

ANEXOS

Sincronização de sistemas dinâmicos caóticos
por ligação unidireccional e bidireccional

Agosto de 2008

Anexo 1. Medida natural

Seja $S = (X, \mathbb{Z}, \mathbf{f})$ um sistema dinâmico definido num sub-espço vectorial compacto $X \subset \mathbb{R}^m$ por $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ onde $\mathbf{f}$ é um difeomorfismo não-linear de classe C^r , $r \geq 1$.

Sob a hipótese de hiperbolicidade da transformação $\mathbf{f}$, seja C uma pequena célula delimitada por segmentos das variedades invariantes estável e instável. Após n iterações de $\mathbf{f}$, muitas das condições iniciais evoluem para valores fora de C e uma pequena parte volta a C . Dada uma condição inicial $\mathbf{x}_0$ na bacia de atracção $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ do atractor caótico $\mathcal{A}$, seja $\eta(C; \mathbf{x}_0, N)$ a fracção de tempo que a órbita de $\mathbf{x}_0$ gasta em C para $n = 0, 1, \dots, N$. Assuma a existência do limite

$$\eta(C; \mathbf{x}_0) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \eta(C; \mathbf{x}_0, N).$$

Se $\eta(C; \mathbf{x}_0)$ toma o mesmo valor para quase todas as condições $\mathbf{x}_0$ na bacia de atracção $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, relativamente à medida de Lebesgue, então o valor comum, denotado por $\eta(C)$, é a medida natural de C . A medida natural $\eta(C)$ mede a fracção de tempo em que a órbita em $\mathcal{A}$ permanece em C quando o sistema evolui. A medida natural de um conjunto $B \subset X$ para uma transformação $\mathbf{f}$ define-se como

$$\eta(B) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum \frac{1}{|\det(1 - \mathbf{D}\mathbf{f}^n(\mathbf{x}))|},$$

onde a soma é tomada sobre todos os pontos fixos $\mathbf{x}$ de $\mathbf{f}^n$, e mede a probabilidade de um ponto permanecer no conjunto B sob iteração.

Dado que os pontos periódicos de $\mathbf{f}$ são os pontos fixos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ para alguma iteração $\mathbf{f}^n$, a medida natural de C com suporte no atractor caótico $\mathcal{A}$ pode ser definida em termos das órbitas periódicas instáveis nele mergulhadas. Para sistemas fortemente instáveis, pode ser apenas considerada a contribuição das direcções instáveis (expansoras). Denotando por $\Lambda_u(\mathbf{x})$ o maior valor próprio de $\mathbf{D}\mathbf{f}^n(\mathbf{x})$ correspondente a uma direcção expansora, tem-se

$$\eta(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum \frac{1}{|\Lambda_u(\mathbf{x}_j)|},$$

onde a soma é tomada sobre todos os pontos fixos $\mathbf{x}_j$ de $\mathbf{f}^n$ em C . Para sistemas dinâmicos hiperbólicos, as medidas SRB parecem ser a escolha natural. São construídas na estrutura geométrica das variedades estável e instável do sistema dinâmico.

Anexo 2a: estudo de caso com o atrator de Lorenz

Caso L7. Considere dois sistemas de Lorenz idênticos para valores paramétricos σ , α e β que conduzam a comportamento caótico. Liguem-se os dois sistemas através da variável condutora x_1 por adição do sinal de controle $\rho(x_1 - x_2)$ aplicado como *feedback* negativo deslocado à segunda equação do sistema resposta. Inicie-se o sistema ligado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = \alpha x_1 - x_1 z_1 - y_1 \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - \beta z_1 \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = \sigma(y_2 - x_2) \\ \dot{y}_2 = \alpha x_2 - x_2 z_2 - y_2 + \rho(x_1 - x_2) \\ \dot{z}_2 = x_2 y_2 - \beta z_2 \end{cases}$$

a partir de condições iniciais $x_1(0) \neq x_2(0)$, $y_1(0) \neq y_2(0)$ e $z_1(0) \neq z_2(0)$.

Considere as componentes $e_x = x_2 - x_1$, $e_y = y_2 - y_1$ e $e_z = z_2 - z_1$ do erro de sincronização $\mathbf{e}$. Seja a função

$$\check{\mathbf{f}} = (\sigma(y_2 - x_2), \alpha x_2 - x_2 z_2 - y_2 + \rho(x_1 - x_2), x_2 y_2 - \beta z_2)$$

obtida do sistema resposta. Para qualquer valor de ρ , a equação linearizada que define a dinâmica de perturbações transversais à variedade de sincronização $\mathcal{M}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} \approx D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \alpha - z_2 - \rho & -1 & -x_2 \\ y_2 & x_2 & -\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}.$$

Considere a função de Lyapunov $L(\mathbf{e}) = (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2)/2$ em que $L(\mathbf{e}) > 0$ se $\mathbf{e} \neq (0, 0, 0)$ e $L(\mathbf{0}) = 0$ para todo o ρ . Determine-se a força de ligação ρ tal que a derivada de L satisfaça $\dot{L}(\mathbf{e}) < 0$ se $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ e $\dot{L}(\mathbf{0}) = 0$. Substituindo as expressões de $\dot{e}_x$, $\dot{e}_y$ e $\dot{e}_z$ em

$$\dot{L}(\mathbf{e}) = e_x \dot{e}_x + e_y \dot{e}_y + e_z \dot{e}_z$$

e simplificando, a derivada de L pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{L}(\mathbf{e}) &= -\sigma e_x^2 - e_y^2 - \beta e_z^2 + (\sigma + \alpha - z_2 - \rho) e_x e_y + y_2 e_x e_z \\ &\leq -\sigma e_x^2 - e_y^2 - \beta e_z^2 + (\sigma + \alpha - \rho) |e_x e_y| - z_2 |e_x e_y| + y_2 |e_x e_z|. \end{aligned}$$

Supondo que as funções de variável real y_2 e z_2 são limitadas, sejam K_y e K_z constantes positivas tais que $|y_2| \leq K_y$ e $|z_2| \leq K_z$. Como tal verifica-se a desigualdade

$$\dot{L}(\mathbf{e}) \leq -\sigma e_x^2 - e_y^2 - \beta e_z^2 + (\sigma + \alpha - \rho) |e_x e_y| - K_z |e_x e_y| + K_y |e_x e_z|.$$

Para que o sistema transversal seja assintoticamente estável na origem, a matriz simétrica constante

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sigma & \frac{1}{2}(\rho - \sigma - \alpha + K_z) & -\frac{1}{2}K_y \\ \frac{1}{2}(\rho - \sigma - \alpha + K_z) & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}K_y & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

associada à forma quadrática $-\|\mathbf{e}\|^T \cdot \mathbf{P} \cdot \|\mathbf{e}\|$, em $\|\mathbf{e}\| = (|e_x|, |e_y|, |e_z|)$, deve ser definida positiva. Os determinantes Δ_i , $i = 1, 2, 3$, das submatrizes principais de $\mathbf{P}$ são todos positivos se

$$\beta(\rho - \sigma - \alpha + K_z)^2 < 4\sigma\beta - K_y^2.$$

Pelo método directo de Lyapunov, o erro de sincronização tende para 0 quando $t \rightarrow +\infty$ para a força de ligação ρ e as constantes positivas K_y e K_z que verifiquem a desigualdade anterior, e fica garantida a sincronização globalmente estável dos sistemas.

Caso L8. Considere como transporte e resposta dois sistemas de Lorenz idênticos para valores paramétricos σ , α e β que conduzam a comportamento caótico. Liguem-se os dois sistemas através da variável condutora x_1 mas por adição do sinal de controle $\rho(x_1 - x_2)$ aplicado como *feedback* negativo deslocado à segunda equação do sistema resposta. Além disso é introduzida a substituição parcial em que a variável x_1 dá lugar à sua correspondente x_2 apenas no termo não-linear da terceira equação da resposta. Inicie-se o sistema ligado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = \alpha x_1 - x_1 z_1 - y_1 \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - \beta z_1 \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = \sigma(y_2 - x_2) \\ \dot{y}_2 = \alpha x_2 - x_2 z_2 - y_2 + \rho(x_1 - x_2) \\ \dot{z}_2 = x_2 y_2 - \beta z_2 \end{cases}$$

a partir de condições iniciais $x_1(0) \neq x_2(0)$, $y_1(0) \neq y_2(0)$ e $z_1(0) \neq z_2(0)$.

