



INSTITUTO  
UNIVERSITÁRIO  
DE LISBOA

---

Projeto e simulação de redes de circuitos para o estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em linhas de transmissão com capacidade variável

Daniel Filipe Pereira dos Santos

Mestrado em Engenharia de Telecomunicações e Informática

Orientador:

Doutor Marco Alexandre dos Santos Ribeiro, Professor  
Auxiliar,  
ISCTE-IUL

Outubro, 2020

Projeto e simulação de redes de circuitos para o estudo da propagação de ondas eletromagnéticas em linhas de transmissão com capacidade variável

Daniel Filipe Pereira dos Santos

Mestrado em Engenharia de Telecomunicações e Informática

Orientador:

Doutor Marco Alexandre dos Santos Ribeiro, Professor  
Auxiliar,  
ISCTE-IUL

Outubro, 2020





## **Agradecimentos**

Durante o meu percurso académico tive o privilégio de estar rodeado de professores e colegas bastantes competentes, onde consegui aprofundar os meus conhecimentos, bem como crescer como pessoa. Em particular, agradeço:

Em primeiro lugar, ao meu orientador, Professor Marco Ribeiro, por toda a disponibilidade para ajudar-me desde o primeiro dia. Por toda a paciência para explicar assuntos relacionados com o trabalho desenvolvido, bem como outros assuntos. Pela capacidade de ajudar-me a reinventar a minha investigação, quando os resultados não eram os esperados e os problemas aumentavam.

Um agradecimento ao projeto TUBITAK/0002/2014 (FCT) e ao Instituto de Telecomunicações (IT) por disponibilizarem todo o material necessário para a conclusão deste projeto.

Aos amigos que a faculdade me proporcionou. Todos foram fundamentais para a minha evolução como estudante, pelo companheirismo, pelas horas de estudo em grupo e motivação.

Ao meu grupo de amigos fora da faculdade (“os animais”) pelos dias em que não pude estar presente e pelo apoio sempre demonstrado para terminar o mestrado.

Um enorme obrigado à minha namorada Sofia Nobre, por ser sempre a primeira pessoa para ouvir os meus problemas, acreditar sempre nas minhas capacidades e pela incrível capacidade de me motivar.

Por último, aos meus pais, por toda a educação que me deram, pelo apoio incondicional e principalmente pela quantidade de oportunidades dadas ao longo de todo o meu percurso académico, sem a ajuda deles era impossível atingir os meus objetivos.



## Resumo

Existem variados dispositivos cujo princípio de funcionamento é baseado na teoria das linhas de transmissão. Esta teoria é particularmente importante no estudo dos metamateriais onde, muitas vezes se utilizam modelos equivalentes de linhas de transmissão de modo a explicar o funcionamento de dispositivos complexos. Nesta dissertação pretende-se estudar a teoria da propagação em redes periódicas, com células unitárias que variam no tempo e que modelizam uma linha de transmissão com componentes variáveis (apenas a variação da capacidade é considerada). Mostra-se como se caracteriza a estrutura através da sua constante de propagação, impedância de Bloch, coeficiente de reflexão, terminações nos planos do gerador e carga. São analisados dois cenários: um com células unitárias sem perdas e outro com perdas. Conclui-se que para baixas perdas (caso usual), podemos sempre usar o modelo sem perdas como uma boa aproximação para linhas de transmissão reais.

Estuda-se, de seguida, a propagação de impulsos na estrutura. O estudo é fundamentado com simulações numéricas usando um simulador SPICE. Analisa-se a propagação de um impulso gaussiano na estrutura com e sem transição temporal de capacidade. São considerados dois cenários. No primeiro, a transição ocorre de uma capacidade maior para uma menor. No segundo, a transição ocorre de uma capacidade menor para uma maior. Finalmente, são propostos vários circuitos elétricos para a criação de um condensador variável. Estes circuitos são desenhados tendo em conta dois cenários bastante diferentes: um em que existe conservação da carga e outro onde só existe conservação da energia.

**Palavras-chave:** Linha de transmissão, condensador variável, varactor, metamateriais, célula unitária, eletromagnetismo.





## Abstract

There are varied devices which the operation principle is based on the transmission line theory. This theory is particularly important in the transmission line study in order to explain the operation of complex devices. During this dissertation the goal is to study the propagation theory in periodic structures with unit cells that vary in time and shape the transmission line with variable components (just the variation of capacity is considered). Also, it's shown how it's characterized the structure through this propagation constant, Bloch impedance, reflection coefficient, terminations on the generator and load plans.

Two scenarios are analysed: one with unit cells without loss and another one with loss. It was concluded that for small losses (usual case) we can always use a model without losses, with a good approximation to real transmission lines.

Then, the impulse propagation in the structure is studied. The study is grounded with numerical simulations, using a SPICE simulator. The propagation of a gaussian impulse in the structure with and without temporal transition of capacity is analysed. Two scenarios are considered. Firstly, the transition occurs from a larger capacity to a smaller one. Secondly, the transition occurs from a smaller capacity to a bigger one.

Finally, several circuits are proposed for the creation of a variable capacitor. This circuits, are designed considering two different scenarios: one where exists charge conservation an another where only exists energy conservation.

**Keywords:** Transmission Lines, Variable Capacitor, Inductor, Charge Conservation, Materials, Energy Conservation, Unit Cell.



# Índice

Agradecimentos .....	vi
Resumo .....	vii
Abstract.....	ix
Lista de símbolos.....	xvii
Lista de acrónimos.....	xviii
CAPÍTULO 1 – Introdução .....	1
1.1. Enquadramento .....	1
1.2. Objetivos .....	3
1.3. Contribuições.....	4
1.4. Estrutura da dissertação.....	4
CAPÍTULO 2 – Revisão de literatura .....	7
2.1. Linhas de transmissão .....	7
2.2. Condensador .....	10
2.2.1. Condensador cerâmico .....	11
2.2.2. Condensador eletrolítico .....	12
2.2.3. Condensador Filme .....	12
2.2.4. Super Condensador .....	12
2.2.4. Condensadores variáveis .....	13
2.3. Indutores .....	13
2.3.1. Núcleo de ar.....	15
2.3.2. Núcleo de ferro .....	15

2.3.3. Núcleo de ferrite .....	15
2.4. Trabalhos Relacionados .....	15
CAPÍTULO 3 – Teoria da propagação em redes de parâmetros distribuídos .....	18
3.1. Linhas de Transmissão .....	18
3.2. Constante de Propagação, Impedância de Bloch e equações de uma estrutura periódica infinita .....	23
3.3. Coeficiente de Reflexão de uma estrutura periódica terminada .....	25
3.4. Estrutura periódica terminada com gerador e carga .....	27
3.5. Célula unitária de uma linha de transmissão (caso sem perdas) .....	29
3.6. Célula unitária de uma linha de transmissão (caso com perdas) .....	37
CAPÍTULO 4 – Propagação de impulsos em estruturas periódicas .....	44
4.1. Transição de capacidade numa estrutura periódica de uma capacidade maior para uma capacidade menor .....	44
4.2. Transição de capacidade numa estrutura periódica de uma capacidade menor para uma capacidade maior .....	49
CAPÍTULO 5 – Desenhos de circuitos com capacidade variável .....	54
5.1. Conservação da energia e conservação da carga .....	54
5.2. Circuito com capacidade variável: caso conservação de energia .....	56
5.3. Circuitos com capacidade variável: caso com conservação da carga .....	65
CAPÍTULO 6 – Conclusão e trabalho futuro .....	77
6.1. Conclusão .....	77
6.2. Trabalho futuro .....	78
Referências Bibliográficas .....	79

## Índice de Figuras

Figura 1 - Modelo equivalente de uma linha de transmissão sem perdas. ....	8
Figura 2 - Condensador de planos paralelos. As armaduras armazenam carga Q de sinal contrário devido à tensão aplicada $\Delta V$ . ....	10
Figura 3 - Diferentes tipos de condensadores. ....	11
Figura 4 – Símbolo do díodo varactor. ....	13
Figura 5 - Bobina de N espiras, comprimento L e área de secção transversal A. ....	14
Figura 6 - Diferentes tipos de bobines. ....	14
Figura 7 - Linha de transmissão terminada com impedâncias de gerador e de carga arbitrárias, $Z_g$ e $Z_L$ . ....	18
Figura 8 - Circuito equivalente de uma estrutura periódica com células unitárias de tamanho $\Delta z$ . ....	23
Figura 9 - Circuito equivalente de uma estrutura periódica com células unitárias de tamanho $\Delta z$ terminada numa carga $Z_L$ . ....	26
Figura 10 - Circuito equivalente de uma estrutura periódica com células unitárias de tamanho $\Delta z$ terminada de um lado por um gerador de tensão $V_g$ , impedância interna $Z_g$ e no outro lado por uma carga $Z_L$ . ....	27
Figura 11 - Célula unitária simétrica sem perdas. ....	29
Figura 12 - Esquema equivalente em $\Pi$ de um Célula unitária sem perdas. ....	30
Figura 13 - Relação entre a frequência angular $\omega$ e a constante de propagação $\beta$ . ....	34
Figura 14 - Circuito de teste para a célula sem perdas com $N = 3$ , $C\Delta z = 10 \mu\text{H}$ $L\Delta z =$ $1 \text{ mH}$ . ....	35
Figura 15 - Célula unitária simétrica com perdas. ....	37
Figura 16 – Caso com Perdas: Esquema equivalente em $\Pi$ de uma célula unitária. ....	38
Figura 17- Circuito de teste para a célula com perdas com $N = 3$ , $R\Delta Z = 0.5\Omega$ , $C\Delta Z =$ $10 \mu\text{H}$ e $L\Delta Z = 1 \text{ mH}$ . ....	40
Figura 18 - Modelo equivalente de uma linha de transmissão. A estrutura tem um comprimento de N células. ....	45

