

iscte

UNIVERSITY
INSTITUTE
OF LISBON

U LISBOA

UNIVERSIDADE
DE LISBOA

Análise Assintótica de Opções no Modelo de Volatilidade Estocástica α -Hipergeométrico

Frederico da Silva Rodrigues

Mestrado em Matemática Financeira

Orientadores

Professor João Pedro Silva Brito Boto, FCUL

Professora Maria Fernanda Almeida Cipriano Salvador Marques, FCT NOVA

Lisboa, Setembro de 2022

Departamento de Finanças | Departamento de Matemática

Análise Assintótica de Opções no Modelo de Volatilidade Estocástica α -Hipergeométrico

Frederico da Silva Rodrigues

Mestrado em Matemática Financeira

Orientadores

Professor João Pedro Silva Brito Boto, FCUL

Professora Maria Fernanda Almeida Cipriano Salvador Marques, FCT NOVA

Lisboa, Setembro de 2022

À minha família sem a qual nada disto seria possível

Agradecimento

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer ao professor João Pedro Boto e à professora Fernanda Cipriano, orientadores desta dissertação de mestrado, por toda a ajuda e boa disposição com que me presentearam em cada reunião, desde o primeiro momento.

Agradeço ainda aos meus pais e à minha namorada pelo incentivo e apoio que sempre me deram.

Resumo

Os modelos de volatilidade estocástica revelam, como contrapartida do seu maior realismo, uma maior dificuldade em estabelecer fórmulas simples para o preço de opções europeias. O problema de encontrar o preço destes derivados pode ser formulado por uma equação diferencial parcial de segunda ordem. Através da perturbação do *driver* de volatilidade do modelo, é possível alterar ligeiramente o problema por forma a encontrar uma aproximação simples da sua solução como uma soma de potências de um dado parâmetro perturbativo. Nesta tese procurámos, seguindo resultados conhecidos da teoria de perturbação, desenvolver fórmulas simples de aproximação do preço de opções *put* e da curva de volatilidade implícita no contexto do modelo α -hipergeométrico.

Para desenvolver estas aproximações para o modelo α -hipergeométrico, começámos por estudar o seu *driver* de volatilidade. Encontrámos uma distribuição invariante para esse processo e provámos a sua unicidade e reversibilidade dentro do conjunto das medidas que admitem uma função densidade suave. Foram estas propriedades que permitiram a utilização de resultados conhecidos para as derivações das aproximações do preço.

Pela relevância que o espectro de um operador tem para o entendimento da sua ação no espaço em que opera, iniciámos também o estudo espectral do gerador infinitesimal do processo de volatilidade. Daí, estabelecemos uma fórmula geral para as funções próprias desse gerador e derivámos algumas desigualdades com vista a tentar enquadrar o seu espectro real num determinado intervalo.

Por fim, determinámos fórmulas simples de primeira e segunda ordens para o preço das opções e da volatilidade implícita do modelo, como pretendíamos, oferecendo também representações gráficas ilustrativas para um dado conjunto de parâmetros. Discutimos ainda de forma breve a aproximação do preço de opções americanas através de um método de aleatorização da maturidade, que se torna possível após a já referida determinação da distribuição invariante para a volatilidade deste modelo.

Abstract

Stochastic volatility models are more realistic, yet the difficulty of establishing a simple pricing formula for european options is a major drawback. The problem of pricing this derivatives can be formulated by a partial differential equation of second order. By perturbing the model's volatility driver it is possible to slightly alter the problem in order to find a simple approximation of its solution as a finite power series of the perturbation parameter. In this thesis, following known results of perturbation theory, we tried to develop simple approximations for both put option prices and implied volatility curves in the α -hypergeometric model.

With the development of this approximations for the α -hypergeometric model in sight, we started by studying its volatility driver. We found an invariant distribution for that process and proved its uniqueness and reversibility within the set of measures which admit a smooth density function. Those were the properties which allowed the use of known results for the derivation of price approximations.

Because of the relevance that an operator's spectrum has to the comprehension of its action in the space where it operates, we initiated the spectral analysis of the volatility process' infinitesimal generator. From these study we established a general formula for the eigenfunctions of that generator and derived some inequalities in the intent of finding an interval which contained its real spectrum.

Finally, we derived simple formulas for the first and second order approximations of the european put's price and the model's implied volatility curve, as we intended. Also, we offer illustrative graphical representations for a given set of parameters. As an extension we discuss briefly the price approximation for american puts through a maturity's randomization procedure which is possible after determining the invariant distribution for these model's volatility.

Índice

Agradecimento	iii
Resumo	v
Abstract	vii
Capítulo 1. Introdução	1
Capítulo 2. O Modelo de Black-Scholes (1973)	5
2.1. Formulação do Modelo	5
2.2. Avaliação de Derivados e Estratégias de Replicação	6
2.3. Avaliação de Derivados na Medida de Risco Neutro	8
Capítulo 3. Modelos de Volatilidade Estocástica	13
3.1. Problemáticas do Modelo de Black-Scholes	13
3.2. Formulação Geral dos Modelos de Volatilidade Estocástica	17
3.3. O Modelo de Heston (1993)	22
3.4. O Modelo α -Hipergeométrico (2014)	23
Capítulo 4. Teoria da Perturbação de Primeira Ordem	25
4.1. Geradores Infinitesimais e Semigrupos de Transição	25
4.2. Distribuição Invariante e Reversibilidade de um Processo	27
4.3. Expansão de Primeira Ordem para o Preço de Opções Europeias	29
Capítulo 5. Processo de Volatilidade no Modelo α -Hipergeométrico	35
5.1. Modelo α -Hipergeométrico: Existência, Unicidade e Reversibilidade da Distribuição Invariante	35
5.2. Modelo α -Hipergeométrico: Contribuição para o Estudo Espectral do Gerador Infinitesimal de Y_t	40
Capítulo 6. Aproximação do Preço de Opções no Modelo α -Hipergeométrico	47
6.1. Modelo α -Hipergeométrico com Volatilidade Acelerada	48
6.2. Cálculo da Aproximação de Primeira Ordem para o Modelo α -Hipergeométrico	48
6.3. Aproximação da Curva de Volatilidade Implícita	56
6.4. Extensões	57
Capítulo 7. Conclusões	67

CAPÍTULO 1

Introdução

O modelo de Black-Scholes (1973) apresentado em [5] parte de pressupostos que negligenciam algumas das complexidades reais da dinâmica evolutiva dos ativos financeiros. A sua base simples de modelização é simultaneamente fonte da sua beleza e sucesso, como das suas desvantagens. Algumas das principais fraquezas deste modelo, que serão explicadas posteriormente, têm origem na assunção de que a evolução dos ativos é regulada por uma volatilidade constante. As fragilidades que esta particularidade levanta motivaram a investigação científica subsequente para o desenvolvimento de diversas extensões ao modelo de Black-Scholes, no sentido da introdução de uma dinâmica estocástica para a volatilidade dos ativos financeiros.

O modelo de volatilidade estocástica mais proeminente é o modelo de Heston (1993), apresentado pela primeira vez em [10]. Neste modelo, o *driver* da volatilidade evolui respeitando a seguinte equação diferencial estocástica:

$$dv_t = a(b - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_t$$

onde b é a média de longo prazo da volatilidade instantânea, a é a velocidade de reversão para a média e σ é o parâmetro de volatilidade do processo v_t . Para que o modelo se revele adequado, este processo deve verificar a positividade. Para garantir que o processo se mantém positivo ao longo do tempo, os parâmetros devem verificar a condição de Feller (1951) (vide [11]):

$$\frac{2ab}{\sigma^2} > 1.$$

Contudo, a evidência empírica parece mostrar que frequentemente a condição não é verificada e que o parâmetro de reversão para a média é de difícil estimação. Estas são algumas das problemáticas levantadas em [4] e às quais o mesmo procura responder através da proposição de um novo modelo de volatilidade estocástica: o modelo α -hipergeométrico (2014).

No âmbito deste modelo, o objectivo do presente estudo incide principalmente sobre a avaliação de opções europeias (sendo que as opções americanas também serão discutidas). Neste contexto, os modelos de volatilidade estocástica enfrentam duas grandes dificuldades:

- A incompletude do mercado, o que obriga a assumir uma dinâmica de risco neutro *a priori*;
- Após a escolha de uma medida de risco neutro, a difícil dedução de uma fórmula fechada para o preço de opções.

Por causa do segundo ponto, o desenvolvimento de técnicas teóricas e/ou computacionais de aproximação eficiente dos preços para estes derivados ganha um grande interesse nestes modelos mais complexos. O objectivo desta dissertação é pois, seguindo de perto a teoria perturbativa de primeira ordem apresentada em [7]:

1. Encontrar e provar a unicidade (dentro do espaço das medidas que admitem uma função densidade suave) da distribuição invariante do processo do *driver* de volatilidade do modelo α -hipergeométrico;
2. Iniciar o estudo espectral do gerador infinitesimal do processo do *driver* de volatilidade;
3. Estabelecer uma aproximação de primeira ordem para o preço de opções *put* no modelo α -hipergeométrico;
4. Estabelecer uma aproximação de primeira ordem para a curva de volatilidade implícita do modelo α -hipergeométrico;
5. Estender os resultados anteriores, apresentando as aproximações de segunda ordem do preço e da volatilidade implícita neste modelo;
6. Discutir a utilização da abordagem de aleatorização da maturidade seguida em [3] para a aproximação de opções *put* americanas neste modelo.

O estudo das aproximações assintóticas do preço de opções no modelo α -hipergeométrico (em particular, no caso em que $\alpha = 2$) já havia sido iniciado em [8], contudo, o termo perturbativo que Privault introduz na componente estocástica do *driver* de volatilidade para o cálculo dos termos de correção de primeira e segunda ordens faz com que o modelo deixe de estar na classe dos modelos 2-hipergeométricos. A metodologia de aproximação apresentada neste documento está toda contida no âmbito do modelo α -hipergeométrico.

Este documento está organizado em 7 capítulos, sendo o primeiro a introdução. No segundo capítulo, apresentamos brevemente os aspectos mais relevantes do modelo de Black-Scholes, no que diz respeito à avaliação de opções europeias. O modelo será formulado e serão apresentados o operador diferencial e as fórmulas do preço de Black-Scholes tanto numa ótica de estratégias de replicação, como pela via da medida de risco neutro.

No terceiro capítulo são abordadas as problemáticas do modelo de Black-Scholes relacionadas com a superfície de volatilidade implícita, após o que se apresentam os modelos de volatilidade estocástica. Começa-se por uma discussão desta tipologia de modelos de forma abstrata e, depois são apresentados brevemente o modelo de Heston e o modelo α -hipergeométrico. Por fazer a ponte entre o modelo clássico e o modelo de volatilidade estocástica que será objecto de estudo desta dissertação, este capítulo é bastante relevante para um bom enquadramento do tema principal.

No quarto capítulo, é explorada a teoria da perturbação de primeira ordem. Definem-se conceitos centrais como o de gerador infinitesimal de um processo de Markov, o de medida invariante e o de reversibilidade; de seguida são apresentadas as derivações da expansão de primeira ordem de [7] com base nestes conceitos.

No quinto capítulo encontramos a distribuição invariante do *driver* da volatilidade, provando a sua unicidade. Adicionalmente, é provada a reversibilidade do processo e é iniciado o estudo dos valores próprios do gerador infinitesimal do mesmo.

No sexto capítulo é encontrada a expansão de primeira e segunda ordens do preço de opções europeias no modelo α -hipergeométrico. Adicionalmente, são discutidos processos aproximativos para opções americanas e a sua aplicação neste modelo.

Por fim, apresentamos um capítulo de conclusões, considerações finais e onde colocaremos hipóteses relacionadas com o modelo estudado e que poderão motivar trabalhos frutíferos no futuro.

O Modelo de Black-Scholes (1973)

Optou-se pela apresentação do modelo de Black-Scholes, pois a compreensão geral dos seus fundamentos é um requisito para um bom entendimento da investigação subsequente em matemática financeira. O objectivo desta secção é a formulação deste modelo clássico que revolucionou a teoria financeira moderna. Na sequência da formulação do modelo pretendemos apresentar os principais conceitos, resultados, e deduções relevantes do mesmo.

Pretende-se que esta seja uma apresentação sucinta que sirva de ponto de partida para a discussão dos modelos de volatilidade estocástica.

2.1. Formulação do Modelo

O modelo inicial proposto por Fisher Black e Myron Scholes em [5] assume um mercado com dois ativos apenas:

- Um ativo sem risco - como, por exemplo, uma obrigação do tesouro americano - com preço B_t , $t \geq 0$, cuja dinâmica evolutiva é definida a partir da seguinte equação:

$$dB_t = rB_t dt \quad (2.1)$$

onde $r \geq 0$;

- Um ativo com risco - como, por exemplo, uma ação - com preço S_t , $t \geq 0$, que evolui segundo a seguinte equação diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (2.2)$$

onde μ é a média da taxa de retorno, $\sigma > 0$ é a volatilidade instantânea dos retornos que aqui assume-se constante, e $(W_t)_{t \geq 0}$ é um movimento Browniano *standard*.

NOTA 2.1. *Pondo $B_0 = 1$, temos claramente $B_t = e^{rt}$. Num mundo de risco neutro, pela hipótese de não arbitragem, e^{rt} devia ser o retorno esperado sobre qualquer investimento.*

NOTA 2.2. *Daqui em diante, utilizaremos sempre a notação W_t para representar um movimento Browniano standard. No caso de, no contexto particular em que nos encontrarmos, estarmos a trabalhar com mais do que um destes processos, utilizaremos índices e/ou signos distintivos.*

Como se pode ver pela forma da equação (2.2), esta possui duas componentes: uma componente determinística e uma componente estocástica. A introdução do termo $\sigma S_t dW_t$

traduz-se numa perturbação do que seria uma função determinística do tempo. Para resolver a equação (2.2) é necessário recorrer à importante fórmula de Itô, que recordamos abaixo:

LEMA 2.1. *Sejam X_t um processo que satisfaça $dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t$ e $g(t, X_t)$ uma função duas vezes diferenciável. Então temos que:*

$$dg = \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \mu(t, X_t) \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, X_t) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(t, X_t) \frac{\partial g}{\partial x} dW_t \quad (2.3)$$

Considerando a função $g(x) = \log(x)$ e o processo S_t definido em (2.2), apelando à fórmula de Itô (2.3), obtemos facilmente

$$d \log(S_t) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t \quad (2.4)$$

Ou seja,

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right] \quad (2.5)$$

Diz-se que o rácio S_t/S_0 é lognormal, pois o logaritmo de S_t/S_0 tem distribuição normal de média $(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t$ e variância $\sigma^2 t$ para cada $t \geq 0$.

2.2. Avaliação de Derivados e Estratégias de Replicação

Nesta subsecção procuramos apresentar a dedução do preço de derivados de estilo europeu de maturidade $T > 0$ no âmbito do modelo de Black-Scholes. Começamos por definir conceitos intuitivos como o de estratégia de replicação, de portfólio auto-financiado e de estratégias de arbitragem, a partir dos quais conseguimos deduzir a equação diferencial de Black-Scholes.

DEFINIÇÃO 2.1. *Uma estratégia é um par de processos adaptados (a_t, b_t) , tais que $E[\int_0^T a_t^2 dt] < +\infty$ e $E[\int_0^T |b_t| dt] < +\infty$. Os processos a_t e b_t representam, respectivamente, o número de unidades do activo com risco e do activo sem risco detidas no momento $t \geq 0$.*

NOTA 2.3. *Subjacente à definição anterior está um pressuposto de liquidez infinita do mercado, ou seja, de que é possível adquirir qualquer quantidade positiva (inteira ou não) de qualquer activo presente no mercado. Assim, os processos a_t e b_t não se encontram restringidos a tomar valores nos números inteiros positivos.*

DEFINIÇÃO 2.2. *Seja $h(x)$ a função de payoff do derivado de estilo europeu. Dizemos que uma estratégia (a_t, b_t) replica o derivado em questão se*

$$a_T S_T + b_T e^{rT} = h(S_T)$$

com probabilidade 1.

DEFINIÇÃO 2.3. *Dizemos que uma estratégia (a_t, b_t) é auto-financiada se:*

$$d(a_t S_t + b_t e^{rt}) = a_t dS_t + r b_t e^{rt} dt.$$

Isto significa que qualquer variação no valor do portefólio é reflexo apenas das variações do valor dos activos que constituem o portefólio (não existem diminuições nem aumentos externos de capital investido).

DEFINIÇÃO 2.4. Dizemos que uma estratégia (a_t, b_t) é uma estratégia de arbitragem se esta é auto-financiada e se, para algum $t > 0$, se verificam simultaneamente as seguintes condições:

$$\begin{aligned} V_0 &= a_0 S_0 + b_0 = 0 \\ P[V_t > 0] &> 1. \end{aligned} \tag{2.6}$$

O princípio de não-arbitragem, que nós assumimos, postula a não existência de estratégias de arbitragem neste modelo. Assim, o preço de um derivado num momento $t > 0$ fica bem definido pelo valor de uma qualquer estratégia de replicação desse derivado nesse mesmo momento, pois duas estratégias distintas devem ter o mesmo preço (caso contrário haveria oportunidade de arbitragem).

No que se segue assumimos a possibilidade de escrever o preço de um derivado europeu como função do tempo t e do preço de ativo com risco nesse momento S_t (que na verdade pode ser provada):

$$P = P(t, S_t).$$

Assumimos ainda a regularidade necessária da função do preço do derivado $P(t, x)$ de forma a poder aplicar o lema de Itô. Assim, temos:

$$dP(t, S_t) = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial P}{\partial x} dW_t \tag{2.7}$$

Ora, se (a_t, b_t) é uma estratégia de replicação temos

$$\begin{aligned} dP(t, S_t) &= d(a_t S_t + b_t e^{rt}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow &\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) dt + \\ &+ \sigma S_t \frac{\partial P}{\partial x} dW_t = a_t dS_t + r b_t e^{rt} dt \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow &\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) dt + \\ &+ \sigma S_t \frac{\partial P}{\partial x} dW_t = (a_t \mu S_t + r b_t e^{rt}) dt + a_t \sigma S_t dW_t \end{aligned}$$

Daqui vem que

$$a_t = \frac{\partial P}{\partial x}(t, S_t) \tag{2.8}$$

donde,

$$b_t = \left(P(t, S_t) - S_t \frac{\partial P}{\partial x}(t, S_t) \right) e^{-rt}. \tag{2.9}$$

Substituindo a_t e b_t na equação de cima obtemos:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = r \left(P - S_t \frac{\partial P}{\partial x} \right) \quad (2.10)$$

Assim, a função preço do derivado europeu, existindo, satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BS}P &= 0 \\ P(T, x) &= h(x) \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde

$$\mathcal{L}_{BS} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r \left(x \frac{\partial}{\partial x} - \cdot \right) \quad (2.12)$$

é o operador diferencial de Black-Scholes e $h(x)$ é o *payoff* do derivado. Então, no caso de uma *call* europeia de *strike* $K > 0$, o preço é obtido a partir da resolução do problema (2.11) com $h(x) = (x - K)^+$, enquanto que para uma opção *put* se tem $h(x) = (K - x)^+$. As conhecidas soluções são apresentadas de seguida:

TEOREMA 2.1. *O preço de uma opção call europeia de strike $K > 0$, maturidade $T > 0$ e sobre um activo S_t com preço inicial $x > 0$, é dado por:*

$$C_{BS}(t, x) = xN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (2.13)$$

onde,

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\log(x/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \end{aligned} \quad (2.14)$$

A fórmula para opções *put* é muito semelhante.

TEOREMA 2.2. *O preço de uma opção put europeia de strike $K > 0$, maturidade $T > 0$ e sobre um activo S_t com preço inicial $x > 0$, é dado por:*

$$P_{BS}(t, x) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - xN(-d_1) \quad (2.15)$$

onde d_1 e d_2 são definidos como em (2.14).

2.3. Avaliação de Derivados na Medida de Risco Neutro

Vamos apresentar uma outra metodologia de avaliação de opções. A ideia subjacente a esta abordagem é encontrar uma medida de probabilidade equivalente (chamada medida de risco neutro), \mathbb{P}^* , na qual o processo do preço descontado do activo com risco seja uma martingala, caso em que temos:

$$S_t = e^{-r(T-t)} E_{\mathbb{P}^*}[S_T | \mathcal{F}_t] \quad (2.16)$$

Estudando a distribuição de S_T nesta medida, conseguimos deduzir o preço de Black-Scholes das opções europeias.

O resultado que permite a aplicação desta metodologia é o Teorema de Girsanov e será apresentado mais abaixo, depois de algumas definições preliminares.

DEFINIÇÃO 2.5. Duas medidas de probabilidade \mathbb{P}_1 e \mathbb{P}_2 definidas sobre o mesmo espaço mensurável (Ω, \mathcal{F}) dizem-se equivalentes se, para todo o $A \in \mathcal{F}$,

$$E_{\mathbb{P}_1}[\chi_A] = 0 \Leftrightarrow E_{\mathbb{P}_2}[\chi_A] = 0 \quad (2.17)$$

TEOREMA 2.3. Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_1)$ um espaço de probabilidade e ξ uma variável aleatória positiva quase sempre (i.e. $P(\xi > 0) = 1$) e tal que $E_{\mathbb{P}_1}[\xi] = 1$. Para qualquer $A \in \mathcal{F}$, defina-se

$$\mathbb{P}_2 = \int_A \xi(\omega) d\mathbb{P}_1(\omega) \quad (2.18)$$

Então:

1. \mathbb{P}_2 é uma medida de probabilidade.
2. Para qualquer variável aleatória não-negativa X ,

$$E_{\mathbb{P}_2}(X) = E_{\mathbb{P}_1}(X\xi)$$

3. As medidas \mathbb{P}_1 e \mathbb{P}_2 são equivalentes.

Este teorema permite-nos formular a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 2.6. Nas condições do Teorema 2.3, a variável ξ , que passamos a denotar por

$$\frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}_1},$$

é a derivada de Radon-Nikodym de \mathbb{P}_2 com respeito a \mathbb{P}_1 .