Considere as componentes $e_x = x_2 - x_1$, $e_y = y_2 - y_1$ e $e_z = z_2 - z_1$ do erro de sincronização $\mathbf{e}$. Seja a função

$$\check{\mathbf{f}} = (\sigma(y_2 - x_2), \alpha x_2 - x_2 z_2 - y_2 + \rho(x_1 - x_2), x_1 y_2 - \beta z_2)$$

obtida do sistema resposta. Para qualquer valor de ρ , a equação linearizada que define a dinâmica de perturbações transversais à variedade de sincronização $\mathcal{M}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} \approx D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \alpha - z_2 - \rho & -1 & -x_2 \\ 0 & x_1 & -\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}.$$

Considere a função de Lyapunov $L(\mathbf{e}) = (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2)/2$ em que $L(\mathbf{e}) > 0$ se $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ e $L(\mathbf{0}) = 0$ para todo o ρ . Determine-se a força de ligação ρ tal que a derivada de L satisfaça $\dot{L}(\mathbf{e}) < 0$ se $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ e $\dot{L}(\mathbf{0}) = 0$. Substituindo as expressões de $\dot{e}_x$, $\dot{e}_y$ e $\dot{e}_z$ em

$$\dot{L}(\mathbf{e}) = e_x \dot{e}_x + e_y \dot{e}_y + e_z \dot{e}_z$$

e simplificando, a derivada de L pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{L}(\mathbf{e}) &= -\sigma e_x^2 - e_y^2 - \beta e_z^2 + (\sigma + \alpha - z_2 - \rho) e_x e_y - x_2 e_y e_z + x_1 e_y e_z \\ &\leq -\sigma e_x^2 - e_y^2 - \beta e_z^2 + (\sigma + \alpha - \rho) |e_x e_y| - z_2 |e_x e_y| - x_2 |e_y e_z| + x_1 |e_y e_z|. \end{aligned}$$

Supondo que as funções de variável real x_1 , x_2 e z_2 são limitadas, sejam K_x , K'_x e K_z constantes positivas tais que $|x_1| \leq K_x$, $|x_2| \leq K'_x$ e $|z_2| \leq K_z$. Como tal verifica-se a desigualdade

$$\dot{L}(\mathbf{e}) \leq -\sigma e_x^2 - e_y^2 - \beta e_z^2 + (\sigma + \alpha - \rho) |e_x e_y| - K_z |e_x e_y| - K'_x |e_y e_z| + K_x |e_y e_z|.$$

Para que o sistema transversal seja assintoticamente estável na origem, a matriz simétrica constante

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sigma & \frac{1}{2}(\rho - \sigma - \alpha + K_z) & 0 \\ \frac{1}{2}(\rho - \sigma - \alpha + K_z) & 1 & \frac{1}{2}(K'_x - K_x) \\ 0 & \frac{1}{2}(K'_x - K_x) & \beta \end{bmatrix}$$

associada à forma quadrática $-\|\mathbf{e}\|^T \cdot \mathbf{P} \cdot \|\mathbf{e}\|$, em $\|\mathbf{e}\| = (|e_x|, |e_y|, |e_z|)$, deve ser definida positiva. Os determinantes Δ_i , $i = 1, 2, 3$, das submatrizes principais de $\mathbf{P}$ são todos positivos se

$$\beta(\rho - \sigma - \alpha + K_z)^2 < 4\sigma\beta - \sigma(K'_x - K_x)^2.$$

Pelo método directo de Lyapunov, o erro de sincronização tende para 0 quando $t \rightarrow +\infty$ para a força de ligação ρ e as constantes positivas K_x , K'_x e K_z que verifiquem a desigualdade anterior, e fica garantida a sincronização globalmente estável dos sistemas.

Caso L9. Considere dois sistemas de Lorenz idênticos para valores paramétricos σ , α e β que conduzam a comportamento caótico. Liguem-se os dois sistemas através da

variável condutora x_1 mas por adição do sinal de controle $\rho(x_1 - x_2)$ aplicado como *feed-back* negativo deslocado à segunda equação do sistema resposta. Além disso é introduzida a substituição parcial em que a variável x_1 dá lugar à sua correspondente x_2 apenas no termo não-linear da segunda equação da resposta. Inicie-se o sistema ligado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = \alpha x_1 - x_1 z_1 - y_1 \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - \beta z_1 \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = \sigma(y_2 - x_2) \\ \dot{y}_2 = \alpha x_2 - x_1 z_2 - y_2 + \rho(x_1 - x_2) \\ \dot{z}_2 = x_2 y_2 - \beta z_2 \end{cases}$$

a partir de condições iniciais $x_1(0) \neq x_2(0)$, $y_1(0) \neq y_2(0)$ e $z_1(0) \neq z_2(0)$.

Considere as componentes $e_x = x_2 - x_1$, $e_y = y_2 - y_1$ e $e_z = z_2 - z_1$ do erro de sincronização $\mathbf{e}$. Seja a função

$$\check{\mathbf{f}} = (\sigma(y_2 - x_2), \alpha x_2 - x_1 z_2 - y_2 + \rho(x_1 - x_2), x_2 y_2 - \beta z_2)$$

obtida do sistema resposta. Para qualquer valor de ρ , a equação linearizada que define a dinâmica de perturbações transversais à variedade de sincronização $\mathcal{M}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} \approx D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \alpha - \rho & -1 & -x_1 \\ y_2 & x_2 & -\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}.$$

Considere a função de Lyapunov $L(\mathbf{e}) = (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2)/2$ em que $L(\mathbf{e}) > 0$ se $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ e $L(\mathbf{0}) = 0$ para todo o ρ . Determine-se a força de ligação ρ tal que a derivada de L satisfaça $\dot{L}(\mathbf{e}) < 0$ se $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ e $\dot{L}(\mathbf{0}) = 0$. Substituindo as expressões de $\dot{e}_x$, $\dot{e}_y$ e $\dot{e}_z$ em

$$\dot{L}(\mathbf{e}) = e_x \dot{e}_x + e_y \dot{e}_y + e_z \dot{e}_z$$

e simplificando, a derivada de L pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{L}(\mathbf{e}) &= -\sigma e_x^2 - e_y^2 - \beta e_z^2 + (\sigma + \alpha - \rho) e_x e_y - x_1 e_y e_z + y_2 e_x e_z + x_2 e_y e_z \\ &\leq -\sigma e_x^2 - e_y^2 - \beta e_z^2 + (\sigma + \alpha - \rho) |e_x e_y| - x_1 |e_y e_z| \\ &\quad + y_2 |e_x e_z| + x_2 |e_y e_z|. \end{aligned}$$

Supondo que as funções de variável real x_1 , x_2 e y_2 são limitadas, sejam K_x , K'_x e K_y constantes positivas tais que $|x_1| \leq K_x$, $|x_2| \leq K'_x$ e $|y_2| \leq K_y$. Como tal verifica-se a desigualdade

$$\dot{L}(\mathbf{e}) \leq -\sigma e_x^2 - e_y^2 - \beta e_z^2 + (\sigma + \alpha - \rho) |e_x e_y| - K_x |e_y e_z| + K_y |e_x e_z| + K'_x |e_y e_z|.$$

Para que o sistema transversal seja assintoticamente estável na origem, a matriz simétrica constante

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sigma & \frac{1}{2}(\rho - \sigma - \alpha) & -\frac{1}{2}K_y \\ \frac{1}{2}(\rho - \sigma - \alpha) & 1 & \frac{1}{2}(K_x - K'_x) \\ -\frac{1}{2}K_y & \frac{1}{2}(K_x - K'_x) & \beta \end{bmatrix}$$

associada à forma quadrática $-\|\mathbf{e}\|^T \cdot \mathbf{P} \cdot \|\mathbf{e}\|$, em $\|\mathbf{e}\| = (|e_x|, |e_y|, |e_z|)$, deve ser definida positiva. Os determinantes Δ_i , $i = 1, 2, 3$, das submatrizes principais de $\mathbf{P}$ são positivos se

$$(\rho - \sigma - \alpha)^2 < 4\sigma$$

e

$$\beta(\rho - \sigma - \alpha)^2 < 4\sigma\beta - (K_x - K'_x)K_y(\rho - \sigma - \alpha) + K_y^2 + \sigma(K_x - K'_x)^2.$$

Pelo método directo de Lyapunov, o erro de sincronização tende para 0 quando $t \rightarrow +\infty$ para os parâmetros de controle σ , α e β , a força de ligação ρ e as constantes positivas K_x , K'_x e K_y que verifiquem a desigualdade anterior, e fica garantida a sincronização globalmente estável dos sistemas.

Caso L10. Considere no sistema caótico de Lorenz a decomposição

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sigma x_1 + s(t) \\ \dot{y}_1 = \alpha x_1 - x_1 z_1 - y_1 \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - \beta z_1 \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = -\sigma x_2 + s(t) \\ \dot{y}_2 = \alpha x_2 - x_2 z_2 - y_2 \\ \dot{z}_2 = x_2 y_2 - \beta z_2 \end{cases}$$

com uso do sinal condutor $s = h(x_1, y_1, z_1) = \sigma y_1$.