Figura 19 - Propagação de um impulso gaussiano numa estrutura periódica sem transição de capacidade. ....	46
Figura 20 - Evolução temporal da tensão na estrutura periódica numa transição de capacidade $C_{\mu} = 100$ nF para $C_{\mu} = 50$ nF.....	48
Figura 21 - As duas ondas após a transição de capacidade $C_{\mu} = 100$ nF para $C_{\mu} = 50$ nF. A onda do lado esquerdo viaja para a esquerda. A onda do lado direito viaja para a direita.....	49
Figura 22 - Evolução temporal da tensão na estrutura periódica numa transição de capacidade $C_{\mu} = 100$ nF para $C_{\mu} = 200$ nF.....	51
Figura 23 - As duas ondas após a transição de capacidade $C_{\mu} = 100$ nF para $C_{\mu} = 200$ nF. A onda do lado esquerdo viaja para a esquerda. A onda do lado direito viaja para a direita. ....	52
Figura 24 - Esquema de conservação da carga. ....	55
Figura 25 - Conceito simplificado de um circuito com capacidade variável. ....	56
Figura 26 - Condensador variável bidirecional controlado por transístores: caso com conservação de energia. ....	58
Figura 27 - Sequência temporal dos sinais de controlo do circuito para uma transição de capacidade no sentido de $C_1$ para $C_2$ com conservação de energia. ....	59
Figura 28 - Transição de energia entre $C_1$ , $L_1$ e $C_2$ num circuito de condensador variável no sentido de $C_1$ para $C_2$ com conservação de energia.....	62
Figura 29 - Variação da energia elétrica num circuito com capacidade variável no sentido do condensador $C_1$ para $C_2$ com conservação de energia. ....	63
Figura 30 - Transição de energia entre $C_2$ , $L_1$ e $C_1$ num circuito de condensador variável no sentido de $C_2$ para $C_1$ com conservação de energia.....	64
Figura 31 - Variação da energia elétrica num circuito com capacidade variável no sentido do condensador $C_2$ para $C_1$ com conservação de energia. ....	65
Figura 32 - Condensador variável bidirecional controlado por transístores: caso com conservação de Carga. ....	66

Figura 33 - Sequência temporal de um circuito com capacidade variável no sentido de $C_1$ para $C_2$ com conservação de carga.....	69
Figura 34 - Transição de energia entre $C_1$ , $L_1$ e $C_2$ num circuito de condensador variável no sentido de $C_1$ para $C_2$ com conservação de carga. ....	70
Figura 35 - Transição de energia entre $C_2$ , $L_1$ e $C_1$ num circuito de condensador variável no sentido de $C_2$ para $C_1$ com conservação de carga. ....	71
Figura 36 - Variação de carga num circuito com capacidade variável no sentido do condensador $C_2$ para $C_1$ com $R_u = 10 \Omega$ caso com conservação de carga. ....	73
Figura 37 - Variação de carga num circuito com capacidade variável no sentido do condensador $C_2$ para $C_1$ com $R_u = 50 \Omega$ caso com conservação de carga. ....	73
Figura 38 - Variação de carga num circuito com capacidade variável no sentido do condensador $C_2$ para $C_1$ com $R_u = 100 \Omega$ caso com conservação de carga. ....	74
Figura 39 - Variação de carga num circuito com capacidade variável no sentido do condensador $C_2$ para $C_1$ com $R_u = 1000 \Omega$ caso com conservação de carga. ....	74
Figura 40 - Condensador variável bidirecional controlado por transístores: caso com conservação de Carga II.....	75

## Índice de Tabelas

Tabela 1 - Caso sem perdas: Tensões obtidas pelo Simulador SPICE para $f = 1000$ Hz	35
Tabela 2 - Tensões obtidas teoricamente para $f = 1000$ Hz .....	35
Tabela 3 - Caso sem perdas: Tensões obtidas pelo simulador SPICE para $f = 4000$ Hz.	36
Tabela 4 – Caso sem perdas: Tensões obtidas teoricamente para $f = 4000$ Hz .....	36
Tabela 5 – Caso com Perdas: Tensões obtidas pelo simulador SPICE para $f = 1000$ Hz. .....	41
Tabela 6 - Caso com Perdas: Tensões obtidas pelo simulador SPICE para $f = 4000$ Hz. .....	41
Tabela 7 - Caso com Perdas: Tensões teóricas para $f = 1000$ Hz. ....	41
Tabela 8 - Caso com Perdas: Tensões teóricas Para $f = 4000$ HZ .....	42
Tabela 9 - Parâmetros usados para as simulações de uma estrutura periódica. ....	45
Tabela 10 - Componentes e tensões usadas para o circuito do condensador variável: Caso conservação de energia.....	61
Tabela 11 - Cálculos teóricos do intervalo de tempo necessário para transportar energia de $C_1$ para $C_2$ : Caso conservação de energia .....	61
Tabela 12 - Componentes e tensões usadas para o circuito do condensador variável: Caso conservação de carga. ....	68
Tabela 13 - Cálculos teóricos dos intervalos de tempo entre cada componente de $C_1$ para $C_2$ .....	70
Tabela 14 - Cálculos teóricos dos intervalos de tempo entre cada componente de $C_2$ para $C_1$ .....	72



## Lista de símbolos

B - Campo magnético

E - Campo elétrico

J - Densidade de corrente

$\rho$  - Densidade de carga

$\mu$  - Permeabilidade magnética

$\epsilon$  - Permitividade elétrica

v – Tensão elétrica

i - Corrente elétrica

$\gamma$  - Fator de propagação

$\Gamma$  - Coeficiente de reflexão

$\beta$  - Constante de propagação

$\omega$  - Frequência angular

$\alpha$  - Coeficiente de atenuação

L - Indutância

C - Capacidade

Q - Carga

R - Resistência

G - Condutância

$\tau$  - Coeficiente de transmissão

$\eta$  - Rendimento

P - Potência

## **Lista de acrónimos**

DC - Corrente Direta

AC - Corrente Alternada

MOSFET - *Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor*

NMOS - *Negative (channel) Metal Oxide Semiconductor*

PMOS - *Positive (channel) Metal Oxide Semiconductor*



## CAPÍTULO 1

# Introdução

### 1.1. Enquadramento

Um varactor é um díodo especificamente construído para explorar a dependência da capacidade da camada de depleção na interface da junção p-n quando esta está polarizada inversamente. A espessura da camada de depleção do varactor é proporcional ao quadrado da tensão inversa aplicada e, portanto, a capacidade é inversamente proporcional à raiz quadrada da tensão DC aplicada. Por exibirem esta característica, o varactor é utilizado nos circuitos de sintonia automática dos rádios dos automóveis [1]. O varactor é também utilizado em circuitos de comutação em alta frequência porque alterando a sua capacidade conseguimos controlar a sua impedância, funcionando então como um interruptor controlado por um sinal DC. Uma outra aplicação interessante é que a partir de um sinal alternado de grande amplitude aplicado a um varactor é possível extrair por filtragem sinais com frequência mais elevada (harmónicas).

A capacidade da camada de depleção do varactor é um conceito diferencial. Isto significa que é sempre necessário estabelecer um ponto de funcionamento em repouso através de um circuito elétrico DC de polarização, tal como é feito por exemplo nos amplificadores a transístores. Tal como nesses circuitos é necessário injetar um sinal AC de baixa amplitude, com o auxílio de condensadores de acoplamento. É esse sinal AC que vê a capacidade diferencial do varactor, que devido à não linearidade já mencionada na resposta à tensão DC pode ser facilmente modificada alterando simplesmente o ponto de funcionamento em repouso. É assim que funcionam os sintonizadores de rádio mencionados em cima. Por ser um dispositivo que só funciona em AC, o varactor não pode ser usado em circuitos onde se pretende observar a propagação de impulsos gaussianos com variação abrupta de capacidade (o assunto desta dissertação), por estes exibirem uma componente DC [2]. Uma outra limitação do varactor é que a sua capacidade está normalmente limitada aos pico farad e as variações da capacidade são em geral pequenas e limitadas pela não linearidade inerente ao funcionamento do dispositivo.

É possível ter um condensador variável que funcione em DC, por exemplo, um em que a distância entre placas é variada por um processo mecânico. Esses condensadores

são por exemplo os utilizados nos antigos sintonizadores de rádio, onde um mecanismo rotativo era utilizado para alterar a capacidade. O problema destes dispositivos é que por razões óbvias a transição é demasiado lenta para ter aplicação num problema de propagação guiada de ondas. Estas são as duas soluções conhecidas para o problema do condensador variável. Existem na literatura variações destes dispositivos, mas o seu princípio de funcionamento cai sempre numa das duas categorias em cima [2]. Por exemplo, as teclas de um computador portátil são um condensador variável. Quando carregamos numa tecla a distância entre placas do condensador ligado à tecla diminui, alterando a capacidade. Um dispositivo utilizado para encontrar alicerces de madeira dentro das paredes, também utiliza um condensador variável como princípio de funcionamento. Nesse caso, quando existe um alicerce de madeira é alterada a permitividade elétrica do material entre placas do condensador e a capacidade varia. Os microfones mais sensíveis, utilizados em estúdios de gravação, registam a voz através de um condensador variável: aqui é a pressão do ar que faz variar a capacidade.

Os transístores, em especial os MOSFET, os leds, mas em geral todos os semicondutores, exibem capacidade diferencial como mencionado para o varicap e existem diversas aplicações onde se explora essa característica [1].

O que parece não existir é um dispositivo que implemente um condensador variável que funcione numa gama de frequências que inclua sinais DC e que seja suficientemente rápido para ser incorporado em circuitos de alta frequência. Um dispositivo com estas características tem aplicações em conversores de frequência e pode ser utilizado para alterar a forma dos sinais que após viajarem alguns quilómetros numa linha de transmissão têm a sua forma alterada devido à dispersão. Tal como referido em cima, a gama de valores entre os quais podemos variar a capacidade com os dispositivos existentes é em geral muito limitada. A possibilidade de desenhar um dispositivo onde existe a liberdade de este funcionar fora dos pico-farad, por exemplo, nos  $\mu\text{F}$  ou até nos  $\text{mF}$  é um novo grau de liberdade que pode potenciar novos dispositivos em outras áreas do conhecimento.