Temos então

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}_2}(X) &= E_{\mathbb{P}_1}\left(X \frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}_1}\right) \\ E_{\mathbb{P}_1}(X) &= E_{\mathbb{P}_2}\left(X \frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}_2}\right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Enunciamos de seguida o Teorema de Girsanov:

TEOREMA 2.4. Sejam $(W_t^{\mathbb{P}_1})_{0 \leq t \leq T}$ um Movimento Browniano standard definido no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_1)$ e $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ a filtração gerada por este mesmo processo. Se $(\lambda_t)_{0 \leq t \leq T}$ for um processo adaptado que satisfaça a condição de Novikov, i.e., tal que

$$E_{\mathbb{P}_1} \left[e^{\frac{1}{2} \left(\int_0^T \lambda_s^2 ds \right)} \right] < +\infty, \quad (2.20)$$

então existe uma medida de probabilidade \mathbb{P}_2 tal que:

1. \mathbb{P}_2 é equivalente a \mathbb{P}_1 .
2. A derivada de Radon-Nikodym de \mathbb{P}_2 com respeito a \mathbb{P}_1 (no momento T) é dada por:

$$\frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}_1} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \exp \left(- \int_0^T \lambda_s dW_s^{\mathbb{P}_1} - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_s^2 ds \right) \quad (2.21)$$

3. $W_t^{\mathbb{P}_2} = W_t^{\mathbb{P}_1} + \int_0^t \lambda_s ds$ é um Movimento Browniano standard definido sobre a medida \mathbb{P}_2 , ou seja, em notação diferencial:

$$dW_t^{\mathbb{P}_2} = dW_t^{\mathbb{P}_1} + \lambda_t dt \quad (2.22)$$

Definimos o processo do preço descontado do activo com risco:

$$S_t^* = e^{-rt} S_t \quad (2.23)$$

Queremos encontrar agora uma medida de probabilidade equivalente à medida física, \mathbb{P} , sob a qual S_t^* seja uma martingala. Temos, pelo Lema de Itô,

$$\begin{aligned} dS_t^* &= (\mu - r)S_t^* dt + \sigma S_t^* dW_t \\ &= \sigma S_t^* \left[\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dW_t \right] \end{aligned} \quad (2.24)$$

Claramente, $\frac{\mu - r}{\sigma}$ satisfaz a condição de Novikov, donde vem que existe uma medida de probabilidade equivalente, \mathbb{P}^* , tal que

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \exp \left(\frac{r - \mu}{\sigma} (W_T - W_0) - \frac{1}{2} \left(\frac{r - \mu}{\sigma} \right)^2 T \right) \quad (2.25)$$

e na qual $dW_t^* = dW_t + \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right) dt$ é um movimento Browniano *standard*. Assim, pegando em (2.24) obtemos que, na medida \mathbb{P}^* ,

$$dS_t^* = \sigma S_t^* dW_t^*. \quad (2.26)$$

Ou seja, S_t^* é uma martingala na medida de risco neutro, \mathbb{P}^* .

Considere-se uma estratégia de replicação auto-financiada de um derivado europeu, (a_t, b_t) com *payoff* H . O valor do portfólio associado a esta estratégia é:

$$V_t = a_t S_t + b_t e^{rt}. \quad (2.27)$$

Defina-se $V_t^* = e^{-rt} V_t$. Vamos ver que V_t^* é uma martingala na medida de risco neutro:

$$\begin{aligned} dV_t^* &= -re^{-rt} V_t dt + e^{-rt} dV_t = \\ &= -re^{-rt} (a_t S_t + b_t e^{rt}) dt + e^{-rt} (a_t dS_t + r b_t e^{rt} dt) = \\ &= -re^{-rt} a_t S_t dt + e^{-rt} a_t dW_t = \\ &= a_t dS_t^* = \\ &= \sigma a_t S_t^* dW_t^* \end{aligned}$$

Ou seja, V_t^* também é uma martingala. Temos então que

$$V_t^* = E_{\mathbb{P}^*} [V_T^* | \mathcal{F}_t]. \quad (2.28)$$

Para um *payoff* H , temos que

$$V_t^* = E_{\mathbb{P}^*} [e^{-r(T-t)} H | \mathcal{F}_t]. \quad (2.29)$$

Isto mostra que existindo um portfólio auto-financiado que replique um derivado europeu de *payoff* H , nós temos uma formula de derivação do seu preço, (2.29). Resta mostrar que existe esse mesmo portfólio. Enunciamos o seguinte teorema, usualmente denominado como teorema da representação martingala:

TEOREMA 2.5. *Seja M_t , $0 \leq t \leq T$ uma martingala com respeito à filtração (\mathcal{F}_t) , que é a filtração natural do movimento Browniano W_t^* . Então existe um processo adaptado (η_t) com $E_{\mathbb{P}^*} \left[\int_0^T \eta_t^2 dt \right] < +\infty$ e tal que*

$$M_t = M_0 + \int_0^t \eta_s dW_s^*. \quad (2.30)$$

Definindo $M_t = E_{\mathbb{P}^*} [e^{-rT} H | \mathcal{F}_t]$, temos pelo teorema anterior que

$$E_{\mathbb{P}^*} [e^{-rT} H | \mathcal{F}_t] = M_0 + \int_0^t \eta_s dW_s^* \quad (2.31)$$

em que η_t possui as propriedades enunciadas no respectivo teorema. Assim, pondo $a_t = \frac{\eta_t}{\sigma S_t^*}$ e $b_t = M_t - a_t S_t^*$, construímos o portfólio (a_t, b_t) que é auto-financiado e cujo valor no momento T é o do *payoff* do derivado: $e^{rT} M_T = H$. Estamos então em condições de usar a fórmula de cálculo (2.29).

Temos, para uma opção de *payoff* $h(S_T)$,

$$\begin{aligned} P(t, x) &= E_{\mathbb{P}^*} [e^{-r(T-t)} h(S_T) | \mathcal{F}_t] \\ &= E_{\mathbb{P}^*} [e^{-r(T-t)} h(S_T) | S_t = x] \\ &= e^{-r(T-t)} E_{\mathbb{P}^*} \left[h \left(x \times \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \sigma (W_T^* - W_t^*) \right] \right) \right] \end{aligned}$$

onde usámos a propriedade de Markov e a fórmula (2.5) na medida de probabilidade \mathbb{P}^* . Como $W_T^* - W_t^*$ tem distribuição normal de média 0 e variância $T - t$, podemos ainda escrever

$$P(t, x) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} h \left(x e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma z} \right) e^{-\frac{z^2}{2(T-t)}} dz \quad (2.32)$$

No caso de uma *call* europeia temos $h(x) = (x - K)^+$, donde é fácil de ver que a fórmula (2.32) se reduz à fórmula de Black-Scholes, (2.13). A fórmula da *put* europeia, (2.15), é deduzida de forma análoga.

Modelos de Volatilidade Estocástica

Como já foi referido, apesar das fórmulas simples que permite deduzir para a avaliação de opções, o modelo de Black-Scholes mostra-se inadequado para refletir determinados aspectos do comportamento real dos mercados financeiros. Neste capítulo o objectivo será explicar em maior detalhe estas problemáticas e apresentar os modelos de volatilidade estocástica. Estes modelos serão apresentados de forma abstrata, a partir da qual se poderá avançar de modo mais estruturado para os casos particulares do modelo de Heston e do modelo α -hipergeométrico.

3.1. Problemáticas do Modelo de Black-Scholes

As principais problemáticas que o modelo clássico enfrenta podem ser enumeradas como se segue:

- Os estudos empíricos sobre os dados históricos da volatilidade dos activos financeiros mostram uma evolução aparentemente aleatória da volatilidade, o que vai contra o pressuposto de volatilidade constante do modelo de Black-Scholes.
- O modelo clássico tende a subvalorizar a probabilidade de eventos extremos negativos no preço dos activos financeiros.
- Existe uma discrepância verificada entre os preços de Black-Scholes e os preços reais dos mercados de opções.

Os itens acima enumerados são de ordens diferentes, na medida do seu impacto na utilidade prática do modelo. O primeiro ponto poderia ser negligenciável se o modelo, não obstante a simplificação do pressuposto de volatilidade constante, previsse eficazmente os retornos dos activos financeiros que pretende modelar, assim como os preços dos derivados sobre esses mesmos activos. Já os pontos subsequentes afirmam que o modelo é ineficaz no seu propósito prático, o que torna mais urgente a demanda por modelos mais complexos (e realistas). Claro que estes problemas não são independentes entre si e a introdução da aleatoriedade na volatilidade dos activos com risco procura responder a todos eles.

As discrepâncias entre o modelo de Black-Scholes e a realidade dos mercados podem ser melhor apreendidas do ponto de vista do estudo da volatilidade implícita e da distribuição implícita dos retornos, conceitos esses que serão explicados de seguida (para uma discussão mais detalhada destes temas, vide [6]).

DEFINIÇÃO 3.1. *Seja C^{obs} o preço observado de uma opção call de strike K e maturidade T , sobre um activo S_t de preço inicial $S_0 = x$. A volatilidade implícita de Black-Scholes associada a estes parâmetros é o valor I que a volatilidade deve tomar na fórmula de Black-Scholes (2.13) de modo a que o preço dado pelo modelo seja igual ao*

observado:

$$C_{BS}(0, x, K, T, \sigma = I) = C^{obs} \quad (3.1)$$

NOTA 3.1. A fórmula de Black-Scholes (2.13) é monótona crescente em ordem à volatilidade:

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma} = \frac{x e^{-d_1^2/2} \sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}} > 0. \quad (3.2)$$

Assim, quanto maior é o preço observado, maior a correspondente volatilidade implícita e vice-versa. Em particular, os preços observados determinam uma volatilidade implícita positiva se e só se se tiver:

$$C^{obs} > C_{BS}(0, x, K, T, \sigma = 0). \quad (3.3)$$

NOTA 3.2. É sabido que o princípio de não arbitragem implica, independentemente do modelo ou mercado em que estejamos a trabalhar (model free), a chamada paridade put-call:

$$C(0, S_t, K, T) - P(0, S_t, K, T) = S_t - e^{-r(T-t)} K \quad (3.4)$$

onde C e P representam, respectivamente, o preço de uma opção call e o preço de uma opção put. Ora, este resultado implica que as volatilidades implícitas para opções call e put sobre o mesmo activo e com as mesmas condições são iguais.

Segundo o modelo de Black-Scholes, independentemente do *strike* e da maturidade de um determinado derivado europeu, o seu preço deve ser avaliado sempre com base no mesmo valor de volatilidade, ou seja, o gráfico de volatilidade implícita em função do *strike*, $I(K)$, devia representar uma função constante como na figura abaixo:



FIGURA 1. Volatilidade Implícita segundo o Modelo de Black-Scholes

A evidência experimental mostra porém que esse gráfico tende a tomar uma de duas formas:

- Forma de U - **Volatility Smile**
- Forma tendencialmente decrescente - **Volatility Skew**

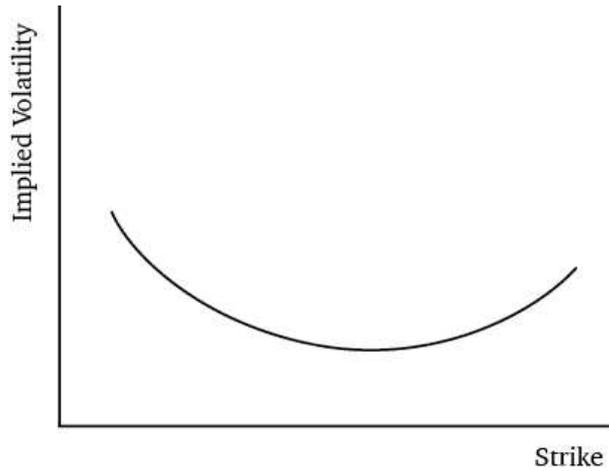


FIGURA 2. *Smile* de Volatilidade Implícita

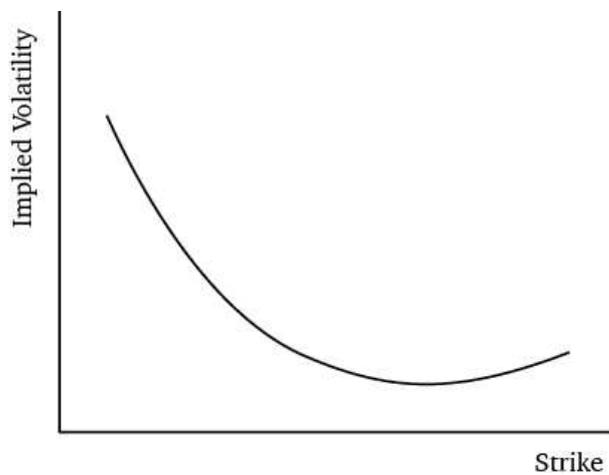


FIGURA 3. *Skew* de Volatilidade Implícita

O mais comum nas opções sobre ações é uma tendência decrescente na curva de volatilidade implícita em função do *strike* (vide Fig. 3), o que se traduz em valores elevados de volatilidade implícita para *OTM puts* ou *ITM calls*. Estas constatações podem ser justificadas como um efeito da propriedade dos retornos lognormais dos activos no modelo Black-Scholes, sendo que estes subvalorizam a probabilidade de movimentos negativos extremos, um fenómeno usualmente designado por *crashophobia*.

Esta *crashophobia* do modelo Black-Scholes pode ser melhor explicada através da noção de função de densidade de probabilidade implícita do preço futuro do activo com risco:

DEFINIÇÃO 3.2. *Seja C^{obs} o preço observado de uma opção call de strike K e maturidade T , sobre um activo S_t de preço inicial $S_0 = x$. Definimos a função de densidade de probabilidade implícita associada a estes parâmetros como sendo a função de densidade de probabilidade f_{Imp} que verifica a seguinte igualdade:*

$$C^{obs} = e^{-rT} \int_0^{+\infty} (x - K)^+ f_{Imp}(x) dx \quad (3.5)$$

NOTA 3.3. A fórmula (3.5) é equivalente a dizer que f_{Imp} determina a distribuição de probabilidade que o preço futuro do activo com risco (no momento T) deveria ter na medida de risco neutro de modo a que o preço de uma opção no modelo vá de encontro ao preço real dessa mesma opção:

$$\begin{aligned} C^{obs} &= E_{\mathbb{P}^*} \left[e^{-rT} (S_T - K)^+ \right] = \\ &= e^{-rT} \int_0^{+\infty} (x - K)^+ f_{Imp}(x) dx \end{aligned}$$

Começamos por mostrar a forma de inferir a função de densidade de probabilidade implícita utilizando o seguinte resultado, conhecido na sua forma mais geral como a Regra de Leibniz:

LEMA 3.1. Sejam $f(x, y)$ uma função de \mathbb{R}^2 integrável em ordem a x e diferenciável em ordem a y , $u(y)$ uma função real diferenciável e $I(y)$ uma função definida por:

$$I(y) = \int_{u(y)}^{+\infty} f(x, y) dx. \quad (3.6)$$

Então temos que $I(y)$ é diferenciável e

$$I'(y) = \int_{u(y)}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y} dx - u'(y) \times f(u(y), y) \quad (3.7)$$

NOTA 3.4. Este é apenas um caso particular da Regra de Leibniz, útil para a dedução que se segue, em que assumimos que a função a ser integrada satisfaz as condições necessárias.

Temos:

$$\begin{aligned} C^{obs} &= e^{-rT} \int_0^{+\infty} (x - K)^+ f_{Imp}(x) dx \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{dC^{obs}}{dK} &= e^{-rT} \int_K^{+\infty} f_{Imp}(x) dx - e^{-rT} (K - K) f_{Imp}(K) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{dC^{obs}}{dK} &= e^{-rT} \int_K^{+\infty} f_{Imp}(x) dx \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde usámos o lema 3.1 aplicado à função $f(x, K) = e^{-rT} (x - K) f_{Imp}(x)$. Agora, derivando uma vez mais em ordem a K obtemos a seguinte expressão para f_{Imp} .

$$f_{Imp}(x = K) = e^{rT} \frac{d^2 C^{obs}}{dK^2} (K). \quad (3.9)$$

Através da estimação da segunda derivada do preço observado das opções *call* europeias em função do *strike*, obtemos a função de densidade implícita.

Queremos agora perceber como é que as funções de densidade de probabilidade assim inferidas pelos dados reais dos mercados de opções revelam a *crashophobia* do modelo. A seguinte imagem compara a distribuição implícita pelos preços das opções sobre um determinado activo com uma distribuição lognormal com a mesma média e mesma variância:

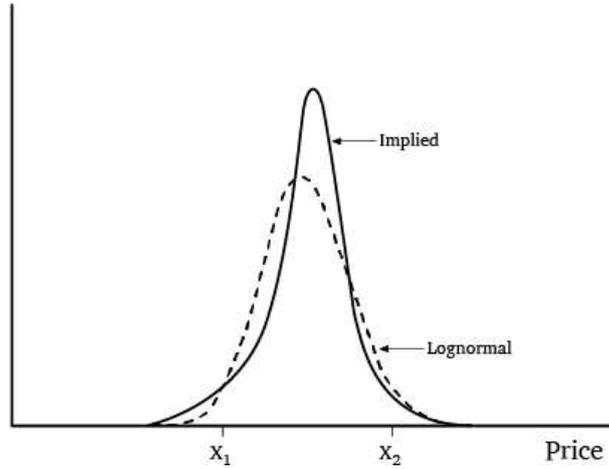


FIGURA 4. Comparação da Distribuição Implícita dos Retornos com uma Distribuição Lognormal

Observamos que, para além da sua evidente assimetria, a cauda esquerda da distribuição implícita é mais grossa do que a correspondente cauda da distribuição lognormal. Isto significa que existe maior probabilidade do preço tomar valores abaixo de X_1 do que a que o modelo de Black-Scholes prevê.

Se tivermos uma *put OTM* de *strike* X_1 muito abaixo do par, temos que o preço real da opção deve ser mais elevado do que o previsto pelo modelo, pois este subestima a probabilidade de receber um *payoff* positivo. Como o preço de Black-Scholes de uma *put* é crescente com a volatilidade, isto implica uma maior volatilidade implícita. Este argumento comprova a consistência entre as figuras 3 e 4.

Os modelos de volatilidade estocástica visam dissipar total ou parcialmente as dificuldades descritivas do modelo Black-Scholes.

NOTA 3.5. *Uma exposição mais pormenorizada destes raciocínios e das problemáticas que os motivam pode ser encontrada em [6].*

3.2. Formulação Geral dos Modelos de Volatilidade Estocástica

Nesta secção o objectivo será apresentar uma formulação abstrata dos modelos de volatilidade estocástica com um factor de volatilidade, i.e., o caso em que a componente aleatória da volatilidade do processo do preço do activo com risco é determinada por um processo de Itô unidimensional. Casos particulares de modelos de um factor de volatilidade são o modelo de Heston e o modelo que será objecto de estudo desta tese, o α -hipergeométrico.

Nesta classe de modelos a dinâmica evolutiva do activo com risco é definida por duas equações diferenciais estocásticas:

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu(Y_t)S_t dt + f(Y_t)S_t dW_t^{(0)} \\ dY_t &= \alpha(Y_t) dt + \beta(Y_t) dW_t^{(1)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Aqui assumimos que f e β tomam apenas valores positivos. O processo $W_t^{(1)}$ é um movimento Browniano que regula o processo do *driver*.

Normalmente os dois movimentos Brownianos estão correlacionados entre si. Por isso devemos definir o coeficiente de correlação instantânea, $\rho \in [-1, 1]$, entre os dois processos:

$$d\langle W^{(0)}, W^{(1)} \rangle_t = \rho dt. \quad (3.11)$$

É conveniente, para os nossos propósitos, decompor o processo $W_t^{(1)}$ em termos de $W_t^{(0)}$ e de um movimento Browniano independente, que denotamos por W_t^\perp :

$$W_t^{(1)} = \rho W_t^{(0)} + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^\perp. \quad (3.12)$$

3.2.1. Avaliação de Derivados Europeus: Estratégias de Replicação

Definido o modelo, pretendemos, à semelhança do que foi feito no âmbito do modelo de Black-Scholes, construir uma estratégia de replicação de um determinado derivado europeu, estabelecendo assim pelo princípio de não-arbitragem o preço justo do mesmo.

Ao contrário do que acontece no modelo de Black-Scholes, neste contexto mais complexo é impossível criar um portfólio que replique o *payoff* do derivado apenas com o activo subjacente (podemos imunizar a carteira relativamente ao risco que advém de $W_t^{(0)}$, mas não o que provém de W_t^\perp). Por esta razão, a replicação será feita a partir do ativo subjacente e de uma outra opção com diferente maturidade.

Sejam $P_1(t, x, y)$ o preço de um derivado europeu com maturidade T_1 e $P_2(t, x, y)$ o preço de outro derivado europeu com maturidade $T_2 > T_1$. Queremos encontrar processos $\{N_t, A_t, \Sigma_t\}$ tais que o portfólio auto-financiado

$$\Pi_t = N_t P_1(t, S_t, Y_t) - A_t S_t - \Sigma_t P_2(t, S_t, Y_t) \quad (3.13)$$

seja sem risco para todo o $t < T_1$.

