Dado o pressuposto de divisibilidade, pode-se assumir uma posição numa parte deste activo artificial, dada pela quantidade $\frac{1}{\phi(0) - \phi(1)}$, de onde resulta o custo:

$$\mathfrak{T}(0) = \frac{\Phi - \phi(1)e^{-r\tau}}{\phi(0) - \phi(1)} \quad (240)$$

para uma estratégia com *payoff*:

$$\begin{cases} 1 & \text{se } \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \\ 0 & \text{se } \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \end{cases} \quad (241)$$

o que demonstra (235).

Para o caso do *bit* de interesse ser 1, assume-se um reembolso com capital mais juros igual a $\phi(0)$ tal que se obtém o perfil:

$$\begin{cases} \phi(1) - \phi(0) & \text{se } \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \\ 0 & \text{se } \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \end{cases} \quad (242)$$

estratégia que tem um custo de:

$$\mathfrak{A}(1) = \Phi - \phi(0)e^{-r\tau} \quad (243)$$

Dado o pressuposto de divisibilidade, pode-se assumir uma posição numa parte deste activo artificial, dada pela quantidade $\frac{1}{\phi(1) - \phi(0)}$, de onde resulta o custo:

$$\mathfrak{T}(1) = \frac{\Phi - \phi(0)e^{-r\tau}}{\phi(1) - \phi(0)} \quad (244)$$

para uma estratégia com *payoff*:

$$\begin{cases} 1 & \text{se } \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \\ 0 & \text{se } \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \end{cases} \quad (245)$$

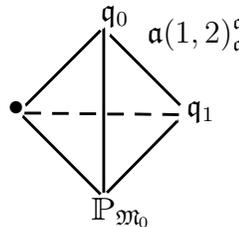
o que demonstra (236).

Q.E.D.

Em termos económicos, os *preços de Turing* coincidem com a noção de *preços Arrow-Debreu* (Huang e Litzenberger, 1988; Lengwiler, 2004). Importa restringir os *preços de Turing* a uma positividade, o que é garantido pelas desigualdades $\phi_- \leq \Phi e^{r\tau} \leq \phi_+$.

A *computação adaptativa da situação de risco*, pelo mercado, permite conectar os *preços de Turing* a uma *probabilização sistémica* por via da *formalização quântica financeira da situação de risco*.

Considere-se, assim, os *morfismos* subjacentes a cada uma das *máquinas-a* alternativas. Temos, então, para \mathfrak{M}_0 , o *morfismo* $\Delta^3(\mathfrak{a}(1, 2)_{q_0}^{q_1})$, ou seja:



$$(246)$$

em que $\mathbb{P}_{\mathfrak{M}_0}$ é a *propriedade sistêmica* emergente a partir da *máquina-a* \mathfrak{M}_0 na sua actividade computacional, e que permite sinalizar a *computação* como sendo aquela que é realizada pela *máquina-a* \mathfrak{M}_0 .

Por seu turno, para a *máquina-a* \mathfrak{M}_1 , o *morfismo* correspondente $\Delta^3(\mathfrak{b}(1, 2)_{\mathfrak{q}_0}^{\mathfrak{q}_1})$ tem a seguinte estrutura:

$$\begin{array}{c}
 \mathfrak{q}_0 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \bullet \quad \text{---} \quad \mathfrak{q}_1 \\
 \nwarrow \quad \nearrow \\
 \mathbb{P}_{\mathfrak{M}_1}
 \end{array}
 \quad \mathfrak{b}(1, 2)_{\mathfrak{q}_0}^{\mathfrak{q}_1}
 \tag{247}$$

Para o sistema de jogadores, cada uma destas duas *pirâmides mórificas* sintetiza uma de duas *histórias sistêmicas possíveis* para a *máquina-a* e, logo, para o jogo. Existindo duas possibilidades, existe contingência no que respeita às *histórias sistêmicas*.

As *histórias possíveis* podem ser, então, reunidas naquilo que constitui uma avaliação da totalidade da *situação sistêmica de risco*, conduzindo a uma *categoria* \mathcal{J} , a *categoria das histórias sistêmicas possíveis do jogo*. A *categoria* \mathcal{J} é composta por dois *morfismos* com a mesma representação de *3-simplex* que (246) e (247), com a única excepção de que o vértice da *propriedade sistêmica* passa a ser $\mathbb{P}_{\mathcal{J}}$.

A passagem da identificação da *categoria* das *histórias possíveis* à *computação sistêmica de probabilidades de jogo*, resulta da expansão da *categoria* \mathcal{J} para a *categoria quântica* \mathcal{Q} , a qual resulta da expansão do campo $\Psi_{\{\mu, \nu\}}$ de \mathcal{J} , para um novo campo $\Psi'_{\{\mu, \nu\}}$ que atribui um valor à *conectividade do ponto geométrico originante* a \mathfrak{q}_0 tal que se passa da *categoria* \mathcal{J} com *teia mórfica* subjacente:

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathfrak{a}(1, 2) & \\
 & \begin{array}{c} \rightleftarrows \\ \leftleftarrows \end{array} & \\
 \mathfrak{q}_0 & \mathfrak{b}(1, 2) & \mathfrak{q}_1 \\
 & \begin{array}{c} \rightleftarrows \\ \leftleftarrows \end{array} &
 \end{array}
 \tag{248}$$

a uma *categoria* \mathcal{Q} :

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathfrak{a}(1, 2) & \\
 & \begin{array}{c} \rightleftarrows \\ \leftleftarrows \end{array} & \\
 \bullet \xrightarrow{h} \mathfrak{q}_0 & \mathfrak{b}(1, 2) & \mathfrak{q}_1 \\
 & \begin{array}{c} \rightleftarrows \\ \leftleftarrows \end{array} &
 \end{array}
 \tag{249}$$

ou seja, existe agora um *morfismo* adicional $\bullet \xrightarrow{h} \mathfrak{q}_0$ associado à *conectividade* entre o *ponto geométrico originante* e \mathfrak{q}_0 . Em termos tensoriais, temos:

$$\mathfrak{q}_0 = h \bullet \tag{250}$$

estando a lidar-se com uma *categoria*, torna-se necessário considerar os resultados da *composição algébrica de fundamentos* das seguintes duas *cadeias*:

$$\bullet \xrightleftharpoons[h]{\mathfrak{a}(1,2)} \mathfrak{q}_0 \xrightleftharpoons[\leftarrow]{\rightarrow} \mathfrak{q}_1 \quad (251)$$

$$\bullet \xrightleftharpoons[h]{\mathfrak{b}(1,2)} \mathfrak{q}_0 \xrightleftharpoons[\leftarrow]{\rightarrow} \mathfrak{q}_1 \quad (252)$$

trabalhando com a notação tensorial define-se, então:

$$a_{\bullet}^{\mathfrak{q}_1} = \mathfrak{a}(1, 2)_{\mathfrak{q}_0}^{\mathfrak{q}_1} h_{\bullet}^{\mathfrak{q}_0} \quad (253)$$

$$b_{\bullet}^{\mathfrak{q}_1} = \mathfrak{b}(1, 2)_{\mathfrak{q}_0}^{\mathfrak{q}_1} h_{\bullet}^{\mathfrak{q}_0} \quad (254)$$

em que a e b são *fundamentos mórficos* distintos. Assim, a transição de \mathcal{J} para \mathcal{Q} é tal que, em \mathcal{Q} , ocorre uma *computação categorial* das *histórias possíveis* a partir da *conectividade mórfica* de \mathfrak{q}_1 com a *origem sistémica*, tal que, o *morfismo* $\bullet \xrightleftharpoons[h]{\rightarrow} \mathfrak{q}_0$ permite distinguir os dois *ramos* alternativos na *conectividade mórfica* entre \bullet e \mathfrak{q}_1 .

Esta *computação sistémica* das alternativas, a partir do *ponto geométrico originante*, é assumida como reflectindo a avaliação sistémica, pelos jogadores, dos *payoffs* associados a cada *história alternativa* para a *máquina-a*, avaliação, esta, que conduz aos *preços de Turing*.

Nesse sentido, torna-se necessário considerar a natureza de a e b . Seguindo a *teoria quântica dos jogos* (Gonçalves e Gonçalves, 2007) introduz-se um *tensor* $\psi^{\mathfrak{s}}$ com $\mathfrak{s} = 0, 1$ tal que:

$$\psi^0 = a \quad (255)$$

$$\psi^1 = b \quad (256)$$

assumindo-se a e b como números complexos tais que:

$$\psi_{\mathfrak{s}}^* \psi^{\mathfrak{s}} = |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (257)$$

onde se utilizou a notação de soma de Einstein que soma o produto dos índices repetidos, e assumiu-se $\psi_{\mathfrak{s}}^*$ como correspondendo ao transposto conjugado de $\psi^{\mathfrak{s}}$, isto é: $\psi_{\mathfrak{s}}^* = \psi^{\mathfrak{s}\dagger}$.

Deste modo, os *fundamentos mórficos* a e b podem ser considerados como valores de um *tensor de amplitudes de probabilidades*, o que significa que a *computação categorial* está a associar à *categoria* \mathcal{Q} um *bit quântico*.

Para que o *bit quântico* reflecta os *preços de Turing* introduz-se um *operador Hamiltoniano financeiro* \hat{H} (Gonçalves e Gonçalves, 2007) e as seguintes duas equações:

$$\left[\hat{H} - \sqrt{e^{r\tau} \mathfrak{I}(\mathfrak{s})} \right] \psi^{\mathfrak{s}} = 0 \quad (258)$$

$$\sqrt{\frac{\exp(-r\tau)}{\mathfrak{I}(\mathfrak{s})}} \psi^{\mathfrak{s}} = 1 \quad (259)$$

A primeira equação define $\psi^{\mathfrak{s}}$ como um *tensor próprio* de \hat{H} , sendo os valores próprios dados por $\sqrt{e^{r\tau} \mathfrak{I}(\mathfrak{s})}$, a segunda equação corresponde a uma restrição de probabilidade, que limita cada $\psi^{\mathfrak{s}}$ a tomar um valor na recta real, tal que temos:

$$\psi^{\mathfrak{s}} = \sqrt{e^{r\tau} \mathfrak{I}(\mathfrak{s})} \quad (260)$$

logo, $\psi^{\mathfrak{s}}$ depende dos *preços de Turing*. De (255), (256) e (260) seguem-se, então, as igualdades:

$$a = \sqrt{e^{r\tau} \mathfrak{I}(0)} \quad (261)$$

$$b = \sqrt{e^{r\tau} \mathfrak{I}(1)} \quad (262)$$

logo, para os *morfismos* de \bullet para \mathfrak{q}_1 :

$$\begin{array}{c} \sqrt{e^{r\tau} \mathfrak{I}(0)} \\ \bullet \quad \rightleftarrows \quad \mathfrak{q}_1 \end{array} \quad (263)$$

$$\begin{array}{c} \sqrt{e^{r\tau} \mathfrak{I}(1)} \\ \bullet \quad \rightleftarrows \quad \mathfrak{q}_1 \end{array} \quad (264)$$

A condição de normalização (257) é satisfeita como passamos a demonstrar:

$$\begin{aligned} |a|^2 + |b|^2 &= \\ &= e^{r\tau} \mathfrak{I}(0) + e^{r\tau} \mathfrak{I}(1) = \\ &= e^{r\tau} \left(\frac{\Phi - \phi(1)e^{-r\tau}}{\phi(0) - \phi(1)} + \frac{\Phi - \phi(0)e^{-r\tau}}{\phi(1) - \phi(0)} \right) = \\ &= e^{r\tau} \left(\frac{\Phi - \phi(1)e^{-r\tau}}{\phi(0) - \phi(1)} - \frac{\Phi - \phi(0)e^{-r\tau}}{\phi(0) - \phi(1)} \right) = \\ &= e^{r\tau} \left(\frac{\phi(0)e^{-r\tau} - \phi(1)e^{-r\tau}}{\phi(0) - \phi(1)} \right) = e^{r\tau} \times e^{-r\tau} = 1 \end{aligned} \quad (265)$$

Deste modo, $|a|^2$ e $|b|^2$ correspondem a probabilidades associadas a cada *máquina de Turing* alternativa, pela *computação adaptativa* da *situação de risco*, pelo mercado, e reflectem, no valor da probabilidade, a avaliação do mercado em relação ao preço do bilhete Φ e a estrutura de *payoffs* ϕ_0 e ϕ_1 que determinam os *preços de Turing*, enquanto custos associados a cada um dos dois *bits* alternativos.

Considerando, agora, o *operador de payoffs* $\hat{\Pi}$ satisfazendo a seguinte *equação de valor próprio*:

$$\left(\hat{\Pi} - \phi(\mathfrak{s})\right)\psi^{\mathfrak{s}} = 0 \quad (266)$$

$$\langle \hat{\Pi} \rangle_{\psi} = \phi(0)|\psi^0|^2 + \phi(1)|\psi^1|^2 \quad (267)$$

segue-se que:

$$\Phi = e^{-r\tau} \langle \hat{\Pi} \rangle_{\psi} \quad (268)$$

De facto, temos:

$$\begin{aligned} e^{-r\tau} \langle \hat{\Pi} \rangle &= \\ &= e^{-r\tau} \phi(0) e^{r\tau} \frac{\Phi - \phi(1)e^{-r\tau}}{\phi(0) - \phi(1)} + e^{-r\tau} \phi(1) e^{r\tau} \frac{\Phi - \phi(0)e^{-r\tau}}{\phi(1) - \phi(0)} = \\ &= \phi(0) \frac{\Phi - \phi(1)e^{-r\tau}}{\phi(0) - \phi(1)} + \phi(1) \frac{\Phi - \phi(0)e^{-r\tau}}{\phi(1) - \phi(0)} = \\ &= \frac{\Phi(\phi(0) - \phi(1)) - \phi(0)\phi(1)e^{-r\tau} + \phi(1)\phi(0)e^{-r\tau}}{\phi(0) - \phi(1)} = \Phi \end{aligned} \quad (269)$$

Assim, o preço de mercado do *bilhete de lotaria* coincide com o *payoff* esperado, calculado a partir do *bit quântico* do jogo, e descontado à taxa de juro sem risco.

Com base nestes resultados, podemos, agora, introduzir *pricing do seguro*, através do seguinte *teorema de não-arbitragem*, demonstrado no **anexo A.**:

Teorema 2 (não-arbitragem):

Seja S o preço do seguro, com *payoff*:

$$M = \begin{cases} m(\phi_+ - \phi_-) & \text{se } \phi(\mathfrak{s}) = \phi_- \\ 0 & \text{se } \phi(\mathfrak{s}) = \phi_+ \end{cases} \quad (270)$$

em que $\phi(\mathfrak{s})$ é o *payoff* para o *bit* resultante da *computação da máquina de Turing* do jogo, $\phi_+ = \max(\phi_0, \phi_1)$, $\phi_- = \min(\phi_0, \phi_1)$, $m(\phi_+ - \phi_-) \leq \phi_+$. Defina-se \mathfrak{s}_+ tal que $\phi(\mathfrak{s}_+) = \phi_+$ e \mathfrak{s}_- tal que $\phi(\mathfrak{s}_-) = \phi_-$, então dado o operador \hat{M} tal que:

$$\hat{M}\psi^{\mathfrak{s}_-} = m(\phi_+ - \phi_-)\psi^{\mathfrak{s}_-} \quad (271)$$

$$\hat{M}\psi^{\mathfrak{s}_+} = 0 \cdot \psi^{\mathfrak{s}_+} \quad (272)$$

na ausência de *oportunidades de arbitragem*, S é tal que:

$$S = e^{-r\tau} \langle \hat{M} \rangle_{\psi} \quad (273)$$

Deste modo, o risco é avaliado pelo sistema, a partir das *amplitudes de probabilidade*, resultantes dos *preços de Turing*. Trata-se, neste caso, de uma avaliação do valor adaptativo de uma estratégia que protege o jogador no cenário adverso (veja-se o **anexo A.** para uma explicação deste facto).

O presente exemplo permite conectar três bases conceptuais centrais para a matemática do risco, a saber: a *teoria quântica dos jogos*; a matemática financeira e o trabalho de Savage (1972) acerca dos fundamentos da estatística.

Podemos considerar uma base de nomenclatura, adaptada a partir de Savage (1972) e combinada com a terminologia sistémica da ciência do risco, para trabalhar, de modo matemático, um modelo geral de uma *situação de risco*, assim, considera-se os três elementos descritivos centrais de uma *situação de risco*:

- A *situação sistémica*;
- O espaço de possibilidades de histórias da *situação sistémica*;
- A história actualizada da *situação sistémica*.

No caso do jogo trabalhado acima, a *situação sistémica* inclui dois sistemas computacionais, a saber: a *máquina de Turing*; o *mercado de apostas*.

A computação da *máquina* encontra-se determinada pelo programa implementado, o mercado de apostas constitui um sistema adaptativo complexo que, na ausência de conhecimento acerca da história final da *situação sistémica*, trabalha em contexto de incerteza.

Existem, neste caso, duas histórias sistémicas para o jogo, correspondentes às duas *máquinas de Turing* alternativas \mathfrak{M}_0 e \mathfrak{M}_1 . Os agentes adaptativos conhecem o funcionamento das *máquinas de Turing* e sabem que, se entrarem no jogo, comprando o *bilhete de aposta*, existem apenas duas alternativas de *payoffs*, a saber: $\phi(0)$, resultante da história computacional em que \mathfrak{M}_0 é implementada, e $\phi(1)$, resultante da história computacional em que \mathfrak{M}_1 é implementada.

O *espaço de possibilidades do jogo*, tal como este é *computado* pelo sistema adaptativo, é, então, dado pela *categoria \mathcal{J}* . A *computação do risco* pelo mercado faz emergir um *preço de equilíbrio de mercado* para os bilhetes de apostas, o qual pode ser conectado a um sistema de *preços de Turing*, conectáveis, por seu turno, a uma *computação quântica adaptativa* do mercado, sintetizada pela *categoria \mathcal{Q}* .

O *bit* inserido na fita é um resultado necessário, pois a máquina é determinística e limita-se a correr o programa que a caracteriza, enquanto tal. Deste modo, existe uma necessidade sistémica, associada às condições iniciais e à estrutura computacional que determinam toda a história do jogo, mas os jogadores, que estão no mercado, não têm acesso, nem às condições iniciais, nem à estrutura computacional, o único conhecimento que possuem é o facto de que se apostam, então, estão a apostar num contexto de incerteza, acerca de duas histórias alternativas, de tal modo que apenas \mathcal{J} e os *payoffs* são conhecidos, enquanto possibilidades.

Estes contextos decisoriais foram trabalhados por Savage na sua investigação acerca dos fundamentos da estatística. O problema central, para Savage, foi o problema das probabilidades e da relação entre as probabilidades e a cognição adaptativa dos jogadores, num jogo em que existe incerteza quanto ao resultado, incerteza, esta, que se relaciona com a posição sistémica do jogador que não lhe permite aceder, antes do final da *situação sistémica de risco*, ao resultado da mesma.

No seio da ciência do risco, que constitui o substrato científico para o trabalho matemático, desenvolvido na presente tese, o risco é inseparável da incerteza, isto é, incerteza e risco ocorrem em *correlação perfeita* nas dinâmicas das *situações de risco*, sendo o *risco* aplicável, enquanto noção, a qualquer *situação sistémica* em que exista incerteza, ameaças e oportunidades.

O trabalho de Savage pode ser sinalizado enquanto referência central, para a investigação acerca dos fundamentos sistémicos da teoria das probabilidades, pois o autor procurou, a partir do reconhecimento da presença de incerteza cognitiva, numa dada situação sistémica, formalizar, em termos matemáticos, os elementos decisoriais que conduzem a uma *computação do risco* por parte dos agentes adaptativos, computação, esta, que conduz a uma dada avaliação probabilística.

Assim, o trabalho de Savage pode, também, ser sinalizado como referência central para uma matemática do risco que vise eficácias científicas para o trabalho de investigação, fundamental e aplicado, desenvolvido no seio da ciência do risco.

O trabalho matemático desenvolvido acima, para o exemplo do jogo, parte de uma posição análoga à de Savage, trabalhando num contexto semelhante ao de Savage. Em particular, tanto em Savage, como no exemplo acima, trabalha-se com uma noção de *processo de probabilização adaptativa* por parte de jogadores num dado jogo.

Existe, contudo, uma diferença central entre o trabalho desenvolvido acima e a proposta de Savage, a saber: Savage trabalhou a partir de ordenações de preferências e de probabilidades para capturar a *probabilização adaptativa* conducente a uma formação de juízos probabilísticos, acerca de alternativas em contextos de incerteza, no exemplo acima, trabalhou-se com um mercado de apostas e com um *princípio de não-arbitragem* para capturar a *probabilização adaptativa*.

Trata-se, no exemplo apresentado, de trabalhar, num contexto matemático, uma economia de jogo em que se torna central a interacção entre agentes adaptativos e a capacidade dos mesmos em identificarem oportunidades no seio da situação, em particular, oportunidades de arbitragem e oportunidades de adaptação antecipadora ao risco por via de processos de protecção contra resultados, avaliados como sendo adversos (o seguro, vendido/construído artificialmente via *replicating portfolio* (ver demonstração no **anexo A.**)).

A diferença de abordagem, em relação a Savage, é de ordem sistémica, pois, Savage considera uma coincidência de ordenações de preferências e probabilísticas constitutivas de cada agente adaptativo e, logo, embora individuais, comuns a todos os agentes.

Em Savage não existe, primitivamente, um processo interactivo entre os agentes, a ordenação impõe-se a cada um por via da sua natureza individual. No caso acima, a computação do risco é uma computação sistémica resultante da própria auto-organização e adaptabilidade do colectivo de agentes adaptativos que compõe o mercado, enquanto sistema adaptativo complexo, enquadramento que é vantajoso para a base conceptual da ciência do risco, vinda da ciência dos sistemas.

Por outro lado, o facto de a computação das probabilidades resultar, não de uma ordenação, mas de uma avaliação adaptativa que busca oportunidades e se adapta às mesmas e que procura proteger-se do risco, utilizando uma racionalidade estratégica, permite incorporar, na teorização matemática do *processo de probabilização adaptativa*, a problematização sistémica e procura activa dos sistemas por mecanismos de adaptação ao risco que tirem partido das oportunidades identificadas e procurem protecção contra as ameaças.

As amplitudes de probabilidades ψ^s , resultantes da *computação categorial quântica*, permitem formalizar um processo de computação adaptativa do mercado, conducente a uma avaliação do preço de cada activo, tal que não existem *oportunidades de arbitragem*, o que significa que qualquer desvio, em relação aos preços resultantes da computação do mercado, seria rapidamente sinalizado pelo mesmo mercado e eliminado. O resultado final é semelhante àquele que leva os cosmólogos a introduzirem uma função de onda para as *histórias do universo*, sintetizando um cálculo conducente a uma amplitude de probabilidades para diferentes histórias possíveis alternativas.

Esta semelhança com a cosmologia quântica é reforçada pela *equação de Schrödinger independente do tempo* (*time independent Schrödinger equation*), para o *Hamiltoniano financeiro*, semelhante ao que ocorre na cosmologia quântica com o uso da equação de Wheeler-DeWitt (Hartle e Hawking, 1983; Hawking, 1984). A diferença é que, no caso dos cosmólogos, a teorização é *top-down*, enquanto que, neste caso, a equação (258) e a condição (259) resultam de uma síntese matemática acerca de um processo de auto-organização de mercado do qual emerge uma avaliação de risco, capturável a partir da *categoria \mathcal{Q}* , enquanto estrutura matemática, adequada à descrição da *situação do mercado*, logo, no contexto financeiro, trabalha-se no seio de uma abordagem *bottom-up*.

A abordagem *bottom-up* constitui uma posição central da *teoria quântica dos jogos* e da *econofísica quântica*, quando são trabalhados os contextos de sistemas adaptativos complexos (Gonçalves e Gonçalves, 2007; Sapsin e Soloviev, 2009).

A presença de incerteza e contingência quanto às histórias sistémicas, juntamente com uma computação de ameaças e oportunidades constituem, assim, os elementos sistémicos necessários a uma conceptualização de uma *situação de risco*, na qual a *teoria das categorias* e a *econofísica quântica* se tornam ferramentas úteis. Esta é a primeira ponte que pode ser estabelecida entre a base teórica computacional e categorial da matemática do risco e a modelação de sistemas em *situações de risco*, a segunda ponte é estabelecida a partir do trabalho das noções de *estocástico* e de *caos*, ao qual passamos seguidamente.

5.2. *Hipercomputação e caos*

A noção de *caos* assume, na ciência do risco, uma operatividade associada àquilo que, nas dinâmicas dos sistemas, é sinalizado como *ordem* no *aleatório*. Neste sentido, a noção de *caos* encontra-se relacionada com a noção de *estocástico*.

Poincaré expandiu a noção de *aleatoriedade* para níveis operacionais, relacionando-a com os termos gregos *stochos*, com o significado de *alvo*, e *stochastikos* com o significado de hábil no *objectivo*, ou *alvo* (Madeira e Gonçalves, 2009).

A diferença entre as duas noções, *aleatório* e *estocástico*, localiza-se ao nível conjectural dos padrões sistêmicos, sinalizados e configurados a partir da percepção de padrões de ritmicidade rotativa que emergem da dinâmica aleatória, sempre dependente das condições iniciais (Madeira e Gonçalves, 2009).

A eficácia operativa, que torna vantajoso o uso do termo *estocástico*, resulta do reconhecimento da presença de *estruturas estatistizáveis/probabilizáveis* em padrões sinalizáveis como *aleatórios*. A noção de *estocástico* aplica-se, deste modo, quando são localizadas, no *aleatório*, estruturas apreensíveis a partir de ferramentas matemáticas, em particular, de ferramentas estatísticas.