## 1.2. Objetivos

Nesta tese faz-se uma análise da resposta temporal de uma estrutura eletromagnética que serve de modelo para o estudo da propagação de impulsos gaussianos numa linha de transmissão com parâmetros variáveis. A vantagem de usar impulsos gaussianos é que permite fazer uma única análise no domínio do tempo que dá a resposta em várias frequências. Em particular, a estrutura é implementada por uma rede de componentes formada por células unitárias com condensadores e bobinas que aproximam o funcionamento de uma linha de transmissão real.

Verifica-se que o estudo da propagação na estrutura de componentes discretos é diferente do estudo usual da linha contínua. Por exemplo, com a aproximação da linha por elementos discretos passamos a ter dispersão estrutural, que não existe no estudo usual das linhas de transmissão sem perdas. Clarificar os limites em que se pode reduzir esta dispersão sem aumentar excessivamente o número de componentes do circuito é um dos objetivos desta dissertação. A topologia da célula unitária também desempenha um papel importante. Por exemplo, podem ser desenhadas estruturas com matriz de transmissão simétricas e sem simetria para desempenhar a mesma função. Contudo, o comportamento eletromagnético das estruturas será bem diferente uma vez que as estruturas sem simetria permitem propagação de ondas em sentidos contrários com propriedades eletromagnéticas aparentemente distintas. Pretende-se por isso clarificar qual dos modelos (com ou sem simetria) é o mais adequado para o estudo que se pretende fazer nesta tese. Em particular, queremos caracterizar a impedância de Bloch da estrutura e a constante de propagação por forma a esclarecer quais os graus de liberdade disponíveis para o projeto a fim de reduzir o número de componentes utilizados sem comprometer demasiado as formas de onda na estrutura. Depois de caracterizar teoricamente a propagação na estrutura pretende-se construir alguns modelos com capacidade variável e estudar o efeito de transições abruptas de capacidades. Consideram-se transições em que se aumenta o valor da capacidade e outras em que se diminui o seu valor. Pretende-se utilizar um programa de simulação de circuitos elétricos (SPICE) para corroborar os resultados previstos teoricamente, também utilizado para otimizar os circuitos desenhados.

Finalmente, pretende-se desenhar um circuito para um condensador variável a ser usado nas células unitárias usando MOSFETs como circuitos de comutação por forma a obter um desenho que pode ser usado em DC e em alta frequência. Este objetivo é assim o de propor um circuito realista para mostrar a propagação de ondas na linha de transmissão e provar o seu funcionamento. Como se verá, não é possível implementar um dispositivo onde a conservação da carga e da energia sejam garantidas simultaneamente. Tanto as alterações de carga como as da energia têm como consequências diretas a necessidade de um conceito, que designaremos por lapso de tempo, já que a movimentação de carga elétrica de e para o condensador não pode ser feita instantaneamente. O mesmo se aplica à energia. Pretende-se assim mostrar o funcionamento de um condensador variável em que existe conservação da carga e outro onde existe conservação da energia.

### **1.3. Contribuições**

Nesta dissertação é efetuado um estudo sobre a propagação de ondas eletromagnéticas em estruturas periódicas. Posteriormente, são desenhados dispositivos com variação de capacidade nas estruturas periódicas estudadas. O trabalho desenvolvido foi feito no contexto de uma investigação ao abrigo do projeto TUBITAK/0002/2014 (FCT).

### **1.4. Estrutura da dissertação**

A presente dissertação é constituída por seis capítulos:

- Capítulo 1: Apresenta-se a importância, objetivos, motivação e contribuições do tema escolhido.
- Capítulo 2: Abordagem dos conceitos a usar na dissertação, bem como, a revisão geral dos temas relacionados com a dissertação.
- Capítulo 3: Refere-se aos conceitos e teoria da propagação em redes de parâmetros distribuídos.
- Capítulo 4: Simulação e estudo da propagação de um impulso gaussiano a viajar numa estrutura periódica, sem transição de capacidade e com transição de capacidade.

- Capítulo 5: Apresenta-se a arquitetura de circuitos com variação de capacidade para conservação de carga ou conservação de energia, bem como a discussão dos resultados obtidos da simulação.
- Capítulo 6: Discute-se o resultado geral da dissertação, assim como o trabalho futuro e ainda o que poderia ter sido melhorado.





## Revisão de Literatura

### 2.1. Linhas de transmissão

A propagação de ondas nas linhas de transmissão é um tema que sempre suscitou grande interesse na comunidade científica. As linhas de transmissão são estudadas no contexto de uma teoria mais geral, a teoria das ondas eletromagnéticas, introduzida por Maxwell no final do século XIX [3]. O cientista Oliver Heaviside, juntamente com Gibbs, é responsável pela forma vetorial das equações de Maxwell tal como são apresentadas nos dias de hoje, isto é, quatro equações com quatro variáveis ( $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{J}$  e  $\rho$ ) em vez das 20 equações com 20 variáveis [4]. Heaviside aplicou as equações de Maxwell ao estudo das linhas de transmissão, introduzindo as conhecidas equações do telegrafo. Estas são as equações que regem a propagação de ondas em linhas de transmissão e que explicam o funcionamento dos cabos de transmissão de sinais, como o cabo coaxial (uma invenção do próprio Heaviside).

Elementos de rede como indutores, resistências e condensadores são fundamentais para o estudo do comportamento de um modelo equivalente de uma linha de transmissão. Para analisar este modelo equivalente, é necessário determinar algumas das suas características, tais como matriz de transmissão, impedância característica de Bloch, constante de propagação e atenuação [5].

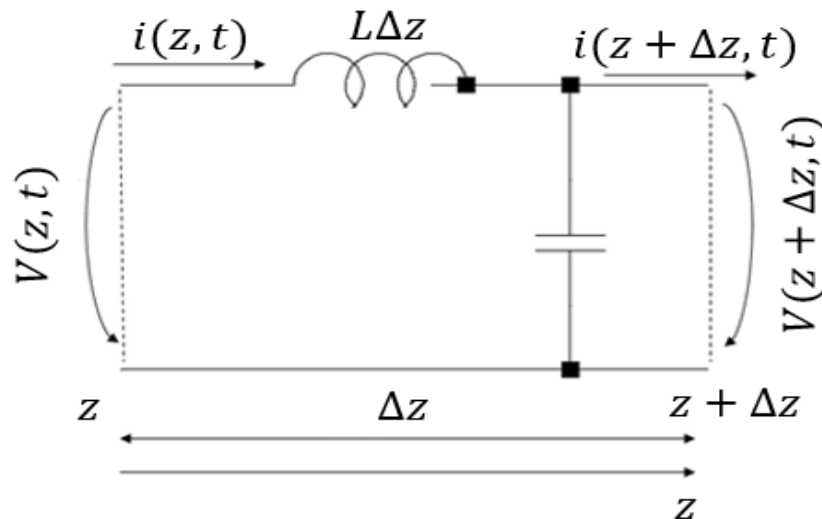


Figura 1 - Modelo equivalente de uma linha de transmissão sem perdas.

Na Figura 1 representa-se um modelo equivalente de uma linha de transmissão sem perdas. No eixo  $z$  existe um troço de linha  $\Delta z$  com dois fios, um representa a indutância  $L$ , enquanto o outro troço representa a capacidade  $C$ . Assim, no modelo de equação de linha de transmissão sem perdas da Figura 1 têm se que:

- $C$  é a capacidade de linha por unidade de comprimento (F/m)
- $L$  é a indutância de linha por unidade de comprimento (H/m)

A partir deste modelo, pode-se medir a tensão à entrada de um dado troço ( $V(z, t)$ ), ou até medir a tensão à saída de um troço ( $V(z + \Delta z, t)$ ). Também é possível medir a corrente que entra num dado troço ( $i(z, t)$ ), ou até a que saí de um dado troço ( $i(z + \Delta z, t)$ ). De seguida analisa-se a malha e o nó da linha de transmissão.

$$\begin{aligned}
 v(z, t) &= v_L + v(z + \Delta z, t) \\
 \Leftrightarrow v(z, t) &= L\Delta z \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} + v(z + \Delta z, t) \\
 \Leftrightarrow \frac{v(z + \Delta z, t) - v(z, t)}{\Delta z} &= -L\Delta z \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \frac{1}{\Delta z} \quad (2.1-1) \\
 \Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial z} &= -L \frac{\partial i}{\partial t}
 \end{aligned}$$

Analisando o nó, resulta:

$$\begin{aligned}
 i(z, t) &= i_c + i(z + \Delta z, t) \\
 \Leftrightarrow i(z + \Delta z, t) - i(z, t) &= -i_c \\
 \Leftrightarrow \frac{i(z + \Delta z, t) - i(z, t)}{\Delta z} &= -\frac{C\Delta z \frac{\partial v}{\partial t}(z + \Delta z, t)}{\partial z} \\
 \Leftrightarrow \frac{\partial i}{\partial z} &= -C \frac{\partial v}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{2.1-2}$$

As equações (2.1-1) e (2.1-2) são equivalentes às equações do modo B para propagação 1D de ondas eletromagnéticas:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t} &\leftrightarrow \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \\
 \frac{\partial i}{\partial z} = -C \frac{\partial v}{\partial t} &\leftrightarrow \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{2.1-3}$$

Ao qual os parâmetros  $\mu$ ,  $\varepsilon$ ,  $v$ ,  $i$  correspondem:

$$\begin{aligned}
 L &\leftrightarrow \mu & E_x &\leftrightarrow v \\
 C &\leftrightarrow \varepsilon & H_y &\leftrightarrow i
 \end{aligned}$$

Resultando nas equações de velocidade de fase de uma linha de transmissão sem perdas (2.1-4) e de impedância característica de uma linha de transmissão sem perdas (2.1-5) [6]:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \leftrightarrow v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{2.1-4}$$

$$z = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \leftrightarrow z = \frac{v}{i} = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{2.1-5}$$

## 2.2. Condensador

Um condensador consiste em 2 condutores carregados com cargas de igual magnitude e sinal oposto. A capacidade  $C$ , de qualquer condensador, é a relação de carga  $Q$ :

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad (2.1-6)$$

em que  $Q$  é a carga expressa em Columb,  $\Delta V$  a diferença de potencial em Volts e  $C$  a capacidade expressa em Faraday.