Aqui vamos ter que usar a versão multidimensional da fórmula de Itô, que enunciamos de seguida:

LEMA 3.2. *Considere-se o seguinte sistema de equações diferenciais:*

$$dS_t^i = \mu(t, S_t) dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}(t, S_t) dW_t^j, \quad i = 1, 2, \dots, d,$$

onde W_t^j , $j = 1, \dots, d$ são Movimentos Brownianos independentes e

$$X_t = (X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^d).$$

Seja $f(t, x)$ uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Então:

$$\begin{aligned} df(t, X_t) = & \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, X_t) dX_t^i + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) d\langle X^i, X^j \rangle_t, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde

$$\langle X^i, X^j \rangle_t = \sum_{k=1}^d \sigma_{i,k}(t, X_t) \sigma_{k,j}(t, X_t) dt. \quad (3.15)$$

Aplicando este lema temos, para qualquer função $g(t, x, y)$ duas vezes diferenciável,

$$\begin{aligned} dg(t, S_t, Y_t) &= \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \mathcal{L}_{(S,Y)} g \right) dt + \\ &+ \left(f(Y_t) S_t \frac{\partial g}{\partial x} + \rho \beta(Y_t) \frac{\partial g}{\partial y} \right) dW_t^{(0)} + \\ &+ \sqrt{1 - \rho^2} \beta(Y_t) \frac{\partial g}{\partial y} dW_t^\perp, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(S,Y)} &= \frac{1}{2} f^2(y) x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho \beta(y) f(y) x \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \beta^2(y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \\ &+ \mu(y) x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha(y) \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Como se pretende que o portfólio Π_t seja auto-financiado tem-se

$$d\Pi_t = N_t dP_1(t, S_t, Y_t) - A_t dS_t - \Sigma_t dP_2(t, S_t, Y_t) \quad (3.18)$$

e como tanto P_1 como P_2 são funções (assume-se) duas vezes diferenciáveis, aplicando (3.16), obtemos:

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \left(N_t \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{(S,Y)} \right] P_1 - A_t \mu(Y_t) S_t - \Sigma_t \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{(S,Y)} \right] P_2 \right) dt + \\ &\left(S_t f(Y_t) \left[N_t \frac{\partial P_1}{\partial x} - \Sigma_t \frac{\partial P_2}{\partial x} - A_t \right] + \rho \beta(Y_t) \left[N_t \frac{\partial P_1}{\partial y} - \Sigma_t \frac{\partial P_2}{\partial y} \right] \right) dW_t^{(0)} + \\ &\sqrt{1 - \rho^2} \beta(Y_t) \left[N_t \frac{\partial P_1}{\partial y} - \Sigma_t \frac{\partial P_2}{\partial y} \right] dW_t^\perp. \end{aligned} \quad (3.19)$$

De modo a imunizar a carteira em relação ao risco proveniente de W_t^\perp escolhemos

$$\Sigma_t = N_t \left(\frac{\partial P_2}{\partial y} \right)^{-1} \left(\frac{\partial P_1}{\partial y} \right). \quad (3.20)$$

NOTA 3.6. *Aqui está implícito o pressuposto de que $\frac{\partial P_2}{\partial y} \neq 0$. No fundo é o mesmo que dizer que o preço do segunda opção (de maturidade T_2) depende do valor do driver da volatilidade.*

Para imunizar o risco de $W_t^{(0)}$ escolhemos agora

$$A_t = N_t \frac{\partial P_{(1)}}{\partial x} - \Sigma_t \frac{\partial P_{(2)}}{\partial x}. \quad (3.21)$$

Agora, pelo princípio de não-arbitragem devemos ter $d\Pi_t = r\Pi_t dt$, donde vem que

$$\left(\frac{\partial P_1}{\partial y} \right)^{-1} \hat{\mathcal{L}} P_1 = \left(\frac{\partial P_2}{\partial y} \right)^{-1} \hat{\mathcal{L}} P_2 \quad (3.22)$$

onde

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{(S,Y)} - (\mu(y) - r)x \frac{\partial}{\partial x} - xr(\cdot). \quad (3.23)$$

Agora, o termo esquerdo da equação (3.22) não depende de T_2 e da mesma forma o termo direito dessa equação não depende de T_1 . Daqui deduzimos que ambos os lados da equação tem de igualar uma função independente dos valores de T_1 e de T_2 . Essa função é, por conveniência tanto explicativa como prática, denotada por $-\alpha(y) + \beta(y)\Lambda(t, x, y)$ onde:

$$\Lambda(t, x, y) = \rho \frac{(\mu(y) - r)}{f(y)} + \gamma(t, x, y) \sqrt{1 - \rho^2} \quad (3.24)$$

e γ é uma função arbitrária.

Consequimos assim obter uma equação diferencial para o preço $P(t, x, y)$ de um derivado europeu com maturidade T :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} f^2(y) x^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \rho \beta(y) x f(y) \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \beta^2(y) \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \\ r \left(x \frac{\partial P}{\partial x} - P \right) + (\alpha(y) - \beta(y) \Lambda(t, x, y)) \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

com condição de fronteira $P(T, x, y) = h(x)$.

NOTA 3.7. *Aqui, percebemos a maior complexidade que a introdução de uma componente estocástica na volatilidade do activo com risco impõe no processo de estimação de um preço:*

- *O operador diferencial da equação do preço dos derivativos europeus não é único, dependendo antes da função γ , que simboliza o prémio de risco de volatilidade (que naturalmente tem de ser estimado).*
- *Em toda a generalidade, não existe uma fórmula fechada para a solução da equação do preço (3.25). Isto é o que motiva os desenvolvimentos de metodologias de aproximação do preço, como a que irá ser estudada nesta dissertação.*

3.2.2. Avaliação de Derivados Europeus: Medida de Risco Neutro

Nesta subsecção estudamos a possibilidade de calcular o preço de um derivado europeu a partir da passagem para uma medida de risco neutro que, veremos, não será única. No contexto de volatilidade estocástica em que trabalhamos, utilizaremos a versão multidimensional do Teorema de Girsanov, já enunciado num contexto unidimensional (Teorema 2.4):

TEOREMA 3.1. *Sejam $(W_t^{\mathbb{P}_1, j})_{0 \leq t \leq T}$, $j = 1, \dots, d$, movimentos Brownianos independentes definidos no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_1)$ e $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ a filtração gerada por estes mesmos processos. Se $(\lambda_t^{(j)})_{0 \leq t \leq T}$, $j = 1, \dots, d$ são processos adaptados que satisfazem a condição de Novikov, i.e., tal que*

$$E_{\mathbb{P}_1} \left[e^{\frac{1}{2} \left(\int_0^T \sum_{j=1}^d (\lambda_s^{(j)})^2 ds \right)} \right] < +\infty, \quad (3.26)$$

então existe uma medida de probabilidade \mathbb{P}_2 tal que:

1. \mathbb{P}_2 é equivalente a \mathbb{P}_1 .
2. A derivada de Radon-Nikodym de \mathbb{P}_2 com respeito a \mathbb{P}_1 (no momento T) é dada por:

$$\frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}_1} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \exp \left[- \sum_{j=1}^d \left(\int_0^T \lambda_s^{(j)} dW_s^{\mathbb{P}_1, j} + \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_s^{(j)2} ds \right) \right] \quad (3.27)$$

3. $W_t^{\mathbb{P}_2, j} = W_t^{\mathbb{P}_1, j} + \int_0^t \lambda_s^{(j)} ds$ é, para todo o $j = 1, \dots, d$, um movimento Browniano standard definido sobre a medida \mathbb{P}_2 , ou seja, em notação diferencial:

$$dW_t^{\mathbb{P}_2, j} = dW_t^{\mathbb{P}_1, j} + \lambda_t^{(j)} dt. \quad (3.28)$$

Mais, os movimentos Brownianos são independentes entre si.

Agora, fazendo o uso deste resultado, vamos tentar encontrar uma medida na qual o processo $S_t^* = e^{-rt} S_t$ seja uma martingala. Definimos dado γ_t um qualquer processo adaptado (suficientemente regular para que possamos usar o Teorema de Girsanov) os seguintes processos:

$$\begin{aligned} dW_t^{(0)*} &= dW_t^{(0)} + \left(\frac{\mu(Y_t) - r}{f(Y_t)} \right) dt \\ dW_t^{\perp*} &= dW_t^{\perp} + \gamma_t dt \end{aligned} \quad (3.29)$$

Defina-se $\mathbb{P}^{*\gamma}$ como a medida cuja derivada de Radon-Nikodym é:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{P}^{*\gamma}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_T} &= \exp \left[- \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{(\mu(Y_s) - r)^2}{f^2(Y_s)} \right) + \gamma_s^2 ds - \right. \\ &\quad \left. \int_0^T \frac{\mu(Y_s) - r}{f(Y_s)} dW_s^{(0)} - \int_0^T \gamma_s dW_s^{\perp} \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

Ora, pelo Teorema de Girsanov, $W_t^{(0)*}$ e $W_t^{\perp*}$ são movimentos Brownianos independentes entre si na medida $\mathbb{P}^{*\gamma}$. É fácil de ver que pela forma como definimos estes processos se tem que $dS_t^* = f(Y_t) S_t^* dW_t^{(0)*}$, o que faz de S_t^* uma martingala.

NOTA 3.8. Aqui há dois pontos importantes a realçar:

- Está implícito o pressuposto de que $\frac{\mu(Y_t) - r}{f(Y_t)}$ (rácio de Sharpe) está bem definido.
- Depreendemos das anteriores considerações que a medida de risco neutro não é única, antes dependendo da escolha de γ_t que é, como na subsecção 3.2.1, o prémio de risco de volatilidade.
- Vemos que, dada uma determinada medida de risco neutro definida por γ_t , a dinâmica dos objectos deste modelo passa a ser definida pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + f(Y_t) S_t dW_t^{(0)*} \\ dY_t &= (\alpha(Y_t) - \beta(Y_t) \Lambda_t) dt + \beta(Y_t) dW_t^{(1)*} \\ W_t^{(1)*} &= \rho W_t^{(0)*} + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^{\perp*} \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\text{onde } \Lambda_t = \rho \frac{(\mu(Y_t) - r)}{f(Y_t)} + \gamma_t \sqrt{1 - \rho^2}.$$

Estimado o prémio de risco de volatilidade obtemos a medida de risco neutro que lhe corresponde e calculamos o preço do derivado de *payoff* H como:

$$P_t = e^{-r(T-t)} E_{\mathbb{P}^{*\gamma}}[H | \mathcal{F}_t]. \quad (3.32)$$

3.3. O Modelo de Heston (1993)

Nesta secção pretendemos apresentar brevemente o modelo de Heston sem aprofundar os detalhes técnicos. Este modelo é definido directamente na medida de risco neutro pelas seguintes equações diferenciais estocásticas:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sqrt{Y_t} S_t dW_t^{(0)} \\ dY_t &= \kappa(\theta - Y_t) dt + \sigma \sqrt{Y_t} dW_t^{(1)} \\ d\langle W^{(0)}, W^{(1)} \rangle_t &= \rho dt \end{aligned} \quad (3.33)$$

Para garantir a positividade de Y_t , é usual assumir a condição de Feller:

$$\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} > 1. \quad (3.34)$$

NOTA 3.9. *É de notar que aqui se parte directamente da medida de risco neutro, não existindo nenhuma especificação explícita de γ_t . Sabemos contudo que, para termos a dinâmica de Y_t dada como em (3.31) (i.e. para que o drift de Y_t seja ainda uma função afim), γ_t tem de ser proporcional a $\sqrt{Y_t}$.*

NOTA 3.10. *Fazendo um paralelo com as notações da secção anterior temos:*

$$\begin{aligned} f(Y_t) &= \sqrt{Y_t} \\ \beta(Y_t) &= \sigma \sqrt{Y_t} \\ \alpha(Y_t) - \beta(Y_t)\Lambda_t &= \kappa(\theta - Y_t). \end{aligned} \quad (3.35)$$

A última das equações acima pode ainda ser desenvolvida:

$$\begin{aligned} \alpha(Y_t) - \beta(Y_t)\Lambda_t &= \kappa(\theta - Y_t) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha(Y_t) - \sigma \sqrt{Y_t} \left(\rho \frac{(\mu(Y_t) - r)}{\sqrt{Y_t}} + \gamma_t \sqrt{1 - \rho^2} \right) &= \kappa\theta - \kappa Y_t \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \alpha(Y_t) - \sigma \rho (\mu(Y_t) - r) - \sigma \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{Y_t} \gamma_t &= \kappa\theta - \kappa Y_t \end{aligned}$$

Agora, pela nota anterior sabemos que devemos assumir $\gamma_t = m\sqrt{Y_t}$ para um dado $m \in \mathbb{R}$, donde se tem

$$\alpha(Y_t) = \sigma \rho \mu(Y_t) + (\kappa\theta - \sigma \rho) + (m\sigma \sqrt{1 - \rho^2} - \kappa) Y_t. \quad (3.36)$$

O preço de Heston, P_H , de um derivado europeu de *payoff* $h(S_T)$ deve então, como caso particular de (3.25) satisfazer a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H P_H &= 0 \\ P_H(T, x, y) &= h(x), \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde

$$\mathcal{L}_H = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}yx^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho\sigma yx \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}\sigma^2 y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + r \left(x \frac{\partial}{\partial x} - \cdot \right) + \kappa(\theta - y) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.38)$$

3.4. O Modelo α -Hipergeométrico (2014)

O modelo α -hipergeométrico será tratado nos capítulos subsequentes e com ele se prende o principal objectivo desta dissertação. Esta secção ganha por isso importância maior. Ambicionamos dar uma visão geral do modelo, assim como apresentar resultados que nos pareçam relevantes para os nossos propósitos.

Este modelo foi apresentado em [4] e visa ultrapassar as fragilidades do modelo de Heston, que são:

- Dificuldade de estimação do parâmetro de reversão para a média.
- O parâmetro de reversão para a média é muito pequeno, o que faz com que a volatilidade se mantenha demasiado perto de zero.
- Frequentemente, a condição de Feller (que garante a positividade do processo de volatilidade) não é verificada.

Neste modelo a dinâmica do activo com risco e do *driver* da volatilidade é dada na medida de risco neutro por:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + e^{Y_t} S_t dW_t^{(0)} \\ dY_t &= (a - be^{\alpha Y_t}) dt + \sigma dW_t^{(1)} \\ d\langle W^{(0)}, W^{(1)} \rangle_t &= \rho dt \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde $\alpha > 0$.

NOTA 3.11. *Note-se que pela definição da volatilidade como a exponencial de Y_t temos uma volatilidade positiva por definição, o que permite a não imposição de condições artificiais sobre os parâmetros do modelo de forma a garantir a positividade da mesma.*

NOTA 3.12. *Como no modelo de Heston, aqui não existe uma especificação de γ_t .*

NOTA 3.13. *Como para o modelo de Heston, fazemos um paralelo com as notações da subsecção 3.2.1 temos:*

$$\begin{aligned} f(Y_t) &= e^{Y_t} \\ \beta(Y_t) &= \sigma \\ \alpha(Y_t) - \beta(Y_t)\Lambda_t &= a - be^{\alpha Y_t}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

O preço do modelo α -hipergeométrico, P_α , de um derivado europeu de *payoff* $h(S_T)$ deve então, como caso particular de (3.25) satisfazer a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha P_\alpha &= 0 \\ P_\alpha(T, x, y) &= h(x), \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde

$$\mathcal{L}_\alpha = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}e^{2y}x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho\sigma e^y x \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + r \left(x \frac{\partial}{\partial x} - \cdot \right) + (a - be^{\alpha y}) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.42)$$

Terminamos o capítulo apresentando uma curiosa particularidade do modelo α -hipergeométrico que é o facto deste possuir uma fórmula fechada para a variância do processo do preço do activo com risco:

PROPOSIÇÃO 3.1. *O processo de variância do preço do activo com risco no modelo α -hipergeométrico é dado por:*

$$V_t = e^{2Y_t} = \frac{Y_0 e^{2at} + 2\sigma W_t^{(2)}}{\left(1 + \alpha b V_0^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^t e^{\alpha(a u + \sigma W_u^{(2)})} du\right)^{\frac{2}{\alpha}}}.$$

Teoria da Perturbação de Primeira Ordem

Como já foi referido, os modelos de volatilidade estocástica não possuem, geralmente, soluções explícitas para o preço de opções europeias. Isto motivou o desenvolvimento de métodos aproximativos para o preço desses derivados. A metodologia aproximativa utilizada nesta dissertação possui três fases distintas que serão explicadas em detalhe ao longo deste capítulo:

1. A perturbação do processo *driver* de volatilidade, através da aceleração do mesmo por uma mudança de escala temporal;
2. A expansão do preço em potências do fator perturbativo;
3. A dedução de fórmulas para os primeiros termos da expansão, através da correspondência entre termos de igual ordem da equação do preço do modelo acelerado.

Ao expandir a função do preço em potências de um fator $\sqrt{\epsilon}$, procura-se dividir o problema da resolução da equação diferencial do preço, num número finito de equações mais simples, resolúveis, e que juntas resultam numa boa aproximação da equação original do preço.

As fórmulas das aproximações de 1^a ordem do preço para um modelo abstrato de volatilidade estocástica serão apresentadas neste capítulo, assim como os conceitos e resultados auxiliares desta metodologia (apresentada de forma mais exaustiva em [7]). Nos capítulos seguintes, estas fórmulas serão aplicadas para aproximar o preço do modelo α -hipergeométrico.

4.1. Geradores Infinitesimais e Semigrupos de Transição

O foco desta secção recai sobre dois conceitos centrais nesta teoria perturbativa: o de gerador infinitesimal e o de semigrupo de transição de um processo de Markov homogéneo.

Começaremos por definir de forma rigorosa o conceito de semigrupo de transição:

DEFINIÇÃO 4.1. *Seja $(Y_t)_{t \geq 0}$ um processo estocástico de Markov contínuo e homogéneo. Definimos o semigrupo de transição deste processo do seguinte modo:*

$$P_t g(y) = E[g(Y_t) | Y_0 = y] \tag{4.1}$$

para toda a função g limitada e mensurável.

NOTA 4.1. *Usando a propriedade de Markov, é fácil provar que de facto $\{P_t\}_{t \geq 0}$ define bem um semigrupo, tendo-se $P_t P_s = P_{t+s}$.*

Dados um processo Y_t e uma constante $\kappa > 0$, definimos o processo $Y_t^{(\kappa)} = Y_{\kappa t}$. No fundo, $Y_t^{(\kappa)}$ é o processo Y_t acelerado ou retardado pelo fator κ . Será interessante perceber

que relação existe entre o semigrupo de transição de Y_t , P_t , e o de $Y_t^{(\kappa)}$, que denotamos por $P_t^{(\kappa)}$. Temos:

$$\begin{aligned} P_t^{(\kappa)}g(y) &= E[g(Y_t^{(\kappa)})|Y_0^{(\kappa)} = y] = \\ &= E[g(Y_{t\kappa})|Y_0 = y] = \\ &= P_{t\kappa}g(y) \end{aligned}$$

O semigrupo de transição de $Y_t^{(\kappa)}$ corresponde também a uma aceleração do semigrupo de transição de Y_t .

A partir do semigrupo de transição de um processo, podemos definir o seu gerador infinitesimal:

DEFINIÇÃO 4.2. *O gerador infinitesimal de $(Y_t)_{t \geq 0}$ é o operador \mathcal{L}_Y definido por*

$$\mathcal{L}_Y g(y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t g(y) - g(y)}{t} \quad (4.2)$$

LEMA 4.1. *Seja $(Y_t)_{t \geq 0}$ um processo de difusão definido por:*

$$dY_t = \mu(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dW_t$$

Então, se μ e σ são funções contínuas, temos que o gerador infinitesimal de Y_t é dado por

$$\mathcal{L}_Y = \frac{1}{2}\sigma(y)^2 \frac{d^2}{dy^2} + \mu(y) \frac{d}{dy} \quad (4.3)$$

DEMONSTRAÇÃO. Defina-se o operador $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sigma(y)^2 \frac{d^2}{dy^2} + \mu(y) \frac{d}{dy}$. Temos pelo Lema de Itô que

$$dg(Y_t) = \mathcal{L}g(Y_t) dt + g'(Y_t)\sigma(Y_t) dW_t. \quad (4.4)$$

Assim, $M_t = g(Y_t) - \int_0^t \mathcal{L}g(Y_s) ds$ define um martingale, donde vem que se $Y_0 = y$, então

$$E[g(Y_t)] = g(y) + E\left[\int_0^t \mathcal{L}g(Y_s) ds\right] \quad (4.5)$$

Agora, pelo conhecido Teorema da Convergência Dominada, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E[g(Y_t)]|_{t=0} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t g(y) - g(y)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E[g(Y_t)|Y_0 = y] - g(y)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} E\left[\frac{1}{t} \int_0^t \mathcal{L}g(Y_s) ds \middle| Y_0 = y\right] = \\ &= \mathcal{L}g(y), \end{aligned} \quad (4.6)$$

provando assim que o gerador infinitesimal de Y_t é dado pela expressão (4.3). \square

O Lema 4.1 permite encontrar uma expressão analítica para o gerador infinitesimal de um processo, o que será extremamente útil para a aplicação da teoria ao modelo α -hipergeométrico. O lema seguinte apresenta a relação entre os geradores infinitesimais de um processo de Markov Y_t e o correspondente processo acelerado $Y_t^{(\kappa)}$.