A noção de *caos* é, então, aplicada em sistemas cujas dinâmicas fazem emergir *padrões aleatórios* para os quais a noção de *estocástico* assume uma vantagem operativa, logo, o *caos* pode ser definido a partir da *estocasticidade*, em *padrões aleatórios*, emergentes da dinâmica dos sistemas, enquanto *estrutura* no *aleatório* (Prigogine e Stengers, 1986; Stewart [1989], 1991; Day, 1998; Madeira e Gonçalves, 2009).

O *caos* foi identificado na física, pela primeira vez, por Poincaré como resultado da análise da dinâmica gravítica para o problema das órbitas de três corpos (Stewart, [1989], 1991). Poincaré sinalizou, na sua análise, a existência de dinâmicas com padrões intrincados que se interpenetram transformando-se numa ordem feita de ordens exponenciadas em teia (Stewart, [1989], 1991).

O termo *caos* foi conceptualmente assumido e trabalhado, a partir do grego *khaos*, para um referente paradigmático cognitivo, sinalizado como uma estrutura primordial originante (Madeira e Gonçalves, 2009).

A noção grega de *khaos* sintetiza uma noção de vacuidade, trevas, indeterminação, desordem e totalidade indiferenciada. A raiz genética do termo, cosmogonicamente trajectada, permitiu um desenvolvimento do mesmo termo, para novos significados, agilizados por eficácias de ordem pragmática no seio da matemática, em particular, no que respeita a uma síntese conceptual para níveis de operatividade na captura de uma semântica de *ordem* no *aleatório* cuja acessibilidade computacional enfrenta limites fundamentais associados à capacidade dos sistemas em lerem as condições iniciais formativas e calcularem as leis de estrutura passíveis de uma apreensão preditiva dos *padrões* no *aleatório* (Madeira e Gonçalves, 2009).

A noção de *caos*, definida como *ordem no aleatório*, foi introduzida, na *dinâmica não-linear*, por Li e Yorke (1975), acerca da ocorrência de padrões complexos na dinâmica do *mapa logístico*. A mesma noção foi introduzida por via de uma adjectivação da dinâmica do *mapa* que, para determinados valores do parâmetro de controlo, produz padrões de turbulência e de aleatoriedade que se pensava apenas poderem ocorrer em sistemas com um número elevado de graus de liberdade, mas não em sistemas com um pequeno número de graus de liberdade (Li and Yorke, 1975).

Em termos matemáticos, o formalismo da *dinâmica não-linear*, em particular no que se refere aos *mapas não-lineares*, pode ser trabalhado, a partir de uma outra estrutura computacional abstracta com a mesma estrutura de uma *máquina de Turing*, mas com a diferença de que pode inserir, em cada *célula*, uma qualquer *totalidade sistémica categorial*. Isto é, uma qualquer *estrutura categorial* pode fazer parte da computação desta *máquina de Turing* expandida, a qual é, assim, capaz de *hipercomputação*. Passamos, deste modo, a trabalhar estas *máquinas-a* para a teorização matemática de sistemas dinâmicos, conectando a *incompressibilidade algorítmica* à noção de *caos*.

5.2.1. *Sistemas dinâmicos, (in)compressibilidade e não-periodicidade*

Seguindo o trabalho desenvolvido no capítulo anterior, considere-se um *espaço métrico* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{X}}$, tal que \mathcal{X} é a *categoria da métrica*. Seja $\mathcal{B}_\varepsilon(\bar{\mu})$ a *bola* composta pelos *morfismos* $\Delta^3(r_{\bar{\mu}}^\mu)$, com $\bar{\mu}$ fixo e μ tal que $r = d(\mu, \bar{\mu}) \leq \varepsilon$.

Um *mapa sobre* $\mathcal{B}_\varepsilon(\bar{\mu})$ é um *auto-functor*:

$$\mathcal{B}_\varepsilon(\bar{\mu}) \xrightleftharpoons{\varphi} \mathcal{B}_\varepsilon(\bar{\mu}) \quad (274)$$

ou, em termos de notação de *simplex categorial*:

$$\Delta^3\left(\varphi_{\mathcal{B}_\varepsilon(\bar{\mu})}^{\mathcal{B}_\varepsilon(\bar{\mu})}\right) \quad (275)$$

em que φ é tal que define, para as *estruturas mononodais*, uma função *sobrejectiva*, mas não necessariamente *injectiva*.

Seja \mathcal{S} um *sistema dinâmico* cujo *espaço de fases* $\mathcal{E}_\mathcal{S}$ pode ser capturado, em termos geométricos e topológicos, por uma *bola* $\mathcal{B}_\varepsilon^{\mathcal{S}}(\bar{\mu})$, tal que:

$$\mathcal{E}_\mathcal{S} \sim_{\varphi_{\mathcal{E}_\mathcal{S}}^{\mathcal{B}_\varepsilon^{\mathcal{S}}(\bar{\mu})}} \mathcal{B}_\varepsilon^{\mathcal{S}}(\bar{\mu}) \quad (276)$$

isto é, $\mathcal{E}_\mathcal{S}$ e $\mathcal{B}_\varepsilon^{\mathcal{S}}(\bar{\mu})$ são *isomorfas* sob o *isomorfismo de fundamento* $\varphi_\mathcal{S}$.

Então, se um *mapa sobre* $\mathcal{B}_\varepsilon^S(\bar{\mu})$, de *fundamento* φ , captura, em termos matemáticos, a lei dinâmica de transição de estado do sistema, assumindo passos discretos de tempo, de magnitude τ , segue-se que: se o estado do sistema no momento t for o *ponto de fase* (*ponto sistémico do espaço de fases*) $\varphi_S^{-1}(\mu)$, então, o estado seguinte é dado por $\varphi_S^{-1}(\varphi(\mu))$.

Na prática, pode-se investigar a dinâmica do sistema a partir de $\mathcal{B}_\varepsilon^S(\bar{\mu})$ e da lei dinâmica capturada, em termos abstractos, por φ , o que explica a prática simplificadora de se designar $\mathcal{B}_\varepsilon^S(\bar{\mu})$ por *espaço de fases*, correspondendo à *estrutura geométrica e topológica* cujos *pontos sistémicos* constituem uma representação matemática abstracta dos estados concretos do sistema. Seguimos esta prática e designamos os *pontos* de $\mathcal{B}_\varepsilon^S(\bar{\mu})$ por *pontos de fase*, sendo o estado do sistema num dado momento t descrito por um *ponto de fase*.

A lei dinâmica de transição de estado emerge a partir das relações sistémicas fundamentais que determinam, em termos estruturais, a ligação temporal causal entre dois estados, logo, entre dois *pontos de fase*, esta ligação temporal causal é expressa por um *functor de situs*, determinado pela lei dinâmica capturada, em termos abstractos, por φ tal que: se μ é o estado do sistema em t e $\nu = \varphi(\mu)$, então, temos o *functor de situs* de *fundamento* $\iota_\mu^\nu = \iota_\mu^{\varphi(\mu)}$, para a ligação entre o estado do sistema em t e em $t + \tau$. Por seu turno, entre t e $t + 2\tau$ a ligação é tal que:

$$\iota_\mu^{\varphi^{[2]}(\mu)} = \iota_{\varphi(\mu)}^{\varphi^{[2]}(\mu)} \iota_\mu^{\varphi(\mu)} \quad (277)$$

em que $\varphi^{[2]}(\mu) = \varphi(\varphi(\mu))$ corresponde à segunda *iterada* do *mapa*, em μ , sendo a primeira *iterada* $\varphi^{[1]}(\mu) = \varphi(\mu)$. Assim, para n -*iterações* temos:

$$\varphi^{[n]}(\mu) = \iota_\mu^{\varphi^{[n]}(\mu)} \mu \quad (278)$$

Uma sequência de *iterações*, a partir de um *ponto de fase inicial* μ , determina uma *trajectória* ou *órbita* no *espaço de fases*.

Uma abordagem computacional da dinâmica do sistema, utilizando a abordagem de Turing, trabalha com a estrutura $\mathcal{B}_\varepsilon^S(\bar{\mu})$, enquanto *alfabeto informacional*, sendo uma *órbita* inserida na *fitas*, de tal modo que uma sequência de n *iterações* é introduzida em $n + 1$ *células*, tais que: a primeira *célula* da fita contém o *ponto de fase inicial*, a segunda *célula* contém a primeira *iterada*, e assim sucessivamente até à $n + 1$ -*ésima célula* que contém a n -*ésima iterada*.

Assim, torna-se necessário rever o *alfabeto* de uma *máquina-a*. Trabalhando-se com as estruturas $\mathcal{B}_\varepsilon^S(\bar{\mu})$ enquanto *alfabetos*, torna-se necessário convencionar um símbolo para a *célula em branco*, que não 2, pois o número 2 poderá figurar como *ponto de fase* em algum *espaço de fases*. Por seu turno, utiliza-se o símbolo B para sinalizar a *célula em branco*. Do mesmo modo, para os deslocamentos da cabeça de leitura das *máquinas-a*, devido ao mesmo problema, passa-se a utilizar o símbolo $D_{\pm k}$, para um deslocamento da cabeça de leitura por $\pm k$ *células*.

As três estruturas genéricas para um passo computacional denotadas, na secção anterior, por $\mathfrak{a}(\pm k)$, $\mathfrak{b}(\pm k)$, $\mathfrak{c}(\pm k)$, têm, deste modo, de ser revistas, assim, para um *ponto de fase* μ , a inserção do mesmo na n -ésima *célula*, sob leitura, seguida de um deslocamento da cabeça de leitura da *máquina-a* por $\pm k$ *células*, é dada por uma *categoria* $\mathfrak{p}^\mu(\pm k)$, cujo *espaço de adjacência isomórfica universal* coincide com o *espaço de adjacência isomórfica universal* subjacente a $\mathcal{B}_\varepsilon^S(\bar{\mu})$ ($\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathcal{B}_\varepsilon^S(\bar{\mu})}}$) e com $D_{\pm k}$ e B enquanto *estruturas nodais* adicionais. A *categoria* $\mathfrak{p}^\mu(\pm k)$ é, então, composta pelos seguintes *morfismos*:

$$\Delta^5\left(n_\nu^\mu, n_B^\mu, \iota_\mu^{D_{\pm k}}\right) \quad (279)$$

em que μ é tomado como fixo e ν pode assumir qualquer valor em $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathcal{B}_\varepsilon^S(\bar{\mu})}}$, excepto μ , e a *composição algébrica de fundamentos* é tal que:

$$\iota_\nu^{D_{\pm k}} = \iota_\mu^{D_{\pm k}} n_\nu^\mu \quad (280)$$

$$\iota_B^{D_{\pm k}} = \iota_\mu^{D_{\pm k}} n_B^\mu \quad (281)$$

logo:

$$D_{\pm k} = \iota_\nu^{D_{\pm k}} \nu = \iota_\mu^{D_{\pm k}} n_\nu^\mu \nu \quad (282)$$

$$D_{\pm k} = \iota_B^{D_{\pm k}} B = \iota_\mu^{D_{\pm k}} n_B^\mu B \quad (283)$$

Por seu turno, a operação de colocar a n -ésima *célula*, sob leitura, em branco e deslocar a cabeça de leitura $\pm k$ *células* é dada pela *categoria* $\mathfrak{o}(\pm k)$, cujo *espaço de adjacência isomórfica universal* coincide com o *espaço de adjacência isomórfica universal* subjacente a $\mathfrak{p}^\mu(\pm k)$, e cujos *morfismos* são:

$$\Delta^4\left(n_\nu^B, \iota_B^{D_{\pm k}}\right) \quad (284)$$

em que ν pode assumir qualquer valor em $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathcal{B}_\varepsilon^S(\bar{\mu})}}$ e a *composição algébrica de fundamentos* é tal que:

$$\iota_\nu^{D_{\pm k}} = \iota_B^{D_{\pm k}} n_\nu^B \quad (285)$$

logo:

$$D_{\pm k} = \iota_\nu^{D_{\pm k}} \nu = \iota_B^{D_{\pm k}} n_\nu^B \nu \quad (286)$$

Dadas as *categorias* $\mathfrak{p}^\mu(\pm k)$ e $\mathfrak{o}(\pm k)$, correspondentes às operações fundamentais, temos os seguintes dois tipos de *morfismos* genéricos alternativos para um passo computacional:

$$\begin{array}{c} \mathfrak{o}(\pm k, s) \\ \mathfrak{q}_i \rightleftarrows \mathfrak{q}_j \end{array} \quad (287)$$

$$\begin{array}{c} \mathfrak{p}^\mu(\pm k, s) \\ \mathfrak{q}_i \rightleftarrows \mathfrak{q}_j \end{array} \quad (288)$$

em que $\mathfrak{o}(\pm k, \mathfrak{s})$ significa que $\mathfrak{o}(\pm k)$ é implementada pela *máquina-a* na transição da *configuração-m* \mathfrak{q}_i para a *configuração-m* \mathfrak{q}_j , quando o estado da *célula* sob leitura é \mathfrak{s} , e, de modo análogo, $\mathfrak{p}^\mu(\pm k, \mathfrak{s})$ significa que $\mathfrak{p}^\mu(\pm k)$ é implementada pela *máquina-a* na transição da *configuração-m* \mathfrak{q}_i para a *configuração-m* \mathfrak{q}_j , quando o estado da *célula* sob leitura é \mathfrak{s} .

Assumindo uma fita em branco e uma cabeça de leitura sobre a primeira *célula*, a *máquina-a*, para n iterações a partir de μ , denotada por $\mathfrak{M}(\varphi, \mu, n)$, é dada pela *cadeia*:

$$\mathfrak{q}_0 \xleftrightarrow{\mathfrak{p}^\mu(1,B)} \mathfrak{q}_1 \xleftrightarrow{\mathfrak{p}^{\varphi(\mu)}(1,B)} \mathfrak{q}_2 \dots \mathfrak{q}_n \xleftrightarrow{\mathfrak{p}^{\varphi^{[n]}(\mu)}(1,B)} \mathfrak{q}_{n+1} \quad (289)$$

ou, em termos do *simplex categorial* correspondente:

$$\Delta^{n+3} \left(\mathfrak{p}^\mu(1, B)_{\mathfrak{q}_0}^{\mathfrak{q}_1}, \mathfrak{p}^{\varphi(\mu)}(1, B)_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}, \dots, \mathfrak{p}^{\varphi^{[n]}(\mu)}(1, B)_{\mathfrak{q}_n}^{\mathfrak{q}_{n+1}} \right) \quad (290)$$

esta *máquina-a* introduz, assim, nas primeiras $n + 1$ *células* a sequência de *pontos de fase* $\mu, \varphi(\mu), \dots, \varphi^{[n]}(\mu)$, ou seja, a *órbita* sistema a partir de μ , sob φ , para n iterações.

O número $n + 3$ é obtido do seguinte modo: existem $n + 2$ *vértices* correspondentes às *configurações-m*, mais um *vértice* para a *propriedade sistêmica* $\mathbb{P}_{\varphi, \mu, n}$ que caracteriza as *configurações-m* como resultando das n iterações a partir de μ , sob φ , mais um *vértice* para o *ponto geométrico originante* \bullet , de onde resultam $n + 4$ *vértices*, logo, estamos perante um $n + 4 - 1$ -*simplex categorial*, isto é, um $n + 3$ -*simplex categorial*.

Considerando a possibilidade de continuar indefinidamente, e trabalhando com *cadeias infinitas* de iterações, temos:

$$\mathfrak{q}_0 \xleftrightarrow{\mathfrak{p}^\mu(1,B)} \mathfrak{q}_1 \xleftrightarrow{\mathfrak{p}^{\varphi(\mu)}(1,B)} \mathfrak{q}_2 \dots \quad (291)$$

que corresponde a um *simplex categorial*, cujo número de faces triangulares é a *cardinalidade* \aleph_0 dos números inteiros, ou seja, o primeiro *cardinal transfinito cantoriano*, assim, temos:

$$\Delta^{\aleph_0} \left(\mathfrak{p}^\mu(1, B)_{\mathfrak{q}_0}^{\mathfrak{q}_1}, \mathfrak{p}^{\varphi(\mu)}(1, B)_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}, \dots \right) \quad (292)$$

As *cadeias infinitas* tornam-se importantes na investigação de propriedades assintóticas e na investigação acerca da (*in*)*compressibilidade* e do *caos*, como veremos mais adiante na presente subsecção.

Considere-se, agora, como exemplo, o caso da família parametrizada dos *mapas logísticos* sobre a *bola* no espaço métrico dos números reais $\mathcal{B}_{0.5}^S(0.5)$, ou seja, o intervalo $[0, 1]$:

$$\varphi_a(\mu) = a \cdot \mu(1 - \mu) \quad (293)$$

A dinâmica resultante para estes *mapas* depende do valor do parâmetro a .

Um modo eficaz de visualizar a dinâmica consiste em considerar, para uma *cadeia finita* de n iterações, um cronograma que represente a sequência de valores presentes na fita da *máquina de Turing*, após a máquina parar.

Assim, por exemplo, para $n = 100$ iterações, se $a = 2$ (**figura 1(a)** do **anexo C.**), a dinâmica tende para um valor final fixo após algumas iterações, trata-se de uma dinâmica de ponto fixo. Por seu turno, para o mesmo número de iterações, quando $a = 3.2$ (**figura 1(b)** do **anexo C.**) a dinâmica do sistema é atraída para uma dinâmica periódica. Para $a = 4$ (**figura 1(c)** do **anexo C.**), por seu turno, a dinâmica é caótica.

Li e Yorke (1975) trabalharam esta última dinâmica para o *mapa logístico*, a partir da noção de *caos*, tendo assumido a mesma noção para sintetizar um comportamento não-periódico e irregular no padrão dinâmico, gerado pela própria computação sistêmica, e não por uma diversidade de *choques exógenos* (Day, 1998). Day (1998) define, assim, *caos dinâmico*, no seu sentido mais geral, como *estocasticidade intrínseca*, logo, trabalhando, em termos sistêmicos, a noção de *caos* a partir da noção de *estocástico* e localizando, no próprio sistema, a fonte de *estocasticidade*, logo, de padrão apreensível no *aleatório*.

O elemento central da noção de Li e Yorke, conforme defendido pelos autores, é a *não-periodicidade dinâmica*, que é satisfeita para qualquer número de *iterações*, ou seja, a existência de *não-periodicidade não-transiente*, logo, não se trata de uma dinâmica *assimptoticamente periódica*.

Em termos computacionais, a consequência imediata é a *incompressibilidade* da *cadeia mórfica infinita* para uma *máquina-a* que computa as *iterações* do mapa.

Trata-se de uma *incompressibilidade algorítmica* de ordem superior, pois constitui um limite à *hipercomputação*. Assim, por exemplo, no caso do *mapa logístico*, o número de Chaitin, Ω (que se encontra no intervalo $[0, 1]$) pode ser inserido por uma *máquina-a* na fita, por outro lado, tomando $\mu = \Omega$, a *máquina-a* das *iterações* do *mapa logístico*, para um valor do parâmetro conducente a um *ponto fixo* *assimptótico*, vai computar a *órbita* a partir de Ω e conduzir a esse *ponto fixo*.

A *aleatoriedade* de Ω , sinalizada por Chaitin a partir da noção de *incompressibilidade algorítmica*, *aleatoriedade*, esta, que constitui um limite para a *computação binária*, não constitui um limite para a *hipercomputação* que está a ser trabalhada na presente secção.

Contudo, a dinâmica caótica conduz a *cadeias incompressíveis*, com a *incompressibilidade* definida a partir de um tipo de *máquinas-a* que designamos por *máquinas cíclicas*. Para explicitar, neste contexto, o sentido da *compressibilidade/incompressibilidade*, considere-se o caso das *órbitas periódicas*.

Dada uma *cadeia infinita* $\Delta^{\aleph_0}(\mathbf{p}^\mu(1, B)_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}_1}, \mathbf{p}^{\varphi(\mu)}(1, B)_{\mathbf{q}_1}^{\mathbf{q}_2}, \dots)$, para uma dinâmica de ponto fixo, após alguns passos, cada *célula* passa a ter o mesmo valor impresso, o que significa que a partir de uma dada *célula* n_{tr} , até à qual é identificável uma *dinâmica transiente*, para todo o $n > n_{\text{tr}}$ tem-se a mesma informação a ser inserida pela *cadeia*, a saber: o ponto fixo.

Como exemplo, no caso do mapa logístico φ_2 , para $\mu = 0.2512343$, uma *cadeia* de dez iterações, calculada pelo *software Efchaos*, apresenta um transiente até $n_{\text{tr}} = 4$, com $\varphi^{[4]}(0.2512343) \cong 0.499993$, sendo $\varphi^{[5]}(0.2512343) = 0.5$ que é o valor do ponto fixo. Note-se que, neste caso, o fim de um *transiente* pode ser definido pelo primeiro valor igual a 0.5 ou a 0.49999..., ou a um valor suficientemente aproximado, de 0.49999..., no caso, $\varphi^{[4]}(0.2512343)$ poderia ser considerado como já não pertencendo ao *regime transiente*, sendo o *transiente* definido até $n = 3$, para o qual o *software* calculou o valor $\varphi^{[3]} \cong 0.4981227$.

Regressando à análise da *compressibilidade*, no caso da órbita de ponto fixo, a cadeia infinita pode ser reduzida a uma *máquina de Turing*, definida por uma *teia mórfica finita* dada pelo seguinte *morfismo*:

$$\Delta^{n_{\text{tr}}+4}\left(\mathbf{p}^\mu(1, B)_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}_1}, \mathbf{p}^{\varphi(\mu)}(1, B)_{\mathbf{q}_1}^{\mathbf{q}_2}, \dots, \mathbf{p}^{\varphi^{[n_{\text{tr}}]}(\mu)}(1, B)_{\mathbf{q}_{n_{\text{tr}}}}^{\mathbf{q}_{n_{\text{tr}}+1}}, \mathbf{p}^{\mu_1}(1, B)_{\mathbf{q}_{n_{\text{tr}}+1}}^{\mathbf{q}_{n_{\text{tr}}+1}}\right) \quad (294)$$

em que μ_1 é o ponto fixo, ou seja, $\varphi(\mu_1) = \mu_1$. A *máquina-a* segue a sequência de *iterações* até n_{tr} , depois desloca a cabeça de leitura para a direita, e entra num ciclo computacional, em que insere, em cada *célula*, subsequente o valor do ponto fixo μ_1 .

O número $n_{\text{tr}} + 4$ é obtido do seguinte modo: existem $n_{\text{tr}} + 2$ *vértices* para as *configurações-m* necessárias para computar a *dinâmica transiente*, por outro lado, para o ciclo computacional, estamos perante um *automorfismo*, logo, necessitamos de um *vértice* adicional para $\mathbf{q}_{n_{\text{tr}}+1}$, de onde resultam $n_{\text{tr}} + 3$ *vértices* para as *configurações-m*, mais um *vértice* para a *propriedade sistémica* $\mathbb{P}_{\varphi, \mu}$ que caracteriza as *configurações-m* como resultando das iterações a partir de μ , sob φ , mais um *vértice* para o *ponto geométrico originante* \bullet , de onde resultam $n_{\text{tr}} + 5$ *vértices*, logo, estamos perante um $n_{\text{tr}} + 5 - 1$ -*simplex categorial*, isto é, um $n_{\text{tr}} + 4$ -*simplex categorial*.

Por seu turno, para uma *cadeia finita* correspondente a $N > n_{\text{tr}}$ *iterações*, a *máquina-a* é dada pelo seguinte *morfismo*:

$$\begin{aligned} & \Delta^{n_{\text{tr}}+5} \\ & \left(\mathbf{p}^\mu(1, B)_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}_1}, \dots, \mathbf{p}^{\varphi^{[n_{\text{tr}}]}(\mu)}(N - n_{\text{tr}}, B)_{\mathbf{q}_{n_{\text{tr}}}}^{\mathbf{q}_{n_{\text{tr}}+1}}, \right. \\ & \left. \mathbf{p}^{\mu_1}(-1, B)_{\mathbf{q}_{n_{\text{tr}}+1}}^{\mathbf{q}_{n_{\text{tr}}+1}}, \mathbf{p}^{\mu_1}(N - n_{\text{tr}} + 1, \mu_1)_{\mathbf{q}_{n_{\text{tr}}+1}}^{\mathbf{q}_{n_{\text{tr}}+2}} \right) \quad (295) \end{aligned}$$

Esta *máquina-a* segue o mesmo programa que a *máquina-a* anterior, computando, primeiro, o *transiente*. No final do *transiente* (em n_{tr} iterações), a *máquina-a* encontra-se a ler a *célula* $n_{\text{tr}} + 1$ e existem $N - n_{\text{tr}}$ iterações que falta computar, deste modo, a *máquina-a* desloca a cabeça de leitura $N - n_{\text{tr}}$ vezes para a direita, entrando na *configuração-m* $\mathfrak{q}_{n_{\text{tr}}+1}$. Nesta *configuração-m*, se a *célula* sob leitura estiver em branco a *máquina-a* insere μ_1 na *célula* sob leitura, desloca-se uma *célula* para a esquerda, mantendo-se nesta *configuração-m*, assim, encontrando-se num ciclo computacional, até encontrar a primeira *célula* com conteúdo informacional μ_1 , neste último caso, a *máquina-a* mantém o conteúdo informacional da *célula* e desloca a cabeça de leitura $N - n_{\text{tr}} + 1$ *células* para a direita, entrando na *configuração-m* $\mathfrak{q}_{n_{\text{tr}}+2}$ a qual é uma *configuração-m* de paragem.

Após o fim do *transiente*, quer no caso finito, quer no caso infinito, a *cadeia* é *compressível* a uma *computação cíclica*.