Para

$$\check{\mathbf{f}} = (f_1, f_2, f_3) = (-\sigma x_2 + s(t), \alpha x_2 - x_2 z_2 - y_2, x_2 y_2 - \beta z_2)$$

a matriz Jacobiana e a equação linearizada são dadas por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} \approx D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ \alpha - z_2 & -1 & -x_2 \\ y_2 & x_2 & -\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix},$$

onde as diferenças e_x , e_y e e_z são consideradas suficientemente pequenas. Dado que todos os valores próprios

$$\Lambda_1 = -\sigma, \quad \Lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}(1 + \beta) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\beta - 1)^2 - x_2^2}$$

da matriz Jacobiana $D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}}$ são negativos para $x_2 \in [-(\beta - 1)/2, (\beta - 1)/2]$, está garantida pelo critério (i) a sincronização estável dos sistemas.

Dado que $\dot{e}_x = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = -\sigma(x_1 - x_2) = -\sigma e_x < 0$, tem-se $e_x \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Portanto, o subsistema bidimensional descrevendo a evolução das diferenças $e_y = y_1 - y_2$ e $e_z = z_1 - z_2$ pode, quando $t \rightarrow +\infty$, ser escrito como

$$\begin{cases} \dot{e}_y = -e_y - x_2 e_z \\ \dot{e}_z = x_2 e_y - \beta e_z \end{cases}.$$

Considere a função de Lyapunov $L(e_y, e_z) = (e_y^2 + e_z^2)/2$ que verifica $L(e_y, e_z) > 0$ se $(e_y, e_z) \neq (0, 0)$ e $L(0, 0) = 0$. Substituindo as expressões de $\dot{e}_y$ e $\dot{e}_z$ na derivada $\dot{L}(e_y, e_z) = e_y \dot{e}_y + e_z \dot{e}_z$ e simplificando, obtém-se

$$\dot{L}(e_y, e_z) = -e_y^2 - 2x_2 e_y e_z - \beta e_z^2 \leq -e_y^2 - \beta e_z^2 - 2x_2 |e_y e_z|.$$

Supondo que a função de variável real x_2 é limitada, seja K_x uma constante positiva tal que $|x_2| \leq K_x$. Como tal verifica-se a desigualdade

$$\dot{L}(e_y, e_z) \leq -e_y^2 - \beta e_z^2 - 2K_x |e_y e_z| \leq 0,$$

logo, pelo método directo de Lyapunov, o erro de sincronização tende para 0 quando $t \rightarrow +\infty$. Pelo critério (ii), conclui-se que a sincronização é globalmente estável.

Pelo exposto, conclui-se ainda que ocorre sincronização globalmente estável para todos os tipos de sinal $s(t)$ que conduzam à desigualdade $\dot{e}_x < 0$ (tornem a derivada $\dot{e}_x$ negativa).

Para que o sistema transversal seja assintoticamente estável na origem, a matriz simétrica constante

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & K_x \\ K_x & \beta \end{bmatrix}$$

associada à forma quadrática $-\|\mathbf{e}\|^T \cdot \mathbf{P} \cdot \|\mathbf{e}\|$, em $\|\mathbf{e}\| = (|e_y|, |e_z|)$, deve ser definida positiva. Os determinantes Δ_i , $i = 1, 2$, das submatrizes principais de $\mathbf{P}$ são todos positivos se

$$K_x^2 < \beta.$$

Pelo método directo de Lyapunov, o erro de sincronização tende para 0 quando $t \rightarrow +\infty$ sempre que a constante positiva K_x limitando a variável do sistema satisfaça a desigualdade anterior e, pelo critério (ii), os sistemas alcançam sincronização globalmente estável.

Considere a função de Lyapunov $L(\mathbf{e}) = (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2)/2$ que verifica $L(\mathbf{e}) > 0$ se $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ e $L(\mathbf{0}) = 0$. Substituindo as expressões de $\dot{e}_x$, $\dot{e}_y$ e $\dot{e}_z$ em

$$\dot{L}(\mathbf{e}) = e_x \dot{e}_x + e_y \dot{e}_y + e_z \dot{e}_z$$

e simplificando, obtém-se

$$\begin{aligned}\dot{L}(\mathbf{e}) &= -\sigma e_x^2 + \alpha e_x e_y - z_2 e_x e_y - e_y^2 + y_2 e_x e_z - \beta e_z^2 \\ &\leq -\sigma e_x^2 - e_y^2 - \beta e_z^2 + \alpha |e_x e_y| - z_2 |e_x e_y| + y_2 |e_x e_z|.\end{aligned}$$

Supondo que as funções de variável real y_2 e z_2 são limitadas, sejam K_y e K_z constantes positivas tais que $|y_2| \leq K_y$ e $|z_2| \leq K_z$. Como tal verifica-se a desigualdade

$$\dot{L}(\mathbf{e}) \leq -\sigma e_x^2 - e_y^2 - \beta e_z^2 + \alpha |e_x e_y| - K_z |e_x e_y| + K_y |e_x e_z|.$$

Para que o sistema transversal seja assintoticamente estável na origem, a matriz simétrica constante

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sigma & \frac{1}{2}(K_z - \alpha) & -\frac{1}{2}K_y \\ \frac{1}{2}(K_z - \alpha) & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}K_y & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

associada à forma quadrática $-\|\mathbf{e}\|^T \cdot \mathbf{P} \cdot \|\mathbf{e}\|$, em $\|\mathbf{e}\| = (|e_x|, |e_y|, |e_z|)$, deve ser definida positiva. Os determinantes Δ_i , $i = 1, 2, 3$, das submatrizes principais de $\mathbf{P}$ são todos positivos se

$$4\sigma > (K_z - \alpha)^2 \quad \wedge \quad \beta \left[4\sigma - (K_z - \alpha)^2 \right] > K_y^2.$$

Pelo método directo de Lyapunov, o erro de sincronização tende para 0 quando $t \rightarrow +\infty$ sempre que as constantes positivas K_y e K_z limitando as variáveis do sistema satisfaçam as desigualdades anteriores. Pelo critério (ii) fica garantida a sincronização globalmente estável dos sistemas.

Nota-se que esta decomposição activo-passivo, com uso do sinal $s(t) = \sigma y_1(t)$, é equivalente à substituição de y_2 por y_1 mas apenas na primeira equação do sistema resposta, conforme o exemplo L3 apresentado no anexo ao Capítulo 2. Este exemplo mostra que o critério de Pecora e Carroll está incluído na abordagem mais geral por decomposição activo-passivo.

Caso L11. Considere no sistema caótico de Lorenz a decomposição

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = s(t) - x_1 z_1 - y_1 \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - \beta z_1 \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = \sigma(y_2 - x_2) \\ \dot{y}_2 = s(t) - x_2 z_2 - y_2 \\ \dot{z}_2 = x_2 y_2 - \beta z_2 \end{cases}$$

com uso do sinal condutor $s = h(x_1, y_1, z_1) = \alpha x_1$.

Para

$$\check{\mathbf{f}} = (f_1, f_2, f_3) = (\sigma(y_2 - x_2), s(t) - x_2 z_2 - y_2, x_2 y_2 - \beta z_2)$$

a matriz Jacobiana e a equação linearizada são dadas por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} \approx D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z_2 & -1 & -x_2 \\ y_2 & x_2 & -\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix},$$

onde as diferenças e_x , e_y e e_z são consideradas suficientemente pequenas. Considere a função de Lyapunov $L(\mathbf{e}) = (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2)/2$ que verifica $L(\mathbf{e}) > 0$ se $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ e $L(\mathbf{0}) = 0$. Substituindo as expressões de $\dot{e}_x$, $\dot{e}_y$ e $\dot{e}_z$ em $\dot{L}(\mathbf{e}) = e_x \dot{e}_x + e_y \dot{e}_y + e_z \dot{e}_z$ e simplificando, obtem-se

$$\begin{aligned} \dot{L}(\mathbf{e}) &= -\sigma e_x^2 - \sigma e_x e_y - z_2 e_x e_y - e_y^2 + y_2 e_x e_z - \beta e_z^2 \\ &\leq -\sigma e_x^2 - e_y^2 - \beta e_z^2 - \sigma |e_x e_y| - z_2 |e_x e_y| + y_2 |e_x e_z|. \end{aligned}$$

Supondo que as funções de variável real y_2 e z_2 são limitadas, sejam K_y e K_z constantes positivas tais que $|y_2| \leq K_y$ e $|z_2| \leq K_z$. Como tal verifica-se a desigualdade

$$\dot{L}(\mathbf{e}) \leq -\sigma e_x^2 - e_y^2 - \beta e_z^2 - \sigma |e_x e_y| - K_z |e_x e_y| + K_y |e_x e_z|.$$

Para que o sistema transversal seja assintoticamente estável na origem, a matriz simétrica constante

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sigma & \frac{1}{2}(\sigma + K_z) & -\frac{1}{2}K_y \\ \frac{1}{2}(\sigma + K_z) & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}K_y & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

associada à forma quadrática $-\|\mathbf{e}\|^T \cdot \mathbf{P} \cdot \|\mathbf{e}\|$, em $\|\mathbf{e}\| = (|e_x|, |e_y|, |e_z|)$, deve ser definida positiva. Os determinantes Δ_i , $i = 1, 2, 3$, das submatrizes principais de $\mathbf{P}$ são todos positivos se

$$(\sigma + K_z)^2 < 4\sigma \quad \wedge \quad \beta [4\sigma - (\sigma + K_z)^2] > K_y^2.$$

Pelo método directo de Lyapunov, o erro de sincronização tende para 0 quando $t \rightarrow +\infty$ sempre que as constantes positivas K_y e K_z limitando as variáveis do sistema satisfaçam as desigualdades anteriores. Pelo critério (ii), fica garantida a sincronização globalmente estável dos sistemas.