LEMA 4.2. *Sejam \mathcal{L}_Y o gerador infinitesimal do processo Y_t e $\mathcal{L}_Y^{(\kappa)}$ o gerador infinitesimal do correspondente processo acelerado $Y_t^{(\kappa)}$ por um fator $\kappa > 0$. Então*

$$\mathcal{L}_Y^{(\kappa)} = \kappa \mathcal{L}_Y. \quad (4.7)$$

DEMONSTRAÇÃO. Temos, dada uma função g adequada, que

$$\mathcal{L}_Y^{(\kappa)} g(y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t^{(\kappa)} g(y) - g(y)}{t} = \kappa \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{t\kappa} g(y) - g(y)}{t\kappa} = \kappa \mathcal{L}_Y g(y).$$

□

O gerador infinitesimal e o semigrupo de transição de um processo de Markov relacionam-se do seguinte modo:

LEMA 4.3. *Seja $(Y_t)_{t \geq 0}$ um processo de Markov contínuo e homogêneo. Então tem-se:*

$$\frac{d}{dy} P_t g(y) = \mathcal{L}_Y P_t g(y) \quad (4.8)$$

DEMONSTRAÇÃO. É consequência da homogeneidade em relação ao tempo. □

Terminamos a secção apresentando o conceito de operador adjunto e um resultado sobre o adjunto de um gerador infinitesimal.

DEFINIÇÃO 4.3. *Seja \mathcal{L} um operador sobre o conjunto $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. O operador adjunto de \mathcal{L} , que se denota por \mathcal{L}^* , é o operador que verifica:*

$$\int \phi \mathcal{L} \psi \, dy = \int \psi \mathcal{L}^* \phi \, dy \quad (4.9)$$

para todas as funções ϕ e ψ adequadas.

LEMA 4.4. *Seja L o operador definido por*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sigma(y)^2 \frac{d^2}{dy^2} + \mu(y) \frac{d}{dy}$$

para funções contínuas μ e σ . O seu operador adjunto é dado por

$$\mathcal{L}^* = \frac{d^2}{dy^2} \left[\frac{1}{2} \sigma^2(y) \cdot \right] - \frac{d}{dy} [\mu(y) \cdot]. \quad (4.10)$$

DEMONSTRAÇÃO. Integrando por partes o lado direito de (4.9) e apelando ao rápido decaimento das funções ψ e ϕ (o que justifica que os termos sejam zero na fronteira) obtemos a expressão (4.10) para o operador adjunto de \mathcal{L} . □

NOTA 4.2. *Note-se que o Lema 4.4 dá uma expressão para o operador adjunto do gerador infinitesimal de um processo de difusão definido como no Lema 4.1.*

NOTA 4.3. *É fácil de ver que $(\mathcal{L}^{(\kappa)})^* = \kappa \mathcal{L}^*$.*

4.2. Distribuição Invariante e Reversibilidade de um Processo

Começamos pela definição da distribuição invariante de um processo:

DEFINIÇÃO 4.4. *Seja $(Y_t)_{t \geq 0}$ um processo estocástico de Markov contínuo e homogéneo com valores num conjunto \mathcal{S} . Dizemos que uma distribuição Π é invariante para o processo Y_t se, para qualquer $t \geq 0$,*

$$\frac{d}{dt} E_{\Pi} \left[E[g(Y_t) | Y_0 = y] \right] = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}} E[g(Y_t) | Y_0 = y] \Pi(dy) = 0 \quad (4.11)$$

para toda a função g limitada.

O resultado seguinte estabelece uma condição que permite o cálculo da distribuição invariante de um processo.

PROPOSIÇÃO 4.1. *Seja $(Y_t)_{t \geq 0}$ um processo de Markov contínuo homogéneo e seja \mathcal{L} o seu gerador infinitesimal. Uma distribuição Π é invariante para o processo Y_t se e só se*

$$\mathcal{L}^* \Pi = 0. \quad (4.12)$$

DEMONSTRAÇÃO. Tem-se que Π é uma distribuição invariante se e só se é tal que

$$\frac{d}{dt} E[g(Y_t)] = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}} E[g(Y_t) | Y_0 = y] \Pi(dy) = 0$$

para toda a função g limitada. Pelo lema 4.3, isto é o mesmo que ter

$$\int \frac{d}{dt} P_t g(y) \Pi(dy) = 0 \Leftrightarrow \int \mathcal{L}_Y P_t g(y) \Pi(dy) = 0.$$

Agora, pela definição de operador adjunto conclui-se para toda a função g limitada:

$$\int P_t g(y) \mathcal{L}^* \Pi(dy) = 0. \quad (4.13)$$

Como (4.13) é válida para todas as funções g adequadas, conclui-se que a equação é satisfeita se e só se

$$\mathcal{L}^* \Pi = 0$$

como pretendido. □

NOTA 4.4. *Da Proposição 4.1 e da Nota 4.3, conclui-se que \mathcal{L} e $\mathcal{L}^{(\kappa)}$ possuem a mesma distribuição invariante.*

No que se segue, usamos a seguinte notação:

$$\langle g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \Pi(dy)$$

Denotamos por $\mathcal{L}^2(\Pi)$ o espaço das funções mensuráveis g tais que $\langle g^2 \rangle < +\infty$.

DEFINIÇÃO 4.5. *Sejam $(Y_t)_{t \geq 0}$ um processo de Markov homogéneo, \mathcal{L} o seu gerador infinitesimal e Π uma distribuição invariante para Y_t . Dizemos que o processo Y_t é reversível com respeito a Π se se tem, para todas as funções $g, f \in \mathcal{L}^2(\Pi)$, o seguinte:*

$$\langle f \mathcal{L} g \rangle = \langle g \mathcal{L} f \rangle. \quad (4.14)$$

No desenvolvimento das expansões do preço de opções que será feito na secção seguinte, encontraremos as chamadas Equações de Poisson. Estas são equações da forma:

$$\mathcal{L}\phi = g \quad (4.15)$$

No caso em que iremos trabalhar, com \mathcal{L} o gerador infinitesimal de um processo de Markov homogéneo com uma distribuição invariante única e reversível, conseguimos extrair um resultado que, embora simples, nos será muito útil.

LEMA 4.5. *Considere-se a equação*

$$\mathcal{L}\phi = g$$

em que ϕ é desconhecida e \mathcal{L} é reversível e possui uma distribuição invariante. Se existe solução ϕ da equação anterior, então g verifica a condição de centralidade:

$$\langle g \rangle = 0. \quad (4.16)$$

DEMONSTRAÇÃO. Se existe solução ϕ , temos

$$\langle g \rangle = \langle \mathcal{L}\phi \rangle = \langle 1(\mathcal{L}\phi) \rangle = \langle \phi(\mathcal{L}1) \rangle = 0.$$

□

4.3. Expansão de Primeira Ordem para o Preço de Opções Europeias

Nesta secção o objectivo será a apresentação de resultados abstratos (sem referir modelos concretos) sobre a expansão de primeira ordem do preço de opções europeias. Assumimos ao longo de toda esta secção que o *driver* da volatilidade do preço do activo com risco é um processo de Markov homogéneo, que possui uma e só uma distribuição invariante, Π , e que é reversível com respeito a essa mesma distribuição. Estes resultados serão utilizados nos capítulos posteriores para aproximar o preço do modelo α -hipergeométrico.

Vamos trabalhar num modelo de volatilidade estocástica abstrato no qual a evolução do preço do activo com risco é regulada pelas seguintes equações, definidas na medida de risco neutro:

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + f(Y_t)S_t dW_t^{(0)*} \\ dY_t &= \left(\frac{1}{\epsilon}\alpha(Y_t) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\beta(Y_t)\Lambda_t \right) dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\beta(Y_t) dW_t^{(1)*} \\ d\langle W^{(0)*}, W^{(1)*} \rangle_t &= \rho dt. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Pretendemos desenvolver a nossa aproximação num regime rápido de volatilidade, pelo que se assume $\epsilon \ll 1$, o que implica uma velocidade de reversão para a média acelerada. A aproximação que ambicionamos estabelecer é da forma

$$P^\epsilon \approx \tilde{P}^\epsilon = P_{BS} + P_1^\epsilon, \quad (4.18)$$

onde P_{BS} é o preço de Black-Scholes e P_1^ϵ é a correção de primeira ordem. Como tal, esta secção estará dividida em duas partes correspondentes aos cálculos do termo de ordem zero e do termo de ordem 1, respectivamente.

4.3.1. Expansão Assintótica: Termo de Ordem Zero

Começamos por definir o problema de forma rigorosa. Cruzando a formulação (4.17) com a equação (3.25), podemos enunciar o problema da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\epsilon P^\epsilon &= 0 \\ P^\epsilon(T, x, y) &= h(x),\end{aligned}\tag{4.19}$$

onde

$$\mathcal{L}^\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\mathcal{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2.\tag{4.20}$$

Aqui, os \mathcal{L}_i 's são definidos por:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= \frac{1}{2}\beta^2(y)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \alpha(y)\frac{\partial}{\partial y}, \\ \mathcal{L}_1 &= \beta(y)\left(\rho f(y)x\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - \Lambda\frac{\partial}{\partial y}\right), \\ \mathcal{L}_2 &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}f^2(y)x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + r\left(x\frac{\partial}{\partial x} - \cdot\right).\end{aligned}\tag{4.21}$$

Definido o problema, expandimos a função P^ϵ em potências de $\sqrt{\epsilon}$:

$$P^\epsilon = P_0 + \sqrt{\epsilon}P_1 + \epsilon P_2 + \dots\tag{4.22}$$

Como o foco nesta secção passa apenas pelo cálculo da aproximação de primeira ordem, procuramos apenas as expressões de P_0 e de $P_1^\epsilon = \sqrt{\epsilon}P_1$. Substituindo P^ϵ pela expansão (4.22) na equação diferencial de (4.19), temos a seguinte equação decomposta:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\epsilon}\mathcal{L}_0P_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}(\mathcal{L}_0P_1 + \mathcal{L}_1P_0) + (\mathcal{L}_0P_2 + \mathcal{L}_1P_1 + \mathcal{L}_2P_0) + \\ + \sqrt{\epsilon}(\mathcal{L}_0P_3 + \mathcal{L}_1P_2 + \mathcal{L}_2P_1) + \dots = 0.\end{aligned}\tag{4.23}$$

Como foi dito no início deste capítulo, o método passa pela divisão do problema. Consideraremos primeiro os termos de ordem ϵ^{-1} . Temos:

$$\mathcal{L}_0P_0 = 0\tag{4.24}$$

Pela definição de \mathcal{L}_0 apresentada em (4.21), sabemos que a anterior equação possui como soluções todas as funções constantes na variável y . Assumimos por isso que $P_0 = P_0(t, x)$, de modo que (4.24) é satisfeita (este pressuposto é realista num contexto de uma escala temporal de volatilidade acelerada).

Observemos agora os termos de ordem $\epsilon^{-\frac{1}{2}}$. Temos:

$$\mathcal{L}_0P_1 + \mathcal{L}_1P_0 = 0\tag{4.25}$$

O operador \mathcal{L}_1 possui derivadas em ordem a y em todos os seus termos pelo que, pela escolha de P_0 como função independente de y , se tem $\mathcal{L}_1P_0 = 0$. Assim, a equação (4.25) fica simplesmente

$$\mathcal{L}_0P_1 = 0.\tag{4.26}$$

Fazemos, à semelhança do que se fez para P_0 , a escolha de P_1 como função independente de y : $P_1 = P_1(t, x)$.

Olhamos agora para os termos de ordem 1. Temos

$$\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_1 P_1 + \mathcal{L}_2 P_0 = 0. \quad (4.27)$$

Ora, é claro que $\mathcal{L}_1 P_1 = 0$. Assim, a equação anterior é equivalente a

$$\mathcal{L}_0 P_2 = -\mathcal{L}_2 P_0. \quad (4.28)$$

Esta é uma Equação de Poisson de incógnita P_2 . Apelando ao lema 4.5, $\mathcal{L}_2 P_0$ deve satisfazer a condição de centralidade, ou seja,

$$\langle \mathcal{L}_2 P_0 \rangle = 0. \quad (4.29)$$

Como P_0 é independente de y , temos que $\langle \mathcal{L}_2 P_0 \rangle = \langle \mathcal{L}_2 \rangle P_0$, onde

$$\langle \mathcal{L}_2 \rangle = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r \left(x \frac{\partial}{\partial x} - \cdot \right) \quad (4.30)$$

e, denotando por Π a única distribuição invariante de Y_t ,

$$\bar{\sigma}^2 = \langle f^2 \rangle = \int f^2(y) \Pi(dy). \quad (4.31)$$

Conseguimos assim definir o termo de ordem zero da nossa expansão:

DEFINIÇÃO 4.6. *O termo de ordem zero da nossa expansão $P_0(t, x) = P_{BS}(t, x; \bar{\sigma})$ é o preço de Black-Scholes com volatilidade $\bar{\sigma}$ (definida como em (4.31)), que resolve o seguinte problema:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) P_{BS} &= 0 \\ P_{BS}(T, x; \bar{\sigma}) &= h(x). \end{aligned} \quad (4.32)$$

4.3.2. Expansão Assintótica: Termo de Ordem Um

Calculado o termo de ordem zero, procuraremos achar $P_1^\epsilon = \sqrt{\epsilon} P_1$. Focamo-nos agora nos termos de ordem $\sqrt{\epsilon}$ da expansão (4.23):

$$\mathcal{L}_0 P_3 + \mathcal{L}_1 P_2 + \mathcal{L}_2 P_1 = 0. \quad (4.33)$$

Pondo

$$\mathcal{L}_0 P_3 = -(\mathcal{L}_1 P_2 + \mathcal{L}_2 P_1).$$

Mais uma vez obtemos uma Equação de Poisson em ordem a P_3 que, pelo lema 4.5, deve verificar a condição de solvabilidade:

$$\langle \mathcal{L}_1 P_2 + \mathcal{L}_2 P_1 \rangle = 0. \quad (4.34)$$

Como P_1 não depende de y , podemos escrever

$$\langle \mathcal{L}_1 P_2 \rangle + \langle \mathcal{L}_2 \rangle P_1 = 0. \quad (4.35)$$

Recuperemos agora a Equação de Poisson (4.28). Dela deduzimos, utilizando também o facto de que $\langle \mathcal{L}_2 \rangle P_0 = 0$, o seguinte:

$$P_2 = -\mathcal{L}_0^{-1}(\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle)P_0 + c(t, x), \quad (4.36)$$

onde $c(t, x)$ é uma qualquer função aditiva que não dependa de y . Pegando nesta expressão, concluímos que

$$\langle \mathcal{L}_1 P_2 \rangle = -\left\langle \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_0^{-1}(\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle) \right\rangle P_0. \quad (4.37)$$

NOTA 4.5. *Note-se que, como todos os termos de \mathcal{L}_1 contêm derivadas em ordem a y , a função $c(t, x)$ desaparece e não desempenha nenhum papel no cálculo de P_1 .*

A igualdade (4.37) permite-nos escrever a equação (4.35) da seguinte forma:

$$\langle \mathcal{L}_2 \rangle P_1^\epsilon = \mathcal{A}^\epsilon P_0,$$

onde $\mathcal{A}^\epsilon = \sqrt{\epsilon} \left\langle \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_0^{-1}(\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle) \right\rangle$. Como conhecemos \mathcal{L}_2 e P_0 , estamos em condições de definir o termo de ordem um da nossa expansão do seguinte modo:

DEFINIÇÃO 4.7. *A função $P_1^\epsilon(t, x)$ é a solução do seguinte problema não homogéneo:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma})P_1^\epsilon &= \mathcal{A}^\epsilon P_{BS}(\bar{\sigma}) \\ P_1^\epsilon(T, x) &= 0, \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde $\mathcal{A}^\epsilon = \sqrt{\epsilon} \left\langle \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_0^{-1}(\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle) \right\rangle$.

Temos portanto o termo de ordem um definido como solução de um problema não homogéneo. É possível contudo determinar uma expressão analítica para este termo como função do preço de Black-Scholes de volatilidade $\bar{\sigma}$. Os próximos passos desta secção serão no sentido de obter essa fórmula fechada.

Começamos por calcular \mathcal{A}^ϵ . Utilizaremos a seguinte notação, para qualquer k inteiro positivo:

$$D_k = x^k \frac{\partial^k}{\partial x^k}. \quad (4.39)$$

Seja ψ solução da equação

$$\mathcal{L}_0 \psi(y) = f^2(y) - \bar{\sigma}^2. \quad (4.40)$$

Ora, $\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle = \frac{1}{2}(f^2(y) - \bar{\sigma}^2)D_2$, donde

$$\mathcal{L}_0^{-1}(\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle) = \frac{1}{2}\psi(y)D_2. \quad (4.41)$$

Por fim, recordando a fórmula de \mathcal{L}_1 definida em (4.21), concluímos que

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_0^{-1}(\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle) = \\ &= \mathcal{L}_1 \left(\frac{1}{2}\psi D_2 \right) = \\ &= \left(\frac{1}{2}\rho\beta(y)f(y)\frac{d\psi}{dy} \right) D_1 D_2 - \left(\frac{1}{2}\beta(y)\Lambda(y)\frac{d\psi}{dy} \right) D_2. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Para obter uma expressão para o operador \mathcal{A}^ϵ , resta calcular a média da expressão obtida acima, (4.42), em relação à distribuição invariante de Y_t , Π .

PROPOSIÇÃO 4.2. *O operador \mathcal{A}^ϵ definido como na Definição 4.5, pode ser expresso do seguinte modo:*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^\epsilon &= -V_3^\epsilon D_1 D_2 - V_2^\epsilon D_2, \\ V_3^\epsilon &= -\frac{\rho\sqrt{\epsilon}}{2} \left\langle \beta f \frac{d\psi}{dy} \right\rangle, \\ V_2^\epsilon &= \frac{\sqrt{\epsilon}}{2} \left\langle \beta \Lambda \frac{d\psi}{dy} \right\rangle.\end{aligned}\tag{4.43}$$

A anterior proposição dá-nos uma expressão inteligível para o operador \mathcal{A}^ϵ . Agora estamos em condições de resolver o problema (4.38) de forma explícita. Começamos com um resultado auxiliar:

LEMA 4.6. *Dados $k, l, k', l' \in \mathbb{Z}^+$ quaisquer, temos que D_k^l e $D_{k'}^{l'}$ comutam. Aqui D_k^l representa a potência de ordem l do operador D_k .*

DEMONSTRAÇÃO. Faça-se a mudança de variável $\xi = \log x$. Temos

$$D_1 = x \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}$$

e de modo semelhante

$$D_2 = x^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 x} = D_1^2 - D_1.$$

Recursivamente, estabelecemos que D_k é simplesmente um polinómio de grau k de D_1 . Como polinómios e potências de polinómios comutam entre si, temos que D_k^l e $D_{k'}^{l'}$ comutam, para quaisquer $k, l, k', l' \in \mathbb{Z}^+$. \square

Este resultado leva-nos a concluir que o operador $\mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 D_2 + r(D_1 - \cdot)$ comuta com o operador \mathcal{A}^ϵ (ver fórmula (4.43)). Este facto permite-nos resolver (4.38), como pretendíamos.

PROPOSIÇÃO 4.3. *O termo de ordem um, P_1^ϵ , que resolve o problema (4.38) é dado em termos do preço de Black-Scholes de volatilidade $\bar{\sigma}$ pela seguinte expressão:*

$$P_1^\epsilon(t, x) = -(T - t)\mathcal{A}^\epsilon P_{BS}(t, x; \bar{\sigma}),\tag{4.44}$$

onde \mathcal{A}^ϵ é dado como em (4.43).

DEMONSTRAÇÃO. É rápido verificar que (4.44) resolve a equação do problema (4.38):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{BS}(- (T - t)\mathcal{A}^\epsilon P_{BS}) &= \\ &= \mathcal{A}^\epsilon P_{BS} - (T - t)\mathcal{L}_{BS}\mathcal{A}^\epsilon P_{BS} = \\ &= \mathcal{A}^\epsilon P_{BS} - (T - t)\mathcal{A}^\epsilon \mathcal{L}_{BS}P_{BS} = \\ &= \mathcal{A}^\epsilon P_{BS}.\end{aligned}$$

Estudando a função P_{BS} e o operador \mathcal{A}^ϵ , dados respectivamente por (2.15) e (4.43), deduzimos que, para *payoffs* suaves e limitados, P_{BS} é suave em ordem a x e $\mathcal{A}^\epsilon P_{BS}$ mantém-se limitado (vide lema 6.3), donde $(T-t)\mathcal{A}^\epsilon P_{BS} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow T$, concluindo o pretendido. \square

4.3.3. Expansão Assintótica: Aproximação Final

Terminamos esta secção com a apresentação da aproximação final a que esta metodologia conduz.

TEOREMA 4.1. *A aproximação de primeira ordem do preço P^ϵ do modelo (4.17), é dada por*

$$\tilde{P}^\epsilon(t, x) = P_{BS}(t, x; \bar{\sigma}) + (T-t) \left[V_3^\epsilon D_1 D_2 + V_2^\epsilon D_2 \right] P_{BS}(t, x; \bar{\sigma}), \quad (4.45)$$

onde V_2^ϵ e V_3^ϵ são definidos como em (4.43).

Processo de Volatilidade no Modelo α -Hipergeométrico

No que se segue trabalharemos apenas com o modelo α -hipergeométrico. Aqui o estudo recairá sobre o processo *driver* da volatilidade definido em (3.39). Construiremos, com base na teoria apresentada no capítulo 4, uma distribuição invariante para o processo Y_t , demonstrando a sua unicidade e reversibilidade. Isto permitir-nos-á desenvolver as aproximações de primeira ordem do preço das opções europeias deste modelo. Adicionalmente, será iniciado o estudo dos valores próprios do gerador infinitesimal de Y_t .