Considere-se, então, para qualquer sequência de *iterações*, as sequências *pós-transiente*, e introduza-se uma *máquina-a* que começa com a fita em branco e escreve na primeira *célula* $\varphi^{[n_{\text{tr}}+1]}(\mu)$, a *máquina-a* prossegue, indefinidamente, no cálculo daquilo que é a *dinâmica pós-transiente*, logo, para uma *dinâmica* de ponto fixo, $\varphi(\mu_1) = \mu_1$, esta *máquina-a*, que denotamos por $\mathfrak{M}(\varphi, \mu_1)$, é definida pelo *automorfismo*:

$$\Delta^3(\mathfrak{p}^{\mu_1}(1, B)_{\mathfrak{q}_0}^{\mathfrak{q}_0}) \quad (296)$$

A *dinâmica* de ponto fixo corresponde a uma *dinâmica* de período 1. Em termos gerais, temos a definição de uma *dinâmica* de período $p \geq 1$:

$$\varphi^{[n \times p]}(\mu_p) = \mu_p \quad (297)$$

em que μ_p é designado por *ponto de período* p e $n \geq 1$. Sendo μ_p um *ponto de período* p , segue-se que as $p - 1$ *iteradas* de μ_p são também *pontos de período* p .

Uma *máquina-a*, capaz de capturar uma *dinâmica pós-transiente* de ciclo de período $p > 1$, é, assim, dada pelo *morfismo*:

$$\Delta^{p+1}\left(\mathfrak{p}^{\mu_p}(1, B)_{\mathfrak{q}_0}^{\mathfrak{q}_1}, \dots, \mathfrak{p}^{\varphi^{[p-1]}(\mu_p)}(1, B)_{\mathfrak{q}_{p-1}}^{\mathfrak{q}_0}\right) \quad (298)$$

denotamos este tipo de *máquina* por $\mathfrak{M}(\varphi, \mu_p)$. De (298) resulta que a *máquina-a* $\mathfrak{M}(\varphi, \mu_p)$ introduz, na *fita*, μ_p seguido das $p - 1$ *iteradas* de μ_p , num ciclo computacional que repete essa sequência indefinidamente.

O número $p + 1$, para o *simplex categorial*, é obtido do seguinte modo: existem p *vértices* para as *configurações-m*, mais um *vértice* para a *propriedade sistémica* $\mathbb{P}_{\varphi, \mu_p}$ que caracteriza as *configurações-m* como resultando das *iterações*, a partir de μ_p , sob φ , mais um *vértice* para o *ponto geométrico originante* \bullet , de onde resultam $p + 2$ *vértices*, logo, estamos perante um $p + 2 - 1$ -*simplex categorial*, isto é, um $p + 1$ -*simplex categorial*.

Cada uma destas *máquinas* permite uma compressão computacional da *máquina de Turing das iterações* naquilo que são *ciclos computacionais*.

Com base neste tipo de *compressibilidade*, pode-se introduzir aquilo que designamos por *número de ciclo*, denotado por CN (*Cycle Number*), tal que:

$$\text{CN}[\mathfrak{M}(\varphi, \mu_p)] = p \quad (299)$$

Considerando a *máquina-a* para a *cadeia infinita* das iterações, a partir de μ , sob φ , definida pelo *simplex categorial* (299), que denotamos por $\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)$, pode-se definir uma *compressão algorítmica* em limite:

$$\text{limcomp}\{\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)\} = \mathfrak{M}(\varphi, \mu_p) \quad (300)$$

em que *limcomp* (*limite em compressão*) é definido, tal que: a igualdade (300) é satisfeita se, e somente se os seguintes limites forem satisfeitos simultaneamente (Gulick, 1992): $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi^{[n \times p]}(\mu) = \mu_p$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi^{[n \times p + 1]}(\mu) = \varphi(\mu_p), \dots$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi^{[(n+1) \times p - 1]}(\mu) = \varphi^{[p-1]}(\mu_p)$.

Importa relevar que, dado um *ponto de período* p , μ_p , temos:

$$\text{limcomp}\{\mathfrak{M}(\varphi, \mu_p, \aleph_0)\} = \mathfrak{M}(\varphi, \mu_p) \quad (301)$$

Considerando o *número de ciclo*, define-se, então, para $\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)$, satisfazendo (300):

$$\text{CN}[\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)] = \text{CN}[\text{limcomp}\{\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)\}] = \text{CN}[\mathfrak{M}(\varphi, \mu_p)] = p \quad (302)$$

por seu turno, para (301) temos:

$$\text{CN}[\mathfrak{M}(\varphi, \mu_p, \aleph_0)] = p$$

É importante relevar que o *número de ciclo* coincide com o número de *configurações-m* das *máquinas-a* $\mathfrak{M}(\varphi, \mu_p)$.

A *não-periodicidade* pode ser definida a partir desta noção de limite, tal que a *órbita*, a partir de μ , sob φ , é *não-periódica* se, e somente se, para todo o p , for o caso que não existe *limite em compressão* $\text{limcomp}\{\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)\}$, ou seja, não existe nenhum *ponto periódico*, para um qualquer período finito p , em que (300) seja satisfeita, deste modo, qualquer tentativa para capturar uma dinâmica periódica, após o *transiente*, para um número finito de *morfismos*, seria inútil, ou seja, a dinâmica contida na parte que se encontra para além do *transiente*, qualquer que seja o número de *iteraões*, é constituída por uma *cadeia mórfica* interminável, isto é, uma *cadeia* para a qual o *número de ciclo* se torna não comparável a qualquer dos números inteiros não-negativos (finitos), de onde resulta que o *número de ciclo* coincide com a cardinalidade de uma *cadeia infinita*, isto é, para *dinâmicas não-periódicas*:

$$\text{CN}[\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)] = \aleph_0 \quad (303)$$

logo, o número de *configurações- m* da *máquina- a* é infinito,, coincidindo com o primeiro *cardinal transfinito* de Cantor.

Este último resultado expressa uma perspectiva acerca de uma *dinâmica não-periódica* que considera esta dinâmica como se fosse um *ciclo infinito*, para o qual nunca chega a ocorrer um momento de repetição e, logo, o encerramento do ciclo num tempo finito. O trabalho de Cantor torna-se, neste contexto, útil, pois, conforme os resultados da **secção 3.2**, permite trabalhar uma *cadeia mórfica* não-terminável enquanto *totalidade mórfica transfinita*, de tal modo que a *não-periodicidade*, enquanto propriedade dinâmica, pode ser apreendida enquanto *ciclo transfinito*, ou seja, um *ciclo* que nunca se chega a encerrar numa periodicidade finita p . Importa considerar, pois, o seguinte teorema:

Teorema 3 (não-periodicidade):

A dinâmica resultante das iterações $\varphi^{[n]}(\mu)$ é *não-periódica* se, e somente se:

$$\text{CN}[\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)] = \aleph_0 \quad (304)$$

Demonstração:

Suficiência:

Seja $\text{CN}[\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)] = \aleph_0$, se a dinâmica fosse periódica com período $p \geq 1$, então, $\text{CN}[\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)] = p$, o que contradiz a hipótese de que $\text{CN}[\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)] = \aleph_0$, logo, não pode ser o caso que a dinâmica seja *periódica*.

Por outro lado, também não é o caso que a dinâmica seja *assimptoticamente periódica*, pois, então, ter-se-ia um ponto de período p , μ_p , tal que:

$$\lim\text{comp}\{\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)\} = \mathfrak{M}(\varphi, \mu_p) \quad (305)$$

o que significaria que ter-se-ia necessariamente, para o *número de ciclo* de $\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)$, $\text{CN}[\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)] = p$, logo, sempre que é o caso que $\text{CN}[\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)] = \aleph_0$ é, também, o caso que a dinâmica não pode ser periódica. Pelo que $\text{CN}[\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)] = \aleph_0$ é uma *condição suficiente* de *não-periodicidade*.

Necessidade:

Assuma-se que a dinâmica é *não-periódica* e que não é o caso que $\text{CN}[\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)] = \aleph_0$, então, existe uma *máquina- a* com um número finito de *morfismos* para os quais a máquina computa um ciclo de computação, logo, existe uma dinâmica periódica, o que viola o pressuposto de *não-periodicidade*. Assim, sempre que não é o caso que $\text{CN}[\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)] = \aleph_0$, não pode também ser o caso que a dinâmica seja *não-periódica*, logo, $\text{CN}[\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)] = \aleph_0$ é uma *condição necessária* de *não-periodicidade*

Q.E.D.

Deste modo, a relação entre a noção de uma *dinâmica não-periódica*, enquanto dinâmica de *período transfinito*, tem uma expressão natural no *formalismo categorial* das máquinas de Turing capazes de *hipercomputação*.

No caso, o *número de ciclo* da máquina de Turing, composta pela *cadeia infinita das iterações* de φ , a partir da condição inicial μ , é igual ao primeiro *cardinal transfinito* de Cantor, \aleph_0 , logo, estamos perante o caso de *periodicidade transfinita*, não compressível em nenhum ciclo computacional com *número de ciclo* finito, por maior que seja esse número.

Para que uma dinâmica seja *caótica* a *não-periodicidade* tem de conduzir a uma estrutura irregular que seja sinalizável como *estocástica*. Esta constitui uma definição genérica para uma *dinâmica caótica*, isto é: *dinâmica sistêmica não-periódica*, sinalizável como *estocástica*. Tendo sido a base para a introdução da noção por Li e Yorke (1978). Contudo, os autores sinalizaram, também, propriedades suficientes para a ocorrência de uma *dinâmica caótica*, o que conduz a uma noção de *categoria de dinâmicas caóticas*, no sentido de Li e Yorke, a saber:

Categoria de dinâmicas caóticas, no sentido de Li e Yorke (1978):

Seja $\Delta^3\left(\varphi_{\mathcal{B}_\varepsilon^S(\bar{\mu})}^{\mathcal{B}_\varepsilon^S(\bar{\mu})}\right)$ um *mapa* sobre $\mathcal{B}_\varepsilon^S(\bar{\mu})$, com φ contínua, considere-se a *categoria* \mathcal{V} , tal que $\mathcal{V} \prec_{\iota_X} \mathcal{B}_\varepsilon^S(\bar{\mu})$ (isto é, \mathcal{V} é uma *subcategoria* de $\mathcal{B}_\varepsilon^S(\bar{\mu})$) e tal que o *espaço de adjacência isomórfica universal* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_\mathcal{V}}$ é *não-contável*. Defina-se $\mathcal{I}(\mathcal{V}) \prec_{\iota_{\mathcal{I}(\mathcal{V})}} \mathcal{B}_\varepsilon^S(\bar{\mu})$, cujo *espaço de adjacência isomórfica universal* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathcal{I}(\mathcal{V})}}$ é tal que: para cada *ponto* μ de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathcal{I}(\mathcal{V})}}$, existe um n' finito tal que, para todo o $n \geq n'$, $\varphi^{[n]}(\mu)$ é um *ponto* de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_\mathcal{V}}$. Então, diz-se que \mathcal{V} é uma *categoria de dinâmicas caóticas*, no sentido de Li e Yorke, se, e somente se, as seguintes condições se verificam:

- **Não-periodicidade:** Para todo o *ponto de fase* μ de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathcal{I}(\mathcal{V})}}$:

$$\text{CN}[\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)] = \aleph_0 \quad (306)$$

- **Dependência sensível a desvios nas condições iniciais:** Para todo o par de *pontos de fase* distintos de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathcal{I}(\mathcal{V})}}$, μ, ν , é o caso que:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(\varphi^{[n]}(\mu), \varphi^{[n]}(\nu)) > 0 \quad (307)$$

em que $d(\cdot)$ é a medida de distância para o espaço métrico subjacente a $\mathcal{B}_\varepsilon^S(\bar{\mu})$.

- **Mistura:** Para todo o par de *pontos* distintos de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathcal{I}(\mathcal{V})}}$, μ , ν , é o caso que:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(\varphi^{[n]}(\mu), \varphi^{[n]}(\nu)) = 0 \quad (308)$$

- **Instabilidade das órbitas periódicas:** Para todo o *ponto* μ de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathcal{I}(\mathcal{V})}}$ e para todo o *ponto de fase periódico* μ_p :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} d(\varphi^{[n]}(\mu), \varphi^{[n]}(\mu_p)) > 0 \quad (309)$$

Li e Yorke identificaram, deste modo, quatro propriedades centrais que caracterizam dinâmicas sistêmicas sinalizáveis como *caóticas*.

A primeira propriedade é a *não-periodicidade*, tal que as *órbitas* em \mathcal{V} apresentam, todas elas, um *período transfinito*, ou seja, nunca podemos encontrar um período p finito, para o qual se encerra um ciclo. Deste modo, para cada μ em $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathcal{I}(\mathcal{V})}}$ (*espaço de adjacência isomórfica universal de pontos de fase* cujas *órbitas* são atraídas para \mathcal{V}), a *máquina-a* $\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)$ é tal que $\text{CN}[\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)] = \aleph_0$.

A segunda propriedade é a *dependência sensível das condições iniciais*. A noção de *dependência sensível das condições iniciais* diz-nos que dois sistemas que sigam a mesma regra dinâmica φ , mas cujas *condições iniciais* se encontrem numa vizinhança muito próxima, por mais próxima que seja essa vizinhança, as *órbitas* tendem a divergir.

A noção de *condições iniciais*, neste contexto, deverá ser tomada com algum cuidado. Em termos sistêmicos, as *condições iniciais formativas* de um sistema acompanham esse sistema durante o seu período de existência, no contexto da *matemática categorial*, essas *condições iniciais formativas* são formalizadas pelo *ponto geométrico originante*.

Assim, se um sistema \mathcal{S} , é tal que o seu *espaço de fases* pode ser capturado, em termos abstractos, por uma *bola* $\mathcal{B}_\varepsilon^S(\bar{\mu})$, segue-se que se μ é o *ponto de fase* da *bola* $\mathcal{B}_\varepsilon^S(\bar{\mu})$, que caracteriza o estado do sistema em t , então, para um passo temporal de τ , assumindo estabilidade da lei dinâmica, μ constitui aquilo que na matemática dos sistemas dinâmicos se costuma designar por *condição inicial dinâmica* em t de uma *órbita* $\varphi(\mu), \varphi^{[2]}(\mu), \varphi^{[3]}(\mu), \dots$, contudo, não se pode designar μ por *condição inicial formativa* do sistema, pois o sistema já existia antes de t .

O *ponto geométrico originante* permite capturar, na geometria topológica da *situação sistêmica*, a relação com aquilo que constitui a *origem sistêmica* nas suas *condições iniciais formativas*, *origem*, esta, permanentemente recomputada e que acompanha o sistema, (re)computação, esta, que é capturada no modelo matemático por via da representação de *simplex* conducente à *máquina-a* $\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)$.

Neste contexto, μ é a *condição inicial dinâmica*, enquanto *estado sistêmico inicial* da sequência de *pontos de fase*, à qual cada *ponto de fase* subsequente se encontra causalmente ligado.

A *dependência sensível das condições iniciais dinâmicas* constitui uma instabilidade na dinâmica do sistema, tal que uma leitura limitada do *estado sistémico* num qualquer momento do tempo, por parte de um segundo sistema, conduz a uma imprevisibilidade de longo prazo, mesmo que esse segundo sistema fosse capaz de aceder a uma *máquina de Turing*, capaz de *hipercomputação* e de simular a *órbita futura* do sistema nessa máquina, diferenças no registo inicial conduziriam a divergências futuras entre a simulação e a *órbita efectiva* do sistema.

A terceira propriedade – *mistura* –, juntamente com a *dependência sensível das condições iniciais dinâmicas*, conduz ao padrão irregular típico das *órbitas caóticas*. A terceira propriedade indica que, para cada par de *condições iniciais dinâmicas*, as *órbitas* futuras vão aproximar-se arbitrariamente uma da outra. Assim, a *instabilidade dinâmica* e a *mistura* podem explicar, ao nível dos efeitos, os processos que tendem a fazer emergir *órbitas* com uma aparência irregular, sinalizável em termos de uma leitura imediata e preliminar, como *aleatórias* e, posteriormente, sob aplicação de ferramentas matemáticas e estatísticas, como *estocásticas*.

A quarta propriedade é um elemento adicional que contribui para a irregularidade dinâmica que caracteriza uma *dinâmica caótica*, a saber: as *órbitas* periódicas, para qualquer período p finito, são instáveis, de tal modo que as três últimas propriedades tendem a produzir o comportamento irregular e o padrão complexo difícil de capturar em *schemata adaptativos* simples, sinalizado pela noção de *caos*, tal como esta é utilizada no seio da *dinâmica não-linear*.

É neste ponto que a capacidade explicativa da *teoria do caos* terminou. A teoria matemática foi capaz de sinalizar os *efeitos* e de se desenvolver para a construção de ferramentas adaptativas, relacionadas com a caracterização quantitativa e qualitativa do *caos*, mas a *causalidade* permanece inacessível.

A ciência matemática explorou os efeitos, mas a *causalidade fundamental* que faz emergir o *caos* não é capturada por aquilo que constitui a actual *teoria do caos*.

É possível antecipar, para alguns sistemas, a presença de *caos*, a partir da identificação de expoentes de Lyapunov positivos, que permitem sinalizar a presença de uma *dependência sensível das condições iniciais*, cálculo que permite perceber a existência de uma relação entre a ocorrência de *caos* e a estrutura fundamental de uma *lei dinâmica*, emergente a partir da estrutura de um sistema dinâmico. Li e Yorke encontraram uma demonstração de existência de *órbitas caóticas* para *mapas* sobre um *intervalo* com período 3. Sabe-se, no contexto de sistemas conservativos, que o *caos* também pode ter origem nos processos de destruição de *tori*, correspondentes a *dinâmicas quase-periódicas*.

Mas não existe, correntemente, uma *teoria do caos* capaz de ir para além dos *efeitos*. A evidência mais forte desta conclusão é o facto de que, para se investigar os padrões produzidos por *modelos abstractos de sistemas dinâmicos*, se torna necessário recorrer ao computador e simular os resultados. Os padrões emergentes são, em geral, desconhecidos até se obter os resultados das simulações.

Contudo, devido ao facto de os *softwares* humanos apresentarem limites no número de casas decimais, apenas aquilo que são *estruturas emergentes* gerais é que pode ser capturado, diferentes *softwares* conduzem a diferentes resultados, se trabalharem com diferentes níveis de precisão. Dois *softwares* que simulem o mesmo *mapa*, a partir das mesmas *condições iniciais dinâmicas*, vão diferir, com o tempo, entre si quando as *órbitas* são *caóticas* (Gonçalves e Madeira, 2009).

Embora se possa considerar uma correspondência computacional com uma *máquina de Turing* capaz de *hipercomputação*, não é, contudo, o caso que esta correspondência seja legítima, pois, devido aos limites de aproximação das ferramentas de simulação informáticas humanas a *hipercomputação* não é possível, o que conduz a limites de previsibilidade e limites adaptativos quanto ao uso da modelação matemática para prever o comportamento de sistemas com dinâmicas caóticas.

Uma implicação fundamental é que mesmo que a dinâmica concreta de um sistema seja capturável por um modelo matemático, se a dinâmica for caótica, a previsibilidade será sempre limitada devido a acumulação de erros, quer na leitura do estado concreto do sistema no início da simulação, quer nas computações realizadas pelo *software* de simulação.

No contexto de *dinâmicas caóticas*, a eficácia é obtida a partir da *estocasticidade*, isto é, de padrões estatísticos emergentes e generalizáveis, passíveis de capturarem uma *estocasticidade concreta* nos *sistemas*. Esta é a eficácia da *teoria do caos na ciência do risco*, o facto de, a partir de uma modelação de uma estrutura sistémica relacional, se capturar *padrões estocásticos*, presentes num determinado sistema. Um exemplo, em particular, é o caso da *turbulência multifractal*. Exemplo que passamos a rever.

5.2.2. *Turbulência multifractal, efeitos de Malcolm e risco num modelo de dois mapas não-lineares acoplados*

Como exemplo de *turbulência multifractal*, emergente a partir de um *mapa não-linear*, trabalhamos com um modelo de dois *mapas não-lineares acoplados* introduzidos por Madeira e Gonçalves (2009), os quais foram posteriormente adaptados por Gonçalves (2010), para a proposta de um modelo de economia artificial com um mercado financeiro.

As *máquinas de Turing* de uma só fita, capazes de *hipercomputação categorial*, trabalhadas acima, conseguem capturar a dinâmica computacional de um sistema complexo com uma dinâmica descrita por *mapas não-lineares acoplados*, contudo, torna-se mais útil trabalhar com *máquinas de Turing* de múltiplas fitas, aproximando o modelo de computação, daquilo que são os *softwares* de simulação, utilizados para a simulação de sistemas complexos.

Uma revisão aprofundada, das diferentes dinâmicas e da teoria dos *mapas não-lineares acoplados*, encontra-se para além dos objectivos da presente tese, assim, na presente secção, pretendemos, somente, exemplificar alguns padrões de risco associados à *sincronização dinâmica* e emergência de *turbulência multifractal*.

Considere-se, deste modo, uma *máquina-a* com duas *fitas*, a computação em cada *fita* é capturada, para N iterações, a partir de uma *máquina de iterações* $\mathfrak{M}(\varphi_i, \mu_i, N)$ em que φ_i é a *regra dinâmica* para a i -ésima *fita* e μ_i é o *ponto de fase inicial* para a i -ésima *fita*.

Tome-se $x \equiv \mu_1$ e $y \equiv \mu_2$ como assumindo valores no intervalo $[-1, 1]$. Tomando o momento inicial $t = 0$ e $\tau = 1$, a *órbita* pode ser indexada ao tempo pelo *número de iteração*, assim, $\mu_i(n)$ corresponde ao *ponto de fase* resultante da n -ésima iteração, inserido na $n + 1$ -ésima *célula* da i -ésima *fita*.

A estrutura fundamental de relações dinâmicas assumida, no presente exemplo, é a seguinte:

$$x(n) = (1 - \varepsilon)f_a(x(n-1)) + \varepsilon y(n-1) \quad (310)$$

$$y(n) = (b + x(n)^2)(r - y(n-1)) + x(n)^2 y(n-1)^3 \quad (311)$$

$$f_a(x(n-1)) = ax(n-1) - (a+1)x(n-1)^3 \quad (312)$$

A primeira equação (equação (310)) introduz um acoplamento entre o *mapa cúbico* (equação (312)) e o valor de $y(n-1)$, com constante de acoplamento ε . Assim, temos:

$$x(n) = \varphi_1(x(n-1)) = (1 - \varepsilon)f_a(x(n-1)) + \varepsilon y(n-1) \quad (313)$$

Para a variável dinâmica y , estão a ser adicionadas duas componentes dinâmicas, a saber: $x(n)^2 \cdot (r - y(n-1) + y(n-1)^3)$ e $b \cdot (r - y(n-1))$. A segunda componente introduz um efeito de reversão em relação a um valor central (*mean-reversion effect*), enquanto que a primeira contém a componente dinâmica não-linear. Assim, φ_2 é tal que:

$$\begin{aligned} y(n) &= \varphi_2(y(n-1)) \\ &= x(n)^2(r - y(n-1) + y(n-1)^3) + b(r - y(n-1)) \end{aligned} \quad (314)$$

Em φ_2 , $x(n)$ funciona como se fosse um parâmetro adaptativo.

Na **figura 2** do **anexo C.**, apresentamos os diagramas de bifurcações para $x(n)$ e $y(n)$, com $a = 3$, $b = 0.5$ e $r = 0.001$, variando ε .

Os diagramas evidenciam que: enquanto o comportamento das bifurcações, para $x(n)$, apresenta uma estrutura de *duplicação de período* e *caos* com *janelas periódicas* (**figura 2(a)**), os dados para $y(n)$, obtidos para valores de ε na região de *caos* com *janelas periódicas* em $x(n)$, evidenciam um padrão de turbulência nas bifurcações com a presença de regiões de uma *dinâmica caótica*, próxima de uma linha central e estruturas irregulares com saltos, correspondendo a dinâmicas de elevada variabilidade nos valores assumidos por $y(n)$ (**figura 2(b)**). Estas regiões de elevada variabilidade apresentam, no entanto, uma dinâmica mais estruturada do que as regiões centrais, como é evidenciado pelas estruturas identificáveis nos *diagramas de desfasamento* (*delay plots*) para $y(n)$ (**figura 3**).

Na **figura 3(a)**, é apresentado um *diagrama de desfasamento* para um valor de ε que conduz a uma região de elevada variabilidade para a dinâmica de y , enquanto que na **figura 3(b)** é apresentado um *diagrama de desfasamento* para um valor de ε que conduz a uma região de baixa variabilidade para a dinâmica de y .

Existe, em cada um dos casos, uma *estrutura heteroscedástica* com a forma de um duplo cone, contudo, esta estrutura de duplo cone adquire padrões com maior estrutura, no caso da dinâmica com maior variabilidade, do que no caso da dinâmica com menor variabilidade.

Considerando a representação bidimensional dos pares $(x(n), y(n))$, apresentada na **figura 4**, do mesmo anexo, pode ser identificada uma estrutura complexa de *atractor* para a *dinâmica caótica* em cada um dos casos de maior (**figura 4(a)**) e menor variabilidade para a dinâmica de y (**figura 4(b)**).

Ambos os *atractores* são tais que um valor de $y(n)$, perto de um dos extremos de variação, positivo ou negativo, ocorre em simultâneo com um valor de $x(n)$, perto de um dos extremos de variação, também positivo ou negativo.

Por outro lado, para valores $x(n)$, perto de um dos extremos de variação (positivo ou negativo), $y(n)$ tende a ocorrer numa região de elevada variabilidade. Esta estrutura dos atractores permite sinalizar o risco de ocorrência de um *efeito de Malcolm sincronizado* (Madeira e Gonçalves, 2009).

O *efeito de Malcolm* corresponde a uma transição súbita no comportamento de uma dinâmica caótica para uma fase turbulenta, marcada por saltos súbitos e elevada variabilidade, comparativamente com aquilo que constitui o intervalo de variação normal do sistema, sendo esta transição e o risco de ocorrência da mesma, uma consequência da estrutura não-linear do próprio sistema. O nome foi proposto por Crichton (1991), referindo-se ao seu personagem: o matemático Ian Malcolm.