Caso L12. Considere no sistema caótico de Lorenz a decomposição

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = \alpha x_1 - x_1 z_1 - y_1 \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 + s(t) \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = \sigma(y_2 - x_2) \\ \dot{y}_2 = \alpha x_2 - x_2 z_2 - y_2 \\ \dot{z}_2 = x_2 y_2 + s(t) \end{cases}$$

com uso do sinal condutor $s = h(x_1, y_1, z_1) = -\beta z_1$.

Para

$$\check{\mathbf{f}} = (f_1, f_2, f_3) = (\sigma(y_2 - x_2), \alpha x_2 - x_2 z_2 - y_2, x_2 y_2 + s(t))$$

a matriz Jacobiana e a equação linearizada são dadas por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} \approx D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \alpha - z_2 & -1 & -x_2 \\ y_2 & x_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix},$$

onde as diferenças e_x , e_y e e_z são consideradas suficientemente pequenas. Considere a função de Lyapunov $L(\mathbf{e}) = (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2)/2$ que verifica $L(\mathbf{e}) > 0$ se $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ e $L(\mathbf{0}) = 0$. Substituindo as expressões de $\dot{e}_x$, $\dot{e}_y$ e $\dot{e}_z$ em $\dot{L}(\mathbf{e}) = e_x \dot{e}_x + e_y \dot{e}_y + e_z \dot{e}_z$ e simplificando, obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{L}(\mathbf{e}) &= -\sigma e_x^2 + (\alpha - z_2 - \sigma) e_x e_y - e_y^2 + y_2 e_x e_z \\ &\leq -\sigma e_x^2 - e_y^2 + (\alpha - \sigma) |e_x e_y| - z_2 |e_x e_y| + y_2 |e_x e_z|. \end{aligned}$$

Supondo que as funções de variável real y_2 e z_2 são limitadas, sejam K_y e K_z constantes positivas tais que $|y_2| \leq K_y$ e $|z_2| \leq K_z$. Como tal verifica-se a desigualdade

$$\dot{L}(\mathbf{e}) \leq -\sigma e_x^2 - e_y^2 + (\alpha - \sigma) |e_x e_y| - K_z |e_x e_y| + K_y |e_x e_z|.$$

Para que o sistema transversal seja assintoticamente estável na origem, a matriz simétrica constante

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sigma & \frac{1}{2}(\sigma - \alpha + K_z) & -\frac{1}{2}K_y \\ \frac{1}{2}(\sigma - \alpha + K_z) & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}K_y & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

associada à forma quadrática $-\|\mathbf{e}\|^T \cdot \mathbf{P} \cdot \|\mathbf{e}\|$, em $\|\mathbf{e}\| = (|e_x|, |e_y|, |e_z|)$, deve ser definida positiva. Os determinantes Δ_i , $i = 1, 2, 3$, das submatrizes principais de $\mathbf{P}$ são todos positivos se

$$(\sigma - \alpha + K_z)^2 < 4\sigma \quad \wedge \quad K_y^2 < 0.$$

Como tal, esta escolha da função de Lyapunov não permite concluir acerca da sincronização globalmente estável dos sistemas.

Caso L13. Considere o sistema resultante de substituir y_2 por y_1 no sistema de Lorenz,

mas apenas na primeira equação do sistema resposta,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 10(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = 28x_1 - x_1z_1 - y_1 \\ \dot{z}_1 = x_1y_1 - 2.(6)z_1 \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = 10(\underline{y_1} - x_2) \\ \dot{y}_2 = 28x_2 - x_2z_2 - y_2 \\ \dot{z}_2 = x_2y_2 - 2.(6)z_2 \end{cases}.$$

Para

$$\check{\mathbf{f}} = (f_1, f_2, f_3) = (10(y_1 - x_2), 28x_2 - x_2z_2 - y_2, x_2y_2 - 2.(6)z_2)$$

a matriz Jacobiana e a equação linearizada são dadas por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} \approx D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 28 - z_2 & -1 & -x_2 \\ y_2 & x_2 & -2.(6) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix},$$

onde as diferenças e_x , e_y e e_z são consideradas suficientemente pequenas. Os valores próprios da matriz Jacobiana $D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}}$ são dados pelas expressões

$$\Lambda_1 = -10, \quad \Lambda_{2,3} = -\frac{11}{6} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{25}{9} - 4x_2^2}.$$

Dado que todos são negativos para $x_2 \in [-5/6, 5/6]$, está garantida pelo critério **(i)** a sincronização estável dos sistemas.

Dado que $\dot{e}_x = -10e_x$, tem-se $e_x \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Portanto, o subsistema bidimensional descrevendo a evolução das diferenças $e_y = y_1 - y_2$ e $e_z = z_1 - z_2$ pode, quando $t \rightarrow +\infty$, ser escrito como

$$\begin{cases} \dot{e}_y = -e_y - x_2e_z \\ \dot{e}_z = x_2e_y - 2.(6)e_z \end{cases}.$$

Considere a função de Lyapunov $L(e_y, e_z) = (e_y^2 + e_z^2)/2$ que verifica $L(e_y, e_z) > 0$ se $(e_y, e_z) \neq (0, 0)$ e $L(0, 0) = 0$. Substituindo as expressões de $\dot{e}_x$, $\dot{e}_y$ e $\dot{e}_z$ em

$$\dot{L}(e_y, e_z) = e_y \dot{e}_y + e_z \dot{e}_z$$

e simplificando, obtém-se

$$\dot{L}(e_y, e_z) = -e_y^2 - 2x_2e_ye_z - 2.(6)e_z^2 \leq -e_y^2 - 2.(6)e_z^2 - 2x_2|e_ye_z|.$$

Supondo que a função de variável real x_2 é limitada, seja K_x uma constante positiva tal que $|x_2| \leq K_x$. Como tal verifica-se a desigualdade

$$\dot{L}(e_y, e_z) \leq -e_y^2 - 2.(6)e_z^2 - 2K_x|e_ye_z| \leq 0.$$

Pelo método directo de Lyapunov, o erro de sincronização tende para 0 quando $t \rightarrow \infty$ e, pelo critério (ii), fica garantida a sincronização globalmente estável dos sistemas.

Para que o sistema transversal seja assintoticamente estável na origem, a matriz simétrica constante

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & K_x \\ K_x & 2.(6) \end{bmatrix}$$

associada à forma quadrática $-\|\mathbf{e}\|^T \cdot \mathbf{P} \cdot \|\mathbf{e}\|$, em $\|\mathbf{e}\| = (|e_y|, |e_z|)$, deve ser definida positiva. Os determinantes Δ_i , $i = 1, 2$, das submatrizes principais de $\mathbf{P}$ são todos positivos se $K_x^2 < 2.(6)$, logo, pelo método directo de Lyapunov, o erro de sincronização tende para 0 quando $t \rightarrow +\infty$ sempre que a constante positiva K_x limitando a variável do sistema satisfaça a desigualdade anterior. Pelo critério (ii), os sistemas alcançam sincronização globalmente estável.