5.1. Modelo α -Hipergeométrico: Existência, Unicidade e Reversibilidade da Distribuição Invariante

O processo do *driver* de volatilidade, Y_t , é um processo de difusão cuja dinâmica é definida pela seguinte equação:

$$dY_t = (a - be^{\alpha Y_t}) dt + \sigma dW_t^{(1)}. \quad (5.1)$$

Atendendo ao lema 4.1, podemos afirmar que o gerador infinitesimal de Y_t é dado por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{d^2}{dy^2} + (a - be^{\alpha y}) \frac{d}{dy}. \quad (5.2)$$

NOTA 5.1. *Note-se que as funções presentes em (5.1) satisfazem os requisitos do lema 4.1.*

Aplicando agora o Lema 4.4 ao operador (5.2), concluímos que o operador adjunto de \mathcal{L} é dado por:

$$\mathcal{L}^* = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{d^2}{dy^2} - \frac{d}{dy} [(a - be^{\alpha y})]. \quad (5.3)$$

O nosso objectivo seguinte será encontrar uma distribuição invariante para Y_t (no conjunto das distribuições que admitem uma função densidade suave), o que, pela proposição 4.1, é o mesmo que encontrar a solução para o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{d^2\Phi}{dy^2} - \frac{d}{dy} [(a - be^{\alpha y})\Phi] &= 0 \\ \int \Phi dy &= 1 \\ \Phi &\geq 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

A solução desta equação, se existir, será uma função densidade que define uma distribuição invariante, Π , do processo Y_t .

PROPOSIÇÃO 5.1. A seguinte função é uma solução do problema (5.4):

$$\Phi(y) = \alpha e^{\alpha y} \frac{\beta^\delta (e^{\alpha y})^{\delta-1} e^{-\beta e^{\alpha y}}}{\Gamma(\delta)}, \quad (5.5)$$

onde

$$\beta := \frac{2b}{\alpha\sigma^2}, \quad \delta := \frac{2a}{\alpha\sigma^2}. \quad (5.6)$$

DEMONSTRAÇÃO. Temos, integrando a primeira equação de (5.4) em ambos os lados,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{d^2\Phi}{dy^2} - \frac{d}{dy} [(a - be^{\alpha y})\Phi] &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{d\Phi}{dy} - (a - be^{\alpha y})\Phi &= C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Escolha-se $C = 0$. Então:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{d\Phi}{dy} - (a - be^{\alpha y})\Phi &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Phi &= K_+ \exp\left[\frac{2}{\sigma^2}\left(ay - \frac{b}{\alpha}e^{\alpha y}\right)\right], \quad K_+ \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Queremos agora que Φ satisfaça

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(y) dy &= 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow K_+ &= \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{2}{\sigma^2}\left(ay - \frac{b}{\alpha}e^{\alpha y}\right)\right] dy} \end{aligned}$$

Vamos descobrir o valor deste integral. Para isso, aplique-se a mudança de variável $z = e^{\alpha y}$. Ficamos com o seguinte:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2a}{\sigma^2}y} \times e^{-\frac{2b}{\alpha\sigma^2}e^{\alpha y}} dy = \\ &= \int_0^{+\infty} z^{\frac{2a}{\alpha\sigma^2}} \times e^{-\frac{2b}{\alpha\sigma^2}z} \times \frac{1}{\alpha z} dz = \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} z^{\frac{2a}{\alpha\sigma^2}-1} \times e^{-\frac{2b}{\alpha\sigma^2}z} dz = \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} z^{\delta-1} \times e^{-\beta z} dz. \end{aligned}$$

Aplicando agora a mudança de variável $x = \beta z$, ficamos com

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} \beta^{1-\delta} \times x^{\delta-1} \times e^{-x} \times \frac{1}{\beta} dx = \\ &= \frac{\beta^{-\delta}}{\alpha} \int_0^{+\infty} x^{\delta-1} \times e^{-x} dx = \\ &= \frac{\beta^{-\delta}}{\alpha} \Gamma(\delta). \end{aligned}$$

Ou seja, temos

$$K_+ = \frac{\alpha \beta^\delta}{\Gamma(\delta)}.$$

Conclui-se que a função

$$\Phi(y) = \alpha e^{\alpha y} \frac{\beta^\delta (e^{\alpha y})^{\delta-1} e^{-\beta e^{\alpha y}}}{\Gamma(\delta)}$$

é uma função densidade que define uma distribuição invariante para $(Y_t)_{t \geq 0}$. \square

NOTA 5.2. *Aqui está implícito o pressuposto de que $a, b > 0$. Este é um pressuposto que não é feito em [4], mas que nós faremos ao longo de todo este estudo.*

COROLÁRIO 5.1. *Defina-se $Z_t := e^{\alpha Y_t}$. Então a distribuição $\Gamma(\delta, \beta)$ torna Z_t invariante.*

DEMONSTRAÇÃO. Denotem-se por Φ_Z e Φ_Y as funções densidade de probabilidade de Z_t e Y_t , respectivamente, para dado $t \geq 0$. Tem-se:

$$\begin{aligned} \Phi_Z(z) &= \frac{d}{dz} P\{Z_t \leq z\} = \\ &= \frac{d}{dz} P\{Y_t \leq \frac{1}{\alpha} \log(z)\} = \\ &= \Phi\left(\frac{1}{\alpha} \log(z)\right) \times \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\alpha} \log(z)\right] = \\ &= \alpha \times \frac{\beta^\delta \times z^{\delta-1} \times e^{-\beta z}}{\Gamma(\delta)} \times \frac{1}{\alpha z} = \\ &= \frac{\beta^{\delta-1} \times z^{\delta-1} \times e^{-\beta z}}{\Gamma(\delta)} = \\ &= \Phi_\Gamma(z). \end{aligned}$$

Conclui-se o pretendido. \square

NOTA 5.3. *No caso particular em que $\alpha = 2$, o anterior corolário determina que a variância dos retornos do activo com risco neste modelo é invariante para a distribuição $\Gamma(\frac{a}{\sigma^2}, \frac{b}{\sigma^2})$.*

Encontrada a distribuição invariante Π do processo Y_t passamos a demonstrar a sua unicidade:

PROPOSIÇÃO 5.2. *Existe uma única solução Φ de (5.4).*

DEMONSTRAÇÃO. Temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{d^2\Phi}{dy^2} - \frac{d}{dy}[(a - be^{\alpha y})\Phi] &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{d\Phi}{dy} - (a - be^{\alpha y})\Phi &= C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Integrando em ambos os lados entre $-\infty$ e y obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2\Phi(y) + a \int_{-\infty}^y \Phi(s) ds - b \int_{-\infty}^y e^{\alpha s}\Phi(s) ds &= \int_{-\infty}^y C ds \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sigma^2\Phi(y) + a \int_{-\infty}^y \Phi(s) ds &= \int_{-\infty}^y C - be^{\alpha s}\Phi(s) ds. \end{aligned}$$

Como se tem

$$\int_{-\infty}^y \Phi(s) ds \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(s) ds = 1,$$

o lado esquerdo converge quando y tende para $+\infty$. Suponhamos que $C \neq 0$ e que o lado direito da equação acima também converge. Então, em particular:

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} e^{\alpha y}\Phi = \frac{C}{b}.$$

Temos $\alpha > 0$, donde podemos concluir que $e^{\alpha y} \rightarrow 0$ quando y tende para $-\infty$. Sendo Φ uma densidade, teremos que ter também $\Phi \rightarrow 0$ quando y tende para $\pm\infty$. Ou seja,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} e^{\alpha y}\Phi = 0.$$

Conclui-se, por redução ao absurdo, que temos que ter $C = 0$. Mas a única solução de (5.4) quando $C = 0$ é a função (5.5), donde vem que esta é a única solução do problema. \square

As Proposições 5.1 e 5.2 permitem concluir a existência e unicidade da distribuição invariante para o processo Y_t . Para estarmos em condições de aplicar a metodologia de [7] que apresentámos na secção 4.3, resta provar a reversibilidade do processo com respeito à medida invariante.

PROPOSIÇÃO 5.3. *O processo $(Y_t)_{t \geq 0}$ definido por (5.1) é reversível com respeito à sua distribuição invariante, Π .*

DEMONSTRAÇÃO. Temos

$$\begin{aligned} \langle f \mathcal{L}g \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f \mathcal{L}g \Pi(dy) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f\Phi) \times \mathcal{L}g dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g \mathcal{L}^*(f\Phi) dy. \end{aligned}$$

Vamos tentar desenvolver o termo $\mathcal{L}^*(f\Phi)$. Para simplificar a notação, escreveremos $\mu(y) = a - be^{\alpha y}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^*(f\Phi) &= \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{d^2 f}{dy^2} \Phi + \mu(y) \frac{df}{dy} \Phi + 2 \left[\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{df}{dy} \frac{d\Phi}{dy} - \mu(y) \frac{df}{dy} \Phi \right] = \\
&= (\mathcal{L}f)\Phi + 2 \frac{df}{dy} \left[\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{d\Phi}{dy} - \mu(y)\Phi \right] = \\
&= (\mathcal{L}f)\Phi + 0 = \\
&= (\mathcal{L}f)\Phi.
\end{aligned}$$

Substituindo em cima, ficamos com:

$$\begin{aligned}
\langle f\mathcal{L}g \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} g\mathcal{L}^*(f\Phi) dy = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g\mathcal{L}(f)\Phi dy = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g\mathcal{L}f \Pi(dy) = \\
&= \langle g\mathcal{L}f \rangle.
\end{aligned}$$

□

Da demonstração da proposição anterior vem o seguinte resultado:

COROLÁRIO 5.2. *Sejam f uma função de $\mathcal{L}^2(\Pi)$, Φ a função densidade associada à nossa distribuição invariante, e \mathcal{L} o gerador infinitesimal associado a Y_t . Então tem-se:*

$$\mathcal{L}^*(f\Phi) = (\mathcal{L}f)\Phi$$

COROLÁRIO 5.3. *Sejam λ um valor próprio associado ao adjunto do gerador infinitesimal \mathcal{L} de Y_t e f a respectiva função própria. Então $\frac{f}{\Phi}$ é função própria de \mathcal{L} com valor próprio λ .*

DEMONSTRAÇÃO. Basta notar que, apelando ao corolário anterior:

$$\mathcal{L}^*f = \lambda f \Leftrightarrow \mathcal{L}^*\left(\frac{f}{\Phi}\Phi\right) = \lambda f \Leftrightarrow \mathcal{L}\left(\frac{f}{\Phi}\right)\Phi = \lambda f \Leftrightarrow \mathcal{L}\left(\frac{f}{\Phi}\right) = \lambda \frac{f}{\Phi}$$

□

LEMA 5.1. *Seja $(Y_t)_{t \geq 0}$ o processo driver da volatilidade do modelo definido em (3.39). Se os valores de Y_t forem dados pela distribuição invariante Π encontrada anteriormente, o movimento Browniano $(W_t^{(1)})_{t \geq 0}$ é tal que, para todo o $t \geq 0$:*

$$E_{\Pi}[W_t^{(1)}] = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO. Temos que

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_0 + \int_0^t (a - be^{\alpha Y_s}) ds + \int_0^t \sigma dW_s^{(2)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow W_t^{(2)} &= \frac{1}{\sigma} \left[Y_t - Y_0 + b \int_0^t e^{\alpha Y_s} ds - at \right] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E_{\Pi}[W_t^{(2)}] &= \frac{1}{\sigma} \left[E_{\Pi}[Y_t] - E_{\Pi}[Y_0] + b \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha y} \Pi(dy) ds - at \right] \end{aligned}$$

Pelo corolário 5.1, a variável $Z_t := e^{\alpha Y_t}$ possui distribuição $\Gamma(\delta, \beta)$ para Π . Por isso, tem-se, com δ e β definidos como na proposição 5.1, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha y} \Pi(dy) ds = \frac{\delta}{\beta}$$

Sendo Y_t invariante, temos também que $E_{\Pi}[Y_t] = E_{\Pi}[Y_0]$. Assim, ficamos com:

$$\begin{aligned} E_{\Pi}[W_t^{(2)}] &= \frac{t}{\sigma} \left[b \frac{\delta}{\beta} - a \right] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E_{\Pi}[W_t^{(2)}] &= \frac{t}{\sigma} \left[b \frac{a}{b} - a \right] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E_{\Pi}[W_t^{(2)}] &= 0 \end{aligned}$$

□

5.2. Modelo α -Hipergeométrico: Contribuição para o Estudo Espectral do Gerador Infinitesimal de Y_t

A importância que a análise do espectro e das funções próprias do gerador infinitesimal de um processo pode ter na compreensão da sua dinâmica evolutiva de longo prazo torna pertinente que se dedique uma secção ao mesmo. Nesta secção, encontramos uma expressão geral para as funções próprias (e respectivos valores próprios) do gerador infinitesimal de Y_t , dado por (5.2). Adicionalmente, estabelecemos desigualdades com o intuito de tentar definir um intervalo que contivesse o espectro real do gerador infinitesimal correspondente às funções próprias de $\mathcal{L}^2(\Pi)$. Esta tarefa não ficou concluída, podendo vir a motivar trabalhos futuros na matéria.

5.2.1. Fórmula Geral para as Funções Próprias do Gerador Infinitesimal

Começamos por tentar encontrar uma fórmula geral para as funções próprias de \mathcal{L} (definido em (5.2)). Isto é o mesmo que resolver a equação:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f'' + (a - be^{\alpha y})f' - \lambda f = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (5.7)$$

Para isto utilizaremos dois resultados conhecidos sobre equações diferenciais de 2^a ordem, que podem ser vistos em [2], secções 2.1.2-3 e 2.1.2-4.

LEMA 5.2. *Considere-se a seguinte equação diferencial ordinária de segunda ordem:*

$$a_2 x^2 y'' + (a_1 x^2 + b_1 x) y' + (a_0 x^2 + b_0 x + c_0) y = 0. \quad (5.8)$$

Aplicando a mudança de variável $y = x^k w$, onde k é solução da equação $a_2 k^2 + (b_1 - a_2)k + c_0 = 0$, obtemos a equação:

$$a_2 x w'' + (a_1 x + 2a_2 k + b_1) w' + (a_0 x + a_1 k + b_0) w = 0. \quad (5.9)$$

LEMA 5.3. Considere-se a seguinte equação diferencial ordinária de segunda ordem:

$$(a_2 x + b_2) y'' + (a_1 x + b_1) y' + (a_0 x + b_0) y = 0. \quad (5.10)$$

Seja $\mathcal{J}(a, b; x)$ uma solução arbitrária da equação hipergeométrica degenerada $xy'' + (b - x)y' - ay = 0$. Se $a_2 \neq 0$ e $a_1 \neq 4a_0 a_2$, a solução da primeira equação é dada por:

$$y = e^{\frac{\sqrt{D}-a_1}{2a_2}x} \mathcal{J}\left(A, B; \frac{x-\mu}{\lambda}\right)$$

Aqui, definimos:

$$\begin{aligned} D &= a_1^2 - 4a_0 a_2 \\ \lambda &= -\frac{a_2}{2a_2 k + a_1} \\ \mu &= -\frac{b_2}{a_1} \\ A &= \frac{b_2 k^2 + b_1 k + b_0}{2a_2 k + a_1} \\ B &= \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2} \end{aligned}$$

Fazendo uso dos lemas 5.2 e 5.3, provamos a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 5.4. Sejam Y_t o driver de volatilidade do modelo α -hipergeométrico e \mathcal{L} o seu gerador infinitesimal. Todo o $\lambda < \frac{a^2}{2\sigma^2}$ é valor próprio de \mathcal{L} associado a uma função própria da forma:

$$f(y) = e^{k\alpha y} \mathcal{J}(A, B; e^{\alpha y}(\beta - 2k)), \quad (5.11)$$

onde k é uma solução de $k^2 + \delta k - \frac{2\lambda}{\alpha^2 \sigma^2} = 0$, os parâmetros a e b são definidos por

$$\begin{aligned} A &= k \left[1 + \frac{\delta + 1}{2k - \beta} \right] \\ B &= 2k + \delta + 1 \end{aligned} \quad (5.12)$$

e a função \mathcal{J} é definida como no lema anterior.

DEMONSTRAÇÃO. Considere-se a seguinte equação diferencial ordinária de segunda ordem:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f'' + (a - be^{\alpha y})f' - \lambda f = 0$$

Aplicando-se a mudança de variável $z = e^{\alpha y}$. A equação acima transforma-se em

$$z^2 f'' + (-\beta z^2 + (\delta + 1)z)f' - \frac{2\lambda}{\alpha^2 \sigma^2} f = 0 \quad (5.13)$$

Pelo Lema 5.2, pondo $f(z) = z^k w(z)$, obtemos a seguinte equação:

$$zw'' + (-\beta z + 2k + \delta + 1)w' - \beta kw = 0 \quad (5.14)$$

onde k obtém-se resolvendo $k^2 + \delta k - \frac{2\lambda}{\alpha^2 \sigma^2} = 0$. As soluções desta equação são dadas por:

$$\begin{aligned} k &= \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4\frac{2\lambda}{\alpha^2 \sigma^2}}}{2} = \\ &= \frac{-\delta \pm 2\sqrt{a^2 - 2\lambda\sigma^2}}{2\alpha\sigma^2} \end{aligned}$$

A equação (5.14) tem a forma de (5.10) com:

$$\begin{aligned} a_2 &= 1 \\ b_2 &= 0 \\ a_1 &= -\beta \\ b_1 &= 2k + \delta + 1 \\ a_0 &= 0 \\ b_0 &= -\beta k. \end{aligned}$$

Por isso, apelando ao Lema 5.3, estabelecemos que a solução de (5.14) é dada por:

$$w = \mathcal{J}\left(A, B; z(\beta - 2k)\right) \quad (5.15)$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \frac{(2k + \delta + 1)k - \beta k}{2k - \beta} = \\ &= k \left[1 + \frac{\delta + 1}{2k - \beta} \right] \end{aligned}$$

e

$$B = 2k + \delta + 1.$$

Atendendo à forma como w foi definido temos:

$$\begin{aligned} f &= z^k \mathcal{J}\left(A, B; z(\beta - 2k)\right) = \\ &= e^{k\alpha y} \mathcal{J}\left(A, B; e^{\alpha y}(\beta - 2k)\right), \end{aligned}$$

como pretendíamos. □

5.2.2. Desigualdades sobre o Espectro do Gerador Infinitesimal Restrito ao Espaço $\mathcal{L}^2(\Pi)$

Vamos procurar agora condições sobre k , e conseqüentemente sobre λ para que as funções próprias do operador \mathcal{L} encontradas acima pertençam a $\mathcal{L}^2(\Pi)$. Vamos primeiro estudar apenas o caso $B \notin \mathbb{Z}$. Neste caso, é sabido que a solução geral da equação $xy'' + (b -$

$x)y' - ay = 0$, i.e., a forma geral de $\mathcal{J}(A, B; x)$, é dada por:

$$C_1\psi_1(A, B; x) + C_2\psi_2(A, B; x), \quad (5.16)$$

onde

$$\psi_1\left(A, B; x\right) = 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(A)_j}{(B)_j} \frac{x^j}{j!}, \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \psi_2\left(A, B; x\right) &= \frac{\Gamma(1-B)}{\Gamma(A-B+1)}\psi_1\left(A, B; x\right) + \\ &+ \frac{\Gamma(B-1)}{\Gamma(A)}x^{1-B}\psi_1\left(A-B+1, 2-B; x\right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

e $(A)_j = A(A+1)\dots(A+j-1)$, $(A)_0 = 1$.

A série que define ψ_1 é igual a série da função exponencial, perturbada pelos coeficientes $\frac{(A)_n}{(B)_n}$. O nosso objectivo será aproveitar a relação entre ψ_1 e a exponencial com vista a extrair resultados acerca do domínio de funções próprias que pertencem a $\mathcal{L}^2(\Pi)$. Começemos por provar o seguinte lema.

LEMA 5.4. *Sejam A e B reais tais que $A, B \notin \mathbb{Z}_0^-$. Defina-se a sucessão*

$$C_n = \frac{(A)_n}{(B)_n}, n \in \mathbb{N}$$

Tem-se que:

1. *Se $A > B$, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $n > m$, $|C_n|$ é estritamente crescente e C_n mantém sempre o mesmo sinal.*
2. *Se $A = B$, então a série C_n é constante igual a 1.*
3. *Se $A < B$, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $n > m$, $|C_n|$ é estritamente decrescente e C_n mantém sempre o mesmo sinal.*

Mais, se $A > B > 0$ ou $B > A > 0$ então temos, que C_n é sempre positivo e que é, respectivamente, crescente ou decrescente.

DEMONSTRAÇÃO. O ponto 2 é trivial.

Seja $m > \max(|A|, |B|)$ um inteiro positivo. Temos que para qualquer $n > m$ se tem que $A+n > 0$ e $B+n > 0$. Mas então como $C_{n+1} = C_n \times \frac{A+n}{B+n}$, conclui-se que C_{n+1} possui o mesmo sinal de C_n . Isto demonstra a segunda parte de 1 e 3.

Agora, temos para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande,

$$\left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| = \frac{A+n}{B+n}$$

donde vem que $|C_n|$ é crescente se $A > B$ e decrescente se $A < B$.

Se $A > B > 0$ ou $B > A > 0$ os argumentos são válidos para $m = 0$. □

Com ajuda do resultado anterior podemos provar o seguinte:

PROPOSIÇÃO 5.5. *Seja $g(y) = e^{k\alpha y}\psi_1(A, B, e^{\alpha y}(\beta - 2k))$, com $A \notin \mathbb{Z}_0^-$ e $A > B > 0$. Se $g \in \mathcal{L}^2(\Pi)$, então $k > \beta/4$.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere-se a sucessão $C_n = \frac{(A)_n}{(B)_n}$. Suponha-se que $A > B > 0$. Pelo lema anterior sabemos que C_n é positiva e crescente. Em particular, $C_n \geq C_1$.