Quando reconfiguramos um condensador, isto é, quando mudamos as características físicas do mesmo, a energia conserva-se. Um condensador tem 2 placas metálicas de área  $A$ , com uma dada carga  $Q$ , separadas a uma distância  $d$ , e por um dielétrico isolante. Se for aplicado uma dada tensão, este condensador vai armazenar energia, admitindo que o condensador está inicialmente descarregado. Estas características do condensador podem ser observadas na Figura 2. A barra a preto representa um fio, que liga as extremidades das placas metálicas do condensador.

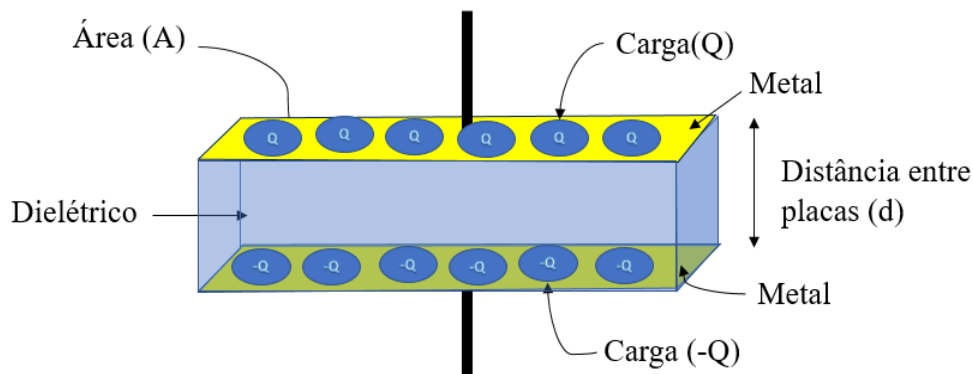


Figura 2 - Condensador de planos paralelos. As armaduras armazenam carga  $Q$  de sinal contrário devido à tensão aplicada  $\Delta V$ .

Se o dielétrico for a permitividade elétrica do vácuo ( $\epsilon_0 = 8,854 * 10^{-12}$ ), é possível determinar a capacidade de um condensador pela expressão:

$$C = \epsilon_0 * \frac{A}{d} \quad (2.1-4)$$

Sabendo a tensão existente num condensador ( $u_c$ ), é possível saber a quantidade de carga existente nesse condensador, através da expressão:

$$Q = c \times u_c \quad (2.1-5)$$

Os condensadores podem ser fabricados por diversos tamanhos e materiais. Os tipos mais comuns são os condensadores cerâmicos (Figura 3-a), condensadores eletrolíticos (Figura 3-b), condensadores de filme (Figura 3-c) ou supercondensadores (Figura 3-d), condensadores variáveis (Figura 3-e) ou *varicap* (Figura 3-f).

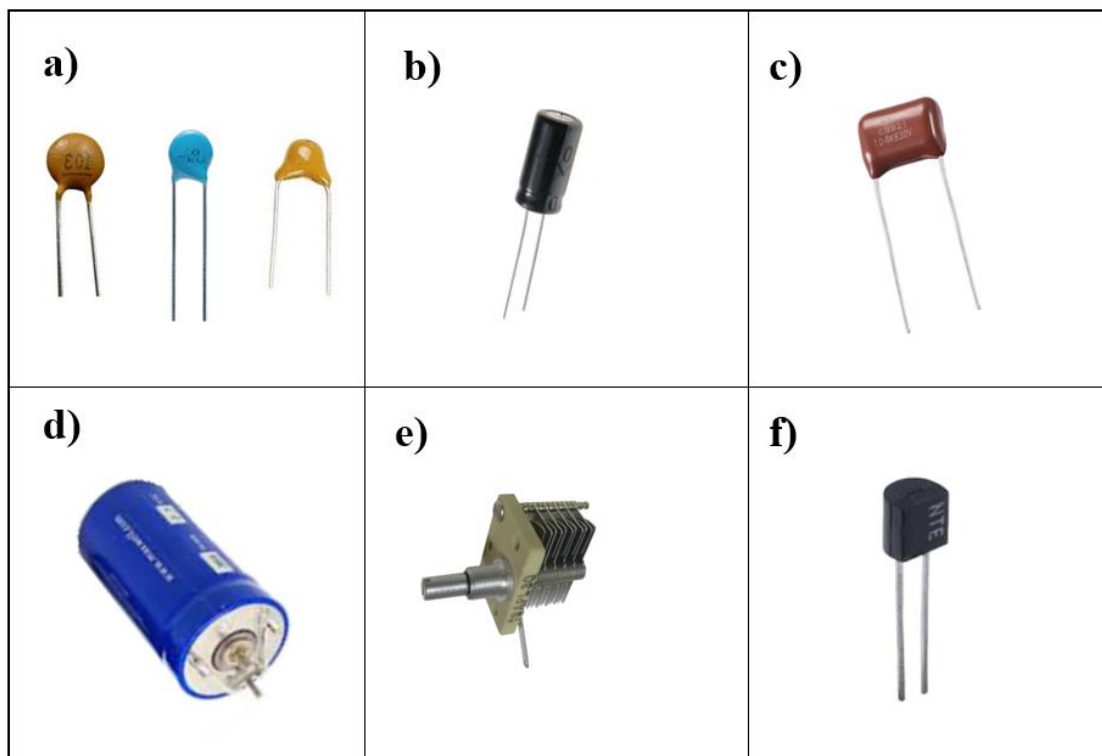


Figura 3 - Diferentes tipos de condensadores.

### 2.2.1. Condensador cerâmico

Um condensador que usa cerâmica como dielétrico, é designado por condensador cerâmico. Geralmente, este tipo de condensador, é muito pequeno em tamanho, e

fabricado com valor de capacitância baixo, entre 1 nF e 1  $\mu$ . No entanto, se o condensador cerâmico tiver um tamanho maior pode suportar tensões elevadas (condensador cerâmica de potência). No projeto apresentado por Silva Neto [7] são estudados os condensadores de cerâmica usados em aplicações de alta tensão para sistemas de armazenamento de alta energia.

### **2.2.2. Condensador eletrolítico**

O condensador eletrolítico usa um eletrólito para obter uma capacitância maior comparativamente com os outros tipos de condensadores. Os valores comuns de capacitância são entre os 1  $\mu$ F e 47 mF. No entanto, os valores elevados de capacitância pode implicar algumas desvantagens, como possíveis correntes de fuga e durabilidade limitada. No artigo desenvolvido na universidade de Sheffield [8] é proposto um condensador eletrolítico para o uso de drives PWM (*Pulse-width modulation*).

### **2.2.3. Condensador Filme**

O condensador de filme é um condensador que usa um filme plástico como dielétrico. A sua capacitância típica varia entre os 1 nF e 30  $\mu$ F. As grandes vantagens do condensador filme são a alta eficiência e uma durabilidade considerável. No artigo desenvolvido por Ron Anderson [9], são descritas as baixas perdas inerentes dos condensadores de filme. No mesmo artigo é proposta a utilização destes condensadores para aplicações de eletrônica de potência.

### **2.2.4. Super Condensador**

O tipo de condensador super condensador armazena elevadas quantidades de cargas elétricas. Os super condensadores combinam as propriedades dos condensadores e baterias num dispositivo, chegando a capacitância atingir os 12000 F. A sua grande desvantagem é o custo elevado comparativamente com os restantes tipos de condensadores. Atualmente, é usado em flash fotográfico ou dispositivos MP3. Na investigação realizada pelo centro

de pesquisa de Ottawa do Canadá [10], são apresentados os benefícios do uso do super condensador. Discute-se também o uso deste tipo de condensador em carros elétricos.

#### 2.2.4. Condensadores variáveis

Um dos tipos de condensadores variáveis são os condensadores de ar. Este tipo de condensador, usa o ar como dielétrico utilizando duas placas condutoras separadas por um espaço de ar. Os condensadores de ar têm uma capacitância pequena, oscilando entre os 100 pF e 1 nF. Estes condensadores podem ser aplicados em circuitos ressonantes, como por exemplo, sintonizadores de rádio.

Outro tipo de condensador variável é o varactor. A partir de um díodo, este condensador varia a capacidade em função da tensão aplicada, alterando a tensão DC aplicada no circuito. Tipicamente os valores de capacitância de um varactor, variam entre os 0.1 pF e 0.2 pF. O facto de ser bastante fiável e de ter um baixo custo, são algumas das vantagens deste tipo de condensador. O varactor pode ser aplicado em recetores de televisão ou rádios de rede local sem fios [2].



Figura 4 – Símbolo do díodo varactor.

Nesta dissertação, o condensador variável a implementar tem algumas semelhanças a um varactor. No entanto, pretende-se um condensador que atue com tensões AC, ou seja, divergindo de um condensador varactor.

### 2.3. Indutores

Um indutor é composto por uma bobina de fio enrolada à volta de um núcleo central, conforme é observado na Figura 5.



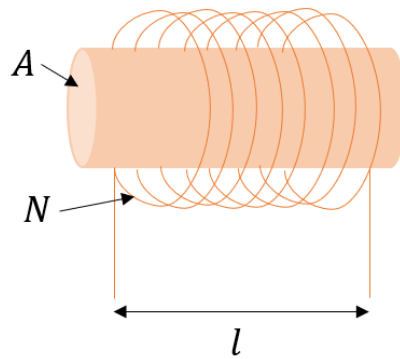


Figura 5 - Bobina de  $N$  espiras, comprimento  $L$  e área de secção transversal  $A$ .