Considere a função de Lyapunov $L(\mathbf{e}) = (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2)/2$ em que $L(\mathbf{e}) > 0$ se $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ e $L(\mathbf{0}) = 0$. Substituindo as expressões de $\dot{e}_x$, $\dot{e}_y$ e $\dot{e}_z$ em $\dot{L}(\mathbf{e}) = e_x \dot{e}_x + e_y \dot{e}_y + e_z \dot{e}_z$ e simplificando, obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{L}(\mathbf{e}) &= -10e_x^2 + 28e_x e_y - z_2 e_x e_y - e_y^2 + y_2 e_x e_z - 2.(6)e_z^2 \\ &\leq -(10e_x^2 + e_y^2 + 2.(6)e_z^2) + 28|e_x e_y| - z_2|e_x e_y| + y_2|e_x e_z|. \end{aligned}$$

Supondo que as funções de variável real y_2 e z_2 são limitadas, sejam K_y e K_z constantes positivas tais que $|y_2| \leq K_y$ e $|28 - z_2| \leq K_z$. Como tal verifica-se a desigualdade

$$\dot{L}(\mathbf{e}) \leq -10e_x^2 - e_y^2 - 2.(6)e_z^2 + 28|e_x e_y| - K_z|e_x e_y| + K_y|e_x e_z|.$$

Para que o sistema transversal seja assintoticamente estável na origem, a matriz simétrica constante

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 10 & \frac{1}{2}(K_z - 28) & -\frac{1}{2}K_y \\ \frac{1}{2}(K_z - 28) & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}K_y & 0 & 2.(6) \end{bmatrix}$$

associada à forma quadrática $-\|\mathbf{e}\|^T \cdot \mathbf{P} \cdot \|\mathbf{e}\|$, em $\|\mathbf{e}\| = (|e_x|, |e_y|, |e_z|)$, deve ser definida positiva. Os determinantes Δ_i , $i = 1, 2, 3$, das submatrizes principais de $\mathbf{P}$ são todos positivos se

$$(K_z - 28)^2 < 40 \quad \wedge \quad 320 - 8(K_z - 28)^2 > 3K_y^2.$$

Pelo método directo de Lyapunov, o erro de sincronização tende para 0 quando $t \rightarrow +\infty$ sempre que as constantes positivas K_y e K_z limitando as variáveis do sistema satisfaçam as desigualdades anteriores. Pelo critério (ii) fica garantida a sincronização globalmente estável dos sistemas.

Caso L14. Considere dois sistemas de Lorenz idênticos e caóticos unidireccionalmente ligados por controle *feedback* negativo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = \alpha x_1 - x_1 z_1 - y_1 \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - \beta z_1 \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = \sigma(y_2 - x_2) + \rho(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 = \alpha x_2 - x_2 z_2 - y_2 + \rho(y_1 - y_2) \\ \dot{z}_2 = x_2 y_2 - \beta z_2 + \rho(z_1 - z_2) \end{cases} .$$

Considere as componentes $e_x = x_2 - x_1$, $e_y = y_2 - y_1$ e $e_z = z_2 - z_1$ do erro de sincronização $\mathbf{e}$. Seja a função

$$\check{\mathbf{f}} = (\sigma(y_2 - x_2) + \rho(x_1 - x_2), \alpha x_2 - x_2 z_2 - y_2 + \rho(y_1 - y_2), x_2 y_2 - \beta z_2 + \rho(z_1 - z_2))$$

obtida do sistema resposta. Para qualquer valor de ρ , a equação linearizada que define a dinâmica de perturbações transversais à variedade de sincronização $\mathcal{M}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} \approx D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma - \rho & \sigma & 0 \\ \alpha - z_2 & -1 - \rho & -x_2 \\ y_2 & x_2 & -\beta - \rho \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}$$

que pode tomar a forma matricial $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}(x_2, y_2, z_2) \cdot \mathbf{e}$ com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sigma - \rho & \sigma & 0 \\ \alpha - z_2 & -1 - \rho & -x_2 \\ y_2 & x_2 & -\beta - \rho \end{bmatrix} .$$

Quanto aos determinantes das submatrizes principais de

$$\mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2(\sigma + \rho) & \sigma + \alpha - z_2 & y_2 \\ \sigma + \alpha - z_2 & -2(1 + \rho) & 0 \\ y_2 & 0 & -2(\beta + \rho) \end{bmatrix}$$

tem-se $-\Delta_1 = 2(\sigma + \rho)$, $\Delta_2 = 4(\sigma + \rho)(1 + \rho) - (\sigma + \alpha - z_2)^2$ e

$$-\Delta_3 = 8(\sigma + \rho)(1 + \rho)(\beta + \rho) + 2y_2^2(1 + \rho) + 2(\sigma + \alpha - z_2)^2(\beta + \rho) .$$

Dado que Δ_3 não é positivo se $4(\sigma + \rho)(1 + \rho) < (\sigma + \alpha - z_2)^2$, nada se pode concluir quanto à sincronização globalmente estável dos sistemas.

Caso L15. Considere dois sistemas de Lorenz idênticos e caóticos em ligação difusiva linear bidireccional

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(y_1 - x_1) + \rho(x_2 - x_1) \\ \dot{y}_1 = \alpha x_1 - x_1 z_1 - y_1 + \rho(y_2 - y_1) \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - \beta z_1 + \rho(z_2 - z_1) \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = \sigma(y_2 - x_2) + \rho(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 = \alpha x_2 - x_2 z_2 - y_2 + \rho(y_1 - y_2) \\ \dot{z}_2 = x_2 y_2 - \beta z_2 + \rho(z_1 - z_2) \end{cases} .$$

Dado o erro de sincronização $\mathbf{e} = (e_x, e_y, e_z) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, o sistema transversal é definido pelas equações

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 - \dot{x}_1 \\ \dot{y}_2 - \dot{y}_1 \\ \dot{z}_2 - \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma(y_2 - x_2) - 2\rho e_x - \sigma(y_1 - x_1) \\ \alpha e_x - x_2 z_2 - e_y - 2\rho e_y + x_1 z_1 \\ x_2 y_2 - \beta e_z - 2\rho e_z - x_1 y_1 \end{bmatrix} .$$

Tem-se

$$\sigma(y_2 - x_2) - \sigma(y_1 - x_1) = \sigma(y_2 - x_2 - y_1 + x_1) = \sigma(e_y - e_x)$$

assim como

$$-x_2 z_2 + x_1 z_1 = x_1 z_2 - x_2 z_2 + x_1 z_1 - x_1 z_2 = -z_2 e_x - x_1 e_z$$

e

$$x_2 y_2 - x_1 y_1 = -x_2 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_1 + x_2 y_1 = x_2 e_y + y_1 e_x .$$

Como tal o sistema transversal pode se escrito como

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma(e_y - e_x) - 2\rho e_x \\ \alpha e_x - z_2 e_x - x_1 e_z - e_y - 2\rho e_y \\ x_2 e_y + y_1 e_x - \beta e_z - 2\rho e_z \end{bmatrix}$$

e tomar a forma matricial $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}$ com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sigma - 2\rho & \sigma & 0 \\ \alpha - z_2 & -1 - 2\rho & -x_1 \\ y_1 & x_2 & -\beta - 2\rho \end{bmatrix} .$$

Tem-se

$$\mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2(\sigma + 2\rho) & \sigma + \alpha - z_2 & y_1 \\ \sigma + \alpha - z_2 & -2(1 + 2\rho) & x_2 - x_1 \\ y_1 & x_2 - x_1 & -2(\beta + 2\rho) \end{bmatrix} .$$

A matriz $\mathbf{A}^T + \mathbf{A}$ é definida negativa se e só se satisfaz a condição $(-1)^i \Delta_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, onde Δ_i é o determinante da submatriz principal de ordem i (da matriz $\mathbf{A}^T + \mathbf{A}$). Tem-se $-\Delta_1 = 2(\sigma + 2\rho) > 0$ e quanto a Δ_2 e Δ_3 obtem-se

$$\Delta_2 = 4(\sigma + 2\rho)(1 + 2\rho) - (\sigma + \alpha - z_2)^2$$

e

$$\begin{aligned} -\Delta_3 &= 8(\sigma + 2\rho)(1 + 2\rho)(\beta + 2\rho) - 2(x_2 - x_1)y_1(\sigma + \alpha - z_2) - 2y_1^2(1 + 2\rho) \\ &\quad - 2(x_2 - x_1)^2(\sigma + 2\rho) - 2(\sigma + \alpha - z_2)^2(\beta + 2\rho). \end{aligned}$$

Verifica-se por Δ_2 e Δ_3 a impossibilidade de obter, por este critério, condições de sincronização estável independentes das variáveis do sistema.