Para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\psi_1(A, B, x) &= 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} C_j \frac{x^j}{j!} \geq \\ &\geq -C_1 + C_1 \left(1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x^j}{j!} \right) = \\ &= C_1 \left(e^x - 1 \right).\end{aligned}$$

Assim, aplicando esta desigualdade,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)^2 \Pi(dy) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2k\alpha y} \psi_1(A, B, e^{\alpha y}(\beta - 2k))^2 \Phi(y) dy = \\ &= \int_0^{+\infty} z^{2k} \psi_1(A, B, z(\beta - 2k))^2 \Phi_{\Gamma(\delta, \beta)}(z) dz = \\ &= \frac{\beta^\delta}{\Gamma(\delta)} \int_0^{+\infty} z^{2k+\delta-1} e^{-\beta z} \psi_1(A, B, z(\beta - 2k))^2 dz \geq \\ &\geq \frac{\beta^\delta}{\Gamma(\delta)} \int_0^{+\infty} z^{2k+\delta-1} e^{-\beta z} C_1^2 \left(e^{z(\beta-2k)} - 1 \right)^2 dz.\end{aligned}$$

Ou seja, se $\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)^2 \Pi(dy) < +\infty$, em particular devemos de ter

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} z^{2k+\delta-1} e^{-\beta z} C_1^2 \left(e^{z(\beta-2k)} - 1 \right)^2 = 0.$$

Ora,

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow +\infty} z^{2k+\delta-1} e^{-\beta z} C_1^2 \left(e^{z(\beta-2k)} - 1 \right)^2 &= \\ = C_1^2 \lim_{z \rightarrow +\infty} z^{2k+\delta-1} e^{-\beta z} e^{2z(\beta-2k)} &= \\ = C_1^2 \lim_{z \rightarrow +\infty} z^{2k+\delta-1} e^{(\beta-4k)z}.\end{aligned}$$

Como por hipótese $A \notin \mathbb{Z}_0^-$, temos $C_1 \neq 0$, pelo que o limite acima é zero se e só se $\beta - 4k < 0$, isto é, $k > \frac{\beta}{4}$. \square

Provamos de seguida dois outros resultados auxiliares.

LEMA 5.5. *Sejam $A, B \in \mathbb{R}$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sucessão definida por:*

$$x_n = \frac{A + n - 1}{B + n - 1}$$

Suponhamos que $A, B \notin \mathbb{Z}_0^-$. Se $A > B$ então existe $m \in \mathbb{N}$ a partir do qual x_n é sempre positiva e estritamente crescente. Se $B < A$ então existe $m \in \mathbb{N}$ a partir do qual x_n é sempre positiva e estritamente decrescente.

Mais, se $A > B > 0$ ou $B > A > 0$, a sucessão x_n é positiva e, respectivamente, estritamente crescente ou estritamente decrescente, para todo $n \in \mathbb{N}$.

DEMONSTRAÇÃO. Tomando $m > \max(|A|, |B|) + 1$, temos que $x_n > 0$ para todo o $n > m$. Para estes valores de n , temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{A+n}{A+n-1} \frac{B+n-1}{B+n} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{A+n-1}\right) \left(1 + \frac{1}{B+n-1}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Se $A > B$, então $1 + \frac{1}{A+n-1} < 1 + \frac{1}{B+n-1}$ donde x_n é decrescente. Se por outro lado $B < A$, então $1 + \frac{1}{A+n-1} > 1 + \frac{1}{B+n-1}$ pelo que a sucessão será crescente.

Se $A, B > 0$ o argumento é válido tomando $m = 0$. □

LEMA 5.6. *Sejam A e B reais tais que $A, B \notin \mathbb{Z}_0^-$. Se $B > A$ então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ se tem a seguinte desigualdade:*

$$\left(\frac{A+m}{B+m}\right)^n < \frac{(A+m)_n}{(B+m)_n}$$

Se $B > A > 0$, então a desigualdade de cima é válida para $m = 0$ e para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

DEMONSTRAÇÃO. Pelo lema anterior tem-se que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ se observa $x_m = \frac{A+m}{B+m} < \frac{A+m+n}{B+m+n} = x_{m+n}$. Então é claro que

$$\begin{aligned} \left(\frac{A+m}{B+m}\right)^n &= \prod_{j=1}^n x_{m+j} \leq \\ &\leq \prod_{j=1}^n x_{m+j} = \\ &= \prod_{j=1}^n \frac{A+m+j-1}{B+m+j-1} = \\ &= \frac{(A+m)_n}{(B+m)_n}. \end{aligned}$$

Se se tiver $B > A > 0$ podemos, pelo lema anterior, tomar $m = 0$, pois x_n será sempre positiva e crescente. □

Agora provamos um resultado semelhante ao da proposição 8, agora para o caso em que $B > A > 0$.

PROPOSIÇÃO 5.6. *Seja $g(y) = e^{k\alpha y} \psi_1(A, B, e^{\alpha y}(\beta - 2k))$, com $A \notin \mathbb{Z}_0^-$ e $B > A > 0$. Se $g \in \mathcal{L}^2(\Pi)$, então $-\beta - 2\frac{A}{B}(\beta - 2k) < 0$.*

DEMONSTRAÇÃO. A partir do lema anterior podemos fazer a seguinte dedução:

$$\begin{aligned}
\psi_1(A, B, x) &= 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(A)_j}{(B)_j} \frac{x^j}{j!} \geq \\
&\geq 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{A}{B}\right)^j \frac{x^j}{j!} = \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{A}{B}x\right)^j \frac{1}{j!} = \\
&= \exp\left\{\frac{A}{B}x\right\}.
\end{aligned}$$

Agora, o procedimento é análogo ao da demonstração da proposição 8:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)^2 \Pi(dy) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2k\alpha y} \psi_1(A, B, e^{\alpha y}(\beta - 2k))^2 \Phi(y) dy = \\
&= \int_0^{+\infty} z^{2k} \psi_1(A, B, z(\beta - 2k))^2 \Phi_{\Gamma(\delta, \beta)}(z) dz = \\
&= \frac{\beta^\delta}{\Gamma(\delta)} \int_0^{+\infty} z^{2k+\delta-1} e^{-\beta z} \psi_1(A, B, z(\beta - 2k))^2 dz \geq \\
&\geq \frac{\beta^\delta}{\Gamma(\delta)} \int_0^{+\infty} z^{2k+\delta-1} e^{-\beta z} e^{\frac{A}{B}z(\beta-2k)} dz.
\end{aligned}$$

Para haver convergência do integral acima tem que se ter

$$-\beta - 2\frac{A}{B}(\beta - 2k) < 0,$$

como afirma a proposição. □

Aproximação do Preço de Opções no Modelo α -Hipergeométrico

Recordando a abordagem de [7] apresentada no capítulo 4, temos que a expansão de primeira ordem do preço de uma opção europeia através de um fator rápido de volatilidade estocástica é, pelo Teorema 4.1, dada por:

$$\tilde{P}^\epsilon = P_{BS} + (T - t) \left[V_2^\epsilon D_2 + V_3^\epsilon D_1 D_2 \right] P_{BS},$$

onde P_{BS} é o preço de Black-Scholes associado à volatilidade média na distribuição invariante da volatilidade, ou seja, se $f(y)$ é a volatilidade em função do *driver* estocástico e Π a distribuição invariante associada a esse mesmo *driver*:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BS}(\bar{\sigma}) P_{BS} &= 0 \\ \bar{\sigma}^2 &= \int f^2(y) \Pi(dy). \end{aligned}$$

No caso do modelo α -hipergeométrico temos $f(y) = e^y$ e, pela Proposição 5.1, Π é definida pela seguinte função densidade de y :

$$\Phi(y) = \alpha \frac{\beta^\delta (e^{\alpha y})^\delta e^{-\beta e^{\alpha y}}}{\Gamma(\delta)}$$

onde,

$$\beta := \frac{2b}{\alpha\sigma^2}, \quad \delta := \frac{2a}{\alpha\sigma^2}$$

Na expansão, no contexto do modelo α -hipergeométrico, temos as seguintes definições:

$$\begin{aligned} D_k &= x^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} \\ V_3^\epsilon &= -\frac{\rho\sqrt{\epsilon}}{2} \left\langle \sigma f \frac{d\phi}{dy} \right\rangle \\ V_2^\epsilon &= \frac{\sqrt{\epsilon}}{2} \left\langle \sigma \Lambda \frac{d\phi}{dy} \right\rangle \end{aligned}$$

onde $1/\epsilon$ é o fator de perturbação rápido (para ϵ pequeno), ρ é o coeficiente de correlação entre o processo do *driver* de volatilidade e o processo do preço do ativo subjacente, Λ é o preço do risco. Definimos ainda ϕ como sendo solução da equação diferencial não homogênea

$$\mathcal{L}\phi = f^2(y) - \bar{\sigma}^2 = e^{2y} - \bar{\sigma}^2 \tag{6.1}$$

onde \mathcal{L} é gerador infinitesimal do *driver* de volatilidade não perturbado pelo fator $1/\epsilon$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{d^2}{dy^2} + (a - be^{\alpha y}) \frac{d}{dy}.$$

O objectivo deste capítulo será calcular todos os *inputs* necessários para estabelecer a aproximação segundo a metodologia definida anteriormente.

6.1. Modelo α -Hipergeométrico com Volatilidade Acelerada

No regime de volatilidade acelerada o modelo α -hipergeométrico pode ser parametrizado do seguinte modo:

$$\begin{aligned} dS_t &= r dt + e^{Y_t} S_t dW_t^{(0)} \\ dY_t &= \frac{1}{\epsilon} (a - be^{\alpha Y_t}) dt + \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} dW_t^{(1)} \\ d\langle W^{(0)}, W^{(1)} \rangle_t &= \rho dt. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Como não existe nenhum termo de ordem $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ no *drift* de Y_t , temos que $V_2^\epsilon = 0$. Precisamos por isso de calcular os seguintes parâmetros, por esta ordem:

1. A média da variância do processo na distribuição invariante,

$$\bar{\sigma}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2y} \Pi(dy).$$

2. A derivada da solução da equação (6.1), denotada por ϕ , e utilizada no cálculo de V_3^ϵ .
3. O coeficiente de correção V_3^ϵ .

6.2. Cálculo da Aproximação de Primeira Ordem para o Modelo α -Hipergeométrico

Começamos por calcular $\bar{\sigma}^2$:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2y} \Pi(dy) = \\ &= \int_0^{+\infty} z^{\frac{2}{\alpha}} f_{\Gamma(\delta, \beta)}(z) dz = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\beta^\delta z^{\delta + \frac{2}{\alpha} - 1} e^{-\beta z}}{\Gamma(\delta, \beta)} dz = \\ &= \frac{1}{\beta^{\frac{2}{\alpha}}} \frac{\Gamma(\delta + \frac{2}{\alpha})}{\Gamma(\delta)} \int_0^{+\infty} f_{\Gamma(\delta + \frac{2}{\alpha}, \beta)}(z) dz = \\ &= \frac{1}{\beta^{\frac{2}{\alpha}}} \frac{\Gamma(\delta + \frac{2}{\alpha})}{\Gamma(\delta)}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

NOTA 6.1. *Note-se que no caso de $\alpha = 2$, se tem:*

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\delta}{\beta} = \frac{a}{b}. \tag{6.4}$$

Calculado $\bar{\sigma}$, interessa-nos resolver a equação diferencial (6.1). Como notámos anteriormente, a mudança de variável $z = e^{\alpha y}$ transforma a equação acima numa outra equação

$$z^2 \phi'' + (-\beta z^2 + (\delta + 1)z) \phi' - z^{\frac{2}{\alpha}} + \bar{\sigma}^2 = 0. \quad (6.5)$$

NOTA 6.2. *Note-se que, como necessitamos apenas da derivada de ϕ , podemos resolver a equação em ordem à primeira derivada de ϕ . Procuramos portanto a solução de uma equação da forma:*

$$z^2 g' + (-\beta z^2 + (\delta + 1)z)g - z^{\frac{2}{\alpha}} + \bar{\sigma}^2 = 0. \quad (6.6)$$

PROPOSIÇÃO 6.1. *Dados $a < 0$, $b + l > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, considere-se a seguinte equação diferencial:*

$$z^2 g' + (az^2 + bz)g + cz^l + d = 0$$

As soluções desta equação são as funções da forma:

$$g(z) = -z^{-b} e^{-az} \left[c \frac{\Gamma(b+l-1)}{(-a)^{b+l-1}} F_{\Gamma(b+l-1, -a)}(z) + d \frac{\Gamma(b-1)}{(-a)^{b-1}} F_{\Gamma(b-1, -a)}(z) + K \right]$$

onde $K \in \mathbb{R}$ é uma constante, e $F_{\Gamma(x,y)}$ é a função de distribuição de probabilidade de uma distribuição $\Gamma(x, y)$.

DEMONSTRAÇÃO. Temos

$$\begin{aligned} z^2 g' + (az^2 + bz)g + cz^l + d = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow g' + \left(a + \frac{b}{z} \right) g &= - \left[cz^{l-2} + d \frac{1}{z^2} \right] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(z^b e^{az} g \right)' &= -z^b e^{az} \left[cz^{l-2} + d \frac{1}{z^2} \right] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow g &= -z^{-b} e^{-az} \int s^b e^{as} \left[cs^{l-2} + d \frac{1}{s^2} \right] ds \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow g &= -z^{-b} e^{-az} \left[c \int s^{b+l-2} e^{as} ds + d \int s^{b-2} e^{as} ds \right] \end{aligned}$$

Agora, estudemos as duas primitivas isoladamente.

$$\begin{aligned} \int s^{b+l-2} e^{as} ds &= \frac{\Gamma(b+l-1)}{(-a)^{b+l-1}} \times \int \frac{(-a)^{b+l-1} s^{(b+l-1)-1} e^{-(-a)s}}{\Gamma(b+l-1)} ds = \\ &= \frac{\Gamma(b+l-1)}{(-a)^{b+l-1}} \times \int f_{\Gamma(b+l-1, -a)}(s) ds = \\ &= \frac{\Gamma(b+l-1)}{(-a)^{b+l-1}} F_{\Gamma(b+l-1, -a)}(z) + K_1 \end{aligned}$$

onde $K_1 \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

$$\begin{aligned} \int s^{b-2} e^{as} ds &= \frac{\Gamma(b-1)}{(-a)^{b-1}} \times \int \frac{(-a)^{b-1} s^{(b-1)-1} e^{-(-a)s}}{\Gamma(b-1)} ds = \\ &= \frac{\Gamma(b-1)}{(-a)^{b-1}} \times \int f_{\Gamma(b-1,-a)}(s) ds = \\ &= \frac{\Gamma(b-1)}{(-a)^{b-1}} F_{\Gamma(b-1,-a)}(z) + K_2 \end{aligned}$$

onde $K_2 \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária.

Note-se que as deduções acima fazem sentido pois $a < 0$ e $b+l > 1$ e portanto a função gama fica bem definida. Substituindo na equação de cima temos a expressão pretendida:

$$g(z) = -z^{-b} e^{-az} \left[c \frac{\Gamma(b+l-1)}{(-a)^{b+l-1}} F_{\Gamma(b+l-1,-a)}(z) + d \frac{\Gamma(b-1)}{(-a)^{b-1}} F_{\Gamma(b-1,-a)}(z) + K \right]$$

para um qualquer $K \in \mathbb{R}$. □

COROLÁRIO 6.1. *A solução geral da equação (6.6) é a função:*

$$g(z) = \frac{\Gamma(\delta + \frac{2}{\alpha})}{\beta^{\delta + \frac{2}{\alpha}}} z^{-(\delta+1)} e^{\beta z} \left[F_{\Gamma(\delta + \frac{2}{\alpha}, \beta)}(z) - F_{\Gamma(\delta, \beta)}(z) + K \right]$$

para $K \in \mathbb{R}$.

DEMONSTRAÇÃO. A equação (6.6) é um caso particular da equação da Proposição anterior, fazendo

$$\begin{aligned} a &= -\beta \\ b &= \delta + 1 \\ c &= -1 \\ l &= \frac{2}{\alpha} \\ d &= \bar{\sigma}^2. \end{aligned}$$

Fazendo as substituições necessárias obtemos:

$$\begin{aligned} g(z) &= -z^{-(\delta+1)} e^{\beta z} \left[-\frac{\Gamma(\delta + \frac{2}{\alpha})}{\beta^{\delta + \frac{2}{\alpha}}} F_{\Gamma(\delta + \frac{2}{\alpha}, \beta)}(z) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\beta^{\frac{2}{\alpha}}} \frac{\Gamma(\delta + \frac{2}{\alpha})}{\Gamma(\delta)} \frac{\Gamma(\delta)}{\beta^\delta} F_{\Gamma(\delta, \beta)}(z) + K \right] = \\ &= z^{-(\delta+1)} e^{\beta z} \left[\frac{\Gamma(\delta + \frac{2}{\alpha})}{\beta^{\delta + \frac{2}{\alpha}}} F_{\Gamma(\delta + \frac{2}{\alpha}, \beta)}(z) - \right. \\ &\quad \left. \frac{\Gamma(\delta + \frac{2}{\alpha})}{\beta^{\delta + \frac{2}{\alpha}}} F_{\Gamma(\delta, \beta)}(z) + K \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(\delta + \frac{2}{\alpha})}{\beta^{\delta + \frac{2}{\alpha}}} z^{-(\delta+1)} e^{\beta z} \left[F_{\Gamma(\delta + \frac{2}{\alpha}, \beta)}(z) - F_{\Gamma(\delta, \beta)}(z) + K \right].$$

□

Estamos em condições de apresentar uma forma fechada para o fator de correção V_3^ϵ , pois temos que, sendo ϕ definida como a solução de (6.1), a derivada $\frac{d\phi}{dy}$ é, após a mudança de variável $z = e^{\alpha y}$, solução de (6.6), cuja expressão é dada pelo corolário anterior. Assim, substituindo, temos

$$\frac{d\phi}{dy}(y) = \frac{\Gamma(\delta + \frac{2}{\alpha})}{\beta^{\delta + \frac{2}{\alpha}}} (e^{\alpha y})^{-(\delta+1)} e^{\beta e^{\alpha y}} \left[F_{\Gamma(\delta + \frac{2}{\alpha}, \beta)}(e^{\alpha y}) - F_{\Gamma(\delta, \beta)}(e^{\alpha y}) \right] \quad (6.7)$$

NOTA 6.3. *Aqui pomos $K = 0$, pois interessam-nos soluções em $L^2(\Pi)$.*

Atendendo à definição de V_3^ϵ , temos:

$$\begin{aligned} V_3^\epsilon &= -\frac{\rho\sqrt{\epsilon}}{2} \left\langle \sigma f \frac{d\phi}{dy} \right\rangle = \\ &= -\sigma \frac{\rho\sqrt{\epsilon}}{2} \left\langle e^y \frac{d\phi}{dy} \right\rangle = \\ &= -\sigma \frac{\rho\sqrt{\epsilon}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^y \frac{d\phi}{dy} \Phi(y) dy = \\ &= -\sigma \frac{\rho\sqrt{\epsilon}}{2} \int_0^{+\infty} z^{1/\alpha} \frac{d\phi}{dy}(z) \Phi_{\Gamma(\delta, \beta)}(z) dz = \\ &= -\sigma \frac{\rho\sqrt{\epsilon}}{2} \times \frac{\Gamma(\delta + \frac{2}{\alpha})}{\beta^{\delta + \frac{2}{\alpha}}} \int_0^{+\infty} z^{1/\alpha - \delta - 1} \\ &e^{\beta z} \left[F_{\Gamma(\delta + \frac{2}{\alpha}, \beta)}(z) - F_{\Gamma(\delta, \beta)}(z) \right] \Phi_{\Gamma(\delta, \beta)}(z) dz = \\ &= -\sigma \frac{\rho\sqrt{\epsilon}}{2} \times \frac{\Gamma(\delta + \frac{2}{\alpha})}{\beta^{\frac{2}{\alpha}} \Gamma(\delta)} \int_0^{+\infty} z^{1/\alpha - 2} \left[F_{\Gamma(\delta + \frac{2}{\alpha}, \beta)}(z) - F_{\Gamma(\delta, \beta)}(z) \right] dz. \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 6.2. *O coeficiente de correção, V_3^ϵ , da expansão de primeira ordem do preço de uma opção europeia no modelo α -hipergeométrico é, se existir, dado por:*

$$V_3^\epsilon = -\sigma \frac{\rho\sqrt{\epsilon}}{2} \times \frac{\Gamma(\delta + \frac{2}{\alpha})}{\beta^{\frac{2}{\alpha}} \Gamma(\delta)} \int_0^{+\infty} z^{1/\alpha - 2} \left[F_{\Gamma(\delta + \frac{2}{\alpha}, \beta)}(z) - F_{\Gamma(\delta, \beta)}(z) \right] dz. \quad (6.8)$$

NOTA 6.4. *Note-se que aqui não provamos a convergência do integral. Vamos ver de seguida alguns casos particulares de convergência e de divergência do integral.*

Vamos ver que os casos particulares em que $\alpha = \frac{2}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, permitem-nos chegar a expressões bastante mais simples e úteis para $\frac{d\phi}{dy}$. Dentro destes casos incluem-se os importantes casos em que $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$, que são os mais estudados na literatura. Para estabelecer os resultados seguintes é importante recordar algumas definições e resultados conhecidos.