O *efeito de Malcolm* constitui uma noção eficaz na análise do comportamento do *caos multifractal*, sendo observáveis *efeitos de Malcolm* na forma de *saltos repentinos* que se destacam em relação às variações mais frequentes da dinâmica sistémica (Madeira e Gonçalves, 2009; Gonçalves, 2010).

Regressando à **figura 4**, é de relevar que quando $y(n)$ apresenta valores próximos dos extremos de variação, parecem existir apenas duas, no máximo quatro, regiões alternativas concentradas de valores para $x(n)$, todas longe de 0 (este resultado é visível, em particular, no caso da **figura 4(a)**), o que significa que o risco de ocorrência de um *efeito de Malcolm* em $x(n)$ é bastante elevado.

Na **figura 5**, apresentamos um cronograma para $y(n)$, obtido a partir de uma simulação do sistema para parâmetros situados na região de baixa variabilidade. É visível a presença de turbulência nesta região, concentrações de volatilidade e saltos repentinos com valores para $y(n)$ que se destacam em relação às regiões de variação mais frequente³⁹ (*efeitos de Malcolm*).

A dinâmica de $y(n)$, apresentada na **figura 5**, revela a presença de efeitos de escala multifractais, conforme pode ser confirmado pelo *espectro multifractal*, apresentado na **figura 6** e estimado sobre os dados da **figura 5**. O espectro apresenta evidência de *multiscaling*, com uma moda próxima de 0.4, e uma amplitude elevada do espectro com α_{\max} acima de 0.85 e α_{\min} abaixo de 0.1.

Estes resultados são significativos, pois, com um sistema de equações com apenas duas variáveis, consegue-se produzir *turbulência multifractal*, com um cronograma que visualmente demonstra uma forma bastante irregular, típica de um processo de elevada dimensão. Para capturar este tipo de *turbulência*, os modelos de *spin glass* e os *modelos quânticos* são computacionalmente mais complexos.

Que, a partir de uma dinâmica com apenas duas variáveis, se consiga replicar *turbulência multifractal*, constitui evidência a favor da eficácia dos *mapas caóticos* na modelação dos sistemas e na análise do risco, em particular quando se colocam questões de limites à capacidade computacional.

A extensão do modelo de *mercado financeiro* de Gonçalves (2003), a múltiplos activos, por exemplo, é mais pesada em termos computacionais, do que este modelo, o que explica a proposta e testagem empírica de um modelo de *mercado financeiro* com múltiplos activos (Gonçalves, 2010).

39. A dinâmica apresenta *risco de cauda* elevado, pois o parâmetro de *curtose*, estimado empiricamente para os dados da **figura 5**, é de 8.616094, o que indica a presença de *caudas* mais pesadas que as da distribuição normal.

Capítulo 6. Conclusões

A presente tese, que procurou contribuir para a expansão e autonomização da matemática do risco, a partir dos seus fundamentos categoriais, foi colocada perante dois níveis discursivos, um primeiro nível que visa a própria matemática do risco, trabalhada a partir do substrato lógico do *cálculo categorial*, e um segundo nível que visa o próprio risco, objecto de investigação da matemática do risco.

Quando se trabalha a matemática do risco, a partir dos fundamentos, trabalha-se a partir da causalidade formativa do risco nos sistemas, é o pensamento científico acerca desta causalidade formativa e o pensamento ontológico e sistémico da ciência do risco que suportam toda a estruturação do trabalho, condicionando-o, assim como à reflexão acerca dos resultados e avaliação das consequências dos mesmos.

A matemática do risco, enquanto ramo autónomo da matemática, visa, desde logo, uma ligação com objectos concretos, a saber: os *sistemas*. O referente sistémico das redes de relações sistémicas em *situações de risco* nunca pode ser perdido, pelo que, na investigação acerca dos fundamentos da matemática do risco, torna-se necessário trabalhar a partir de uma lógica sistémica, pois é a partir da mesma que se pode estruturar o discurso formal da matemática do risco.

Existem, assim, três níveis de consequências a considerar, quando se investiga nos fundamentos da matemática do risco, a saber: as consequências para a própria matemática do risco; as consequências para a ciência do risco; as potenciais consequências para os problemas aplicados da ciência do risco, em que a mesma ciência e a matemática são utilizadas com valor instrumental.

Quando se trabalha a matemática do risco e a ciência do risco, qualquer resultado constitui, por si só, um contributo disponível para um agente adaptativo que necessite de o utilizar enquanto ferramenta.

Deste modo, um qualquer trabalho na matemática do risco constitui um contributo disponível para as aplicações da ciência do risco. Nos contextos de investigação que visem uma expansão da matemática do risco, enquanto ramo da matemática subjacente à ciência do risco, os contributos instrumentais apenas podem ser avaliados em termos de linhas gerais de ferramentas disponíveis.

No presente capítulo, trabalha-se de um modo integrado os contributos, as conclusões, as conjecturas, traçadas a partir do trabalho desenvolvido, e linhas de investigação futura.

Assim, na **secção 6.1.**, revê-se os principais contributos do *cálculo categorial* para os *fundamentos da ciência do risco*. Na **secção 6.2.**, são trabalhadas as principais implicações do trabalho desenvolvido para a investigação acerca do risco nos sistemas. Em conjunto, nestas duas secções são abordados os problemas de investigação identificados no **capítulo 1.**, os contributos do trabalho desenvolvido para a resolução desses problemas e as linhas de investigação futura.

Na **secção 6.3.**, é abordada a questão da relação entre a *criticalidade auto-organizada* e a *turbulência multifractal*, questão que constituiu, no presente trabalho, um campo de ilustração aplicativa do formalismo.

Na **secção 6.4.** apresenta-se uma breve reflexão acerca dos contributos do **capítulo 4.** para a *topologia categorial*.

6.1. O *cálculo categorial* e os fundamentos da ciência do risco

Conforme foi relevado no **capítulo 1.**, o desenvolvimento de um corpo conceptual matemático, unificado e construído a partir dos fundamentos conceptuais da ciência dos sistemas, constitui um problema central para a matemática do risco.

O trabalho desenvolvido na presente tese dá um primeiro passo para a resolução desse problema pois:

- Identificou-se que as categorias são estruturas matemáticas comuns às diferentes estruturas formais com que trabalha a matemática do risco;
- Foi proposto o uso da *linguagem formal* \mathcal{L}_{Cat} e do *cálculo categorial* para o desenvolvimento de um formalismo de base para a matemática do risco;
- Tendo a *linguagem* \mathcal{L}_{Cat} sido, originalmente, introduzida como *linguagem formal* para uma lógica de base conceptual sistémica, subjacente à *teoria das categorias* (Gonçalves e Madeira, 2009), o seu uso, na investigação acerca dos fundamentos da matemática do risco, permite resolver o problema central da ligação entre o formalismo e os fundamentos conceptuais da ciência dos sistemas.

Enquanto a *lógica clássica* visa uma eficácia ao nível do problema da validade do discurso, independentemente dos critérios de verdade científica, a *lógica categorial*, da qual o *cálculo categorial* faz parte, visa uma ontologia sistémica ao nível das relações que não é independente dos critérios de verdade considerados pela ciência dos sistemas.

Não se trata de uma validade discursiva apenas, trata-se, também, de considerar uma validade científica para critérios e valores de verdade, assim, as derivações lógicas, no *cálculo categorial*, são acerca de relações, processos e padrões sistémicos.

A eficácia e a vantagem da *lógica categorial* relativamente à *lógica clássica* é a de compatibilizar, com o discurso formal, um valor de verdade considerado pela existência concreta e factual sistémica.

Por seu turno, qualquer derivação lógica, no seio da *lógica clássica*, pode ser trabalhada a partir das relações sistémicas do *cálculo categorial*, tratando-se, neste caso, de *relações mórficas* entre as premissas, trabalhadas enquanto *origens*, e a conclusão, trabalhada enquanto *alvo*.

Assim, a derivação lógica da *lógica clássica*, e a própria *lógica clássica* podem ser trabalhadas no seio do *cálculo categorial*, de tal modo que se pode considerar a *lógica categorial* como tendo um nível de generalidade maior.

No *cálculo categorial* qualquer derivação lógica é internalizável a partir de um *morfismo*. A natureza do *morfismo de derivação* formal, no seio da *lógica clássica* é capturável a partir de uma *implicação material*, conducente a uma *tautologia*.

De facto, se se considerar a *lógica clássica*, e sendo $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ uma sequência de proposições, e σ_{n+1} uma conclusão lógica derivável de $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, no seio de um sistema formal \mathcal{F} , segue-se que:

$$(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \vdash_{\mathcal{F}} \sigma_{n+1} \quad (315)$$

em que o martelo sintáctico $\vdash_{\mathcal{F}}$ assume o sentido de uma derivabilidade lógica sob \mathcal{F} . Sendo σ_{n+1} derivável a partir de $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, sob \mathcal{F} , e, logo, válida em \mathcal{F} , segue-se que a ligação semântica também tem de ser o caso, isto é:

$$(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \models \sigma_{n+1} \quad (316)$$

Num sistema de *lógica clássica*, que contenha o *cálculo proposicional* ou o *cálculo de predicados*, o sentido de $\vdash_{\mathcal{F}}$ é tal que a implicação material:

$$(\sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \dots \wedge \sigma_n) \rightarrow \sigma_{n+1} \quad (317)$$

tem, necessariamente, de conduzir a uma *tautologia*.

Assim, na *lógica clássica*, a derivação lógica, introdutora de uma validade formal, pode ser internalizada a partir de uma *tautologia*, logo, a partir de um *discurso de verdade* que afirma uma *verdade* formalmente determinada como necessária, sendo o discurso o objecto e o discurso válido o objectivo da *lógica clássica*, o resultado acima permite relevar que o discurso válido pode ser trabalhado a partir de uma *tautologia* que pode ser verificada, por exemplo, a partir de uma tabela de verdade para (317), tal que qualquer instanciação das premissas e da conclusão torna (317) necessariamente verdadeira.

Considerando, agora, o caso mais geral da *derivação lógica*, no seio do *cálculo categorial*, esta pode ser trabalhada a partir da *relação sistémica* entre as premissas, que assumem a posição de *origem*, e a conclusão, que assume a posição de *alvo*. Esta internalização formal do *martelo sintáctico*, em termos de um *morfismo*, captura, conforme referido acima, a derivação no seio da *lógica clássica*.

Seguindo o trabalho do **capítulo 4.**, e usando a notação da *topologia categorial*, se se considerar a *subcategoria* $\mathcal{M}_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n}$ de \mathcal{M}_{Nod} , tal que os *pontos sistémicos* $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, são *fbfs* de \mathcal{L}_{Cat} , então, se σ_{n+1} pode ser derivada de $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, no seio do *cálculo categorial*, essa derivação pode ser introduzida a partir de um *functor de situs* $\Delta^3 \left(\iota_{\mathcal{M}_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n}}^{\sigma_{n+1}} \right)$, o qual liga a *categoria* $\mathcal{M}_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n}$ à *categoria mononodal* σ_{n+1} .

O *cálculo categorial* é, deste modo, um *cálculo* que trabalha com *relações sistémicas mórficas*, logo, com uma *computação categorial*, subjacente a cada *morfismo*, e, simultaneamente, a própria *derivação lógica* é capturável a partir da *computação sistémica categorial mórfica*.

Uma outra diferença entre o *cálculo categorial* e a *lógica clássica* reside no modo como a *auto-referência* é computada pelo próprio *cálculo lógico*. A *auto-referência*, necessária à autonomia sistémica na sua individuação e identidade, conduz a dificuldades para o *cálculo de predicados*, pois, sendo este acerca de proposições predicativas, a *auto-referência* conduz a paradoxos irresolúveis dentro do sistema lógico. Pelo contrário, na matemática das categorias, a *auto-referência* é uma parte integrante de cada *individuação sistémica* (**capítulo 4**).

Não se lida, primitivamente, com predicados, nem com relações de exemplificação, lida-se, sim, com *sistemas*, mesmo um paradoxo lógico, pelo facto de poder ser pensado e referido num acto de referência discursivo, pode ser tomado enquanto *objecto* no *cálculo categorial* (Gonçalves e Madeira, 2009).

Permitindo ligar o formalismo matemático à sua base conceptual, a partir do nível lógico, a *linguagem* \mathcal{L}_{Cat} permite expandir a eficácia da matemática do risco para a ciência do risco, potenciando a principal base de suporte ao pensamento fundamental da ciência do risco, a saber: a ontologia do risco, enquanto ramo da filosofia do risco que investiga a origem sistémica do risco e a natureza do risco, enquanto tal.

A lógica filosófica e a lógica matemática para a ciência do risco podem ser, assim, trabalhadas, no seio de uma lógica matemática, sem perder a base de pensamento sistémico. Este facto constitui um contributo fundamental para a ciência do risco, naquilo que é a sua necessidade de operacionalização formal de um pensamento fundamental acerca do risco. Operacionalização, esta, que, devido à natureza sistémica do *cálculo categorial*, permite uma ponte directa entre formalização e modelação. Esta ligação entre lógica categorial e modelação de sistemas em *situações de risco* foi trabalhada, a partir da abordagem categorial para a computação sistémica, desenvolvida no **capítulo 5**., cujos conteúdos permitem sinalizar três pontos fundamentais, a saber:

- A capacidade da matemática categorial para lidar com a modelação de *situações de risco*, em que intervêm diferentes tipos de computações sistémicas (**secção 5.1.**);
- A capacidade da matemática categorial para trabalhar, a partir da *hipercomputação*, no seio do formalismo categorial, as noções centrais de *acaso*, *aleatório*, *estocástico* e *caos* (**secção 5.2.** e **secção 3.2. capítulo 3**);
- A capacidade da matemática categorial para trabalhar, no seio do mesmo formalismo, com a modelação de sistemas, para uma maior eficácia na captura de *padrões de risco* na dinâmica dos sistemas (**subsecção 5.2.2.**).

Para esta eficácia, contribui não somente o formalismo lógico mas, também, a proposta para a *topologia categorial*, trabalhada no **capítulo 4.**, a qual pode ser autonomizada enquanto contributo para a própria matemática das categorias.

Ao permitir desenvolver esta conectividade entre a matemática do risco e o corpo conceptual da ciência do risco, lidando com eficácia com o objecto e objectivos de investigação e aplicação da ciência do risco, a linguagem \mathcal{L}_{Cat} constitui uma ferramenta formal eficaz e disponível para a investigação acerca dos fundamentos da própria da ciência do risco, para a investigação acerca dos fundamentos da matemática do risco, para o trabalho de expansão da matemática do risco e para o trabalho aplicado no seio da ciência do risco.

6.2. O risco nos sistemas

Acerca da origem do risco nos sistemas, no trabalho desenvolvido e nas linhas de investigação futuras, que podem ser traçadas a partir dos principais resultados obtidos, podem ser sinalizadas três questões que importa destacar, a saber: a questão da relação entre a investigação dos limites da *computação algorítmica* e a noção de risco (**subsecção 6.2.1.**), a questão da formalização matemática da *situação de risco* (**subsecção 6.2.2.**), a questão da modelação e das origens sistémicas do risco (**subsecção 6.2.3.**). Passamos, assim, à primeira questão: a relação entre a investigação dos limites da *computação algorítmica* e a noção de risco.

6.2.1. Limites da *computação algorítmica* e a noção de risco

Conforme a revisão conceptual do **capítulo 2.**, a ciência do risco trabalha o risco a partir da sua raiz primitiva em *resicum*, sendo o risco sinalizável a partir da presença de incerteza e de oportunidades e ameaças numa situação sistémica. Esta natureza sistémica do risco é capturada a partir do trabalho realizado no **capítulo 5.**

Conjuntamente com o **capítulo 3.**, o trabalho realizado no **capítulo 5.** permite estabelecer as bases matemáticas para um trabalho fundamental, no seio da ciência do risco, acerca da origem do risco nos sistemas.

Em termos da estrutura conceptual e resultados que a ciência dos sistemas disponibiliza à ciência do risco para trabalhar, conforme referido acima, o risco pode ser sinalizado numa situação sistémica em que existem ameaças, oportunidades e incerteza, sendo que essa incerteza não pode ser removida a partir de uma computação das condições iniciais formativas da própria situação, o que significa que a(s) causa(s) permanece(m) desconhecida(s), logo, a noção de *acaso* pode ser eficazmente aplicada (**secção 3.2.**).

A computação do risco passa, assim, pela computação, a partir dos efeitos daquilo que são padrões no *aleatório*, computação que é sintetizada pela noção de *estocástico* (**secção 5.2.**). O *caos*, por seu turno, constitui uma *estocasticidade intrínseca* (**secção 5.2.**), ou seja, gerada pelo próprio sistema no modo como a computação dinâmica produz padrões, cuja estrutura não é facilmente capturável em *schemata antecipatórios*.

É neste ponto que ocorre uma intersecção entre as ciências da complexidade e a ciência do risco. Primitivamente, um problema de complexidade de um padrão espacio-temporal é, também, um problema de risco, sempre que da estrutura desse padrão dependa a sobrevivência de um sistema, tal que o sistema tem de computar o padrão, activar mecanismos adaptativos e sintetizar *schemata* que promovam a sobrevivência do sistema, na situação sistémica em que o mesmo se encontra⁴⁰.

Este problema é matematizável, primitivamente, a partir daquilo que são limites à computação de um padrão, limites, estes, que podem ser trabalhados, no contexto do *cálculo categorial*, a partir do trabalho desenvolvido no **capítulo 3.** e do trabalho desenvolvido no **capítulo 5.**

De facto, considerando o número de Ω de Chaitin, enquanto *objecto categorial*, o que pode ser feito, dada a natureza *hipercomputacional* do *cálculo categorial* (**capítulo 3.**), e trabalhando a partir da *topologia categorial*, cuja base foi introduzida no **capítulo 4.**, a *expansão binária* do número Ω é uma estrutura matemática conectável com Ω por um *simplex categorial*, tal que cada face corresponde a um *morfismo* dado pelo *3-simplex categorial*:

$$\Delta^3(\omega_{\Omega}^{b_i}) \quad (318)$$

em que b_i é o *i-ésimo bit* de Ω , e ω é o *fundamento mórfico* para cada *morfismo* de *expansão binária* de Ω .

Logo, para a *expansão binária* de Ω , temos o *simplex categorial*:

$$\Delta^{N_0}(\omega_{\Omega}^{b_1}, \omega_{\Omega}^{b_2}, \dots, \omega_{\Omega}^{b_n}, \dots) \quad (319)$$

Um qualquer padrão φ é capturável pela estrutura binária de Ω se, e somente se, seguindo o trabalho desenvolvido nos **capítulos 3., 4. e 5.**, a estrutura do padrão puder ser capturada por um *simplex categorial*:

$$\Delta^{N_0}(\beta_{\varphi}^{s_1}, \beta_{\varphi}^{s_2}, \dots, \beta_{\varphi}^{s_n}, \dots) \quad (320)$$

isomorfo em relação a $\Delta^{N_0}(\omega_{\Omega}^{b_1}, \omega_{\Omega}^{b_2}, \dots, \omega_{\Omega}^{b_n}, \dots)$.

40. Um exemplo deste problema foi trabalhado no **capítulo 2.** nas secções em que se procedeu à revisão da *turbulência multifractal* nos mercados, e no modo como o pensamento científico e financeiro acerca desta mesma turbulência evoluiu.

Neste caso, nem Ω , nem \wp são *algoritmicamente compressíveis*, logo, não se pode construir um algoritmo finito capaz de computar Ω ou \wp , pelo que, se s_1, s_2, \dots for uma estrutura temporal, não existe forma de se obter uma regra dinâmica finita para capturar \wp .

Existe uma *computação sistêmica categorial*, quer para \wp , quer para Ω , conforme demonstrado no **capítulo 3. (secção 3.2.)**, mas não existe uma regra dinâmica finita que seja convertível num programa com um número finito de *bits*, capaz de computar, para um qualquer momento n , os valores futuros do padrão \wp . Trata-se de um caso limite de *caos*, pois, embora exista uma computação sistêmica do padrão, o mesmo não é capturável num algoritmo, com um número finito de passos, assim, não é possível introduzir uma fórmula para a lei dinâmica, como ocorre no contexto dos *mapas não-lineares*.

A existência destes padrões, demonstrada pela investigação acerca dos fundamentos da matemática, é recuperada na presente tese, no **capítulo 3.**, como ponto de partida para uma matemática do risco, na análise das *cadeias mórficas infinitas (secção 3.2.)*.

Conectando os resultados do **capítulo 3.** com as *finanças quânticas* trabalhadas no **capítulo 5.**, no contexto das *máquinas de Turing binárias*, segue-se que, para este tipo de estruturas, o risco pode ser computado a partir do jogo dos *bilhetes de aposta*, repetido para cada *bit* da *estrutura binária*, tal que, se Φ_i é o preço de mercado, por *bilhete de aposta*, acerca do valor do *i-ésimo bit* da *expansão binária* de Ω , e assumindo *payoffs constantes*, então, sob as condições quânticas de equilíbrio de mercado, trabalhadas no **capítulo 5.**, temos, para o *i-ésimo bit quântico*:

$$\psi^{\mathfrak{s}}(i) = \sqrt{e^{r\tau} \mathfrak{T}(\mathfrak{s}, i)} \quad (321)$$

$$\mathfrak{T}(0, i) = \frac{\Phi_i - \phi(1)e^{-r\tau}}{\phi(0) - \phi(1)} \quad (322)$$

$$\mathfrak{T}(1, i) = \frac{\Phi_i - \phi(0)e^{-r\tau}}{\phi(1) - \phi(0)} \quad (323)$$

com $\mathfrak{s} = 0, 1$.

Logo, não sendo computável por via de uma abordagem algorítmica, o problema é abordável por via de uma *computação quântica* dos *payoffs* pelo mercado.

No caso de as condições de mercado serem tais que a sequência de valores de Φ_i pode ser capturada por um *mapa dinâmico*, então, existe a possibilidade de se redobrar a complexidade do problema, pois pode-se obter dinâmicas caóticas para os preços Φ_i , o que permite resolver o problema da compatibilidade da *turbulência multifractal* com a *avaliação neutra ao risco* referido no **capítulo 2.** Um *mapa dinâmico*, ou um sistema de mapas acoplados, ou um autómato celular, todos eles constituem abordagens passíveis de capturar uma dinâmica emergente complexa de mercado.

Assim, neste exemplo, o risco pode ser redobrado, pois não é apenas o caso que um jogador se pode expor ao risco, comprando o bilhete de apostas, como a dinâmica dos preços de mercado, emergente a partir do comportamento de mercado, pode ser *caótica*.

Este exemplo permite explicitar uma ponte conceptual entre os diferentes capítulos da tese. A incerteza quanto aos valores da estrutura do padrão temporal de φ , juntamente com a existência de *payoffs alternativos* nos *bilhetes de aposta* conduzem a uma *situação de risco* para cada alternativa, por seu turno, o próprio mercado pode produzir uma dinâmica de mercado para os preços dos bilhetes tal que, nesta, pode ser, também, sinalizada a presença de risco.

A capacidade do *cálculo categorial* para lidar com múltiplas *situações de risco* interconectadas dá resposta a um problema central para as aplicações da ciência do risco, conforme sinalizado no **capítulo 1.**

Por seu turno, a eficácia da *linguagem formal* \mathcal{L}_{Cat} , em capturar múltiplas *situações de risco*, é potenciada pela natureza *hipertextual* da *linguagem* \mathcal{L}_{Cat} e do *cálculo categorial* que permite lidar com relações sistémicas que cruzam diferentes níveis hierárquicos, e que permite, também, trabalhar com padrões sistémicos sinalizados como *aleatórios*, enquanto *estruturas categoriais*.

A *natureza hipertextual* do *cálculo categorial*, por seu turno, abre a possibilidade de se expandir a *inteligência artificial hipertextual* (HAI – *Hipertextual Artificial intelligence*), com aplicações na ciência e na gestão do risco. Esta constitui um exemplo de uma possível linha futura de investigação com eficácias ao nível da teorização acerca do risco nos sistemas e dos problemas aplicados da ciência do risco.

6.2.2. A *situação de risco*

No **capítulo 5.**, na **secção 5.1.**, foram identificados os seguintes três elementos descritivos centrais de uma *situação de risco*:

- A *situação sistémica*;
- O espaço de possibilidades de histórias da *situação sistémica*;
- A história actualizada da *situação sistémica*.

No caso do jogo trabalhado na **secção 5.1.**, a *situação sistémica* é composta por dois sistemas computacionais, a saber: a *máquina de Turing* e o *mercado de apostas*.

No contexto da **secção 5.2.**, a *situação de risco* resulta da computação sistémica, o sistema encontra-se em *risco* pela própria natureza dinâmica das *órbitas* sinalizadas como *caóticas*. Os três elementos descritivos, centrais de uma *situação de risco*, continuam a aplicar-se no contexto dos *mapas dinâmicos*.

A *situação sistêmica*, juntamente com a natureza do sistema, fazem emergir uma *lei dinâmica* tal que o espaço de possibilidades de histórias da *situação sistêmica* é dado por uma *subcategoria* de \mathcal{M}_{Nod} , que denotamos por \mathcal{M}_S , cujos *pontos sistêmicos* são as *máquinas-a* das *iterações* $\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)$, para cada *ponto de fase* μ no *espaço de fases* $\mathcal{B}_\varepsilon^S(\bar{\mu})$. Se μ for a *condição inicial dinâmica*, então, o *ponto sistêmico* $\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)$ de \mathcal{M}_S é a história actualizada da *situação sistêmica*. Se se estiver a lidar com uma *situação sistêmica*, descrita por *n-iterações*, então, trabalha-se com $\mathfrak{M}(\varphi, \mu, n)$ em vez de $\mathfrak{M}(\varphi, \mu, \aleph_0)$.