Caso L16. Considere os sistemas de Lorenz idênticos e caóticos unidireccionalmente ligados por transmissão de um sinal do primeiro para o segundo mas apenas por substituição parcial de y_2 por y_1 na primeira equação da resposta,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = \alpha x_1 - x_1 z_1 - y_1 \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - \beta z_1 \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = \sigma(\underline{y}_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 = \alpha x_2 - x_2 z_2 - y_2 \\ \dot{z}_2 = x_2 y_2 - \beta z_2 \end{cases}.$$

Dado o erro de sincronização $\mathbf{e} = (e_x, e_y, e_z) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, o sistema transversal é definido pelas equações

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 - \dot{x}_1 \\ \dot{y}_2 - \dot{y}_1 \\ \dot{z}_2 - \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma e_x \\ \alpha e_x - z_2 e_x - x_1 e_z - e_y \\ x_2 e_y + y_1 e_x - \beta e_z \end{bmatrix}$$

e pode tomar a forma matricial $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}(x_1, x_2, y_1, z_2) \cdot \mathbf{e}$ com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ \alpha - z_2 & -1 & -x_1 \\ y_1 & x_2 & -\beta \end{bmatrix}.$$

Os determinantes das submatrizes principais da matriz

$$\mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2\sigma & \alpha - z_2 & y_1 \\ \alpha - z_2 & -2 & x_2 - x_1 \\ y_1 & x_2 - x_1 & -2\beta \end{bmatrix}.$$

são $\Delta_1 = -2\sigma$, $\Delta_2 = 4\sigma - (\alpha - z_2)^2$ e

$$\Delta_3 = -2\beta \left[4\sigma - (\alpha - z_2)^2 \right] + 2(x_2 - x_1)[y_1(\alpha - z_2) + \sigma(x_2 - x_1)] + 2y_1^2.$$

Verifica-se pelas expressões de Δ_2 e Δ_3 a impossibilidade de obter, pela Proposição 3, condições de sincronização globalmente estável: Δ_2 e Δ_3 são dependentes das variáveis do sistema. No entanto, o estudo dos valores próprios da matriz Jacobiana associada à equação linearizada do sistema transversal permite concluir sincronização localmente estável.

Caso L17. Considere dois sistemas de Lorenz idênticos e caóticos unidireccionalmente ligados por transmissão de um sinal do primeiro para o segundo sistema. É escolhido como sinal a terceira componente do sistema transporte e, como tal, em todo o sistema resposta a coordenada z_2 é substituída pela variável z_1 do sistema transporte,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = \alpha x_1 - x_1 z_1 - y_1 \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - \beta z_1 \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = \sigma(y_2 - x_2) \\ \dot{y}_2 = \alpha x_2 - x_2 z_1 - y_2 \\ \dot{z}_2 = z_1 \end{cases}.$$

Considere as componentes $e_x = x_2 - x_1$ e $e_y = y_2 - y_1$ do erro de sincronização $\mathbf{e}$. Seja a função

$$\mathbf{h}(x_2, y_2, z_1) = (f_1, f_2)(x_2, y_2, z_1) = (\sigma(y_2 - x_2), \alpha x_2 - x_2 z_1 - y_2),$$

que caracteriza o subsistema resposta $(x_2(t), y_2(t))$. Para qualquer valor de ρ , a equação linearizada que define a dinâmica de perturbações transversais à variedade de sincronização $\mathcal{M}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \end{bmatrix} \approx D_{(x_2, y_2)} \mathbf{h} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma \\ \alpha - z_1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix},$$

onde as diferenças e_x e e_y são consideradas suficientemente pequenas. O sistema transversal pode ser escrito na forma matricial $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}(z_1) \cdot \mathbf{e}$ com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma \\ \alpha - z_1 & -1 \end{bmatrix}.$$

O determinante Δ_2 da submatriz principal de ordem 2 da matriz

$$\mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2\sigma & \sigma + a - z_1 \\ \sigma + a - z_1 & -2 \end{bmatrix},$$

dado por $\Delta_2 = 4\sigma - (\sigma + a - z_1)^2$, não é necessariamente positivo. Como tal, nada se pode concluir-se quanto à ocorrência de sincronização globalmente estável dos sistemas.

Anexo 2b: estudo de caso com o atrator de Rössler

Caso R6. Considere como transporte e resposta dois sistemas de Rössler idênticos para valores paramétricos a , b e c que conduzam a comportamento caótico. Liguem-se os dois sistemas através da variável condutora x_1 mas por adição do sinal de controle $\rho(x_1 - x_2)$ aplicado como *feedback* negativo deslocado à terceira equação do sistema resposta. Além disso é introduzida a substituição parcial em que a variável x_1 dá lugar à sua correspondente x_2 na terceira equação da resposta. Inicie-se o sistema ligado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(y_1 + z_1) \\ \dot{y}_1 = x_1 + ay_1 \\ \dot{z}_1 = b + z_1(x_1 - c) \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = -(y_2 + z_2) \\ \dot{y}_2 = x_2 + ay_2 \\ \dot{z}_2 = b + z_2(x_2 - c) + \rho(x_1 - x_2) \end{cases}$$

a partir de condições iniciais $x_1(0) \neq x_2(0)$, $y_1(0) \neq y_2(0)$ e $z_1(0) \neq z_2(0)$.

Considere as componentes $e_x = x_2 - x_1$, $e_y = y_2 - y_1$ e $e_z = z_2 - z_1$ do erro de sincronização $\mathbf{e}$. Seja a função

$$\check{\mathbf{f}} = (-y_2 - z_2, x_2 + ay_2, b + z_2(x_2 - c) + \rho(x_1 - x_2))$$

obtida do sistema resposta. Para qualquer valor de ρ , a equação linearizada que define a dinâmica de perturbações transversais à variedade de sincronização $\mathcal{M}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} \approx D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ -\rho & 0 & x_1 - c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}.$$

Considere a função de Lyapunov $L(\mathbf{e}) = (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2)/2$ que verifica $L(\mathbf{e}) > 0$ se $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ e $L(\mathbf{0}) = 0$ para todo o ρ . Determine-se a força de ligação ρ tal que a derivada de L satisfaça $\dot{L}(\mathbf{e}) < 0$ se $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ e $\dot{L}(\mathbf{0}) = 0$. Substituindo as expressões de $\dot{e}_x$, $\dot{e}_y$ e $\dot{e}_z$ em $\dot{L}(\mathbf{e}) = e_x \dot{e}_x + e_y \dot{e}_y + e_z \dot{e}_z$ e simplificando, a derivada de L pode ser escrita como

$$\dot{L}(\mathbf{e}) = (-1 - \rho)e_x e_z + ae_y^2 + (x_1 - c)e_z^2.$$

O termo positivo ae_y^2 não permite garantir que a forma quadrática é definida negativa. O método directo de Lyapunov não é então aplicável para esta escolha da função de Lyapunov e nada se conclui quanto à sincronização globalmente estável dos sistemas.

Caso R7. Considere dois sistemas de Rössler idênticos e caóticos unidireccionalmente ligados por transmissão de um sinal do primeiro para o segundo sistema. É escolhido como sinal a segunda componente do sistema transporte e, como tal, em todo o sistema resposta a coordenada y_2 é substituída pela variável y_1 do sistema transporte,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(y_1 + z_1) \\ \dot{y}_1 = x_1 + ay_1 \\ \dot{z}_1 = b + z_1(x_1 - c) \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = -(y_1 + z_2) \\ y_2 = y_1 \\ \dot{z}_2 = b + z_2(x_2 - c) \end{cases}.$$

Considere as componentes $e_x = x_2 - x_1$ e $e_z = z_2 - z_1$ do erro de sincronização $\mathbf{e}$. Seja a função

$$\mathbf{h}(x_2, y_1, z_2) = (f_1, f_3)(x_2, y_1, z_2) = (-(y_1 + z_2), b + z_2(x_2 - c)),$$

que caracteriza o subsistema resposta $(x_2(t), z_2(t))$. Para qualquer valor de ρ , a equação linearizada que define a dinâmica de perturbações transversais à variedade de sincronização $\mathcal{M}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} \approx D_{(x_2, z_2)} \mathbf{h} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ z_2 & x_2 - c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_z \end{bmatrix},$$

onde as diferenças e_x e e_y são consideradas suficientemente pequenas. O sistema transversal pode ser escrito na forma matricial $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}(x_2) \cdot \mathbf{e}$ com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ z_2 & x_2 - c \end{bmatrix}.$$

O determinante Δ_1 da matriz

$$\mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -z_1 \\ -z_1 & 2(x_2 - c) \end{bmatrix},$$

é nulo, logo nada se pode concluir-se quanto à ocorrência de sincronização globalmente estável dos sistemas.

Caso R8. Considere dois sistemas de Rössler idênticos e caóticos unidireccionalmente ligados por transmissão de um sinal do primeiro para o segundo sistema. É escolhido como sinal a segunda componente do sistema transporte e, como tal, em todo o sistema resposta a coordenada x_2 é substituída pela variável x_1 do sistema transporte,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(y_1 + z_1) \\ \dot{y}_1 = x_1 + ay_1 \\ \dot{z}_1 = b + z_1(x_1 - c) \end{cases} \wedge \begin{cases} x_2 = x_1 \\ \dot{y}_2 = x_1 + ay_2 \\ \dot{z}_2 = b + z_2(x_1 - c) \end{cases}.$$

Considere as componentes $e_y = y_2 - y_1$ e $e_z = z_2 - z_1$ do erro de sincronização $\mathbf{e}$. Seja a função

$$\mathbf{h}(x_1, y_2, z_2) = (f_2, f_3)(x_1, y_2, z_2) = (x_1 + ay_2, b + z_2(x_1 - c)),$$

que caracteriza o subsistema resposta $(y_2(t), z_2(t))$. Para qualquer valor de ρ , a equação linearizada que define a dinâmica de perturbações transversais à variedade de sincronização $\mathcal{M}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} \approx D_{(y_2, z_2)} \mathbf{h} \cdot \begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & x_1 - c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix},$$

onde as diferenças e_y e e_z são consideradas suficientemente pequenas. O sistema transversal pode ser escrito na forma matricial $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}(x_1) \cdot \mathbf{e}$ com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & x_1 - c \end{bmatrix}.$$

Dado que o determinante Δ_1 da submatriz principal de ordem 1 da matriz

$$\mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2(x_1 - c) \end{bmatrix}$$

não verifica a condição satisfazem as condições $-\Delta_1 > 0$, nada se pode concluir-se quanto à ocorrência de sincronização globalmente estável dos sistemas.