Uma bobina indutora tem uma área central ( $A$ ), com um número constante de voltas ( $N$ ) de fio por unidade de comprimento ( $l$ ). Assim, a indutância de uma bobina pode ser calculada pela expressão [11]:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \quad (2.1-6)$$

em que a  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética no vácuo, com o valor de  $4\pi \times 10^{-7}$  H/m.

Os indutores podem ser classificados por diferentes tipos. Estes diferem no material usado no seu núcleo. Os três tipos de indutores mais comuns são de núcleo de ar (Figura 6-a), núcleo de ferro (Figura 6-b) ou núcleo de ferrite (Figura 6-c).

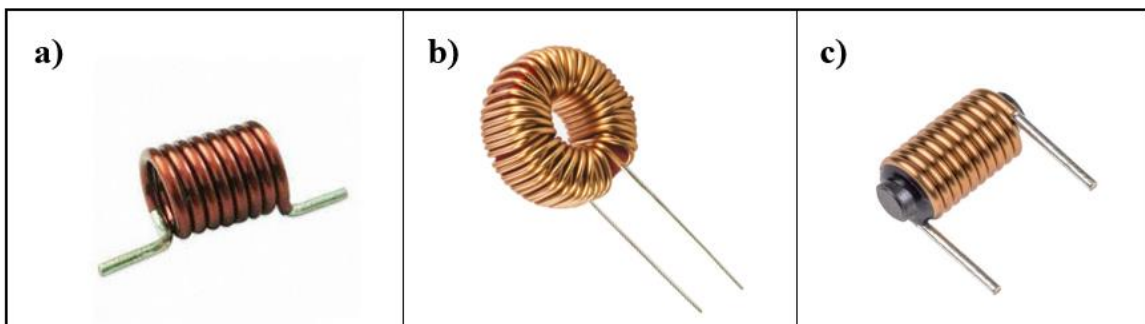


Figura 6 - Diferentes tipos de bobines.

### **2.3.1. Núcleo de ar**

O indutor núcleo de ar tem como grande vantagem não ter perdas dentro do núcleo, devido ao componente do núcleo ser o ar. No entanto, para obter um maior valor de indutância é necessário aumentar o número de voltas ao redor da bobina, o que aumenta consideravelmente o tamanho. No artigo desenvolvido por Naayagi [12], é proposto um indutor de núcleo de ar de alta frequência usado para aplicações aeroespaciais.

### **2.3.2. Núcleo de ferro**

O indutor núcleo de ferro é revestido de um material ferromagnético. Este indutor consegue obter elevados valores de indutância devido à sua permeabilidade magnética. No artigo de Gabriele Grandi [13] é apresentado um modelo de núcleo de ferro que pode ser usado para aplicações de alta frequência, como conversores de comutação.

### **2.3.3. Núcleo de ferrite**

Outro indutor com valor de indutância elevado é o núcleo de ferrite. De forma a fornecer um aumento na permeabilidade do meio em torno da bobina, usa-se um material cerâmico à base de ferro no núcleo, denominado por ferrite. No trabalho desenvolvido por Qin Yu é apresentado um modelo de circuito equivalente de radiofrequência (RF) para este tipo de indutor [14].

## **2.4. Trabalhos Relacionados**

Diversos projetos foram desenvolvidos com a teoria da propagação em redes de parâmetros distribuídos. Também as investigações com recurso a condensadores varactor não são uma novidade, pois existem diversos trabalhos desenvolvidos com este tipo de condensador.

No trabalho apresentado por Tan [15] faz-se a demonstração da presença de propagação de ondas eletromagnéticas ao longo de uma linha de transmissão num iPad. Estas ondas podem ser visualizadas no domínio do tempo usando um dispositivo, como

um iPad. No exemplo da demonstração é incluído uma linha de transmissão carregada com um circuito aberto e um curto-circuito.

Na investigação desenvolvida por Kingston [16] foi proposto um método para analisar a colocação de condensadores em série em longas linhas de transmissão com o objetivo de melhorar a capacidade de carga na linha. O método proposto é baseado num modelo de rede em frequências harmónicas.

O projeto apresentado por Othman [17], propõe um filtro RF adaptável num software de recetores de rádio. A metodologia é baseada num varactor aplicado a três padrões de comunicação sem fios UMTS (*Universal Mobile Telecommunications System*), WiFi e banda LTE (*Long Term Evolution*).

Timoshenkov sugere uma nova técnica [18] para a construção de varicap por uma eletrodeposição de cobre sobre silício poroso, sendo compatível com tecnologia da microeletrónica e dos microssistemas.

A investigação apresentada por Samizadeh Nikoo [19], propõe uma modificação adequada na relação não linear dos condensadores da rede NLTL (*Nonlinear Transmission Line*), baseadas no modelo de condensador varactor. Este sistema pode ser aplicado em ondas de choque e em pulsos de radiofrequência de alta potência.

No trabalho desenvolvido por Spiridonov Surin [20], é apresentado um método baseado num coeficiente de transmissão de sinal para medições de parâmetros na zona de micro-ondas, recorrendo a um varicap com um dielétrico mais denso e com transferência de carga. O mesmo autor noutro trabalho [21], propõe outro tipo de varicap, desta vez um elétrodo duplo com transferência de carga, com uma temperatura mais estável comparativamente com ao varicap convencional.

No projeto apresentado por Zakharov [22], sugere-se uma fórmula para a qualidade dos ressonadores de micro-ondas contendo um segmento de uma linha de transmissão e a variação de capacidade.

Um circuito para um VLCSRR (*varactor-loaded complementary split ring resonator*) é discutido por Adolfo Velez [23], recorrendo a diodos varator, o circuito pode ser aplicado em filtros de banda de passagem.

A análise realizada por Hegazi [24], mostra como um varactor pode converter o ruído AM na oscilação FM introduzindo uma capacitância de sintonia eficaz.

## Teoria da propagação em Redes de Parâmetros Distribuídos

Na secção 3.1 é apresentada uma pequena descrição das linhas de transmissão com perdas com o objetivo de apresentar os parâmetros envolvidos e as respetivas equações fundamentais. Outro conceito importante para o estudo da linha de transmissão, é a potência transferida à linha conforme a escolha dos parâmetros do circuito. O objetivo é garantir a máxima transferência de potência do gerador para a linha por isso, todo este conhecimento será usado para otimizar os circuitos em estudo nesta dissertação.

Os circuitos implementados na dissertação são discretos e constituídos por blocos designados por células unitárias. Será analisado a caracterização da dispersão na propagação de ondas, mais concretamente, o comportamento e funcionamento nas células unitárias sem perdas (secção 3.5) e com perdas (secção 3.6).

### 3.1. Linhas de Transmissão

Na Figura 7 apresenta-se uma linha de transmissão terminada com impedâncias de gerador e de carga arbitrárias,  $Z_g$  e  $Z_L$ . As linhas de transmissão têm perdas devido à condutividade finita dos condutores e à fuga nos dielétricos, mas estas perdas são normalmente baixas.

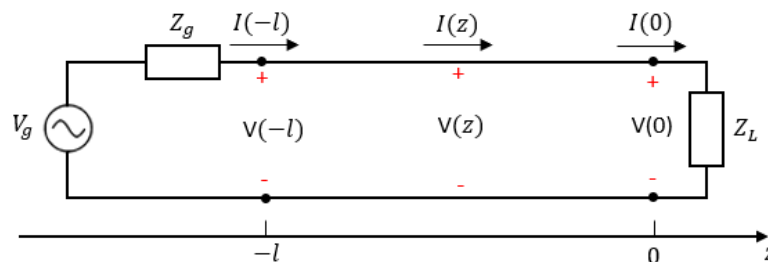


Figura 7 - Linha de transmissão terminada com impedâncias de gerador e de carga arbitrárias,  $Z_g$  e  $Z_L$ .

Assumindo as perdas nas linhas de transmissão, as respectivas equações para a tensão e corrente na linha são:

$$\begin{aligned} V(z) &= V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{\gamma z} \\ I(z) &= \frac{1}{Z_0} [V_0^+ e^{-\gamma z} - V_0^- e^{\gamma z}] \end{aligned} \quad (3.1-1)$$

onde  $V_0^+$  e  $V_0^-$  são as tensões da onda incidente e refletida respectivamente em  $z = 0$ . Já os parâmetros de  $\gamma$  e  $Z_0$  são respectivamente, o fator de propagação e a impedância característica na linha. Estas são obtidas através de:

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \\ Z_0 &= \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \end{aligned} \quad (3.1-2)$$

onde  $R$  é a resistência série da linha por unidade de comprimento,  $L$  a indutância série da linha por unidade de comprimento,  $G$  a condutância paralela da linha por unidade de comprimento e por último  $C$  é a capacidade paralela da linha por unidade de comprimento.