Assim, existe, entre a **secção 5.1.** e a **secção 5.2.**, uma unidade de pensamento matemático e sistêmico acerca da *situação de risco*, no que respeita aos elementos centrais. Contudo, existe também uma diferença fundamental, no que respeita às probabilidades, a saber: enquanto que na **secção 5.1.** emerge uma probabilidade em termos de computação de *equilíbrio de mercado*, resultante da avaliação dos *payoffs* do jogo, na **secção 5.2.** as probabilidades emergem a partir da dinâmica do sistema e uma medida de probabilidades (dinamicamente estável) poderá emergir se existir uma *medida invariante ergódica* para o *mapa*.

Em condições de *ergodicidade*, pode ser estabelecida uma ligação com a *teoria quântica dos jogos*, seguindo o trabalho de Beck (2002) e o trabalho desenvolvido na **secção 5.1.**, e tomando $|\psi^\mu|^2 = \rho(\mu)$ (Beck, 2002), sendo ρ a *medida invariante ergódica*, pode-se calcular os valores esperados para um *operador de payoffs*, cuja estrutura é análoga à de um *observável* na linguagem da *mecânica quântica* (Beck, 2002).

Assim, se ρ for *ergódica*, temos, deste modo, para uma função de *payoff* sobre $\mathcal{B}_\varepsilon^S(\bar{\mu})$, $\phi: \mathcal{B}_\varepsilon^S(\bar{\mu}) \mapsto \mathbb{R}$ (Badii e Politii, 1999; Beck, 2002):

$$\langle \phi(\mu) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \phi[\varphi^{[i]}(\mu)] = \int_{\mathcal{B}_\varepsilon^S(\bar{\mu})} \phi(\mu) |\psi^\mu|^2 d\mu = \int_{\mathcal{B}_\varepsilon^S(\bar{\mu})} \phi(\mu) \rho(\mu) d\mu \quad (324)$$

isto é, a *média temporal* $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \phi[\varphi^{[i]}(\mu)]$ coincide com a *média espacial*, sob ψ^μ .

A *ergodicidade*, para *medidas invariantes*, é o campo de investigação da *teoria ergódica*. Uma linha de investigação futura, no seio da *teoria quântica dos jogos*, acerca da ligação entre as *invariantes ergódicas* de *mapas dinâmicos* e as *amplitudes de probabilidade quânticas*, utilizando o formalismo categorial do **capítulo 5.** e combinando o trabalho das duas secções desse capítulo, poderá conduzir a uma ponte entre a modelação que aplica a *dinâmica não-linear*, enquanto ferramenta, e a modelação que aplica *teoria quântica dos jogos*, enquanto ferramenta⁴¹. Os resultados do **capítulo 5.** permitem estabelecer essa ponte a partir do formalismo categorial, podendo-se utilizar a linguagem \mathcal{L}_{Cat} para explorar uma abordagem de modelação de síntese que combine a *teoria quântica dos jogos* e a *dinâmica não-linear*.

41. Uma ligação entre *dinâmica não-linear* e *teoria quântica dos jogos* também pode ser estabelecida a partir do trabalho de Gonçalves e Gonçalves (2007).

A matemática da medição do risco tradicional pressupõe a probabilização (**capítulo 2.**), assim, por exemplo, o cálculo de medidas de risco como o *Value-at-Risk* (VaR) ou o *Conditional Value-at-Risk* (CVaR) dependem dessa probabilização. O uso da *avaliação neutra ao risco*, ou *risk neutral valuation*, também depende da possibilidade de se probabilizar acerca de um espaço amostral computável. Contudo, a natureza do número Ω de Chaitin, enquanto probabilidade de paragem de uma *máquina-a*, que computa com alfabetos discretos, conduz a problemas para a probabilização de uma *situação de risco*.

De facto, o argumento pode ser apreendido, primeiramente, a partir de um exemplo ilustrativo de uma *situação de risco*, tal que as *histórias possíveis* podem levar a um de dois resultados, a saber, ao colapso do sistema ou, em alternativa, à continuidade do sistema no jogo, assumindo-se uma possibilidade adaptativa de expansão indefinida do tempo de permanência do sistema no jogo, e que as histórias são tais que existe um *isomorfismo categorial* entre o *espaço das histórias* e o espaço das *máquinas-a* de *alfabeto de fita* discreto.

Assumindo, também, que o colapso sistémico é capturado pela paragem da *máquina-a*, ou seja, se uma *máquina-a* pára em n -passos computacionais, o sistema *colapsa*, então, o trabalho de Turing tem uma implicação directa sobre o cenário, a saber: o problema do colapso sistémico é *indecidível*, ou seja, não existe nenhum *procedimento algorítmico* capaz de resolver o *problema*, pois, não existe nenhuma *máquina-a* que pare após um número finito de passos, capaz de responder à questão de se saber, se uma dada *máquina-a* vai parar, o que significa que, neste cenário, o sistema adaptativo nunca conseguirá determinar, utilizando uma *máquina-a*, se se encontra numa história que o conduz ao colapso ou que lhe permite escapar ao colapso⁴².

A indecidibilidade, sinalizada por Turing (1936), conduz, no cenário acima, a um problema de incerteza quanto às histórias sistémicas. Perante esta incerteza, a questão que de imediato se coloca é a de saber se é, ou não, possível o cálculo da probabilidade de sobrevivência sistémica.

A resposta a esta questão é negativa, a probabilidade de sobrevivência é $1 - \Omega$, sendo Ω a probabilidade de paragem de uma *máquina-a*, que é incompressível (Chaitin, 2006), assim, a probabilidade de sobrevivência não é computável. A incerteza estende-se, por esta via, às próprias probabilidades.

Uma alternativa para a utilização de um cálculo probabilístico seria a abordagem quântica apresentada no **capítulo 5.**, na **secção 5.1.**, mas mesmo essa abordagem teria problemas, pois o jogo pode ser convertido, em termos matemáticos, num derivado binário sobre um activo subjacente: as *máquinas-a*. O cálculo dos *Arrow-Debreu prices* dependeria de uma capacidade de avaliação calculatória das histórias alternativas e do problema da paragem, de tal modo que este cálculo

42. Este jogo matemático pode ser utilizado para abordar a questão do *doomsday argument*, um argumento teórico desenvolvido no seio da ciência do risco acerca da possibilidade de sobrevivência de uma civilização, apresentado por Gott ([2001], 2007).

dependeria do problema da paragem ser recursivo, isto é, da existência de uma *máquina de Turing* capaz de computar de modo *algorítmico*⁴³, para cada *máquina-a*, se esta pára ou não. Contudo, conforme Turing demonstrou, o problema da paragem não é *decidível*, isto é, trata-se de um problema recursivamente enumerável, mas não recursivo, o que conduz a problemas na própria definição e cálculo do espaço de probabilidades.

Este cenário tem implicações mais gerais, a saber: sempre que as histórias sistémicas forem isomorfas em relação às *máquinas-a* com alfabetos discretos e o problema adaptativo tiver uma correspondência directa com o *problema da paragem*, então, as metodologias probabilísticas encontram limites fundamentais, devido à *indecidibilidade* do problema da paragem.

Esta reflexão acerca da *indecidibilidade* das *histórias sistémicas* pode ser conectada com uma linha de investigação acerca da relação entre as *linguagens formais computacionais* e a formalização computacional das *histórias possíveis* de uma *situação de risco*, linha, esta, que pode ser expandida a partir do trabalho desenvolvido no **capítulo 5.**

A *indecidibilidade* conduz a outros limites, nomeadamente, em relação à *análise de risco* e em relação à *modelação de sistemas em situações de risco*, no que respeita à *estocasticidade intrínseca*, sinalizada pela noção de *caos*, retomaremos este ponto na próxima subsecção, à qual, agora, passamos.

6.2.3. Modelação e origens sistémicas do risco

Os resultados do trabalho desenvolvido abrem uma linha de reflexão crítica, no seio da matemática do risco, associada ao problema da modelação dos sistemas em *situações de risco*, conforme relevado na subsecção anterior.

A modelação dos sistemas em *situações de risco* é um ramo aplicado da matemática do risco (**capítulo 2.**), contudo, a partir do trabalho desenvolvido na presente tese, algumas questões podem ser colocadas relativamente à relação entre os modelos e os padrões que estes visam modelar, relativamente aos limites da modelação e à natureza do risco nos sistemas, questões que interessam à ciência do risco, enquanto ciência fundamental, pois permitem reflectir acerca da natureza do risco nos sistemas, a partir das origens sistémicas do mesmo.

A questão dos limites e abordagens para a modelação coloca-se a partir do momento em que se considera que estruturas como o número Ω de Chaitin possam ter uma correspondência num sistema dinâmico concreto, correspondência, esta, que foi abordada na **subsecção 6.2.1.** e que foi, explicitamente, trabalhada na **subsecção 3.2.2.**, a propósito da *incompressibilidade mórfica* de *cadeias mórficas*.

43. Considerando, para este caso, uma noção de *algoritmo* em termos da noção de *recursividade*.

Esta linha de reflexão que pode ser traçada a partir do trabalho desenvolvido na presente tese, conecta-se com o trabalho de Moore (1991), conduzindo a uma linha de investigação acerca dos limites da modelação com elevada relevância para a matemática do risco, pois trata-se de considerar as consequências de uma estrutura de *caos* mais complexa do que aquela que foi trabalhada no seio da *dinâmica não-linear*.

Moore (1991) sinalizou, a partir da relação entre *máquinas de Turing* e os *generalized shift maps*, *estruturas incompressíveis* ligadas à *indecidibilidade computacional algorítmica*.

Os padrões sinalizados por Moore não são capturáveis no seio das ferramentas matemáticas tradicionalmente utilizadas para quantificar os sistemas dinâmicos, aproximando-se de um limite de *estocasticidade*, cuja apreensão estatística é, ela própria, limitada e condicionada pela *indecidibilidade*.

Embora estes padrões abstractos sejam sinalizáveis no seio da matemática a questão de terem uma correspondência sistémica concreta ainda se encontra em aberto. Chaitin (2006) reflectiu acerca desta questão, em termos filosóficos, embora tenha assumido duas linhas conjecturais menos extremas, a saber: uma linha que defende a ocorrência de padrões estatizáveis não apreensíveis por mecanismos formais simples; uma linha que defende a aleatoriedade dos sistemas como sendo sempre apreensível a partir de estruturas matemáticas simples.

A segunda linha conjectural é defendida por Wolfram (Chaitin, 2006; Wolfram, 2002). Wolfram identificou, a partir da investigação acerca dos padrões espaço-temporais gerados por autómatos celulares, a capacidade de programas simples gerarem padrões sinalizáveis como *estocásticos*. Assim, Wolfram conjectura que, na natureza, qualquer padrão sinalizável como *estocástico* poderá ter origem em estruturas relacionais dinâmicas simples, as quais podem ser apreendidas a partir do formalismo categorial. O exemplo da **subsecção 5.2.2.** constitui um exemplo da linha conjectural defendida por Wolfram.

A primeira linha conjectural, referida por Chaitin (2006) conduz às abordagens probabilísticas e, em particular, à abordagem de modelação quântica. No **anexo A.**, os resultados reforçam a possibilidade de se generalizar esta abordagem ao nível da modelação de sistemas com a conexão com a teoria financeira, pois pode-se conectar a estrutura de um *observável* com a noção de *replicating portfolio*, e assumir uma relação entre aquilo que constitui uma *economia sistémica* e a *amplitude de probabilidade*, tal que as probabilidades sistémicas efectivas possam ser apreendidas a partir de uma correspondência com uma formulação generalizada de um problema financeiro.

Contudo, os resultados de Moore, se conectados com o trabalho desenvolvido na presente tese⁴⁴, abrem uma terceira linha conjectural, e conduzem a um cenário mais extremo do que a primeira linha conjectural considerada por Chaitin. Os *generalized shift maps*, trabalhados por Moore, recuperam o problema da *indecidibilidade* e da *incompressibilidade* conectando-o com a noção de *caos*.

44. Em particular, nos **capítulos 3. e 5.**

O *caos*, sinalizado por Moore, que o autor designou por *caos algorítmico* é tal que apresenta as seguintes propriedades (Moore, 1991):

- Não é possível caracterizar *ritmos de divergência* em relação às condições iniciais, em particular, *expoentes de Lyapunov*, pois, uma tal quantificação é *indecidível*;
- Existe dependência sensível das *condições iniciais dinâmicas*, contudo a incerteza não depende somente de desvios na computação dessas *condições*, o comportamento de longo prazo é *algorítmicamente indecidível*, o mesmo se passa com as condições que permitem determinar a presença de *dependência sensível*, isto é, embora se possa introduzir uma demonstração de existência de dependência sensível das *condições iniciais dinâmicas*, não é *algorítmicamente decidível* se um conjunto de *condições iniciais dinâmicas* exemplificam esta propriedade, o mesmo, conjectura Moore, poderá ser o caso da *ergodicidade*;
- É *indecidível* a natureza das *órbitas*, a partir de um dado *ponto de fase*, se estas conduzem a uma *órbita eventualmente periódica*, se se localiza numa determinada *bacia de atracção*, nenhuma destas propriedades é *algorítmicamente decidível*. Os conjuntos de pontos periódicos e os atractores são conjuntos não-recursivos, sem que seja possível definir uma estrutura de invariância de escala do tipo fractal ou multifractal, não existe um comportamento de escala bem definido;
- Não existe nenhum modo de determinar a natureza das bacias de atracção ou conjuntos de pontos periódicos a partir de uma qualquer sequência finita de observações, por maior que esta seja.

Estes resultados permitem sinalizar um tipo de *caos* que não é facilmente apreensível por uma noção de *estocasticidade*, pois, os padrões são de tal modo complexos que as principais ferramentas utilizadas pela matemática do risco, seja por via *teoria do caos*, seja por via da *teoria quântica*, para capturar os padrões no *aleatórios*, não permitem apreender o *caos algorítmico*.

A ferramenta abstracta, introduzida por Turing, para investigar os fundamentos e limites da matemática e da lógica, conduz a limites fundamentais para a própria matemática do risco, em particular, ao nível da *modelação de sistemas em situações de risco*.

Se o *caos algorítmico* ocorrer na natureza, ou em algum momento for produzido por um sistema, não poderemos inferir nenhum algoritmo, que permita replicar o padrão e antecipá-lo, a partir da observação empírica do mesmo.

Pode-se, numa conjectura de caso limite, estar perante uma *aleatoriedade* para a qual a noção de *estocasticidade* perde qualquer eficácia por ausência de ferramentas capazes de apreender padrões no *aleatório*.

Moore (1991) conjectura que o *caos algorítmico* poderá estar presente na natureza e que poderá ser produzido por estruturas computacionais em rede, em particular, por *redes neurais*.

A investigação futura do *caos algorítmico* é uma linha de investigação central, quer para um pensamento fundamental acerca do risco nos sistemas, quer para a matemática do risco, aplicada à *modelação de sistemas em situações de risco*.

Os resultados do trabalho de Moore e as conjecturas apresentadas pelo autor conduzem a uma consequência imediata para a modelação, a saber: a modelação matemática deverá partir da estrutura relacional do sistema concreto, relevante para a modelação matemática, e não da proposta *ad hoc* de um modelo, apenas porque este é capaz de replicar determinados padrões, observados empiricamente.

Se se estiver perante *caos algorítmico* poderá ser estrutural a falência rápida de um modelo que vise replicar determinados padrões estatísticos e que tenha sido especificamente introduzido para replicar sempre e somente esses padrões, sem que se considere a natureza das relações sistémicas.

Assim, por exemplo, um modelo de *passeio aleatório multifractal*, introduzido para o mercado financeiro e estimado a partir de um *espectro multifractal empírico*, logo, ajustado a um determinado *espectro multifractal*, poderá não ser a melhor abordagem, pois, no caso de os sistemas económicos e financeiros serem exemplos de *caos algorítmico*, a presença de *invariância de escala multifractal* poderá ser um fenómeno local em termos temporais.

A evidência de alterações no *espectro*, detectadas na análise realizada aos mercados no **capítulo 2.**, poderá ser indicativo de uma dinâmica sistémica evolutiva em que ocorrem mudanças estruturais nas estruturas de escala, de tal modo que poderá ser o caso que a dinâmica sistémica não tenha uma *invariância de escala estável*, conforme sinalizado por Moore, como uma das características do *caos algorítmico*. Embora mais décadas de observações empíricas dos mercados possam vir a ser acumuladas, permitindo expandir a análise por décadas das rendibilidades logarítmicas do índice S&P 500, realizada no **capítulo 2.**, os resultados de Moore indicam que não existe modo de determinar, somente a partir da análise de dados, se uma instabilidade do *espectro multifractal* resulta de dinâmicas transitentes e/ou de transições de Markov elementares, ou se é o caso que as redes financeiras estão a produzir *caos algorítmico*.

É necessária mais investigação acerca da relação entre *turbulência multifractal* e o *caos algorítmico*, em particular em contextos de *caos acoplado*, para se poder teorizar mais acerca das alterações nas estruturas dos *espectros multifractais* em sistemas complexos.

Presentemente, a evidência acerca dos mercados financeiros, resultante da análise desenvolvida no **capítulo 2.**, é mais favorável a uma relação entre os *espectros multifractais* e a natureza das estruturas financeiras e económicas, tal que, em períodos de transições estruturais, os espectros tendem a ter uma maior amplitude do que em períodos de maior estabilidade das estruturas económicas e financeiras. Os elementos fundamentais, determinantes do espectro, estão relacionados com a conectividade da rede, com a natureza da circulação de fluxos de informação e de fluxos monetários e com os padrões de investimento, em particular, no que respeita à constituição de carteiras.

Uma outra linha conjectural, acerca da natureza do risco, defende que os sistemas complexos tendem a organizar-se em termos de padrões de *invariância de escala*, capturáveis a partir de modelos matemáticos produtores de *criticalidade emergente*, sendo, neste contexto, a *fractalidade* ou a *multifractalidade* uma consequência da própria computação sistémica, trata-se da SOC (teoria revista no **capítulo 2.**).

Se a conjectura de base, subjacente à SOC, estiver correcta, o *caos algorítmico* apresenta uma aplicabilidade limitada, pois a auto-organização das redes sistémicas tende a fazer emergir *leis de invariância de escala*. Passamos a rever as implicações, para a SOC, do trabalho desenvolvido.

6.3. *Criticalidade auto-organizada e turbulência multifractal*

A teoria da *criticalidade auto-organizada*, conforme a revisão efectuada no **capítulo 2.**, é, tradicionalmente, incorporada no seio das ciências da complexidade (Bak, [1996], 1999), contudo, trata-se de uma teoria interdisciplinar em que as ciências da complexidade se intersectam com a ciência do risco.

Um regime dinâmico resultante de SOC é um regime simultaneamente expansivo das oportunidades de organização de estruturas sistémicas e das ameaças a essas mesmas estruturas. Assim, um regime dinâmico resultante de SOC é um regime em que a noção de *risco* assume uma eficácia conceptual constitutiva na teorização da *estruturação sistémica na criticalidade* (Madeira e Gonçalves, 2009).

O projecto de investigação de Bak visa um pensamento fundamental acerca da *criticalidade auto-organizada*, isto é, o objecto de investigação é a SOC, enquanto tal (Bak, [1996], 1999). Assim, procura-se um discurso científico e uma matemática capazes de capturar aquilo que são os mecanismos sistémicos interactivos fundamentais dos sistemas que fazem emergir a *criticalidade* nestes últimos e os mantêm nessa mesma *criticalidade*.

Tal como a *ciência do risco*, ao investigar o risco, enquanto tal, abre uma oportunidade de eficácia aplicativa em diferentes ciências, a partir de modelos e formalismos gerais, também os resultados da *teoria da SOC* são passíveis de ser aplicados aos sistemas complexos, cuja dinâmica faz emergir *leis de invariância de escala* (Schroeder, 1991; Bak, [1996], 1999).

A relação desta teoria com a ciência do risco é de uma dupla ordem, a saber:

- A ciência do risco é uma ciência auxiliar à *teoria da SOC* na investigação acerca das dinâmicas das *situações de risco* que fazem emergir *estruturas fractais* ou *multifractais*;
- A *teoria da SOC* auxilia a ciência do risco na produção de modelos de sistemas cujas dinâmicas apresentam *assinaturas fractais* ou *multifractais*.

No contexto dos mercados financeiros, conforme revisão e análise desenvolvida no **capítulo 2.**, a MSOC, ou *criticalidade auto-organizada multifractal*, é um problema fundamental, pois, a evidência empírica é favorável à hipótese de que os padrões de *turbulência*, as *bolhas* e os *crashes* são devidos a um processo de auto-organização sistêmica num regime dinâmico resultante de MSOC.

Embora os modelos tradicionais da SOC sejam modelos de sistemas com um elevado número de *graus de liberdade*, *mapas não-lineares* simples podem também produzir FSOC (*criticalidade auto-organizada (mono)fractal*) ou MSOC, por via da estrutura da dependência *não-linear* (Kaplan e Glass, 1995; Badii e Politii, 2003; Madeira e Gonçalves, 2009).

O exemplo apresentado na **subsecção 5.2.2.**, em particular, foi introduzido para ilustrar o caso da MSOC produzida por um sistema com uma dinâmica caótica, trata-se de um caso de *caos multifractal* (Madeira e Gonçalves, 2009). Os resultados obtidos na **subsecção 5.2.2.** permitem ilustrar a aplicação do formalismo na modelação de sistemas e na captura de padrões de risco, em particular, no que respeita à *sincronização dinâmica*, aos *efeitos de Malcolm* e à MSOC.

A MSOC, a FSOC e a *sincronização* nos sistemas complexos fazem parte de linhas de investigação futura de elevada relevância para a ciência do risco, assim como para as diferentes áreas de aplicação da mesma.

Estes são os contributos e principais problemas e linhas de investigação que podem ser traçados a partir do trabalho desenvolvido na presente tese, directamente relacionados com a matemática do risco, para além destes contributos importa, contudo, referir alguns contributos adicionais do trabalho desenvolvido no **capítulo 4.** para a *topologia categorial*.

6.4. A *topologia categorial*

O trabalho desenvolvido no **capítulo 4.** permite trabalhar a *topologia categorial* a partir da raiz conceptual da noção de *topos*. Tal que cada *categoria* pode ser trabalhada na sua estrutura *topológica*, superando-se as insuficiências e problemas conceptuais da *teoria do topos*, referidos no **capítulo 4.**

A base sistêmica da *matemática categorial* é, por esta via, aprofundada, pois as categorias podem ser trabalhadas a partir dos *espaços topológicos de adjacência isomórfica universal* e os *morfismos* a partir de estruturas sistêmicas na forma de estruturas de *simplex*, em que são conectadas *origem sistêmica (ponto geométrico originante)*, *propriedade sistêmica emergente* e *ligações mórficas*. A abordagem *tensorial*, por seu turno, permite operacionalizar estas *estruturas categoriais* e tornar explícita a natureza topológica e algébrica da *composição algébrica de fundamentos* e a natureza sistêmica do *morfismo*, conforme demonstrado no trabalho desenvolvido no **capítulo 4.**

No **capítulo 5.**, na **secção 5.1.**, com a introdução do *campo de amplitudes de probabilidades* abre-se uma via para uma abordagem para *categorias quânticas* em que as *amplitudes de probabilidades* são relacionadas com as ligações sistêmicas com o *ponto geométrico originante*.

Uma investigação futura no seio da *topologia categorial* poderá tornar explícitas estas e outras linhas de investigação.

Para a *matemática do risco*, a representação a partir da *topologia categorial* é útil, em particular, na abordagem quântica e nas ligações entre a dimensionalidade do *simplex* e as *teias mórficas* das *iterações*.

Bibliografia

1. Anderson, P.W.M., K.J. Arrow e D. Pines (Eds.) (1988), *The Economy as an Evolving Complex System*. USA: Perseus Books.
2. Artin, M., A. Grothendieck, J.-L. Verdier (1972), Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, *SGA4-1*, <http://www.math.polytechnique.fr/~laszlo/sga4/SGA4-1/sga41.pdf>.
3. Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber e D. Heath (1997), Thinking Coherently, *Risk*, 10, November, 68-71.
4. Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber e D. Heath (1999), Coherent Measures of Risk, *Mathematical Finance*, 9, November, 203-228.
5. Attali, J. (2009), *A Crise, e agora?*. Tradução de José Norton, Portugal: Tribuna da História.
6. Bachelier, L. (1900), Théorie de la spéculation, *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, 3^e série, tome 17, 21-86.
7. Badii, R. e A. Politii (2003), *Complexity – Hierarchical structures and scaling in physics*. USA: Cambridge University Press.
8. Bak, P., C. Tang e K. Wiesenfeld (1987), Self-organized criticality: an explanation of 1/f noise, *Physical Review Letters* 59, 381-384.
9. Bak, P. e M. Paczuski (1995) Complexity, contingency, and criticality, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA* 92, USA: 6689-6696.
10. Bak, P. [1996], (1999), *Quand La Nature S'Organise, Avalanches, tremblements de terre et autres cataclysmes*. Tradução de Marcel Filoshe, Paris: Flammarion.
11. Basalto, N., R. Bellotti, F. De Carlo, P. Facchi e S. Pascazio (2005), Clustering stock market companies via chaotic map synchronization, *Physica A*, Vol.345, 1-2, 196-206.
12. Beck, C. (2002), *Spatio-Temporal Chaos and Vacuum Fluctuations of Quantized Fields*. Singapore: World Scientific.
13. Bizzotto, J., S. Bolatto e S. Minardi (2005), *Lux and Marchesi: A Stock Exchange Model*, <http://web.econ.unito.it/terna/tesine/luxandmarchesi.htm>.