Caso R9. Considere dois sistemas de Rössler idênticos e caóticos unidireccionalmente

ligados por transmissão de um sinal do primeiro para o segundo sistema. É escolhido como sinal a segunda componente do sistema transporte e, como tal, em todo o sistema resposta a coordenada z_2 é substituída pela variável z_1 do sistema transporte,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(y_1 + z_1) \\ \dot{y}_1 = x_1 + ay_1 \\ \dot{z}_1 = b + z_1(x_1 - c) \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = -(y_2 + z_1) \\ \dot{y}_2 = x_2 + ay_2 \\ z_2 = z_1 \end{cases}.$$

Considere as componentes $e_x = x_2 - x_1$ e $e_y = y_2 - y_1$ do erro de sincronização $\mathbf{e}$. Seja a função

$$\mathbf{h}(x_2, y_2, z_1) = (f_1, f_2)(x_2, y_2, z_1) = (-(y_2 + z_1), x_2 + ay_2),$$

que caracteriza o subsistema resposta $(x_2(t), y_2(t))$. Para qualquer valor de ρ , a equação linearizada que define a dinâmica de perturbações transversais à variedade de sincronização $\mathcal{M}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \end{bmatrix} \approx D_{(x_2, y_2)} \mathbf{h} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix},$$

onde as diferenças e_x e e_y são consideradas suficientemente pequenas. O sistema transversal pode ser escrito na forma matricial $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}$ com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}.$$

Como os determinantes das submatrizes principais da matriz

$$\mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$$

são nulos, nada se pode concluir-se quanto à ocorrência de sincronização globalmente estável dos sistemas.

Caso R10. Considere dois sistemas caóticos de Rössler idênticos unidireccionalmente ligados por controle *feedback* negativo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(y_1 + z_1) \\ \dot{y}_1 = x_1 + ay_1 \\ \dot{z}_1 = b + z_1(x_1 - c) \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = -(y_2 + z_2) + \rho_x(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 = x_2 + ay_2 + \rho_y(y_1 - y_2) \\ \dot{z}_2 = b + z_2(x_2 - c) + \rho_z(z_1 - z_2) \end{cases}.$$

Considere as componentes $e_x = x_2 - x_1$, $e_y = y_2 - y_1$ e $e_z = z_2 - z_1$ do erro de sincronização $\mathbf{e}$. Seja a função

$$\check{\mathbf{f}} = (-(y_2 + z_2) + \rho_x(x_1 - x_2), x_2 + ay_2 + \rho_y(y_1 - y_2), b + z_2(x_2 - c) + \rho_z(z_1 - z_2))$$

obtida do sistema resposta. Para qualquer valor de ρ , a equação linearizada que define a dinâmica de perturbações transversais à variedade de sincronização $\mathcal{M}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} \approx D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho_x & -1 & -1 \\ 1 & a - \rho_y & 0 \\ z_2 & 0 & x_2 - c - \rho_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}$$

que pode tomar a forma matricial $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}(x_2, z_2) \cdot \mathbf{e}$ com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\rho_x & -1 & -1 \\ 1 & a - \rho_y & 0 \\ z_2 & 0 & x_2 - c - \rho_z \end{bmatrix}.$$

Quanto aos determinantes das submatrizes principais da matriz

$$\mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2\rho_x & 0 & z_2 - 1 \\ 0 & 2(a - \rho_y) & 0 \\ z_2 - 1 & 0 & 2(x_2 - c - \rho_z) \end{bmatrix},$$

tem-se $-\Delta_1 = 2\rho_x$, $\Delta_2 = -4\rho_x(a - \rho_y)$ e $-\Delta_3 = 2(a - \rho_y)[4\rho_x(x_2 - c - \rho_z) + (z_2 - 1)^2]$. Dado que Δ_3 é negativo para certos valores de x_2 e z_2 , não se pode concluir por este critério que ocorre sincronização globalmente estável dos sistemas.

Caso R11. Considere dois sistemas caóticos de Rössler idênticos unidireccionalmente ligados por controle *feedback* negativo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(y_1 + z_1) \\ \dot{y}_1 = x_1 + ay_1 \\ \dot{z}_1 = b + z_1(x_1 - c) \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = -(y_2 + z_2) + \rho_x(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 = x_2 + ay_2 + \rho_y(y_1 - y_2) \\ \dot{z}_2 = b + z_2(\underline{x}_1 - c) + \rho_z(z_1 - z_2) \end{cases},$$

onde também se efectuou a substituição parcial de z_2 por z_1 no termo não-linear da resposta.

Considere as componentes $e_x = x_2 - x_1$, $e_y = y_2 - y_1$ e $e_z = z_2 - z_1$ do erro de sincronização $\mathbf{e}$. Seja a função

$$\check{\mathbf{f}} = (-(y_2 + z_2) + \rho_x(x_1 - x_2), x_2 + ay_2 + \rho_y(y_1 - y_2), b + z_2(x_1 - c) + \rho_z(z_1 - z_2))$$

obtida do sistema resposta. Para qualquer valor de ρ , a equação linearizada que define a dinâmica de perturbações transversais à variedade de sincronização $\mathcal{M}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} \approx D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho_x & -1 & -1 \\ 1 & a - \rho_y & 0 \\ 0 & 0 & x_1 - c - \rho_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}$$

que pode tomar a forma matricial $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}(x_1) \cdot \mathbf{e}$ com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\rho_x & -1 & -1 \\ 1 & a - \rho_y & 0 \\ 0 & 0 & x_1 - c - \rho_z \end{bmatrix}.$$

Quanto aos determinantes das submatrizes principais da matriz

$$\mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2\rho_x & 0 & -1 \\ 0 & 2(a - \rho_y) & 0 \\ -1 & 0 & 2(x_1 - c - \rho_z) \end{bmatrix},$$

tem-se $-\Delta_1 = 2\rho_x$, $\Delta_2 = -4\rho_x(a - \rho_y)$ e $-\Delta_3 = 2(a - \rho_y)[4\rho_x(x_1 - c - \rho_z) + 1]$. Dado que Δ_3 é negativo para certos valores de x_1 , não se pode concluir por este critério que ocorre sincronização globalmente estável dos sistemas.

Caso R12. Considere dois sistemas de Rössler idênticos para valores paramétricos a , b e c que conduzam a comportamento caótico. Liguem-se os dois sistemas através da variável condutora x_1 por adição do sinal de controle $\rho(x_1 - x_2)$ aplicado como *feedback* negativo. Além disso é introduzida substituição parcial da variável x_2 por x_1 e z_2 por z_1 apenas no termo não-linear z_2x_2 da resposta. Inicie-se o sistema ligado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -y_1 - z_1 \\ \dot{y}_1 = x_1 + ay_1 \\ \dot{z}_1 = b + z_1(x_1 - c) \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = -y_2 - z_2 + \rho(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 = x_2 + ay_2 \\ \dot{z}_2 = b + \underline{z_1}(\underline{x_1} - c) \end{cases}$$

a partir de condições iniciais $x_1(0) \neq x_2(0)$, $y_1(0) \neq y_2(0)$ e $z_1(0) \neq z_2(0)$.

Considere as componentes $e_x = x_2 - x_1$, $e_y = y_2 - y_1$ e $e_z = z_2 - z_1$ do erro de sincronização. Seja a função

$$\check{\mathbf{f}} = (-y_2 - z_2 + \rho(x_1 - x_2), x_2 + ay_2, b + z_1(x_1 - c))$$

obtida do sistema resposta. Para qualquer valor de ρ , a equação linearizada que define a dinâmica de perturbações transversais à variedade de sincronização $\mathcal{M}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} \approx D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}.$$

O cálculo dos valores próprios da matriz Jacobiana $D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}}$ conduz a

$$\Lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \Lambda_{2,3} = \frac{a - \rho}{2} \pm \sqrt{\frac{(a + \rho)^2}{4} - 1}.$$

Pelo critério (i), não ocorre sincronização localmente estável dos sistemas.