LEMA 6.1. *Sejam $a, b > 0$ e $F_{\Gamma(a,b)}(z)$ a função de distribuição de probabilidade de uma variável aleatória com distribuição $\Gamma(a, b)$. Definimos a função gama incompleta inferior por:*

$$\gamma(s, x) = \int_0^x t^{s-1} e^{-st} dt, \quad x, s > 0 \quad (6.9)$$

Então:

1. Para todo $z > 0$, tem-se $F_{\Gamma(a,b)}(z) = \frac{\gamma(a,bz)}{\Gamma(a)}$.
2. Para todo $s > 0$, tem-se $\gamma(s+1, x) = s\gamma(s, x) - x^s e^{-x}$.

A partir do ponto 2 do lema anterior, conseguimos provar por indução um resultado auxiliar mais geral:

LEMA 6.2. *Sejam $s, x > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \neq 0$. Temos:*

$$\gamma(s+n, x) = (s)_n \gamma(s, x) - e^{-x} \sum_{i=1}^n (s+i)_{n-i} x^{s+i-1} \quad (6.10)$$

onde convencionamos que $(a)_0 = 1$.

DEMONSTRAÇÃO. Para $n = 1$, o resultado é a propriedade 2 do lema 6.1. Suponhamos a veracidade do resultado para um certo $m \in \mathbb{N}$. Queremos provar o resultado para $m+1$. Ora,

$$\begin{aligned} \gamma(s+m+1, x) &= \\ &= (s+m)\gamma(s+m, x) - x^{s+m} e^{-x} = \\ &= (s+m) \left((s)_m \gamma(s, x) - e^{-x} \sum_{i=1}^m (s+i)_{m-i} x^{s+i-1} \right) - x^{s+m} e^{-x} = \\ &= (s)_{m+1} \gamma(s, x) - e^{-x} \left[\sum_{i=1}^m (s+i)_{m+1-i} x^{s+i-1} + x^{s+m} \right] = \\ &= (s)_{m+1} \gamma(s, x) - e^{-x} \sum_{i=1}^{m+1} (s+i)_{m+1-i} x^{s+i-1} \end{aligned}$$

O resultado fica então provado pelo princípio da indução. \square

Fazendo uso dos lemas 6.1 e 6.2, provamos a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 6.3. *Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $\alpha = \frac{2}{n}$. A solução da equação (6.6) para esse valor de α é a função:*

$$g(z) = -\frac{1}{\beta^{n+1} z^2} \sum_{i=1}^n (\delta+i)_{n-i} (\beta z)^i, \quad (6.11)$$

onde por simplicidade, pomos $K = 0$.

DEMONSTRAÇÃO. Temos que

$$\begin{aligned}
g(z) &= \frac{\Gamma(\delta + \frac{2}{\alpha})}{\beta^{\delta + \frac{2}{\alpha}}} z^{-(\delta+1)} e^{\beta z} \left[F_{\Gamma(\delta + \frac{2}{\alpha}, \beta)}(z) - F_{\Gamma(\delta, \beta)}(z) \right] = \\
&= \frac{\Gamma(\delta + n)}{\beta^{\delta+n}} z^{-(\delta+1)} e^{\beta z} \left[\frac{\gamma(\delta + n, \beta z)}{\Gamma(\delta + n)} - \frac{\gamma(\delta, \beta z)}{\Gamma(\delta)} \right] = \\
&= \frac{1}{\beta^{n-1}} (\beta z)^{-(\delta+1)} e^{\beta z} \left[\gamma(\delta + n, \beta z) - \frac{\Gamma(\delta + n)}{\Gamma(\delta)} \gamma(\delta, \beta z) \right] = \\
&= \frac{1}{\beta^{n-1}} (\beta z)^{-(\delta+1)} e^{\beta z} \left[\gamma(\delta + n, \beta z) - (\delta)_n \gamma(\delta, \beta z) \right].
\end{aligned}$$

Pelo lema 6.2, temos

$$\begin{aligned}
&\gamma(\delta + n, \beta z) - (\delta)_n \gamma(\delta, \beta z) = \\
&= (\delta)_n \gamma(\delta, \beta z) - (\delta)_n \gamma(\delta, \beta z) - e^{-\beta z} \sum_{i=1}^n (\delta + i)_{n-i} (\beta z)^{\delta+i-1} = \\
&= -e^{-\beta z} \sum_{i=1}^n (\delta + i)_{n-i} (\beta z)^{\delta+i-1}.
\end{aligned}$$

Substituindo, obtemos

$$\begin{aligned}
g(z) &= \frac{1}{\beta^{n-1}} (\beta z)^{-(\delta+1)} e^{\beta z} \left[-e^{-\beta z} \sum_{i=1}^n (\delta + i)_{n-i} (\beta z)^{\delta+i-1} \right] = \\
&= -\frac{1}{\beta^{n-1}} \sum_{i=1}^n (\delta + i)_{n-i} (\beta z)^{i-2} = \\
&= -\frac{1}{\beta^{n+1} z^2} \sum_{i=1}^n (\delta + i)_{n-i} (\beta z)^i,
\end{aligned}$$

como pretendíamos. □

TEOREMA 6.1. *Seja $\alpha = \frac{2}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Então temos que $V_3^\epsilon < +\infty$ se e só se $n = 1$ e $\sigma^2 < 2a$, caso em que se tem $V_3^\epsilon = \sigma \frac{\rho\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{\beta}} \frac{\Gamma(\delta-1/2)}{\Gamma(\delta)}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} z^{1/\alpha} z^{j-2} \frac{\beta^\delta z^{\delta-1} e^{-\beta z}}{\Gamma(\delta)} dz = \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\beta^\delta z^{\delta+j-3+1/\alpha} e^{-\beta z}}{\Gamma(\delta)} dz.
\end{aligned}$$

Este integral converge se e só se $\delta + j - 3 + \frac{1}{\alpha} > -1$ que é equivalente a

$$\begin{aligned} & \frac{2a}{\alpha\sigma^2} + j + \frac{1}{\alpha} - 2 > 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{2a}{\sigma^2} + (j-2)\alpha + 1 > 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \sigma^2 < \frac{2a}{(2-j)\alpha - 1} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \sigma^2 < \frac{2a}{(2-j)\frac{2}{n} - 1} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \sigma^2 < \frac{2an}{(2-j)2 - n}. \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} V_3^\epsilon &= \frac{\rho\sqrt{\epsilon}}{2} \frac{\sigma}{\beta^{n+1}} \sum_{i=1}^n (\delta+i)_{n-i} \int_0^{+\infty} z^{1/\alpha} \beta^i z^{i-2} \Phi_{\Gamma(\delta,\beta)}(z) dz = \\ &= \frac{\rho\sqrt{\epsilon}}{2} \frac{\sigma}{\beta^{n+1}} \sum_{i=1}^n (\delta+i)_{n-i} \int_0^{+\infty} \frac{\beta^{\delta+i} z^{\delta+i-3+1/\alpha} e^{-\beta z}}{\Gamma(\delta)} dz \end{aligned}$$

que converge se e só se, para todo o $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ se tiver $\delta + i - 3 + \frac{1}{\alpha} > -1$, o que pelo que vimos anteriormente implica que em particular se tenha:

$$0 < \sigma^2 < \frac{2an}{(2-n)2 - n} = \frac{2an}{4 - 3n}$$

que acontece se e só se $n = 1$. Neste caso, a condição fica:

$$0 < \sigma^2 < \frac{2a}{4 - 3} = 2a$$

Agora, assumindo que $\sigma^2 < 2a$ e $n = 1$, temos $\alpha = 2$ e:

$$\begin{aligned} V_3^\epsilon &= \frac{\rho\sqrt{\epsilon}}{2} \frac{\sigma}{\beta^2} (\delta+1)_0 \int_0^{+\infty} \frac{\beta^{\delta+1} z^{\delta-2+1/\alpha} e^{-\beta z}}{\Gamma(\delta)} dz = \\ &= \frac{\rho\sqrt{\epsilon}}{2} \frac{\sigma}{\beta^2} \frac{1}{\beta^{1/\alpha-2}} \frac{\Gamma(\delta-1+1/\alpha)}{\Gamma(\delta)} \int_0^{+\infty} \frac{\beta^{\delta-1+1/\alpha} z^{\delta-1+1/\alpha-1} e^{-\beta z}}{\Gamma(\delta-1+1/\alpha)} dz = \\ &= \frac{\rho\sqrt{\epsilon}}{2} \frac{\sigma}{\beta^2} \frac{1}{\beta^{1/2-2}} \frac{\Gamma(\delta-1+1/2)}{\Gamma(\delta)} = \\ &= \sigma \frac{\rho\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{\beta}} \frac{\Gamma(\delta-1/2)}{\Gamma(\delta)}. \end{aligned}$$

□

NOTA 6.5. *Note-se que, como seria de esperar, no caso $\alpha = 2$, o fator de correção V_3^ϵ tem o sinal de ρ . Na verdade, pela positividade de σ e da função da volatilidade $f(y) = e^y$ é possível provar que V_3^ϵ tem sempre o sinal de ρ (para uma prova geral deste condição vide Proposição 4.5 de [7]).*

O último resultado mostra que a abordagem de [7] não permite desenvolver uma aproximação para valores de α que sejam da forma $2/n$ com n número natural superior a 1. No caso $\alpha = 1$, não temos por isso uma aproximação possível segundo esta metodologia. Temos porém um resultado bastante satisfatório para aproximação do preço no caso $\alpha = 2$, desde que os parâmetros a e σ satisfaçam a seguinte relação de grandeza:

$$\sigma^2 < 2a \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \delta. \quad (6.12)$$

Esta desigualdade pode ter uma leitura relativamente intuitiva, na medida em que ela limita a variância do *driver* Y_t , por um factor multiplicativo da média de longo prazo do processo da variância. Ou seja, existe uma limitação da variância do fator de volatilidade de modo a garantir a estabilidade necessária à aproximação. A aproximação do preço no modelo 2-hipergeométrico será pois, se (6.12) for verificada,

$$P_\alpha \sim P_{BS}\left(\bar{\sigma} = \frac{a}{b}\right) + (T-t)\sigma \frac{\rho\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{\beta}} \frac{\Gamma(\delta-1/2)}{\Gamma(\delta)} x \frac{\partial}{\partial x} \left[x^2 \frac{\partial^2 P_{BS}}{\partial x^2} \left(\bar{\sigma} = \frac{a}{b}\right) \right] \quad (6.13)$$

com δ e β definidos por (5.6).

Abaixo, mostramos a representação gráfica da aproximação acima para o preço de uma opção *put* no modelo 2-hipergeométrico em função do preço do activo subjacente no momento inicial:

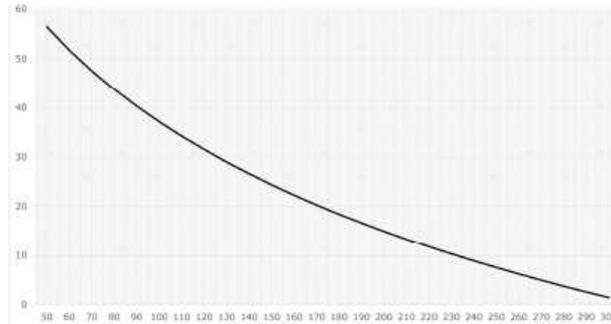


FIGURA 1. Aproximação de primeira ordem do preço de uma *put* de *strike* $K = 100$ no modelo 2-hipergeométrico com parâmetros $a = b = 1$, $\sigma = 0.5$, $\rho = -0.8$, $r = 0.0125$, $T - t = 1$ e $\epsilon = 0.1$.

Adicionalmente, mostramos um gráfico comparativo entre a aproximação do preço do modelo 2-hipergeométrico e o preço de Black-Scholes com volatilidade igual à média de longo prazo da volatilidade:

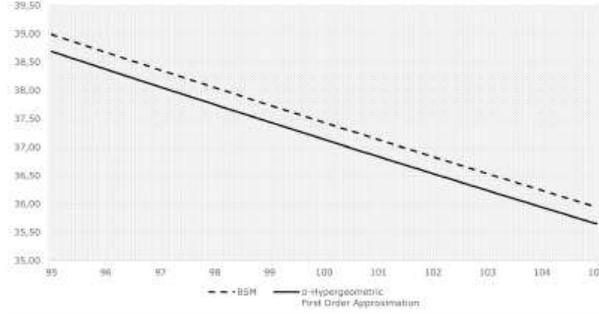


FIGURA 2. Comparação entre a aproximação de primeira ordem do preço de uma *put* de *strike* $K = 100$ no modelo 2-hipergeométrico com parâmetros $a = b = 1$, $\sigma = 0.5$, $\rho = -0.8$, $r = 0.0125$, $T - t = 1$ e $\epsilon = 0.1$ e o preço de Black-Scholes da mesma opção com volatilidade $\bar{\sigma} = \frac{a}{b}$

6.3. Aproximação da Curva de Volatilidade Implícita

O objectivo desta secção é derivar, com base nos parâmetros da nossa aproximação de primeira ordem do preço de opções europeias, uma aproximação da curva de volatilidade implícita. Uma boa aproximação será aquela que replique de forma fiel a volatilidade implícita verificada pelo modelo.

Começamos por enunciar alguns resultados facilmente verificáveis acerca da função do preço de Black-Scholes de *calls* europeias.

LEMA 6.3. *Denote-se por $C_{BS} = C_{BS}(\tau = T - t, x, K; \sigma)$ a função do preço de Black-Scholes de uma call europeia com maturidade $\tau = T - t$, strike K e em que o ativo subjacente tem preço atual x . Temos:*

$$D_1 D_2 C_{BS} = \frac{x}{\sigma \sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \left[1 - \frac{d_1}{\sigma \sqrt{\tau}} \right]$$

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma} = \frac{x \sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

onde d_1 é definido como em (2.14).

Denote-se por \tilde{C} a aproximação de primeira ordem de uma *call* europeia. Temos que, por definição, a volatilidade implícita da aproximação do preço, I , é dada por:

$$C_{BS}(\sigma = I) = \tilde{C} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C_{BS}(\sigma = I) = C_{BS}(\sigma = \bar{\sigma}) + (T - t) V_3^\epsilon D_1 D_2 \left(C_{BS}(\sigma = \bar{\sigma}) \right), \quad (6.14)$$

onde V_3^ϵ é dado como no Teorema 6.1. Vamos agora expandir I em potências de $\sqrt{\epsilon}$:

$$I - \bar{\sigma} = \sqrt{\epsilon} I_1 + \epsilon I_2 + \dots \quad (6.15)$$

A partir da expansão anterior, fazemos agora uma expansão de Taylor de $C_{BS}(I)$ em $\bar{\sigma}$:

$$C_{BS}(I) = C_{BS}(\bar{\sigma}) + \sqrt{\epsilon} I_1 \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}) + \dots \quad (6.16)$$

Substituindo (6.16) em (6.14), temos a seguinte igualdade:

$$\sqrt{\epsilon}I_1 \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}(\bar{\sigma}) = \tau V_3^\epsilon D_1 D_2 \left(C_{BS}(\bar{\sigma}) \right) \quad (6.17)$$

Agora, utilizando as expressões do Lema 6.3, e obtemos, após algumas manipulações algébricas, uma fórmula para $\sqrt{\epsilon}I_1$:

$$\sqrt{\epsilon}I_1 = \frac{V_3^\epsilon}{2\bar{\sigma}} \left[1 - \frac{2r}{\bar{\sigma}^2} \right] + \frac{V_3^\epsilon}{\bar{\sigma}^3} \frac{\log\left(\frac{K}{x}\right)}{T-t}. \quad (6.18)$$

Recuperando a equação (6.15), chegamos a uma aproximação de primeira ordem para a curva de volatilidade implícita do modelo 2-hipergeométrico:

$$\begin{aligned} I &= \bar{\sigma} + \frac{V_3^\epsilon}{2\bar{\sigma}} \left[1 - \frac{2r}{\bar{\sigma}^2} \right] + \frac{V_3^\epsilon}{\bar{\sigma}^3} \frac{\log\left(\frac{K}{x}\right)}{T-t} \\ V_3^\epsilon &= \sigma \frac{\rho\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{\beta}} \frac{\Gamma(\delta - 1/2)}{\Gamma(\delta)} \\ \bar{\sigma} &= \frac{\delta}{\beta}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

NOTA 6.6. Para ver uma derivação mais geral e mais detalhada de uma fórmula aproximativa da curva de volatilidade implícita para um modelo de volatilidade estocástica abstrato, vide Capítulo 5 de [7].

Como o coeficiente de correção de primeira ordem, V_3^ϵ , tem o mesmo sinal de ρ , se, como é de esperar, o preço do activo com risco estiver negativamente correlacionado com o *driver* de volatilidade, então a curva de volatilidade implícita será decrescente em função de K/x .

Isto é notório quando olhamos para a representação gráfica da aproximação (6.19) da curva de volatilidade implícita de modelo 2-hipergeométrico como função da *moneyness*, K/x . Na figura, é facilmente observável que o modelo 2-hipergeométrico prevê, assim como a sua aproximação de primeira ordem, o *skew* de volatilidade.

6.4. Extensões

Nesta secção procuramos estudar extensões dos resultados anteriores em dois sentidos:

- Otimizar a aproximação anterior para o preço de opções europeias, deduzindo uma fórmula para o termo de correção de segunda ordem;
- Discutir métodos aproximativos para opções americanas.

É importante realçar que, não estaremos interessados em entrar em detalhes técnicos.

6.4.1. Aproximação de Segunda Ordem para Opções Europeias

Pretendemos agora investigar o desenvolvimento do termo de correção de segunda ordem para o preço de uma opção no modelo 2-hipergeométrico. Queremos estabelecer uma aproximação da forma:

$$\tilde{P} = P_0 + \sqrt{\epsilon}P_1 + \epsilon P_2. \quad (6.20)$$

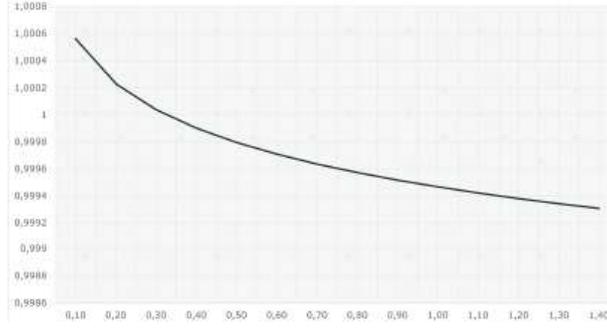


FIGURA 3. Aproximação de primeira ordem da curva de volatilidade implícita no modelo 2-hipergeométrico com parâmetros $a = b = 1$, $\sigma = 0.5$, $\rho = -0.8$, $r = 0.0125$, $T - t = 1$ e $\epsilon = 0.1$.

Os termos P_0 e P_1 foram determinados anteriormente. Em [7] (capítulo 9), é encontrada uma expressão para P_2 :

PROPOSIÇÃO 6.4. *O termo de correção de segunda ordem da expansão assintótica apresentada acima é dado por:*

$$\begin{aligned}
 P_2(t, x, y) &= -\frac{1}{2}\phi(y)D_2P_0(t, x) + C(t, x) \\
 C(t, x) &= (T - t) \left[A_2D_1^2D_2 + AD_2^2 \right] P_0(t, x) + \\
 &+ \frac{(T - t)^2}{2} \left[V_3^2D_1^2D_2^2 \right] P_0(t, x),
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

onde

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \frac{\rho^2}{2} \langle \beta f \psi' \rangle \\
 \mathcal{L}\psi &= \beta f \phi' - \langle \beta f \phi' \rangle \\
 A &= -\frac{1}{4} (\langle \phi f^2 \rangle - \langle \phi \rangle \langle f^2 \rangle) \\
 V_3 &= \frac{V_3^\epsilon}{\sqrt{\epsilon}}.
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Temos que, como caso particular de (6.11) para $\alpha = 2$,

$$\frac{d\phi}{dy} = -\frac{1}{\beta e^{2y}}. \tag{6.23}$$

Primitivando, temos que

$$\phi = \frac{1}{2\beta e^{2y}}. \tag{6.24}$$

Assim, temos que

$$P_2(t, x, y) = -\frac{1}{4\beta} e^{-2y} D_2P_0(t, x) + C(t, x),$$

pelo que resta descobrir $C(t, x)$.

NOTA 6.7. Na verdade $P_2(t, x, y)$ é aproximado corretamente (na medida em que satisfaz as equações de segunda ordem) para qualquer $C(t, x)$, contudo a escolha de $C(t, x)$ feita em [7] é utilizada para demonstrar um resultado que garante a precisão da aproximação.

Talvez o mais simples seja começar pelo cálculo de A . Temos:

$$\langle \phi f^2 \rangle = \left\langle \frac{1}{2\beta} \right\rangle = \frac{1}{2\beta}.$$

Por outro lado,

$$\langle \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\beta e^{2y}} 2e^{2y} \frac{\beta^\delta (e^{2y})^{\delta-1} e^{-\beta e^{2y}}}{\Gamma(\delta)} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta^{\delta-1} (e^{2y})^{\delta-1} e^{-\beta e^{2y}}}{\Gamma(\delta)} dy.$$

Aplicando a usual mudança de variável $z = e^{2y} = e^{2y}$, temos:

$$\begin{aligned} \langle \phi \rangle &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2z} \frac{\beta^{\delta-1} z^{\delta-1} e^{-\beta z}}{\Gamma(\delta)} dy = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\delta-1)}{\Gamma(\delta)} \int_0^{+\infty} \phi_{\Gamma(\delta-1, \beta)}(z) dz = \\ &= \frac{\Gamma(\delta-1)}{2\Gamma(\delta)} = \frac{1}{2(\delta-1)}. \end{aligned}$$

NOTA 6.8. Note-se que a dedução acima só é válida se se tiver $\delta > 1$, ou seja, se $a > \sigma^2$. Assumiremos esta condição.