14. Brit Cruise (2009), *Financial System Efficiency – Can we predict the stock market?*, <http://britcruise.wordpress.com/2009/04/14/financial-system-efficiency-can-we-predict-the-stock-market/>.
15. Bourbaki, N. (1989), *Elements of Mathematics – Algebra I, Chapters 1–3*. UK: Springer-Verlag.
16. Burian, J. (2008), Multiagentní model transakčních nákladů na finančních trzích, em Kvasnička V., J. Kelemen e J. Pospíchal (Eds.), *Kognice a umělý život VIII*, Opava: Slezská Univerzita.
17. Caldana, M., P. Cova e U. Viano (2006), *Multiagent*, <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/community/multiagent>.
18. Calvet, L. e A. Fisher, (2002), Multifractality in asset returns: Theory and evidence, *Review of Economics and Statistics* Vol.84, 3, August, 381-406.
19. Cantor, G. (1915), *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. Tradução de Philip E. B. Jourdain, USA: The Open Court Publishing Company.
20. Cecconi, F. e S. Zappacosta (2008), Low Correlations Between Dividends and Returns: The Alitalia’s Case, *Acta Press, Proceeding (620) Modelling and Simulation*, Track 620-064.
21. Chaitin, G. (2006), *Meta Math! The Quest for Omega*. USA: Vintage Books.
22. Colizza, V. e A. Vespignani (2010), The flu fighters, *Physics World*, Vol.23, No.2, 26-30.
23. Cooper, G. (2008), *The Origin of Financial Crises*. UK: Harriman House.
24. Crichton, M. (1991), *Jurassic Park*. Great Britain: Arrow.
25. Cuvillier, A. [1951], (1997), *Vocabulário de Filosofia*. Tradução de Lólio Lourenço de Oliveira e J.B. Damasco Penna, Portugal: Livros Horizonte.
26. Damásio, A. [1994], (2000), *Descartes’ Error*. New York: Harper Collins.
27. Day, R. H. (1998), *Complex Economic Dynamics – Vol. 1 An Introduction to Dynamical Systems and Market Mechanisms*. USA: MIT Press.
28. Durden, T. (2009), *How the world almost came to an end at 2p.m.on September 18*, <http://zerohedge.blogspot.com/2009/02/how-world-almost-came-to-end-at-2pm-on.html>.

29. Eilenberg, S. e S. Mac-Lane (1945), General Theory of Natural Equivalences, *Transactions of the American Mathematical Society* 58, 231- -294.
30. Epstein, J.M. e R. Axtell (1996), *Growing Artificial Societies, Social Science from the Bottom Up*. USA: Brookings Institution Press.
31. Focardi, S.M. e F.J. Fabozzi (2004), *The Mathematics of Financial Modeling and Investment Management*. USA: John Wiley & Sons.
32. Foley, D.K. (1994), A Statistical Equilibrium Theory of Markets, *Journal of Economic Theory* 62, 321-45.
33. Garner, R. (2009), Ionads: a generalised notion of topological space, arXiv:0912.1415v2 [math.CT].
34. Gell-Mann, M. [1994], (1997), *O Quark e o Jaguar*. Tradução de José Luís Malaquias, Lisboa: Gradiva.
35. Gonçalves, C. (2009), A actual crise sistémica global: crise de paradigma e novos desafios que traz ao debate, *Economia Global e Gestão*, Vol. XIV, Setembro, 25-41.
36. Gonçalves, C.P. (2003), *Artificial Financial Market*, <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/community/Artificial%20Financial%20Market>.
37. Gonçalves, C.P. (2004), *A Method for Tail Risk and Model p_K -Tail Risk Control in (Sub)Market Risk Measurement Systems*. Tese de Mestrado em Finanças, ISCTE.
38. Gonçalves, C.P. (2005), *Artificial Financial Market II: Tail Risk*, <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/community/Artificial%20Financial%20Market%20II%20-%20Tail%20Risk>.
39. Gonçalves, C.P. e C. Gonçalves (2007), An Evolutionary Quantum Game Model of Financial Market Dynamics – Theory and Evidence, *SSRN Working paper*.
http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=982086.
40. Gonçalves, C.P. e M. O. Madeira (2009), A Systems Theoretical Formal Logic for Category Theory, *SSRN Working Paper*.
http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1396841.
41. Gonçalves, C.P. (2010), Multifractal Financial Chaos in An Artificial Economy, *SSRN Working Paper*.
http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1576990.
42. Gott III, R.J. [2001], (2007), *Viagens no Tempo no Universo de Einstein*. Tradução de Ana Luísa Coelho, Vila Nova de Famalicão: Quasi.

43. Greenspan, A. (2007) *A Era da Turbulência*. Tradução de Saul Barata e Maria Georgina Segurado, Portugal: Editorial Presença.
44. Guilhou, X. e P. Lagadec [2002], (2004), *O Fim do Risco Zero*. Tradução de Filipe Duarte, Lisboa: Instituto Piaget.
45. Gulick, D. (1992), *Encounters with Chaos*. Singapore: McGraw-Hill.
46. Hallet, M. (1996), *Cantorian set theory and limitation of size*. UK: Oxford University Press.
47. Hartle, J.B. e S.W. Hawking (1983), *Wave function of the Universe*, *Physical Review D*, Vol.28, No.12, 2960-2975.
48. Haugen, R. A. (1997), *Modern Investment Theory*. USA: Prentice Hall.
49. Hawking, S.W. (1984), The Quantum State of the Universe, *Nuclear Physics B*239, 257-276.
50. Hilgers, A. e C. Beck (1997), Turbulent Behavior of Stock Exchange Indices and Foreign Currency Exchange Rates, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol.7, No.8, 1855-1859.
51. Hocking, J.G. e G.S. Young (1988), *Topology*. Canada: Dover Publications.
52. Hofstadter, D.R. [1999], (2000), *Gödel, Escher, Bach – Laços Eternos*. Tradução de José Viegas Filho e Augusto J. Franco de Oliveira, Portugal: Gradiva.
53. Hofstadter, D.R. (2007), *I am a strange loop*. USA: Basic Books.
54. Holland, J.H. (1996), *Hidden Order – How Adaptation Builds Complexity*, USA: Helix Books.
55. Huang, C.-F. e R.H. Litzenberger (1988), *Foundations for Financial Economics*. USA: Prentice Hall.
56. Jech, T. (2002), Zermelo-Fraenkel Set Theory, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, <http://plato.stanford.edu/entries/set-theory/ZF.html>.
57. Jia, J.-m. e J.S. Dyer (1996), A Standard Measure of Risk and Risk-Value Models, *Management Science*, Vol.42, No.12, 1691-1705.
58. Johnson, D.D.P. e J.H. Fowler (2009), The Evolution of Overconfidence, arXiv:0909.4043v1 [q-bio.PE].
59. Jorion, P. (2007), *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. USA: McGraw-Hill.

60. Kaneko, K. (1986), *Collapse of tori and genesis of chaos in dissipative systems*. Singapore: World Scientific.
61. Kaneko, K. (1990), Supertransients, spatiotemporal intermittency and stability of fully developed spatiotemporal chaos, *Phys. Letters A*, Vol.149, No.2,3, 105-112.
62. Kaneko, K. (1994), Chaos as a Source of Complexity and Diversity in Evolution, *Artificial Life I*, 163-177.
63. Kaplan, D. e L. Glass (1995), *Understanding nonlinear dynamics*. New York: Springer.
64. Kindleberger, C.P. (2000), *Manias Panics, and Crashes*. USA: John Wiley & Sons.
65. Lawvere, W.F. e S.H. Schanuel (2005), *Conceptual Mathematics – A first introduction to categories*. UK: Cambridge University Press.
66. Lengwiler, Y. (2004), *Microfoundations of Financial Economics – An introduction to general equilibrium pricing*. USA: Princeton University Press.
67. Lévy, P. (1990), *Les technologies de l'intelligence (Sciences et société)*. France: La Découverte.
68. Lewin, R. (1999), *Complexidade, A vida no limiar do caos*. Tradução de António Pescada, Portugal: Editorial Caminho.
69. Li, T.-Y. e J.A. Yorke (1975), Period Three Implies Chaos, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 82, No. 10, 985-992.
70. Lo, A. (2004), The Adaptive Markets Hypothesis: Market Efficiency from na Evolutionary Perspective, *Journal of Portfolio Management* 30, 15-29.
71. Lo, A. (2005), Reconciling Efficient Markets with Behavioral Finance: The Adaptive Markets Hypothesis, *SSRN working paper*
http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=728864.
72. Lux, T. e M. Marchesi (1999), Scaling and Criticality in a Stochastic Multi-Agent Model of a Financial Market, *Nature* 397,498-500.
73. Machina, M.J. (2004), Non-expected Utility Theory, em Teugels, J.L. e B. Sundt (Eds.), *Enciclopedia of Actuarial Science*, Vol.2, Chichester: John Wiley & Sons, 1173-1179.
74. Mac Lane, S. (1998), *Categories for the Working Mathematician*. UK: Springer.

75. Madeira, M.O. (2008), *On Risk and Responsibility*, <http://cmathphil.blogspot.com/2008/09/on-risk-and-responsibility.html>.
76. Madeira, M.O. e C.P. Gonçalves (2009), Ontologies: On the Concepts of: Possibility, Possible, 'Acaso', Aleatorial and Chaos, *SSRN Working Paper*. http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1469613.
77. Madeira, M.O. (2009), *Topos: o lugar das coisas, o lugar de cada coisa*, <http://cmatfil.blogspot.com/2009/12/topos-o-lugar-das-coisas-o-lugar-de.html>.
78. Madeira, M.O. (2010a), *Identity, Reflexivity, Reflexibility and Projectivity*, <http://philstrs.blogspot.com/2010/01/identity-reflexivity-reflexibility-and.html>.
79. Madeira, M.O. (2010b), *on the strange loop...*, <http://philstrs.blogspot.com/2010/03/on-strange-loop.html>.
80. Mandelbrot, B.B. (1972), Possible refinement of the lognormal hypothesis concerning the distribution of energy dissipation in intermittent turbulence, em Rosenblatt, M. e C.V. Atta, (Eds.), *Statistical Models and Turbulence, Lecture Notes in Physics* 12, USA, Springer: 333-351.
81. Mandelbrot, B.B. (1974), Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier, *Journal of Fluid Mechanics* 62, 331-358.
82. Mandelbrot, B.B., (1989) Multifractal measures, especially for the geophysicist, *Pure and Applied Geophysics* 131, 5-42.
83. Mandelbrot, B.B., A. Fisher e L. Calvet (1997), A Multifractal Model of Asset Returns, *Cowles Foundation Discussion Papers*: 1164.
84. Mandelbrot, B.B. (1997), *Fractals and Scaling in Finance, Discontinuity, Concentration, Risk*. USA: Springer.
85. Mandelbrot, B.B. e R.L. Hudson (2004), *The (Mis)behaviour of Prices: A Fractal View of Risk, Ruin and Reward*. USA: Basic Books.
86. Markowitz, H. [1959], (1991), *Portfolio Selection*. Cambridge, Massachusetts: John Wiley & Sons.
87. Mashaal, M. (2007), *Bourbaki: Uma sociedade secreta*. Tradução de Maria Ribeiro Ferreira, Casal de Cambra: Caleidoscópio.
88. Moore, C. (1991), Generalized shifts: unpredictability and undecidability in dynamical systems, *Nonlinearity* 4(2), 199-230.

89. Morin, E. [1977], (1997), *O Método I – A Natureza da Natureza*. Tradução de Maria Gabriela de Bragança, Mira-Sintra – Mem Martins: Publicações Europa-América.
90. Morin, E. [1980], (1999), *O Método II – A Vida da Vida*. Tradução de Maria Gabriela de Bragança, Mira-Sintra – Mem Martins: Publicações Europa-América.
91. Morris, C.R. (2008), *O Colapso de Um Bilião de Dólares*. Tradução de Edgar Rocha, Portugal: Gradiva.
92. Peat, F.D. (2002), *From Certainty to Uncertainty*. USA: Joseph Henry Press.
93. Piotrowski, E.W. e J. Sladkowski (2008), Quantum Auctions: Facts and myths, *Physica A*, Vol.387, 15, 3949-3953.
94. Piron, S. (2004), L'apparition du *resicum* en Méditerranée occidentale, XIIe-XIIe siècles, em Collas-Heddeland, E., M. Coudry, O. Kammerer, A.J. Lemaître, B. Martin (Eds.), *Pour Une Histoire Culturelle du Risque. Genèse, évolution, actualité du concept dans les sociétés occidentales*, France: Éditions Histoire et Anthropologie, 59-76.
95. Pochart, B. (2003), *Processus multifractals en finance et valorisation d'options par minimisation de risques extrêmes*. Thèse de doctorat, Centre de Mathématiques Appliquées, École Polytechnique.
96. Prigogine, I. e I. Stengers (1986), *La Nouvelle Alliance*. France: Gallimard.
97. Rieidi, R.H. (1999) Multifractal processes, *Technical Report TR99-06*, Rice University, www.spin.rice.edu/PDF/MP.pdf.
98. Russel, B. [1919], (2007), *Introdução à Filosofia Matemática*. Tradução de Adriana Silva Graça, Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
99. Sapsin, V. e V. Soloviev (2009), Relativistic quantum econophysics - new paradigms in complex systems modelling, arXiv:0907.1142v1 [physics.soc-ph].
100. Savage, L. (1972), *The Foundations of Statistics*. USA: Dover Publications.
101. Schredelseker, K. e F. Hauser (Eds.) (2008), *Complexity and Artificial Markets*. Germany: Springer.
102. Schroeder, M. (1991), *Fractals, chaos, power laws: minutes from an infinite paradise*. New York: W.H. Freeman and Company.

103. Shleifer, A. (2000), *Inefficient Markets – an introduction to behavioral finance*. USA: Oxford University Press.
104. Simmons, G.F. (1963), *Introduction to Topology and Modern Analysis*. Singapore: McGraw-Hill.
105. Smithson, C.W., C.W. Smith Jr. e S.D. Wilford (1995), *Managing Financial Risk – A Guide to Derivative Products, Financial Engineering, and Value Maximization*, USA: Irwin.
106. Sornette, D. e W.-X. Zhou (2006), Importance of Positive Feedbacks and Over-confidence in a Self-Fulfilling Ising Model of Financial Markets, *Physica A* 370 (2), 704-726.
107. Stewart, I. [1989], (1991), *Deus Joga aos Dados?*. Tradução de Armindo Salvador, Lisboa: Gradiva.
108. Stix, G. (2009), The Science of Bubbles and Busts, *Scientific American*, July, Vol.301, No.1, 64-71.
109. Strogatz, S (2003), *Sync, How Order Emerges from Chaos in the Universe, Nature, and Daily Life*. New York: Theia.
110. Tainter, J.A. (1996), Introduction: Prehistoric Societies as Evolving Complex Systems, em Tainter, J.A. e B.B. Tainter, (Eds.), *Evolving Complexity and Environmental Risk in the Prehistoric Southwest, Proceedings of the Workshop “Resource Stress, Economic Uncertainty, and Human Response in the Prehistoric Southwest”*, USA: Adison Wesley, 1-23.
111. Tasca, P. (2009), Exploring Information Mirages in a Simulated Multi-Agent Stock Market, X *Workshop on Quantitative Finance, Milan, January 29-30*, http://www1.mate.polimi.it/wqf09/WQF09/Quantitative_Finance/30/Aula_Rogers/4-Financial_Economics/3-P-Tasca.pdf.
112. Toffler, A. (1984), *The Third Wave*. USA: Bantam.
113. Tricot, C. (1999), *Courbes et Dimension Fractale*. Italy: Springer.
114. Turing, A. M. (1936), On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proc. London Math. Soc.* 42, 230-265.
115. Vaga, T. (1990), The Coherent Market Hypothesis, *Financial Analysts Journal*, November/December.
116. Voit, J. (2001), *The Statistical Mechanics of Financial Markets*. Germany: Springer.

117. Von Neumann, J. e O. Morgenstern [1944], (1972), *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press.
118. Vörös, Z., W. Baumjohann, R. Nakamura, A. Runov, T.L. Zhang, M. Volwerk, U. Eichelberger, A. Balogh, T.S. Horbury, K.-H. Glaßmeier, B. Klecker e H. Rème (2003), Multi-scale magnetic field intermittence in the plasma sheet, *Annales Geophysicae*, Vol. 21, No.9, 1955-1964.
119. Wang, S.S., V.R. Young e H.H. Panjer (1997), Axiomatic Characterization of Insurance Prices, *ARCH*, Vol.1, 15-31.
120. Wolfram, S. (2002), *A New Kind of Science*. Canada: Wolfram Media.
121. Wirch, J.L. (1999), *Coherent Beta Risk Measures for Capital Requirements*. PhD Thesis, University of Waterloo.
122. Whitfield, J. (2008), Risk in Financial Markets – Learning from Nature, *Santa Fe Bulletin*, Vol.23, 1, Spring, 33-37.
123. Yamai, Y. e T. Yoshida (2001), Comparative Analyses of Expected Shortfall and Value at Risk (1): Expected Utility Maximization and Tail Risk, *IMES discussion paper series 2001-E-14*, Tokio: Institute of Monetary and Economic Studies, Bank of Japan.
124. Zhou, W.-X. e D. Sornette (2007), Self-organizing Ising model of financial markets, *The European Physical Journal B*, Vol.55, No.2, 175-181.

Websites consultados:

- <http://www.weforum.org/documents/riskbrowser2010/risks/>
- <http://postbiota.org/pipermail/tt/2008-September/date.html>
- <http://postbiota.org/pipermail/tt/2008-September/003594.html>
- <http://www.mail.archive.com/cosmology-mathematics-and-philosophy@googlegroups.com/msg00714.html>
- <http://www.bis.org/publ/bcbs164.htm>

O documentário *The Midas Formula*, referido no **capítulo 2.**, encontra-se disponível no Youtube, nos seguintes *websites*:

1. <http://www.youtube.com/watch?v=dsrOXJwGwt&hl=pt-PT>

2. <http://www.youtube.com/watch?v=Jzl39jqZjsw&hl=pt-PT>
3. <http://www.youtube.com/watch?v=436cfNtDp3A&hl=pt-PT>
4. <http://www.youtube.com/watch?v=rEFTHbG5JuI&hl=pt-PT>
5. <http://www.youtube.com/watch?v=G17rx7H3DtI&hl=pt-PT>

Importa referir que as partes 3 e 4 estão trocadas, na Youtube, a ordem apresentada acima é a ordem correcta.

O *website* da versão da PBS do mesmo documentário, sob o nome *Trillion Dollar Bet*, é: <http://www.pbs.org/wgbh/nova/stockmarket/>.

Anexo A. – Demonstração do *Teorema 2*

No presente anexo, é demonstrado o seguinte teorema, assumido no contexto do jogo apresentado na **secção 5.1.**:

Teorema 2 (não-arbitragem):

Seja S o preço do seguro, com *payoff*:

$$M = \begin{cases} m(\phi_+ - \phi_-) & \text{se } \phi(\mathbf{s}) = \phi_- \\ 0 & \text{se } \phi(\mathbf{s}) = \phi_+ \end{cases} \quad (325)$$

em que $\phi(\mathbf{s})$ é o *payoff* para o *bit* resultante da *computação da máquina de Turing* do jogo, $\phi_+ = \max(\phi_0, \phi_1)$, $\phi_- = \min(\phi_0, \phi_1)$, $m(\phi_+ - \phi_-) \leq \phi_+$. Defina-se \mathbf{s}_+ tal que $\phi(\mathbf{s}_+) = \phi_+$ e \mathbf{s}_- tal que $\phi(\mathbf{s}_-) = \phi_-$, então dado o operador \hat{M} tal que:

$$\hat{M}\psi^{\mathbf{s}_-} = m(\phi_+ - \phi_-)\psi^{\mathbf{s}_-} \quad (326)$$

$$\hat{M}\psi^{\mathbf{s}_+} = 0 \cdot \psi^{\mathbf{s}_+} \quad (327)$$

na ausência de *oportunidades de arbitragem*, S é tal que:

$$S = e^{-r\tau} \langle \hat{M} \rangle_\psi \quad (328)$$

Para se demonstrar este teorema, considere-se as estratégias de investimento apresentadas no **teorema 1.**, da mesma secção, com os seguintes perfis de *payoffs*:

$$\begin{cases} 1 & \text{se } \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \\ 0 & \text{se } \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \end{cases} \quad (329)$$

e

$$\begin{cases} 0 & \text{se } \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \\ 1 & \text{se } \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \end{cases} \quad (330)$$

Do **teorema 1.**, segue-se que o *preço de Turing* $\mathfrak{T}(0)$ é o custo da estratégia de investimento, conducente ao perfil de *payoffs* (329) e o *preço de Turing* $\mathfrak{T}(1)$ é o custo da estratégia de investimento, conducente ao perfil de *payoffs* (330).

Cada uma destas estratégias pode ser considerada em termos de um operador. De facto, temos, para (329) o *projector* \hat{P}_0 e para (330) o *projector* \hat{P}_1 tais que:

$$\hat{P}_0\psi^0 = 1 \cdot \psi^0, \quad \hat{P}_1\psi^0 = 0 \cdot \psi^0 \quad (331)$$

$$\hat{P}_1\psi^1 = 0 \cdot \psi^1, \quad \hat{P}_0\psi^1 = 1 \cdot \psi^1 \quad (332)$$

Designamos as apostas a que correspondem estes *projectores* por *Turing securities*. No seio da *teoria financeira quântica*, as *Turing securities* correspondem a *Arrow-Debreu securities*, enquanto que os *preços de Turing* correspondem aos *preços de Arrow-Debreu* das *Arrow-Debreu securities*.

Dado que, para o jogo financeiro, o *bit quântico* é tal que:

$$\psi^{\mathfrak{s}} = \sqrt{e^{r\tau} \mathfrak{Z}(\mathfrak{s})} \quad (333)$$

temos:

$$e^{-r\tau} \langle \hat{P}_0 \rangle_{\psi} = e^{-r\tau} \left(1 \cdot |\psi^0|^2 + 0 \cdot |\psi^1|^2 \right) = e^{-r\tau} \cdot e^{r\tau} \mathfrak{Z}(0) = \mathfrak{Z}(0) \quad (334)$$

$$e^{-r\tau} \langle \hat{P}_1 \rangle_{\psi} = e^{-r\tau} \left(0 \cdot |\psi^0|^2 + 1 \cdot |\psi^1|^2 \right) = e^{-r\tau} \cdot e^{r\tau} \mathfrak{Z}(1) = \mathfrak{Z}(1) \quad (335)$$

Considere-se, agora, um *activo financeiro* genérico com *payoffs* contingentes à computação realizada pela *máquina-a* do jogo, tal que:

$$X = \begin{cases} x(0) & \text{se } \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \\ x(1) & \text{se } \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \end{cases} \quad (336)$$

este sistema de *payoffs* pode ser capturado por um *operador de payoffs* \hat{X} com a seguinte expansão:

$$\hat{X} = x(0) \hat{P}_0 + x(1) \hat{P}_1 \quad (337)$$

Em termos financeiros, a relação (337) significa que o *activo financeiro* pode ser *replicado* por uma compra de $x(0)$ unidades da *Turing security* correspondente a \hat{P}_0 e por uma compra de $x(1)$ unidades da *Turing security* correspondente a \hat{P}_1 , existe, assim, uma correspondência directa entre a expansão em termos dos *projectores* e a formação de *replicating portfolios*, trata-se de uma correspondência central para a *teoria financeira quântica*.

Dado o custo da primeira *Turing security* ser igual a $\mathfrak{Z}(0)$, e dado o custo da segunda *Turing security* ser igual a $\mathfrak{Z}(1)$, segue-se que o custo total do *replicating portfolio*, que denotamos por $\pi(\hat{X})$, é dado por:

$$\pi(\hat{X}) = x(0) \mathfrak{Z}(0) + x(1) \mathfrak{Z}(1) \quad (338)$$

Por seu turno, $\pi(\hat{X})$ é tal que:

$$\begin{aligned} \pi(\hat{X}) &= x(0) \mathfrak{Z}(0) + x(1) \mathfrak{Z}(1) = \\ &= e^{-r\tau} (x(0) e^{r\tau} \mathfrak{Z}(0) + x(1) e^{r\tau} \mathfrak{Z}(1)) = \\ &= e^{-r\tau} \left(x(0) |\psi^0|^2 + x(1) |\psi^1|^2 \right) = e^{-r\tau} \langle \hat{X} \rangle_{\psi} \end{aligned} \quad (339)$$

ou seja, na ausência de *oportunidades de arbitragem*, o *custo do replicating portfolio* tem que coincidir com o seu preço de mercado, assim, o preço de mercado do activo contingente correspondente a \hat{X} tem que coincidir com $\pi(\hat{X}) = e^{-r\tau} \langle \hat{X} \rangle_\psi$.

Considere-se, agora, que $\phi_- = \phi(0)$, então, a expansão, para o seguro, é dada por:

$$\hat{M} = m(\phi_1 - \phi_0) \cdot \hat{P}_0 + 0 \cdot \hat{P}_1 \quad (340)$$

Na ausência de *oportunidades de arbitragem*, seguindo os resultados obtidos acima, o *preço de mercado* do seguro é dado por:

$$S = \pi(\hat{M}) = e^{-r\tau} \langle \hat{M} \rangle_\psi = m(\phi_1 - \phi_0) \mathfrak{T}(0) \quad (341)$$

por seu turno, se $\phi_- = \phi(1)$, então, a expansão é dada por:

$$\hat{M} = 0 \cdot \hat{P}_0 + m(\phi_0 - \phi_1) \cdot \hat{P}_1 \quad (342)$$

Na ausência de *oportunidades de arbitragem*, seguindo os resultados obtidos acima, o *preço de mercado* do seguro é, neste segundo caso, dado por:

$$S = \pi(\hat{M}) = e^{-r\tau} \langle \hat{M} \rangle_\psi = m(\phi_0 - \phi_1) \mathfrak{T}(1) \quad (343)$$

o que demonstra o **teorema 2**.