Caso R13. Considere dois sistemas de Rössler idênticos para valores paramétricos a , b e c que conduzam a comportamento caótico. Liguem-se os dois sistemas através da variável condutora z_1 por adição do sinal de controle $\rho(z_1 - z_2)$ aplicado como *feedback* negativo. Além disso é introduzida a substituição parcial da variável x_2 por x_1 e z_2 por z_1 apenas no termo não-linear z_2x_2 da resposta. Inicie-se o sistema ligado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -y_1 - z_1 \\ \dot{y}_1 = x_1 + ay_1 \\ \dot{z}_1 = b + z_1(x_1 - c) \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = -y_2 - z_2 \\ \dot{y}_2 = x_2 + ay_2 \\ \dot{z}_2 = b + \underline{z_1}(\underline{x_1} - c) + \rho(z_1 - z_2) \end{cases}$$

a partir de condições iniciais $x_1(0) \neq x_2(0)$, $y_1(0) \neq y_2(0)$ e $z_1(0) \neq z_2(0)$.

Considere as componentes $e_x = x_2 - x_1$, $e_y = y_2 - y_1$ e $e_z = z_2 - z_1$ do erro de sincronização. Seja a função

$$\check{\mathbf{f}} = (-y_2 - z_2, x_2 + ay_2, b + z_1(x_1 - c) + \rho(z_1 - z_2))$$

obtida do sistema resposta. Para qualquer valor de ρ , a equação linearizada que define a dinâmica de perturbações transversais à variedade de sincronização $\mathcal{M}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} \approx D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -\rho \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}.$$

O cálculo dos valores próprios da matriz Jacobiana $D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}}$ conduz a

$$\Lambda_1 = -\rho \quad \text{e} \quad \Lambda_{2,3} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}.$$

Pelo critério (i), não ocorre sincronização localmente estável dos sistemas.

Caso R14. Considere dois sistemas de Rössler idênticos para valores paramétricos a ,

b e c que conduzam a comportamento caótico. Liguem-se os dois sistemas através da variável condutora z_1 por adição do sinal de controle $\rho(z_1 - z_2)$ aplicado como *feedback* negativo. Além disso é introduzida a substituição parcial da variável x_2 por x_1 no termo não-linear do sistema resposta. Inicie-se o sistema ligado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -y_1 - z_1 \\ \dot{y}_1 = x_1 + ay_1 \\ \dot{z}_1 = b + z_1(x_1 - c) \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = -y_2 - z_2 \\ \dot{y}_2 = x_2 + ay_2 \\ \dot{z}_2 = b + z_2(\underline{x}_1 - c) + \rho(z_1 - z_2) \end{cases}$$

a partir de condições iniciais $x_1(0) \neq x_2(0)$, $y_1(0) \neq y_2(0)$ e $z_1(0) \neq z_2(0)$.

Considere as componentes $e_x = x_2 - x_1$, $e_y = y_2 - y_1$ e $e_z = z_2 - z_1$ do erro de sincronização. Seja a função

$$\check{\mathbf{f}} = (-y_2 - z_2, x_2 + ay_2, b + z_2(x_1 - c) + \rho(z_1 - z_2))$$

obtida do sistema resposta. Para qualquer valor de ρ , a equação linearizada que define a dinâmica de perturbações transversais à variedade de sincronização $\mathcal{M}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} \approx D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & x_1 - c - \rho \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}.$$

O cálculo dos valores próprios da matriz Jacobiana $D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}}$ conduz a

$$\Lambda_1 = x_1 - c - \rho \quad \text{e} \quad \Lambda_{2,3} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}.$$

Pelo critério (i), não ocorre sincronização localmente estável dos sistemas.

Caso R15. Considere dois sistemas de Rössler idênticos para valores paramétricos a , b e c que conduzam a comportamento caótico. Liguem-se os dois sistemas através da variável condutora y_1 por adição do sinal de controle $\rho(y_1 - y_2)$ aplicado como *feedback* negativo. Além disso é introduzida a substituição parcial da variável x_2 por x_1 e z_2 por z_1 apenas no termo não-linear $z_2 x_2$ da resposta. Inicie-se o sistema ligado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -y_1 - z_1 \\ \dot{y}_1 = x_1 + ay_1 \\ \dot{z}_1 = b + z_1(x_1 - c) \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = -y_2 - z_2 y_1 \\ \dot{y}_2 = x_2 + ay_2 + \rho(y_1 - y_2) \\ \dot{z}_2 = b + z_1(x_1 - c) \end{cases}.$$

a partir de condições iniciais $x_1(0) \neq x_2(0)$, $y_1(0) \neq y_2(0)$ e $z_1(0) \neq z_2(0)$.

Considere as componentes $e_x = x_2 - x_1$, $e_y = y_2 - y_1$ e $e_z = z_2 - z_1$ do erro de sincronização. Seja a função

$$\check{\mathbf{f}} = (-y_2 - z_2, x_2 + ay_2 + \rho(y_1 - y_2), b + z_1(x_1 - c))$$

obtida do sistema resposta. Para qualquer valor de ρ , a equação linearizada que define a dinâmica de perturbações transversais à variedade de sincronização $\mathcal{M}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} \approx D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a - \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}.$$

O cálculo dos valores próprios da matriz Jacobiana $D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}}$ conduz a

$$\Lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \Lambda_{2,3} = \frac{a - \rho}{2} \pm \sqrt{\frac{(a - \rho)^2}{4} - 1}.$$

Pelo critério (i), não ocorre sincronização localmente estável dos sistemas.

Caso R16. Considere a ligação difusiva linear parcial bidireccional de dois sistemas de Rössler

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -(y_1 + z_1) + \rho(x_2 - x_1) \\ \dot{y}_1 = x_1 + ay_1 \\ \dot{z}_1 = b + z_1(x_1 - c) \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = -(y_2 + z_2) + \rho(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 = x_2 + ay_2 \\ \dot{z}_2 = b + z_2(x_2 - c) \end{cases}.$$

Sejam $e_x = x_2 - x_1$, $e_y = y_2 - y_1$ e $e_z = z_2 - z_1$ as componentes do erro de sincronização $\mathbf{e}$. Para qualquer valor de ρ , o sistema transversal é definido pelas equações

$$\begin{cases} \dot{e}_x = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = -e_y - e_z - 2\rho e_x \\ \dot{e}_y = \dot{y}_2 - \dot{y}_1 = e_x + ae_y \\ \dot{e}_z = \dot{z}_2 - \dot{z}_1 = z_2 e_x + (x_1 - c) e_z \end{cases}.$$

Considere a função de Lyapunov $L(\mathbf{e}) = (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2)/2$ em que $L(\mathbf{e}) > 0$ se $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ e $L(\mathbf{0}) = 0$ para todo o ρ . Determine-se a força de ligação ρ tal que a derivada de L satisfaça $\dot{L}(\mathbf{e}) < 0$ se $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ e $\dot{L}(\mathbf{0}) = 0$. Substituindo as expressões de $\dot{e}_x$, $\dot{e}_y$ e $\dot{e}_z$ em

$$\dot{L}(\mathbf{e}) = e_x \dot{e}_x + e_y \dot{e}_y + e_z \dot{e}_z$$

e simplificando, a derivada de L pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{L}(\mathbf{e}) &= -2\rho e_x^2 + (z_2 - 1) e_x e_z + ae_y^2 + (x_1 - c) e_z^2 \\ &\leq -2\rho e_x^2 + ae_y^2 + x_1 e_z^2 - ce_z^2 + z_2 |e_x e_z| - |e_x e_z|. \end{aligned}$$

Supondo que as funções de variável real x_1 e z_2 são limitadas, sejam K_x e K_z constantes positivas tais que $|x_1| \leq K_x$ e $|z_2| \leq K_z$. Como tal verifica-se a desigualdade

$$\dot{L}(\mathbf{e}) \leq -2\rho e_x^2 + ae_y^2 + K_x e_z^2 - ce_z^2 + K_z |e_x e_z| - |e_x e_z|.$$

Para que o sistema transversal seja assintoticamente estável na origem, a matriz simétrica constante

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2\rho & 0 & \frac{1}{2}(1 - K_z) \\ 0 & -a & 0 \\ \frac{1}{2}(1 - K_z) & 0 & c - K_x \end{bmatrix}$$

associada à forma quadrática $-\|\mathbf{e}\|^T \cdot \mathbf{P} \cdot \|\mathbf{e}\|$, em $\|\mathbf{e}\| = (|e_x|, |e_y|, |e_z|)$, deve ser definida positiva. Os determinantes Δ_i , $i = 1, 2, 3$, das submatrizes principais de $\mathbf{P}$ são positivos se

$$-2a\rho > 0 \quad \wedge \quad -8a\rho(c - K_x) + a(1 - K_z)^2 > 0.$$

dado que a condição relativa a Δ_i é impossível, o método directo de Lyapunov não é conclusivo com esta escolha da função de Lyapunov.