Se a linha está terminada na impedância  $Z_L$  temos,  $V(0) = Z_L I(0)$ , recorrendo às equações anteriores, resulta o coeficiente de reflexão na carga:

$$\Gamma_L = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (3.1-3)$$

Para o caso em que  $Z_L = Z_0$  diz-se que a linha está adaptada e por isso não existe onda refletida ( $V_0^- = 0$  para qualquer  $V_0^+ \neq 0$ ). Já a impedância de entrada da linha,  $Z_{in} = \frac{V(-l)}{I(-l)}$  é dada por:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{1 + \Gamma_L e^{-2\gamma l}}{1 - \Gamma_L e^{-2\gamma l}} \quad (3.1-4)$$

Para calcular a tensão  $V_0^+$  pode-se utilizar a equação do divisor de tensão no plano do gerador:

$$V(-l) = V_g \frac{Z_{in}}{Z_{in} + Z_g} \quad (3.1-5)$$

Usando a equação (3.1-1) e (3.1-3) vem então:

$$V_0^+ = V_g \frac{Z_{in}}{Z_{in} + Z_g} \frac{1}{(e^{\gamma l} + \Gamma_L e^{-\gamma l})} \quad (3.1-5)$$

Alternativamente, é possível correr a malha do gerador onde:

$$V_g = Z_g I(-l) + V(-l) \quad (3.1-6)$$

e obter  $V_0^+$  em função de  $Z_0$  em vez de  $Z_{in}$  recorrendo às equações (3.1-1):

$$V_0^+ = \frac{Z_0}{Z_0 + Z_g} \frac{e^{-\gamma l}}{(1 - \Gamma_g \Gamma_L e^{-2\gamma l})} V_g \quad (3.1-7)$$

onde  $\Gamma_g$  é o coeficiente de reflexão olhando para o gerador, dado por:

$$\Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} \quad (3.1-8)$$

Se  $Z_{in} = R_{in} + jX_{in}$  e  $Z_g = R_g + jX_g$ , então é possível obter a potência entregue à linha:

$$\begin{aligned} P_{in} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{V(-l)I^*(-l)\} \\ &= \frac{1}{2} |V_g|^2 \frac{R_{in}}{(R_{in} + R_g)^2 + (X_{in} + X_g)^2} \end{aligned} \quad (3.1-9)$$

Supondo que a carga é adaptada à linha, isto é,  $Z_L = Z_0$ , temos  $\Gamma_L = 0$  e  $Z_{in} = Z_0$  pelo que:

$$P_{in} = \frac{1}{2} |V_g|^2 \frac{R_0}{(R_0 + R_g)^2 + (X_0 + X_g)^2} \quad (3.1-10)$$

em que  $Z_0 = R_0 + jX_0$ .

No caso em que o gerador é adaptado à linha temos  $Z_{in} = Z_g$ . Para este caso é necessário escolher os valores de  $Z_L$ ,  $Z_0$  e o comprimento da linha  $l$ . Neste caso, a potência entregue à linha é:

$$P_{in} = \frac{1}{2} |V_g|^2 \frac{R_g}{4(R_g^2 + X_g^2)} \quad (3.1-11)$$

Comparando a equação (3.1-10) com a (3.1-11), observa-se que quando o gerador está adaptado à linha a sua potência fornecida pode ser menor em relação ao caso em que a carga está adaptada à linha sem a adaptação no plano do gerador. Isto pode ser verificado, por exemplo, com os seguintes parâmetros:  $R_0 = 1 \times 10^3 \frac{\Omega}{m}$ ,  $X_0 = 1.0 \frac{\Omega}{m}$ ,  $R_g = 1.0 \frac{\Omega}{m}$ ,  $X_g = 1 \times 10^3 \frac{\Omega}{m}$  e  $V_g = 10 \text{ V}$ . Nestas condições, a potência entregue à linha é  $P_{in} = 2.25 \times 10^{-2} \text{ W}$  no caso da linha adaptada à carga e  $P_{in} = 5.00 \times 10^{-5} \text{ W}$  para adaptação no plano do gerador.

Admitindo que a impedância do gerador é fixa e conhecida, obtém-se uma condição de máxima transferência para a linha a partir das condições:

$$\frac{\partial P_{in}}{\partial R_i} = 0, \frac{\partial P_{in}}{\partial X_i} = 0 \quad (3.1-12)$$

Usando a equação (3.1-9) com  $\frac{\partial P_{in}}{\partial R_i} = 0$  obtém-se:

$$R_g^2 - R_{in}^2 + (X_{in} + X_g)^2 = 0 \quad (3.1-13)$$

e com  $\frac{\partial P_{in}}{\partial X_i} = 0$  vem:

$$X_{in}(X_{in} + X_g) = 0 \quad (3.1-14)$$

o que permite concluir que a máxima transferência de potência ocorre quando  $R_{in} = R_g$  e  $X_{in} = -X_g$ , dando origem à expressão:

$$Z_{in} = Z_g^* \quad (3.1-15)$$

A potência entregue à linha nestas condições, de acordo com a equação (3.1-9), é então:



$$P_{in} = \frac{1}{2} |V_g|^2 \frac{1}{4R_g} \quad (3.1-16)$$

Recorrendo aos valores do exemplo em cima obtém-se uma potência entregue à linha de  $P_{in} = 12.5 \text{ W}$ , o que é por várias ordens de grandeza acima do que se consegue com as adaptações no plano de carga e gerador.

Finalmente, importa referir que a eficiência do sistema não é garantida por nenhuma das condições anteriores.

A potência fornecida pelo gerador é dada por:

$$P_g = \frac{1}{2} \text{Re}\{V_g I_g^*\} \quad (3.1-17)$$

Notando que  $V_g = Z_g I(-l) + V(-l)$  pode-se então obter o rendimento do sistema:

$$\eta = \frac{P_{in}}{P_g} = 1 - \frac{P_j}{P_g} \quad (3.1-18)$$

onde  $P_j$  representa as perdas por efeito de joule na resistência interna do gerador:

$$P_j = \frac{1}{2} R_g |I_g|^2 \quad (3.1-19)$$

Um caso interessante é quando existe adaptação na carga e no gerador ( $Z_g = Z_L = Z_0$ ). Para este caso não existem reflexões nos planos do gerador e da carga. Obtém-se  $V_g = Z_g I(-l) + V(-l)$  com  $V(-l) = Z_0 I(-l)$  porque  $Z_{in} = Z_0$  para  $Z_L = Z_0$ . Assim,  $V_g = 2Z_0 I(-l) = 2V(-l)$ , em que  $Z_0 = Z_g$  e o rendimento é então  $\eta = 50\%$ . A eficiência pode ser melhorada se o valor  $Z_g$  for o mais pequeno possível, o que é uma limitação, uma vez que a impedância do gerador usado nesta dissertação é  $Z_g = 50 \Omega$ .

### 3.2. Constante de Propagação, Impedância de Bloch e equações de uma estrutura periódica infinita

Nesta secção inicia-se o estudo da propagação de ondas numa estrutura periódica, tal como é apresentado na Figura 8. Admite-se que cada célula unitária é constituída por uma estrutura de tamanho  $\Delta z$ . A relação entre as tensões e as correntes nos seus terminais é caracterizada por uma matriz  $ABCD$  na forma:

$$\begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} \quad (3.2-1)$$

em que A, B, C e D são os parâmetros de transmissão para determinar a partir do circuito elétrico da célula unitária. Por agora faz-se uma análise geral e independente da implementação particular desse circuito elétrico. Para existir propagação de ondas na estrutura as tensões e correntes no porto n podem diferir das tensões e correntes no porto n + 1 apenas por um fator de propagação:

$$\begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} = e^{\gamma \Delta z} \begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} \quad (3.2-2)$$

onde  $\gamma$  é o fator de propagação, dado por  $\gamma = \alpha + j\beta$ ,  $\alpha$  é a atenuação e  $\beta$  é a constante de propagação. Utilizando as equações (3.2-1) e (3.2-2) chega-se à seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} A - e^{\gamma \Delta z} & B \\ C & D - e^{\gamma \Delta z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} = 0 \quad (3.2-3)$$

cujas soluções complexas são obtidas a partir da equação:

$$AD - (A + D)e^{\gamma \Delta z} + e^{2\gamma \Delta z} - BC = 0 \quad (3.2-4)$$

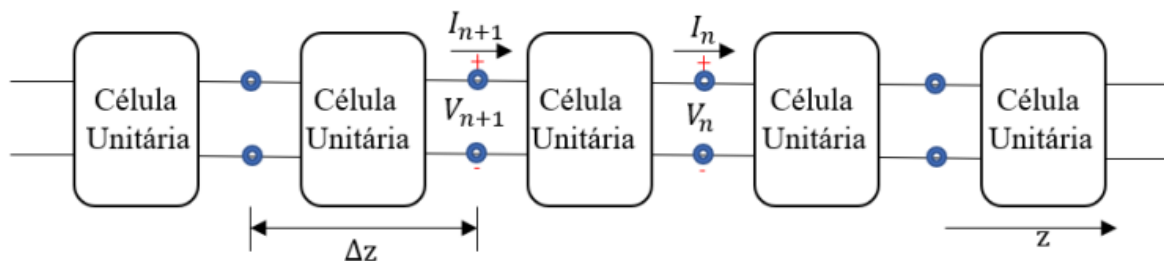


Figura 8 - Circuito equivalente de uma estrutura periódica com células unitárias de tamanho  $\Delta z$ .

Como as estruturas usadas nesta dissertação são recíprocas, considera-se  $AD - BC = 1$ . Assim, aplicando a fórmula resolvente resulta:

$$e^{\gamma\Delta z} = \frac{A + D}{2} \pm \sqrt{\frac{(A + D)^2 - 4}{2}} \quad (3.2-5)$$

Para além da constante de propagação das ondas na estrutura, está-se também interessado na impedância característica das ondas. Pode-se definir a impedância característica aos terminais da célula unitária da seguinte forma:

$$Z_B = \frac{V_n}{I_n} \quad (3.2-6)$$

Esta impedância é conhecida por impedância de Bloch [2], devido às semelhanças da presente análise com a propagação de ondas elásticas em estruturas atómicas de cristais periódicos. Utilizando a equação (3.2-3) resulta:

$$Z_B = -\frac{B}{A - e^{\gamma\Delta z}} \quad (3.2-7)$$

de acordo com a equação (3.2-5), é possível também obter duas soluções dadas por:

$$Z_B^{\pm} = -\frac{2B}{A - D \pm \sqrt{(A + D)^2 - 4}} \quad (3.2-8)$$

Se definir-se o fator de propagação na equação:

$$e^{\gamma\Delta z} = \frac{A + D}{2} + \sqrt{\frac{(A + D)^2 - 4}{2}} \quad (3.2-9)$$

Isto é, considerando apenas a solução correspondente ao sinal “+” da equação (3.2-5), é possível demonstrar a outra solução para  $e^{-\gamma\Delta z}$ :

$$e^{-\gamma\Delta z} = \frac{A + D}{2} - \sqrt{\frac{(A + D)^2 - 4}{2}} \quad (3.2-10)$$