Importa relevar, acerca destes resultados, o modo como o risco está a ser avaliado pelo mercado. Tratando-se de um processo adaptativo, a *ausência de oportunidades de arbitragem* e, logo, o *equilíbrio de mercado* são propriedades emergentes do comportamento adaptativo do sistema adaptativo complexo (neste caso, o mercado). Estando reflectido, no *preço de mercado* do seguro, a avaliação do risco pelo mercado, então, de (341) e (343), na *ausência de oportunidades de arbitragem*, resulta que:

$$S = m(\phi_+ - \phi_-) \mathfrak{T}(\mathfrak{s}_-) \quad (344)$$

Logo, a avaliação do mercado reflecte, por um lado, $\mathfrak{T}(\mathfrak{s}_-)$, isto é, o *preço de Turing* da *Turing security* para o cenário adverso, e $m(\phi_+ - \phi_-)$, isto é, o *payoff do seguro* que compensa o jogador no cenário adverso por um montante de $m(\phi_+ - \phi_-)$. Trata-se, assim, de uma avaliação do valor adaptativo de uma estratégia que protege o jogador no cenário adverso.

Anexo B. – Análise Empírica

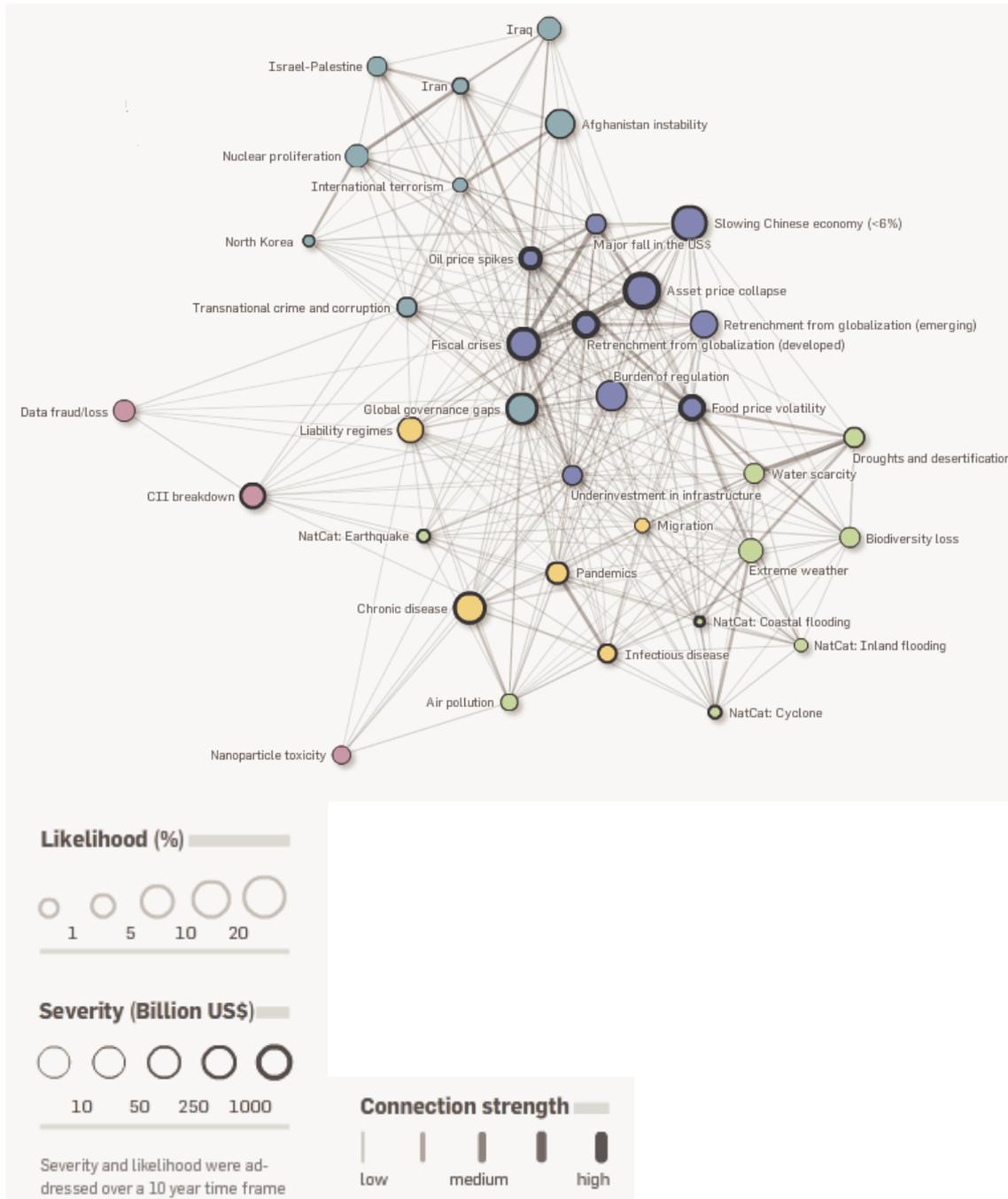


Fig. 1 – *Risks Interconnection Map* do WEF para 2010.
 Fonte: *World Economic Forum*

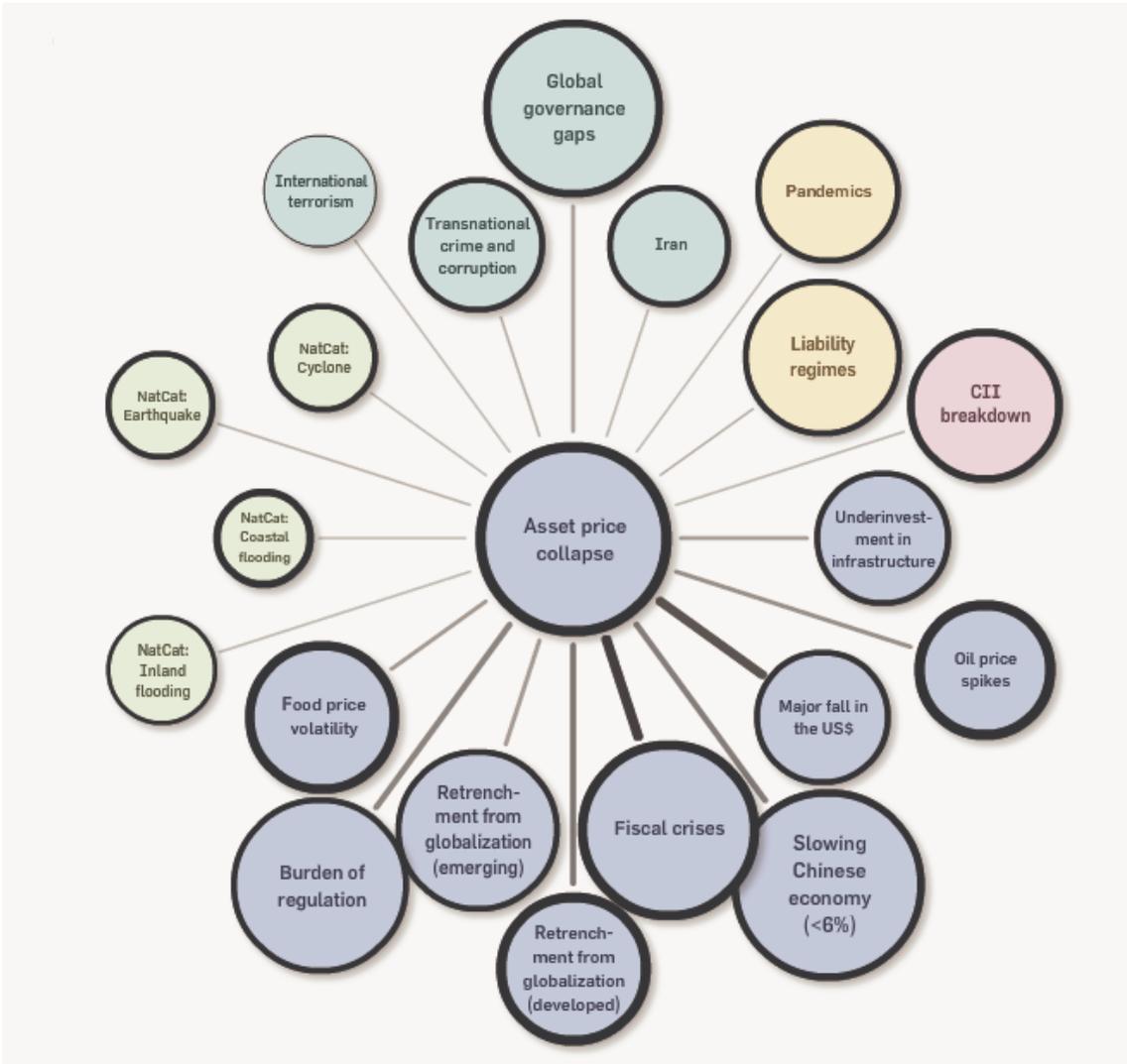


Fig.2 – Rede de risco para colapso nos preços dos activos (reais e financeiros).
 Fonte: *World Economic Forum*

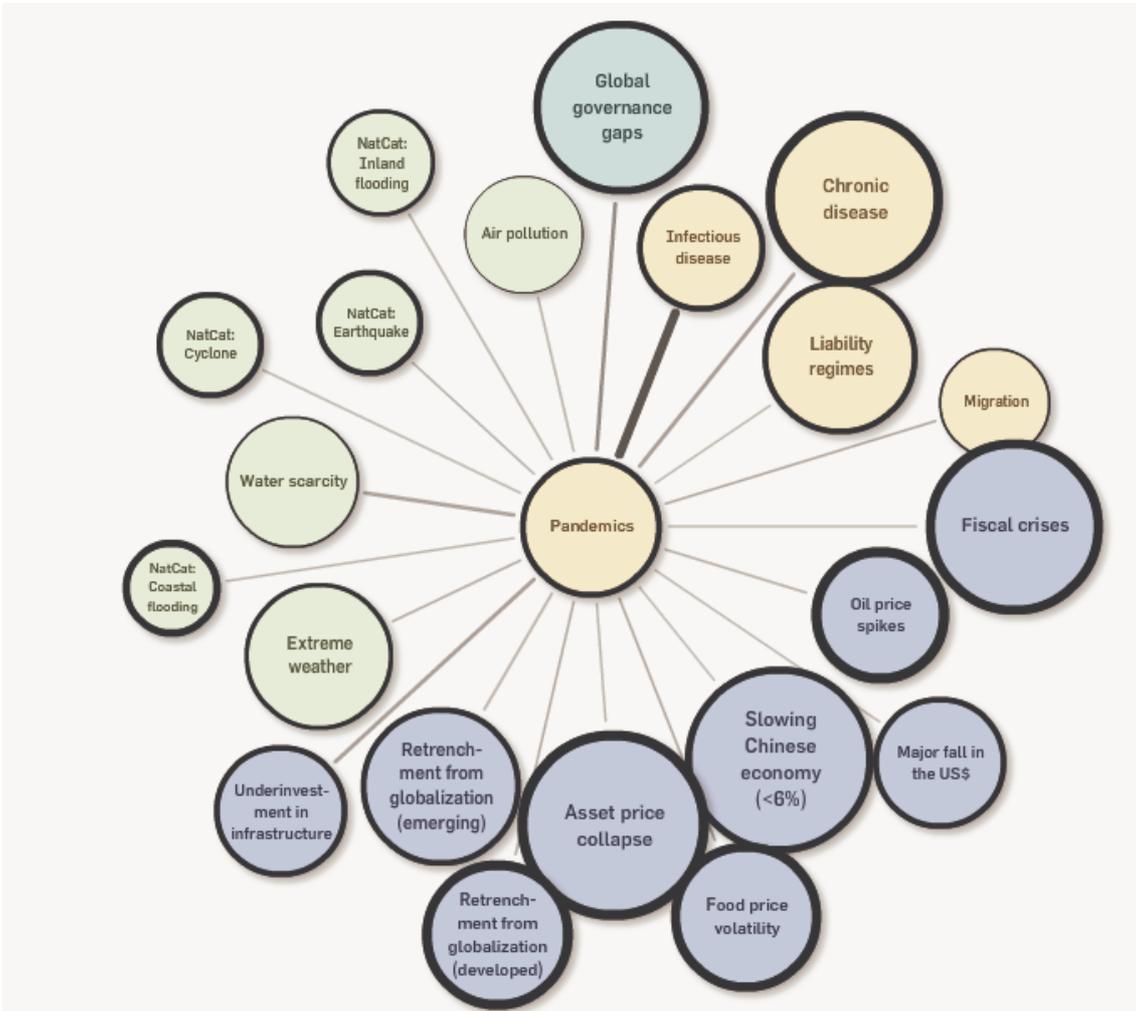


Fig.3 – Rede de risco para as pandemias.
 Fonte: *World Economic Forum*

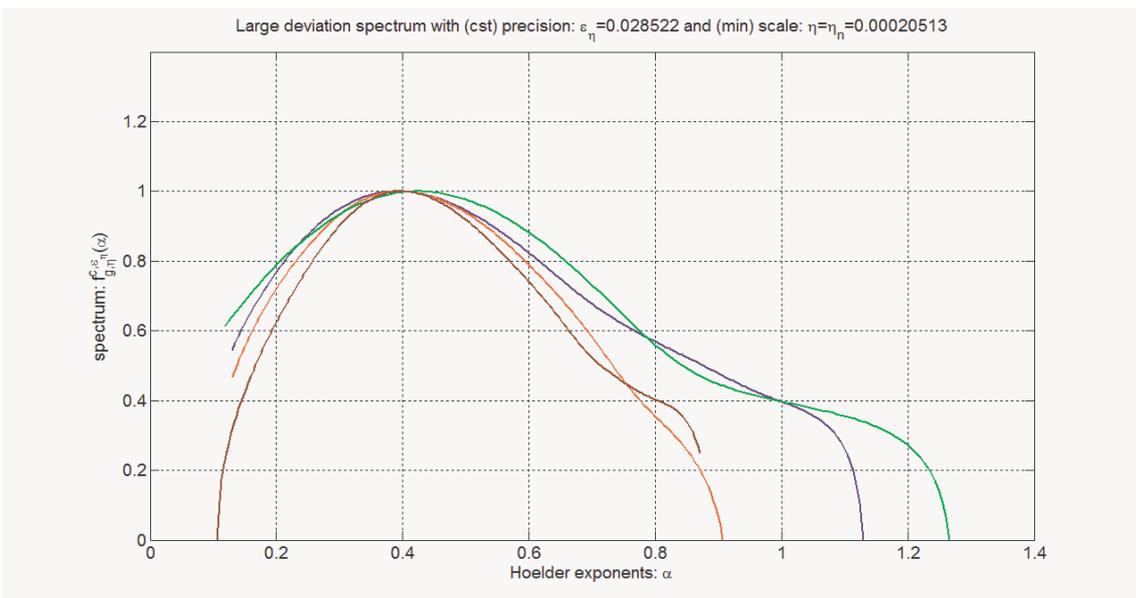
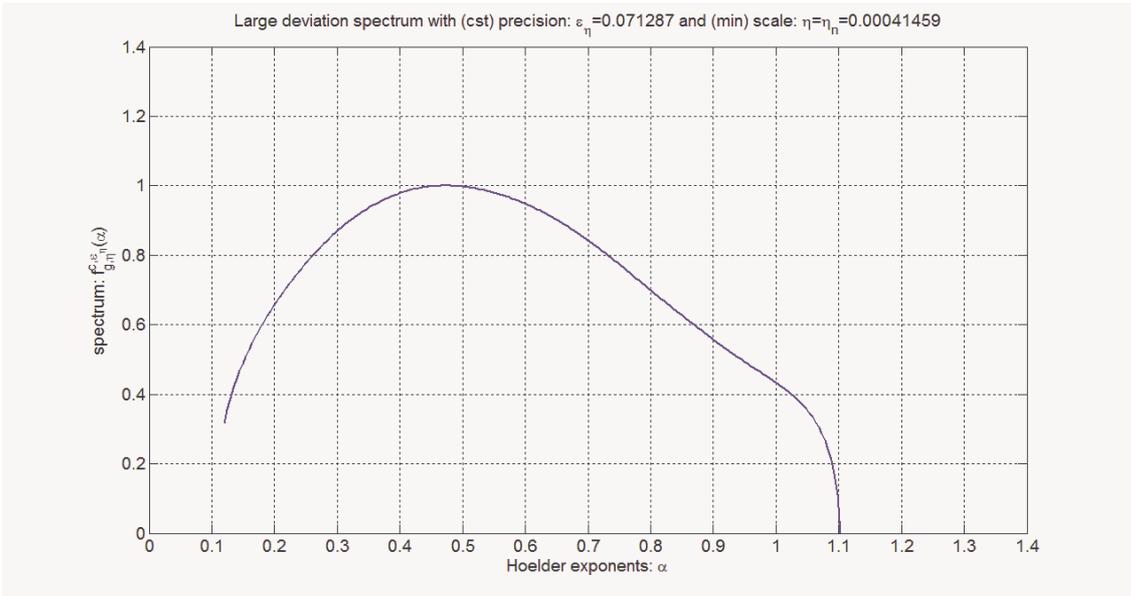
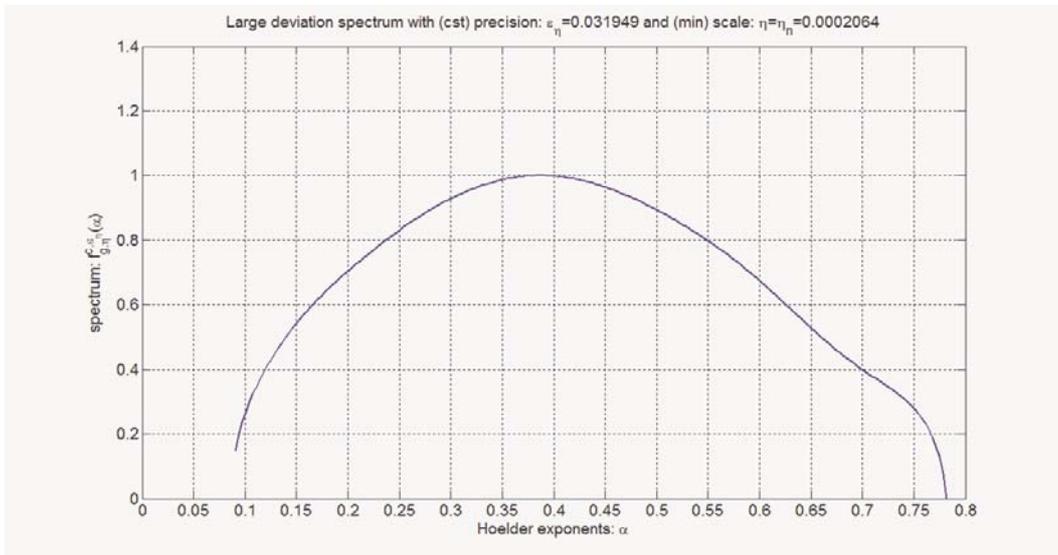


Fig.4 – LDS para: IBM (linha vermelha); Microsoft (linha azul); General Electric (linha verde); Honda Motor Co ADR (linha castanha).



(a)



(b)

Fig.5 – LDS para: (a) PSI-20; (b) CAC 40.

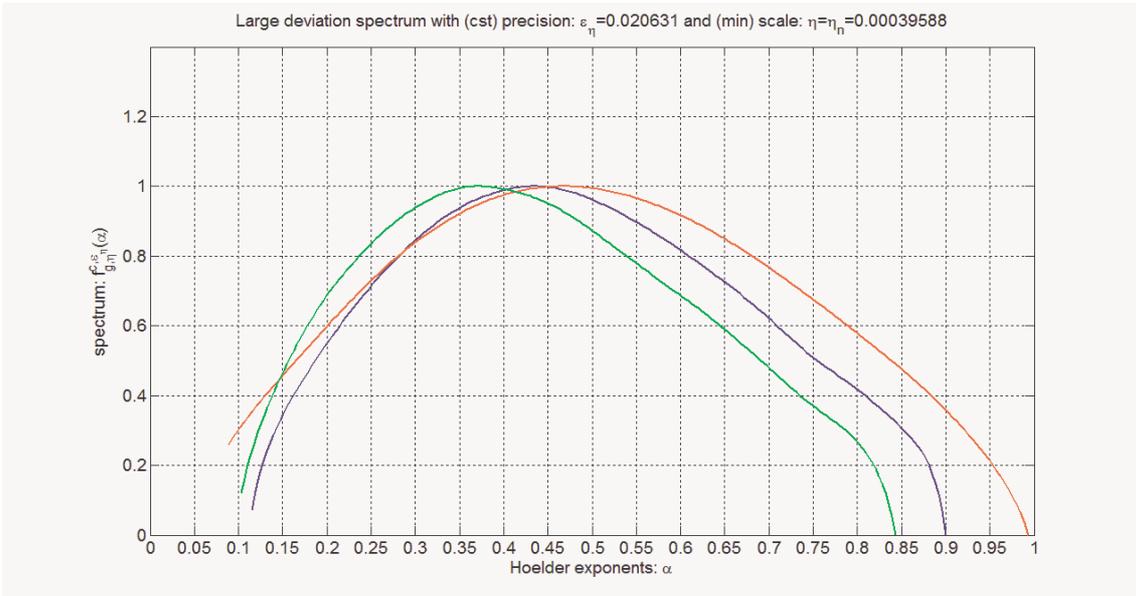


Fig.6 – LDS para S&P 500: década de 1950 (linha azul); década de 1960 (linha vermelha); década de 1970 (linha verde).

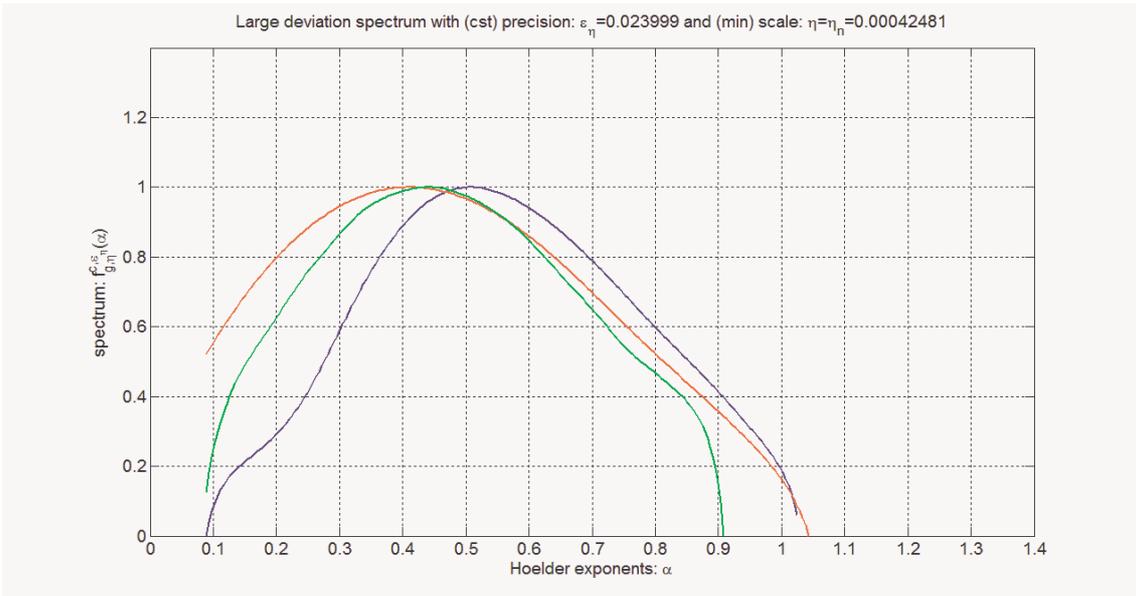


Fig.7 – LDS para S&P 500: década de 1980 (linha azul); década de 1990 (linha vermelha); 2000 a 2009 (linha verde).

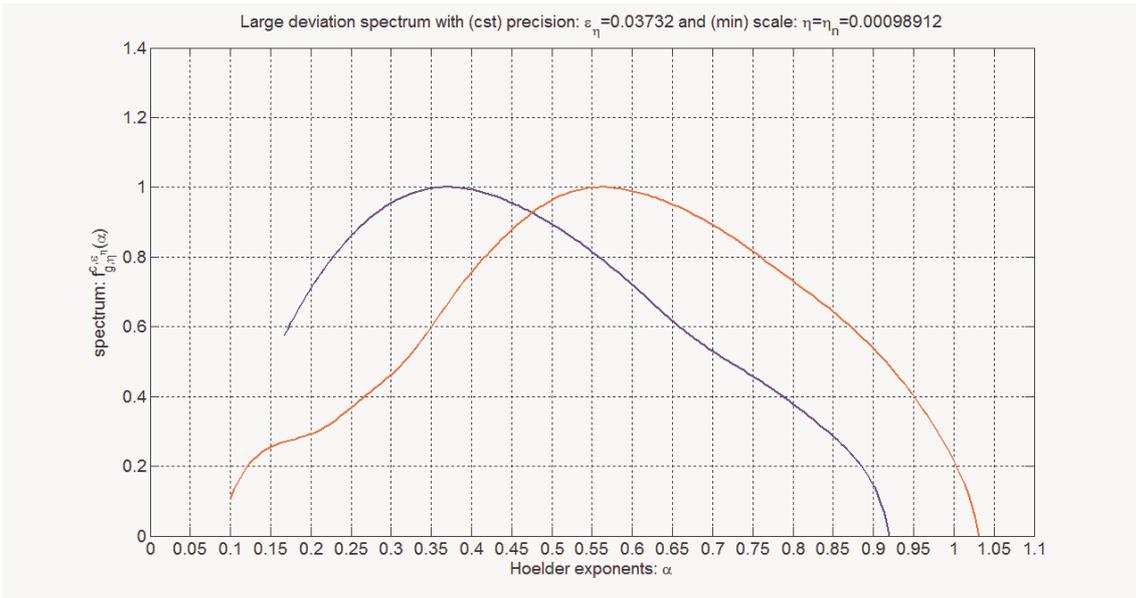


Fig.8 – LDS para S&P 500, com subdivisão da década de 1980: de 02-01-1980 a 31-12-1985 (linha azul); de 02-01-1986 a 31-12-1989 (linha vermelha).