Resta encontrar $\langle f^2 \rangle$. Temos

$$\langle f^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2y} \times 2e^{2y} \frac{\beta^\delta (e^{2y})^{\delta-1} e^{-\beta e^{2y}}}{\Gamma(\delta)} dy = \int_0^{+\infty} z \frac{\beta^\delta z^{\delta-1} e^{-\beta z}}{\Gamma(\delta)} dy = \frac{\delta}{\beta}.$$

Assim, obtemos:

$$A = -\frac{1}{8\beta} \left(1 - \frac{\delta}{\delta-1}\right). \quad (6.25)$$

O próximo passo será encontrar derivada de ψ . ψ resolve a equação:

$$\mathcal{L}\psi = \frac{\sigma}{\beta e^y} + \frac{2}{\rho\sqrt{\epsilon}} V_3^\epsilon$$

Aplicando a mudança de variável $z = e^{2y}$, a equação para a derivada de ψ transforma-se numa equação da forma da apresentada na proposição 6.1, com:

$$\begin{aligned} a &= -\beta \\ b &= \delta + 1 \\ c &= -\frac{\sigma}{\beta} \\ d &= -\frac{2}{\rho\sqrt{\epsilon}} V_3^\epsilon \\ l &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Assumindo como anteriormente que $\delta > 1/2$, temos $\delta + 1 - \frac{1}{2} > 1$. Ou seja, estamos nas condições da proposição 6.1, e a derivada de ψ é dada, após algumas manipulações

algébricas, em termos de $z = e^{2y}$ por:

$$\psi'(z) = -\frac{\sqrt{\beta}\sigma e^{\beta z}}{(\beta z)^{\delta+1}} \left[\Gamma(\delta - 1/2)F_{\Gamma(\delta-1/2,\beta)}(z) - \Gamma(\delta, \beta)F_{\Gamma(\delta,\beta)}(z) \right] \quad (6.26)$$

Agora, pelo lema 6.2, temos que $F_{\Gamma(x,y)}(z) = \frac{\gamma(x,yz)}{\Gamma(x)}$ donde, substituindo, se obtém:

$$\psi'(z) = -\frac{\sqrt{\beta}\sigma e^{\beta z}}{(\beta z)^{\delta+1}} \left[\gamma(\delta - 1/2, \beta z) - \gamma(\delta, \beta z) \right] \quad (6.27)$$

Repondo a variável y fica:

$$\psi'(y) = -\frac{\sqrt{\beta}\sigma e^{\beta e^{2y}}}{(\beta e^{2y})^{\delta+1}} \left[\gamma(\delta - 1/2, \beta e^{2y}) - \gamma(\delta, \beta e^{2y}) \right] \quad (6.28)$$

Estamos agora em condições de calcular A_2 :

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{\rho^2}{2} \langle \sigma e^y \psi'(y) \rangle = \\ &= \frac{\rho^2 \sigma}{2} \int_0^{+\infty} z^{\frac{1}{2}} \psi'(z) \frac{\beta^\delta z^{\delta-1} e^{-\beta z}}{\Gamma(\delta)} dz = \\ &= \frac{(\rho\sigma)^2}{2\sqrt{\beta}} \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{z^2} \left[\gamma(\delta - 1/2, \beta z) - \gamma(\delta, \beta z) \right] dz. \end{aligned}$$

Se o integral acima existir conseguimos aproximar a solução do seguinte modo:

TEOREMA 6.2. *A aproximação de segunda ordem do preço de uma opção europeia é dada por:*

$$\begin{aligned} P_\alpha &\sim P_{BS}(\bar{\sigma} = \frac{a}{b}) + \\ &+ (T-t)\sigma \frac{\rho\sqrt{\epsilon}}{2\sqrt{\beta}} \frac{\Gamma(\delta - 1/2)}{\Gamma(\delta)} D_1 D_2 P_{BS}(\bar{\sigma} = \frac{a}{b}) - \\ &- \frac{\epsilon}{4\beta} e^{-2y} D_2 P_{BS}(\bar{\sigma} = \frac{a}{b}) + \\ &+ (T-t)\epsilon \left[\frac{(\rho\sigma)^2}{2\sqrt{\beta}} \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{z^2} \Delta(z) dz D_1^2 D_2 P_{BS}(\bar{\sigma} = \frac{a}{b}) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{8\beta} \left(1 - \frac{\delta}{\delta-1}\right) D_2 P_{BS}(\bar{\sigma} = \frac{a}{b}) \right] + \\ &+ \epsilon \frac{(T-t)^2}{2} \left(\frac{\sigma\rho}{2\sqrt{\beta}} \frac{\Gamma(\delta - 1/2)}{\Gamma(\delta)} \right)^2 D_1^2 D_2^2 P_{BS}(\bar{\sigma} = \frac{a}{b}), \end{aligned} \quad (6.29)$$

onde se define

$$\Delta(z) = \gamma(\delta - 1/2, \beta z) - \gamma(\delta, \beta z), \quad (6.30)$$

e se assume que o integral $\int_0^{+\infty} \frac{1}{z^2} \Delta(z) dz < +\infty$.

NOTA 6.9. *Para uma fórmula de segunda ordem aproximativa da curva de volatilidade implícita remetemos para [7], onde os cálculos feitos acima podem ser replicados.*

6.4.2. Métodos Aproximativos para Opções Americanas no Âmbito do Modelo α -Hipergeométrico

Nesta subsecção pretendemos discutir a possibilidade de extensão do âmbito das aproximações apresentadas anteriormente para abranger a avaliação de opções americanas.

Em [3], é apresentado um método aproximativo para opções americanas para um modelo de volatilidade estocástica abstrato, cujo processo de volatilidade estocástica é um processo de Ornstein-Uhlenbeck da forma:

$$dY_t = (m_1 - Y_t) dt + \nu_1 \sqrt{2} dW_t. \quad (6.31)$$

O método tem dois passos:

1. A aleatorização da maturidade (ou canadização) da opção americana;
2. Aproximação do preço da opção americana de maturidade aleatória (opção canadiana) via um parâmetro perturbativo de aceleração do processo (6.31).

Iremos agora explicar com um pouco mais de detalhe em que consistem estes dois passos e discutir sucintamente a possibilidade de generalização deste método ao modelo α -hipergeométrico.

6.4.2.1. *Processo de Canadização da Put Americana.* A primeira proposta do método de aleatorização (ou canadização) foi apresentada por Peter Carr no seu artigo de 1996, [9]. O propósito deste artigo foi a aproximação do preço de opções put americanas de maturidade finita no modelo de Black-Scholes, para os quais não existe uma fórmula fechada. No artigo [3] de 2014 este método foi utilizado para a aproximação destes derivados num contexto particular de volatilidade estocástica.

Prova-se que o preço de uma *put* americana no modelo Black-Scholes pode ser obtido através da resolução de um problema de fronteira livre. Ou seja, existe uma função crescente $x^*(t)$ (a fronteira livre) tal que:

$$\begin{aligned} P(t, x) &= K - x \text{ se } x < x^*(t), \\ \mathcal{L}_{BS}P &= 0 \text{ se } x > x^*(t), \\ P(T, x) &= (K - x)^+, \\ x^*(T) &= K. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Mais, P e $\frac{\partial P}{\partial x}$ são contínuas na fronteira $x^*(t)$, donde

$$\begin{aligned} P(t, x^*(t)) &= K - x^*(t), \\ \frac{\partial P}{\partial x}(t, x^*(t)) &= -1. \end{aligned} \quad (6.33)$$

O desconhecimento de uma fronteira de exercício $x^*(t)$ impossibilita a dedução de uma fórmula fechada para a avaliação destes derivados.

Curiosamente, o mesmo não acontece para a avaliação de opções americanas perpétuas (com maturidade infinita), para as quais se conhece uma fórmula fechada no modelo de Black-Scholes. Isto foi possível porque, num horizonte temporal infinito, é possível deduzir

a forma da fronteira de exercício. O mesmo acontece quando aleatorizamos a maturidade (finita) da opção. Passaremos a explicar o método.

Começamos por definir como opção canadiana de *payoff* $h(x)$, uma opção que permite o exercício antecipado até à maturidade, que por sua vez é dada pelos valores de uma determinada distribuição de probabilidade que se assume ser independente do processo do preço do activo subjacente. Ou seja, um agente que possua uma opção *put* canadiana, detém o direito de vender o activo subjacente por um preço fixo até à maturidade aleatória da opção.

Em [9] são apresentadas duas formas de aleatorização: de maturidade exponencial e de maturidade de distribuição gama. Focar-nos-emos na maturidade exponencial. Denote-se por τ o valor da maturidade aleatória. Nesta abordagem começamos por assumir que a maturidade da opção canadiana em análise possui distribuição exponencial com parâmetro λ :

$$P[\tau \in dt] = \lambda e^{-\lambda t} dt. \quad (6.34)$$

Como a média da distribuição exponencial de parâmetro λ é $\frac{1}{\lambda}$, nós pomos $\lambda = \frac{1}{T}$. Assim, a média da maturidade da opção canadiana é T (que é o valor exacto da correspondente opção americana).

NOTA 6.10. *Aqui não podemos esquecer que o objectivo é a aproximação do preço da opção americana de maturidade T , sendo a opção canadiana definida como acima uma abstracção inteligente que facilita o processo.*

NOTA 6.11. *Dizer que τ possui distribuição exponencial é o mesmo que dizer que a maturidade é modelada como o primeiro salto de um processo de saltos de Poisson.*

A propriedade de falta de memória da distribuição exponencial implica que a passagem do tempo não afeta o valor da opção nem da sua fronteira de exercício. Então, a fronteira de exercício para a opção canadiana é uma função constante ao longo do tempo. Assim, o preço de uma opção *put* canadiana é dado por:

$$P_C(S) = \sup_{B>0} \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} D(0, S; t; B) dt, \quad (6.35)$$

onde $D(0, S; t; B)$ é o valor inicial de uma *put* europeia *down-and-out* com maturidade fixa T , barreira B e rebate $K - B$.

Assim, o preço da opção canadiana é simplesmente o supremo sobre B da transformada de Laplace-Carson de D . Por isso, no modelo de Black-Scholes o preço satisfaz, quando x se encontra acima da fronteira ótica de exercício, \bar{B} , a seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 P_C}{\partial x^2} + rx \frac{\partial P_C}{\partial x} - rP_C = \lambda [P_C - (K - x)^+], \quad (6.36)$$

e está sujeito às seguintes condições de fronteira:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} P_C(x) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow \bar{B}} P_C(x) &= K - \bar{B}, \\ \lim_{x \rightarrow \bar{B}} \frac{\partial P_C}{\partial x}(x) &= -1.\end{aligned}\tag{6.37}$$

Este problema é resolúvel e Carr determina a sua solução em [9]. Assim, como esta solução define o preço da opção canadiana que, pela forma como está definida com respeito à maturidade da correspondente opção americana, serve de aproximação ao preço desta última.

NOTA 6.12. *Como a variância de uma distribuição exponencial de parâmetro de escala λ é dada por $\frac{1}{\lambda^2}$, conclui-se que a variância da maturidade da opção canadiana definida acima (com média T) é T^2 . É claro que quanto menor for esta variância, melhor é a aproximação da opção americana pela canadiana. Assim, esta aproximação é tanto melhor quanto menor for a maturidade da opção. A abordagem de aleatorização pela distribuição gama permite resolver este problema com a contrapartida de requerer maior exigência computacional (hipótese que será brevemente abordada nas conclusões).*

Esta abordagem é replicada com sucesso em [3], sendo o preço de uma opção canadiana num modelo de volatilidade estocástica com volatilidade dada por um processo de Ornstein-Uhlenbeck (equação (6.31)) a solução do seguinte problema:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}P_C(x, y) + \lambda(K - x)^+ &= 0, \text{ para } x > B(y) \\ P_C(B(y), y) &= K - B(y), \\ \frac{\partial P_C}{\partial x}(B(y), y) &= -1, \\ \frac{\partial P_C}{\partial y}(B(y), y) &= 0,\end{aligned}\tag{6.38}$$

onde $B(y)$ a fronteira de exercício optimal, f é a função de volatilidade do processo do preço do activo subjacente e o operador $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, onde definimos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= \nu_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (m_1 - y) \frac{\partial}{\partial y}, \\ \mathcal{L}_1 &= \sqrt{2} \rho_1 \nu_1 x f(y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \\ \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{2} f^2(y) x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r x \frac{\partial}{\partial x} - (r + \lambda).\end{aligned}\tag{6.39}$$

Na região de exercício (abaixo da fronteira) o preço é, como é de esperar,

$$P_C(x, y) = K - x, \text{ para } x < B(y).\tag{6.40}$$

NOTA 6.13. *Note-se que, neste contexto de volatilidade estocástica, a fronteira de exercício, apesar de se manter constante em função do tempo e do preço do activo subjacente, varia com o valor do driver de volatilidade.*

Previsivelmente, o problema acima enunciado, ao contrário do que acontecia no modelo clássico, não é resolúvel. Por isso, o próximo passo é utilizar a teoria de perturbação para aproximar a sua solução (que por sua vez é ela mesma uma aproximação do preço da *put* americana).

6.4.2.2. *Perturbação do Processo de Volatilidade para Aproximação do Preço de Opções Canadianas.* Começa-se por introduzir um fator perturbativo rápido no processo de volatilidade, que fica da forma:

$$dY_t = \frac{1}{\epsilon}(m_1 - Y_t) dt + \nu_1 \frac{\sqrt{2}}{\epsilon} dW_t. \quad (6.41)$$

Isto altera a formulação do problema (6.38), substituindo \mathcal{L} por:

$$\mathcal{L}^\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\mathcal{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2. \quad (6.42)$$

Agora, à semelhança do que se fez para opções europeias, expandimos o preço em potências de $\sqrt{\epsilon}$:

$$P_C^\epsilon(x, y) = P_0(x, y) + \sqrt{\epsilon}P_1(x, y) + \epsilon P_2(x, y) + \dots \quad (6.43)$$

Analogamente, neste caso devemos expandir também a fronteira de exercício em potências de $\sqrt{\epsilon}$:

$$B(y) = x_0(y) + \sqrt{\epsilon}x_1(y) + \epsilon x_2(y) + \dots \quad (6.44)$$

Introduzindo a expansão (6.43) no problema definido anteriormente, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon}\mathcal{L}_0 P_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}(\mathcal{L}_0 P_1 + \mathcal{L}_1 P_0) + (\mathcal{L}_0 P_2 + \mathcal{L}_1 P_1 + \mathcal{L}_2 P_0 + \lambda(K - x)^+) \\ + \sqrt{\epsilon}(\mathcal{L}_0 P_3 + \mathcal{L}_1 P_2 + \mathcal{L}_2 P_1) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Como se pode observar, esta equação tem um certo paralelismo com a equação (4.23). Adicionalmente, de modo a que as condições de fronteira sejam asseguradas por esta abordagem, estas devem ser expandidas em séries de Taylor:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0}{\partial x}|_{x_0(y)} + \sqrt{\epsilon}\left(x_1(y)\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}|_{x_0(y)} + \frac{\partial P_1}{\partial x}|_{x_0(y)}\right) + \dots = -1, \\ \frac{\partial P_0}{\partial y}|_{x_0(y)} + \sqrt{\epsilon}\left(x_1(y)\frac{\partial^2 P_0}{\partial y \partial x}|_{x_0(y)} + \frac{\partial P_1}{\partial y}|_{x_0(y)}\right) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Por fim, a equação da região de exercício também deve ser expandida numa expansão de Taylor em torno de $x_0(y)$:

$$P_0(x_0(y), y) + \sqrt{\epsilon}\left(x_1(y)\frac{\partial P_0}{\partial x}|_{x_0(y)} + P_1(x_0(y), y)\right) + \dots = K - x_0(y) - \sqrt{\epsilon}x_1(y) + \dots \quad (6.47)$$

O aumento significativo do número de expansões deve-se à necessidade de controlar um problema que é definido nas três regiões adjacentes:

- A região de espera (*hold region*);
- A fronteira de exercício optimal (*optimal exercise boundary*);
- A região de exercício (*exercise region*).

Os detalhes da construção da expansão de segunda ordem do preço da opção canadiana para o modelo associado ao processo de Ornstein-Uhlenbeck são morosos e podem ser encontrados no artigo [3]. O que esta exposição pretende mostrar é a possível replicação do processo de aleatorização para o modelo α -hipergeométrico.

Seguindo a formulação desta abordagem no artigo original, [3], apenas uma particularidade do modelo α -hipergeométrico parecia impossibilitar a replicação da mesma: o desconhecimento de uma distribuição invariante do processo de volatilidade do modelo α -hipergeométrico, que desempenha um papel importante no seu desenvolvimento (à semelhança do que acontece para opções europeias). Essa falta é suprimida nesta dissertação, o que nos põe em condições de supor que as formulas do supracitado artigo sejam válidas para este modelo.

NOTA 6.14. *Note-se que o problema de precisão da abordagem de aleatorização da maturidade por uma distribuição exponencial referido na nota 6.12, mantém-se nos modelos de volatilidade estocástica, fragilidade reconhecida em [3]. A extensão desta método para a já referida abordagem apresentada por Carr em [9] (aleatorização via distribuição gama), no contexto de volatilidade estocástica poderá ser um bom ponto de partida para investigações futuras.*

CAPÍTULO 7

Conclusões

Nesta dissertação, estudámos a aplicação de métodos assintóticos para o preço de opções europeias e americanas no modelo α -hipergeométrico.

Com este propósito, começámos por estudar o processo *driver* de volatilidade nesse modelo, encontrando uma distribuição invariante para o mesmo e provando a sua unicidade dentro do conjunto das distribuições que admitem uma função densidade suave.

De seguida, divergindo um pouco do objectivo principal do projecto, procurámos iniciar o estudo espectral do gerador infinitesimal do processo *driver* de volatilidade do modelo. Encontrámos uma fórmula geral para as funções próprias deste operador e demonstrámos alguns resultados adjacentes e algumas desigualdades sobre o seu espectro real.

Baseando-nos na teoria de perturbação desenvolvida em [7], descobrimos fórmulas assintóticas de primeira e segunda ordens para aproximar o preço de opções europeias.

Adicionalmente, estudámos o método de aleatorização da maturidade de opções americanas que, juntamente com os métodos de expansão assintótica, permitiram o desenvolvimento de fórmulas de aproximação de primeira e segunda ordem para modelos cujo processo do driver de volatilidade é um processo de Ornstein-Uhlenbeck em [3]. Avaliámos em que medida a descoberta da distribuição invariante do driver de volatilidade do modelo α -hipergeométrico apresentada nesta dissertação possibilita a replicação das fórmulas de [3] para esse modelo.

Como é habitual na prática científica, os novos desenvolvimentos motivam novas questões e uma vontade renovada de descobrir. Por isso, passamos a enumerar alguns pontos que, achamos, poderiam motivar desenvolvimentos positivos em temas adjacentes aos abordados nesta dissertação:

- Continuar o estudo espectral do gerador infinitesimal do *driver* de volatilidade do modelo α -hipergeométrico;
- Desenvolver aproximações em regimes lentos de volatilidade para o modelo α -hipergeométrico;
- Avaliar em que medida o modelo α -hipergeométrico se enquadra no âmbito dos resultados abstratos sobre a precisão das aproximações de primeira e segunda ordens apresentados em [7];
- Confirmar a possível replicação da metodologia e dos resultados de [3] para o modelo α -hipergeométrico;

- Estender os resultados de [3] através da utilização da aleatorização da maturidade com uma distribuição gama (o que permite melhores resultados mas de menor eficiência computacional);
- Desenvolver demonstração formal da precisão dos métodos de aleatorização de maturidade e da subsequente utilização dos métodos assintóticos para aproximação do preço de opções americanas;
- Calibrar o modelo α -hipergeométrico com o intuito de avaliar a adequabilidade do mesmo para a avaliação de opções europeias e americanas confrontando-o também com os modelos de Black-Scholes e de Heston (testar precisão e eficiência via fórmulas assintóticas).

Referências Bibliográficas

- [1] A. Lipton. *Mathematical Methods for Foreign Exchange, First Edition*, World Scientific Publishing Co., Singapore., 2001.
- [2] Andrei D. Polyanin, Valentin F. Zaitsev. *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, Second Edition* , Chapman & Hall/CRC, 2003.
- [3] Ankush Agerwal, Sandeep Juneja, Ronnie Sircar. "American Options under Stochastic Volatility: Control Variates, Maturity Randomization & Multiscale Asymptotics". Em: *Quantitative Finance, volume 16, issue 1, p. 17 - 30*, 2016.
- [4] Claude Martini, José Da Fonseca. "The α -Hypergeometric Stochastic Volatility Model". Em: *Preprint arXiv:1409.5142*, 2014.
- [5] F. Black, M. Scholes. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". Em: *Journal of Political Economy, 81, Pages 637-654*, 1973.
- [6] J. Hull. *Options, Futures and Other Derivatives, fifth ed.* , Prentice-Hall, 2002.
- [7] Jean-Pierre Fouque, George Papanicolaou, Ronnie Sircar, Knut Solna. *Multiscale Stochastic Volatility for Equity, Interest Rate and Credit Derivatives*, Cambridge University Press, 2011.
- [8] Nicolas Privault, Qihao She. "Option pricing and implied volatilities in a 2-hypergeometric stochastic volatility model" Em: *Applied Mathematics Letters Volume 53, March 2016, Pages 77-84*, 2016.
- [9] Peter Carr. "Randomization and the American Put". Em: *The Review of Financial Studies, volume 11, issue 3, p. 597 - 626*, 1996.
- [10] S. Heston. "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options". Em: *Review of Financial Studies 6*, 1993.
- [11] W. Feller. "Two Singular Diffusion Problems". Em: *Annals of Mathematics 54, Pages 173-182*, 1951.