De facto,

$$\begin{aligned}
 e^{-\gamma\Delta z} &= \frac{1}{e^{\gamma\Delta z}} \\
 &= \frac{2}{A + D + \sqrt{(A + D)^2 - 4}} \\
 &= 2 \frac{A + D - \sqrt{(A + D)^2 - 4}}{(A + D)^2 - [(A + D)^2 - 4]} \\
 &= 2 \frac{A + D - \sqrt{(A + D)^2 - 4}}{4} \\
 &= \frac{A + D}{2} - \frac{\sqrt{(A + D)^2 - 4}}{2}
 \end{aligned} \tag{3.2-11}$$

Assim, o termo  $e^{\gamma\Delta z}$  está também associado à impedância  $Z_B^+$  enquanto o termo  $e^{-\gamma\Delta z}$  a  $Z_B^-$ . Assim, a solução geral do sistema em (3.2-1) é:

$$\begin{aligned}
 V_{n+1} &= V_n^+ e^{\gamma\Delta z} + V_n^- e^{-\gamma\Delta z} \\
 I_{n+1} &= \frac{V_n^+}{Z_B^+} e^{\gamma\Delta z} + \frac{V_n^-}{Z_B^-} e^{-\gamma\Delta z}
 \end{aligned} \tag{3.2-12}$$

em que  $V_n^+$  e  $V_n^-$  são respetivamente, as amplitudes da onda incidente e refletida no plano de carga ( $Z = 0$ ). De acordo com a equação (3.2-2) pode ser definido:

$$\begin{aligned}
 V_{n+1}^+ &= V_n^+ e^{\gamma\Delta z} \\
 V_{n+1}^- &= V_n^- e^{-\gamma\Delta z}
 \end{aligned} \tag{3.2-13}$$

também na forma:

$$\begin{aligned}
 V_n &= V_n^+ V_n^- \\
 I_n &= \frac{V_n^+}{Z_B^+} + \frac{V_n^-}{Z_B^-}
 \end{aligned} \tag{3.2-14}$$

### 3.3. Coeficiente de Reflexão de uma estrutura periódica terminada

Nesta secção é analisado o caso em que a linha está terminada por uma carga  $Z_L$ , tal como é mostrado na Figura 9.

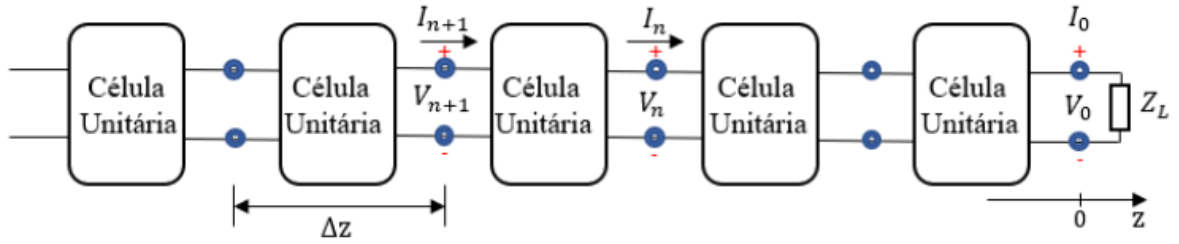


Figura 9 - Circuito equivalente de uma estrutura periódica com células unitárias de tamanho  $\Delta z$  terminada numa carga  $Z_L$ .

Na carga temos  $n = 0$ . Recorrendo às expressões obtidas em (3.2-14), resulta:

$$\begin{aligned} V_0 &= V_0^+ V_0^- \\ &= Z_L I_0 \\ &= Z_L \left( \frac{V_0^+}{Z_B^+} + \frac{V_0^-}{Z_B^-} \right) \end{aligned} \quad (3.3-1)$$

o que permite calcular o coeficiente de reflexão na carga:

$$\Gamma_L = \frac{V_0^-}{V_0^+} = \frac{\frac{Z_L}{Z_B^+} - 1}{\frac{Z_L}{Z_B^-} - 1} \quad (3.3-2)$$

No caso em que as células unitárias são simétricas, ou seja,  $A = D$ , conclui-se que a partir equação (3.2-8) que  $Z_B^+ = -Z_B^- = Z_L$  uma vez que:

$$Z_B^\pm = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 - 1}} \quad (3.3-3)$$

Nestas condições, o coeficiente de reflexão toma a forma mais conhecida:

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_B}{Z_L + Z_B} \quad (3.3-4)$$

No caso mais geral da equação (3.3-2), para evitar reflexões na estrutura periódica terminada pela impedância  $Z_L$  deve-se ter  $Z_L = Z_B^+$ .

### 3.4. Estrutura periódica terminada com gerador e carga

Considera-se o circuito apresentado na Figura 10, que consiste numa cascata de  $N$  células unitárias (redes de dois portos), onde o porto 1 está ligado ao gerador de tensão  $V_g$  e impedância interna  $Z_g$ . Por outro lado, o porto  $N$  está ligado à carga  $Z_L$ . O comprimento da estrutura é  $l = N\Delta z$ . As condições fronteira são:

$$V_g = Z_g I_N + V_N, \quad V_0 = Z_L I_0 \quad (3.4-1)$$

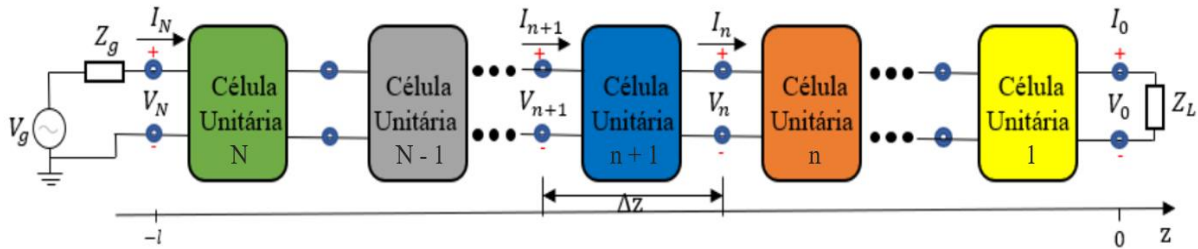


Figura 10 - Circuito equivalente de uma estrutura periódica com células unitárias de tamanho  $\Delta z$  terminada de um lado por um gerador de tensão  $V_g$ , impedância interna  $Z_g$  e no outro lado por uma carga  $Z_L$ .

Aplicando as equações obtidas em (3.2-13) à célula mais à direita vem:

$$\begin{aligned} V_1^+ &= V_0^+ e^{\gamma \Delta z} \\ V_1^- &= V_0^- e^{\gamma \Delta z} \end{aligned} \quad (3.4-2)$$

Para a célula anterior obtém-se:

$$\begin{aligned} V_2^+ &= V_1^+ e^{\gamma \Delta z} = V_0^+ e^{2\gamma \Delta z} \\ V_2^- &= V_1^- e^{-\gamma \Delta z} = V_0^- e^{-2\gamma \Delta z} \end{aligned} \quad (3.4-3)$$

ou seja, as tensões das ondas + e - na entrada de uma célula relacionam-se respetivamente com as tensões das ondas + e - na saída de outra célula por um fator  $e^{\gamma \Delta z}$  (para as ondas +) e  $e^{-\gamma \Delta z}$  (para as ondas -) elevado ao número de células entre as duas e contando com as mesmas:

$$\begin{aligned} V_n^+ &= V_0^+ e^{\gamma n \Delta z} \\ V_n^- &= V_0^- e^{-\gamma n \Delta z} \end{aligned} \quad (3.4-4)$$

Como existem N células entre a entrada e a saída da estrutura resulta:

$$\begin{aligned} V_N^+ &= V_0^+ e^{\gamma l} \\ V_N^- &= V_0^- e^{-\gamma l} \end{aligned} \quad (3.4-5)$$

onde  $l = N\Delta z$  é o comprimento da estrutura. Considerando apenas o caso em que as matrizes ABCD das células unitárias são simétricas, isto é,  $A = D$ . Nessas condições, o coeficiente de reflexão no plano de carga vem:

$$\Gamma_{in} = \frac{V_N^-}{V_N^+} = \Gamma_L e^{-2\gamma l} \quad (3.4-6)$$

em que  $\Gamma$  é o coeficiente de reflexão no plano de carga obtido pela equação (3.3-4). Da condição fronteira no gerador (equação (3.4-1)) obtém-se a expressão:

$$\zeta V_g = V_N^+ - \Gamma_g V_N^- \quad (3.4-7)$$

onde o uso das equações (3.2-14) em que  $n = N$  e  $Z_B^+ = -Z_B^- = Z_B$  e se introduziram os seguintes parâmetros:

$$\zeta = \frac{Z_B}{Z_g + Z_B}, \quad \Gamma_g = \frac{Z_g - Z_B}{Z_g + Z_B} \quad (3.4-8)$$

Recorrendo à equação (3.4-6) para escrever  $V_N^-$  em termos de  $V_N^+$  permite-se determinar  $V_N^+$ :

$$V_N^+ = \frac{\zeta}{1 - \Gamma_g \Gamma_L e^{-2\gamma l}} V_g \quad (3.4-9)$$

e da equação (3.4-5) vem:

$$V_0^+ = V_g \frac{Z_B}{Z_g + Z_B} \frac{e^{-\gamma l}}{(1 - \Gamma_g \Gamma_L e^{-2\gamma l})} \quad (3.4-10)$$

Utilizando novamente a expressão (3.3-2) é possível obter também  $V_0^-$  :

$$V_0^- = V_g \frac{Z_B}{Z_g + Z_B} \frac{\Gamma_L e^{-\gamma l}}{(1 - \Gamma_g \Gamma_L e^{-2\gamma l})} \quad (3.4-11)$$