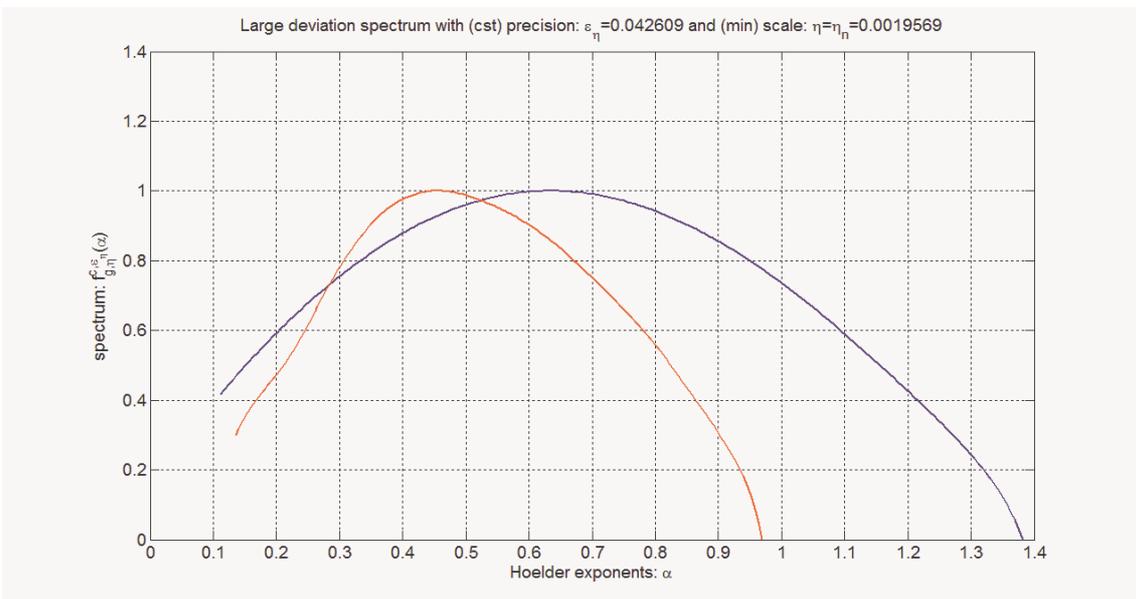
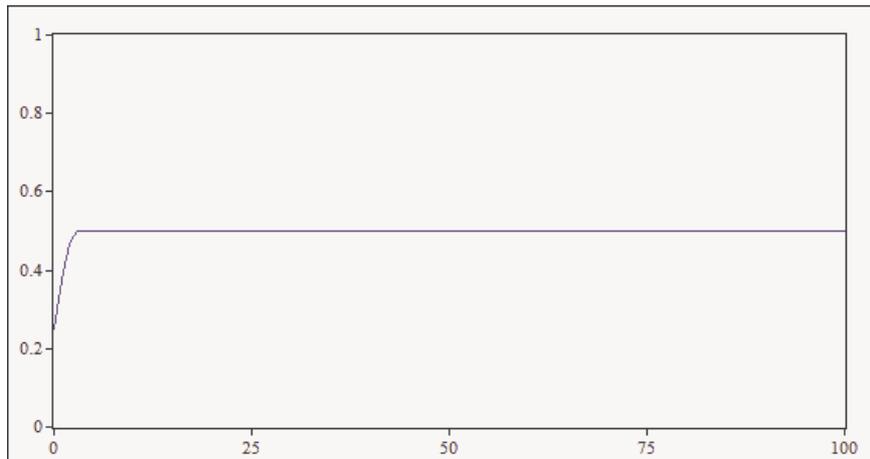
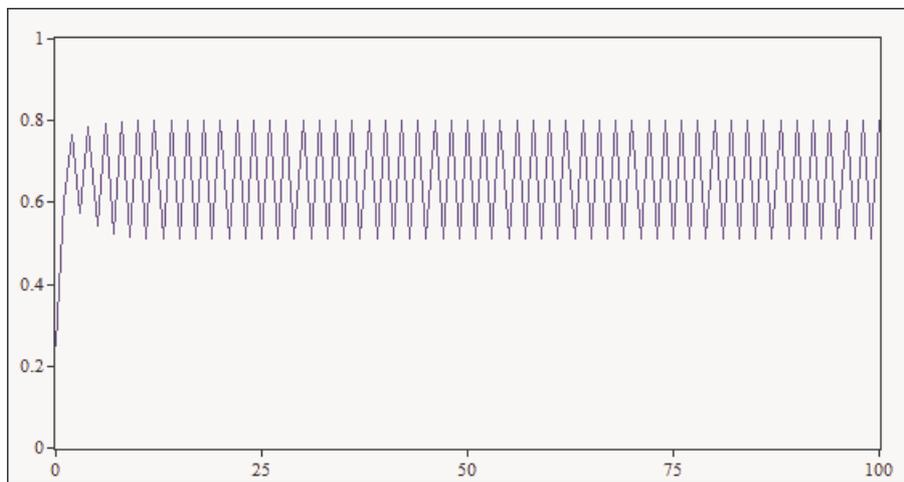


Fig.9 – LDS para S&P 500, com subdivisão do período de 1986 a 1989: de 02-01-1986 a 22-12-1987 (linha azul); de 23-12-1987 a 31-12-1989 (linha vermelha).

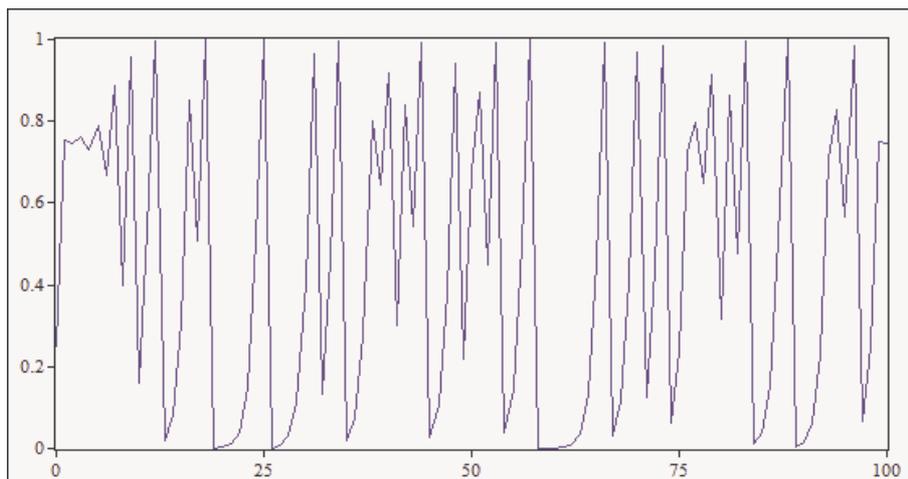
Anexo C. – Dinâmica Não-linear – Exemplos



(a)

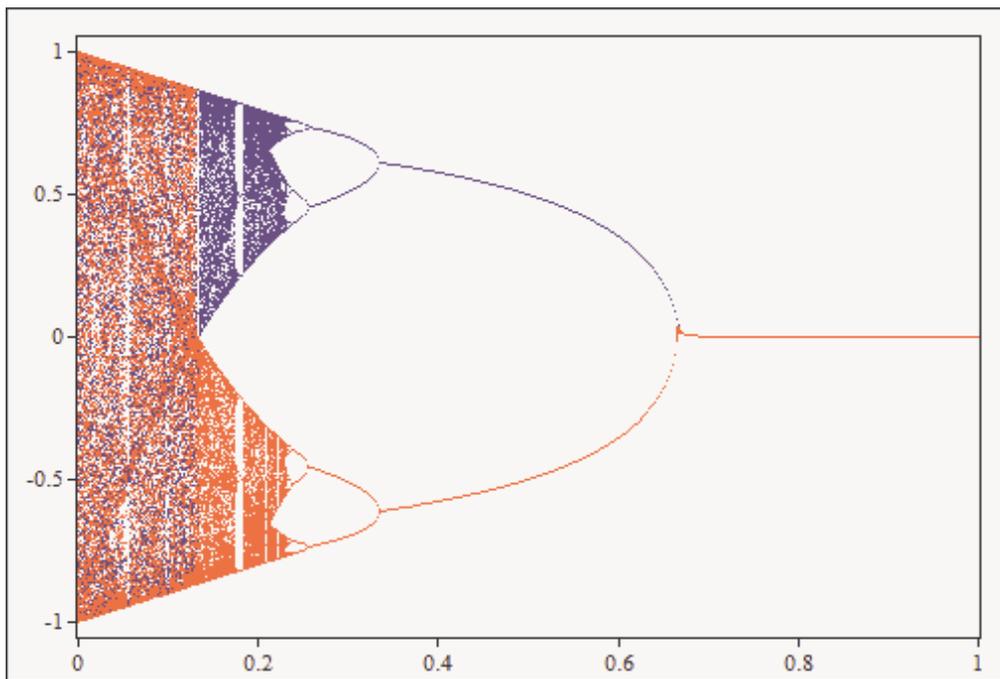


(b)



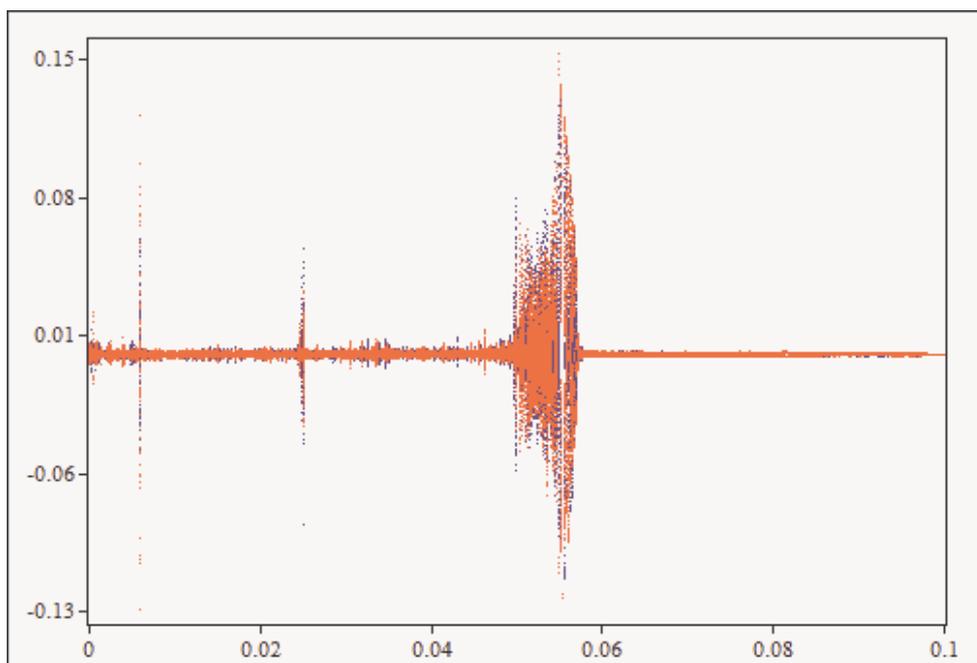
(c)

Fig.1 – Cronogramas de 100 iterações do *mapa logístico*, com $\mu = 0.2512343454$ e para os seguintes valores do parâmetro de controle: (a) $a = 2$; (b) $a = 3.2$; (c) $a = 4$.



ϵ

(a)

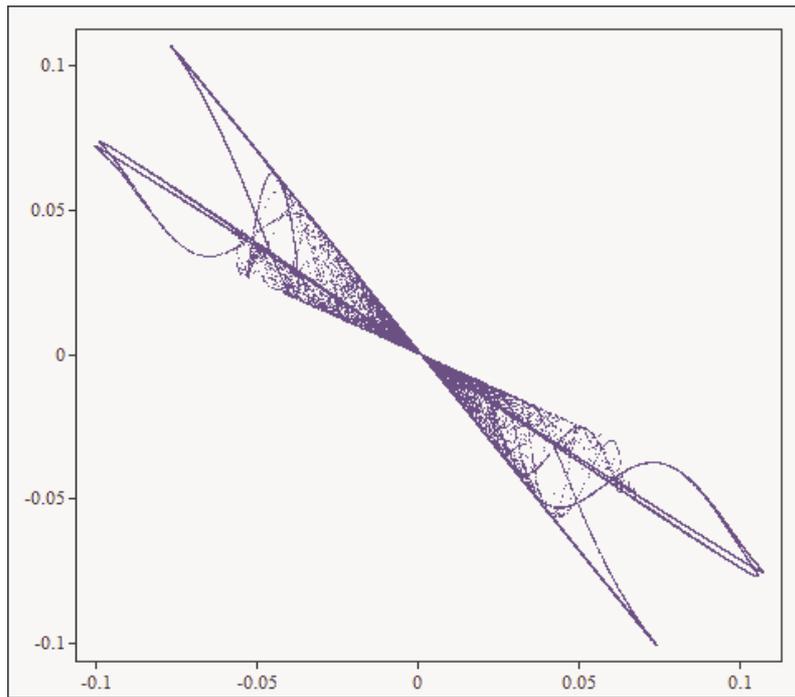


ϵ

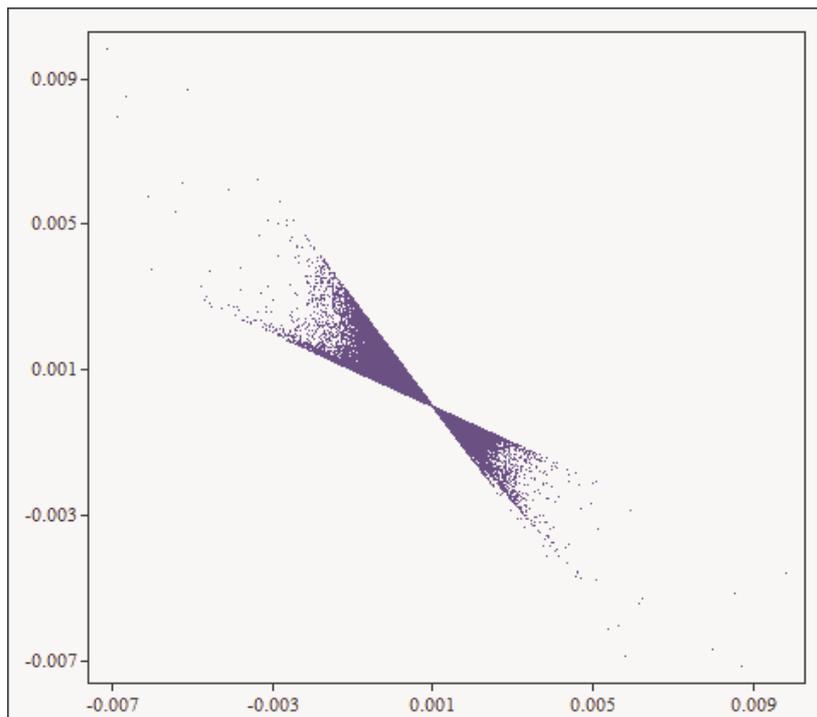
(b)

Fig.2 – Diagramas de bifurcações para: (a) $x(n)$ e (b) $y(n)$, por variação de ϵ , quando: $a = 3$, $b = 0.5$, $r = 0.001$. Os pontos a azul correspondem a uma condição inicial positiva, enquanto que os pontos a vermelho correspondem à condição inicial simétrica.

Fonte: Madeira e Gonçalves (2009).



(a)



(b)

Fig.3 – Diagramas de desfasamento para $y(n)$ ($y(n-1)$ nas abcissas e $y(n)$ nas ordenadas), com $a = 3$, $b = 0.5$, $r = 0.001$ e: (a) $\varepsilon=0.056$ (próximo de uma região de elevada variabilidade), (b) $\varepsilon=0.01$ (próximo de uma região central).

Fonte: Madeira e Gonçalves (2009).

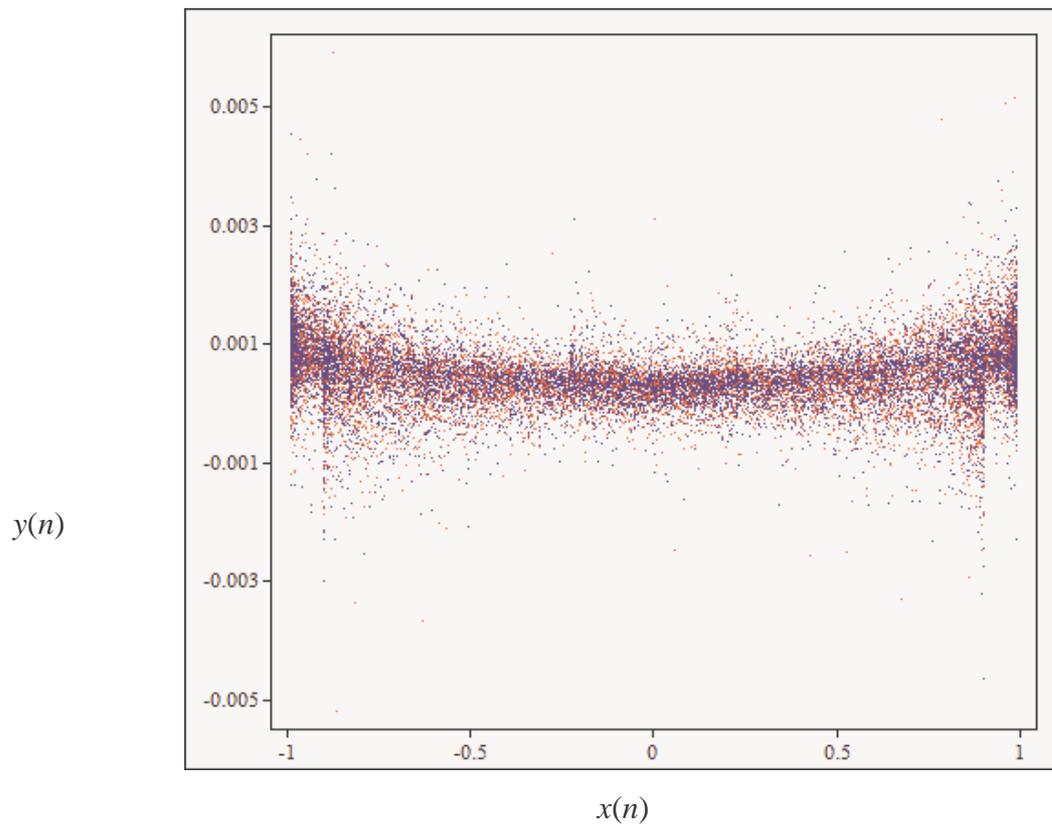
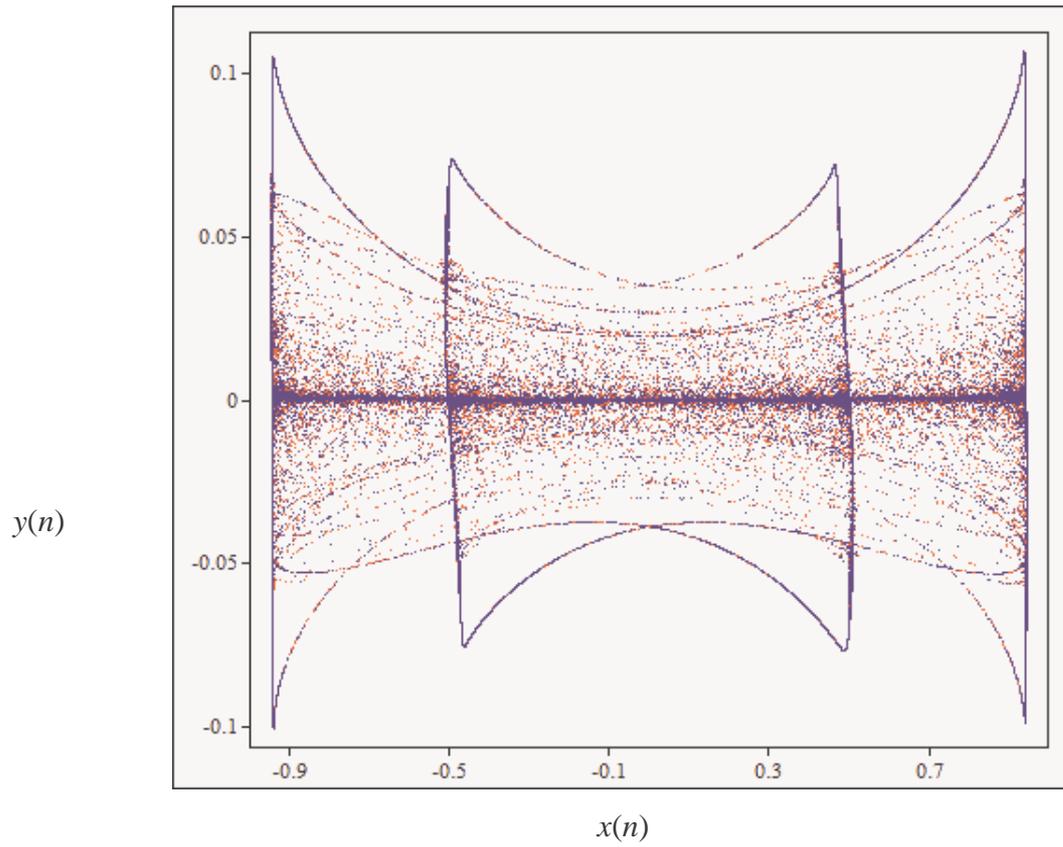


Fig.4 – Atratores para $a = 3$, $b = 0.5$, $r = 0.001$ e: (a) $\varepsilon=0.056$, (b) $\varepsilon=0.01$.

Fonte: Madeira e Gonçalves (2009).

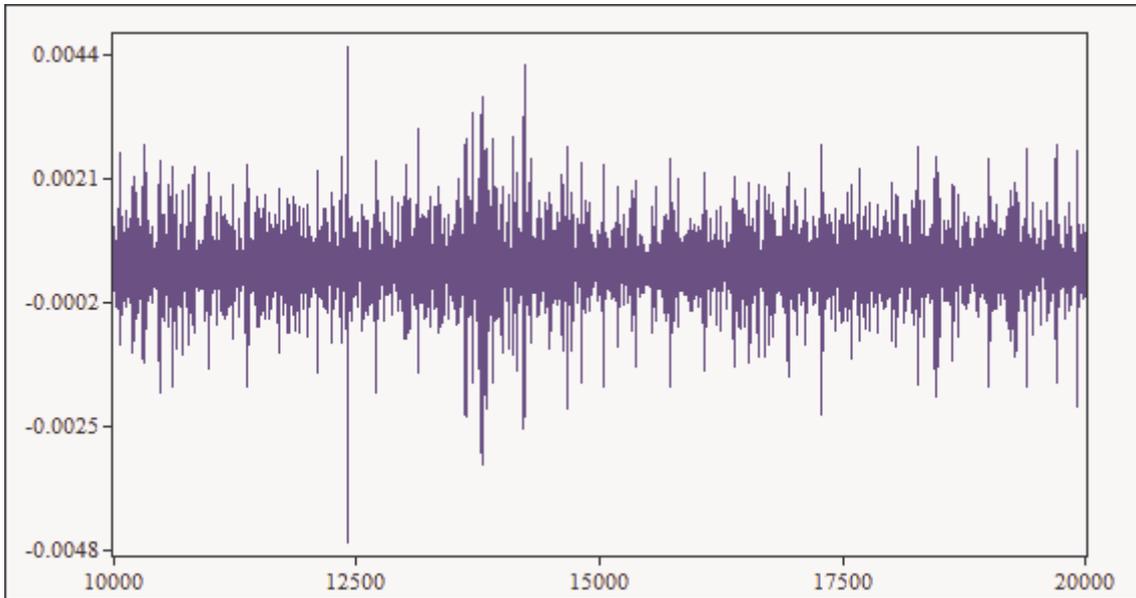


Fig.5 – Sucessão cronológica com 20,000 iterações para $y(n)$, resultante de uma simulação com 30,000 iterações, as primeiras 10,000 iterações tendo sido removidas para transiente. Parâmetros: $a = 3$, $b = 0.5$, $r = 0.001$, $\varepsilon = 0.01$.

Fonte: Madeira e Gonçalves (2009).

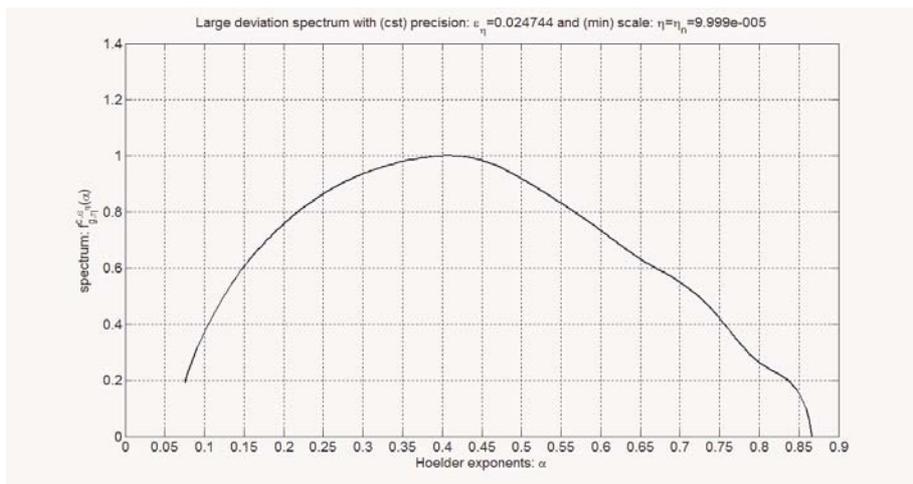


Fig.6 – LDS para os dados da **figura 5**.

Fonte: Madeira e Gonçalves (2009).