Resumindo, as equações para a tensão e corrente na estrutura são dadas por:

$$\begin{aligned} V_n &= V_0^+ e^{-\gamma z_n} + V_0^- e^{\gamma z_n} \\ I_n &= \frac{1}{Z_B} (V_0^+ e^{-\gamma z_n} - V_0^- e^{\gamma n \Delta z}) \end{aligned} \quad (3.4-12)$$

onde se fez  $z_n = -n\Delta z$ , e  $\gamma$  e  $Z_B$  são determinados a partir dos parâmetros ABCD, usando as equações:

$$e^{-\gamma \Delta z} = \frac{A+D}{2} + \frac{\sqrt{(A+D)^2 - 4}}{2}, \quad Z_B = \frac{B}{\sqrt{A^2 - 1}} \quad (3.4-13)$$

### 3.5. Célula unitária de uma linha de transmissão (caso sem perdas)

Nesta secção considera-se uma célula unitária apresentada na Figura 11. O objetivo é calcular a sua matriz de transmissão, a sua impedância característica de Bloch e caracterizar o impacto das dimensões da célula ( $\Delta z$ ) na propagação das ondas na estrutura. Em particular irá ser analisado que um valor de  $\Delta z$  diferente de zero tem como consequência a dispersão das ondas na estrutura. Esta célula unitária é um dos modelos de parâmetros distribuídos utilizado para caracterizar um troço de linha de transmissão sem perdas de tamanho  $\Delta z$ . No circuito,  $L$  é a indutância em série por unidade de comprimento dos dois condutores da linha (H/m) e  $C$  a capacidade por unidade de comprimento entre os dois condutores (F/m).

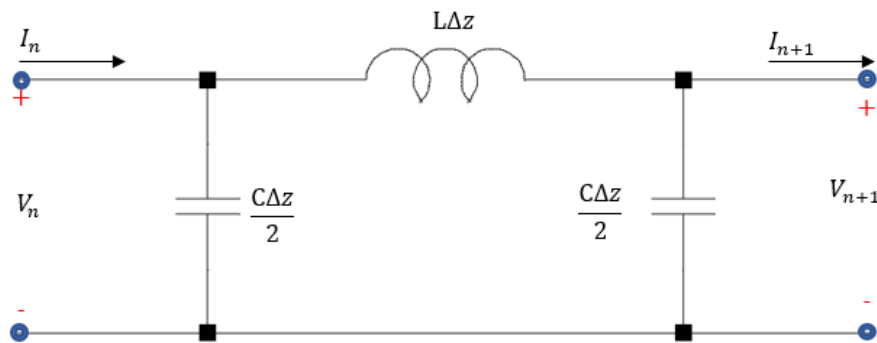


Figura 11 - Célula unitária simétrica sem perdas.

Os coeficientes  $A$  e  $C$  (não confundir este coeficiente com a capacidade) são obtidos a partir do circuito em aberto no terminal  $n + 1$  com as seguintes expressões:



$$A = \left. \frac{V_n}{V_{n+1}} \right|_{I_{n+1}=0}, \quad C = \left. \frac{I_n}{V_{n+1}} \right|_{I_{n+1}=0} \quad (3.5-1)$$

Para os coeficientes B e D considera-se um curto circuito no terminal  $n + 1$  e utiliza-se as expressões:

$$B = \left. \frac{V_n}{I_{n+1}} \right|_{V_{n+1}=0}, \quad D = \left. \frac{I_n}{I_{n+1}} \right|_{V_{n+1}=0} \quad (3.5-2)$$

Numa linha de transmissão é possível trabalhar com admitâncias em vez de impedâncias. Nesta dissertação, optou-se por representar a matriz de transmissão ABCD recorrendo a admitâncias [2]. Se considerarmos uma célula de uma linha de transmissão sem perdas na forma de impedância temos que:

$$\begin{aligned} Z_L &= j\omega L\Delta z \\ Z_C &= \frac{1}{j\omega \frac{C\Delta z}{2}} \end{aligned} \quad (3.5-3)$$

O circuito sobre a forma de admitância é mostrado na Figura 12. Para os cálculos dos parâmetros da matriz ABCD [2] admite-se que:

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{Y_2}{Y_3} \\ B &= \frac{1}{Y_3} \\ C &= Y_1 + Y_2 + \frac{Y_1 Y_2}{Y_3} \\ D &= 1 + \frac{Y_1}{Y_3} \end{aligned} \quad (3.5-4)$$

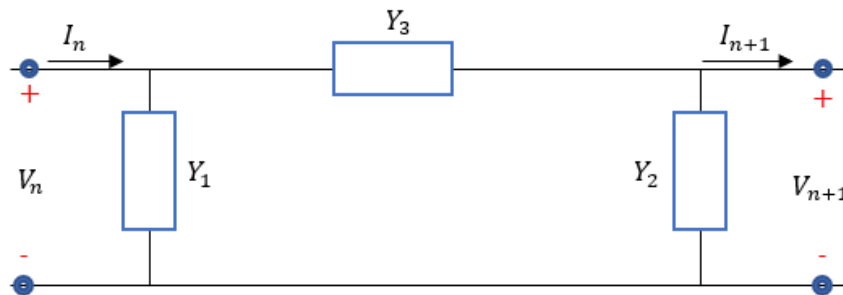


Figura 12 - Esquema equivalente em  $\Pi$  de um Célula unitária sem perdas.

As admitâncias  $Y_1, Y_2$  e  $Y_3$  são o inverso das respectivas impedâncias. Por exemplo, o valor da admitância  $Y_2$  corresponde à impedância  $\frac{1}{Y_2}$ . Recorrendo às fórmulas em (3.5-3), chega-se à matriz de transmissão ABCD:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \omega^2 L \Delta z \frac{C \Delta z^2}{2} & j\omega L \Delta z \\ j\omega C \Delta z - j\omega^3 L \Delta z \left(\frac{C \Delta z}{2}\right)^2 & 1 - \omega^2 L \Delta z \frac{C \Delta z^2}{2} \end{bmatrix} \quad (3.5-5)$$

Na equação (3.5-5) verifica-se que  $AD - BC = 1$ , ou seja, a matriz é recíproca. A matriz também é simétrica pois  $A = D$ . Assim, a impedância característica pode ser calculada a partir da equação (3.3-3):

$$Z_B^\pm = \frac{B}{\sqrt{A^2 - 1}} = \frac{j\omega L \Delta z}{\sqrt{\left(1 - \omega^2 L \Delta z \frac{C \Delta z}{2}\right)^2 - 1}} \quad (3.5-6)$$

No caso limite  $\Delta z \rightarrow 0$  obtém-se o resultado clássico  $Z_B = Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ , correspondente à impedância característica de uma linha de transmissão sem perdas com indutância  $L$ , e capacidade  $C$  por unidade comprimento. No geral, a impedância  $Z_B$  é complexa o que significa que para ter adaptação será necessário terminar a estrutura com uma impedância  $Z_L = Z_B$ , o que na pratica pode ser implementado com uma resistência  $R_0$  em série com uma carga reativa,  $C_0$  (caso capacitivo) ou  $L_0$  (caso indutivo). Os valores  $R_0, C_0, L_0$  são calculados a partir da equação (3.5-6) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} R_0 &= \text{Re}\{Z_B\} \\ L_0 &= \frac{\text{Im}\{Z_B\}}{\omega} \quad (\text{se } \text{Im}\{Z_B\} > 0) \\ C_0 &= -\frac{1}{\omega \text{Im}\{Z_B\}} \quad (\text{se } \text{Im}\{Z_B\} < 0) \end{aligned} \quad (3.5-7)$$

Para caracterizar a dispersão das ondas na estrutura recorre-se à equação (3.2-4). Tendo em conta que  $AD - BC = 1$  e que  $A = D = 1 - \omega^2 LC \Delta z^2 / 2$ , vem então:

$$\cosh(\gamma \Delta z) = \frac{A + D}{2} = 1 - \frac{1}{2} \omega^2 LC \Delta z^2 \quad (3.5-8)$$

Se  $\gamma = \alpha + j\beta$ , então:

$$\cosh(\gamma\Delta z) = \cosh(\alpha\Delta z) \cos(\beta\Delta z) + j \sinh(\alpha\Delta z) \sin(\beta\Delta z) = 1 - \frac{1}{2} \omega^2 LC \Delta z^2 \quad (3.5-9)$$

Sendo o lado direito da equação puramente real, existem dois casos possíveis para a resolução da parte real da equação:

- Caso I:  $\sinh(\alpha\Delta z) = 0$
- Caso II:  $\sin(\beta\Delta z) = 0$

Para o caso I implica que  $\alpha = 0$  pois a função  $\sinh(x)$  só se anula para  $x = 0$ . As soluções do caso I correspondem às soluções em que existe propagação sem perdas na estrutura, orientadas pela equação:

$$\cosh(\beta\Delta z) = 1 - \frac{1}{2} \omega^2 LC \Delta z^2 \quad (3.5-10)$$

onde se teve em conta que  $\cosh(\alpha\Delta z) = \cosh(0) = 1$ . Por outro lado, as soluções do caso II correspondem aos casos em que pode existir propagação com  $\alpha \neq 0$ , o que implica em geral perdas. Para este caso a equação é a seguinte:

$$(-1)^m \cosh(\alpha\Delta z) = 1 - \frac{1}{2} \omega^2 LC \Delta z^2 \quad (3.5-11)$$

onde se teve em conta  $\beta\Delta z = m\pi$ , com  $m$  inteiro, implica  $\cosh(\beta\Delta z) = (-1)^m$ . Nesta tese interessa estudar o caso em que existe propagação que corresponde ao caso I e determinar a gama de frequências com  $\alpha = 0$ . Dito de outra forma, as estruturas são desenhadas para funcionar somente nessa gama de frequência com  $\alpha = 0$  (banda de passagem). Os sinais ao propagarem-se na linha vão sofrer dispersão uma vez que a equação (3.5-10) não representa uma relação linear entre  $\omega$  e  $\beta$ . Para caracterizar esta relação, chamada relação de dispersão, é necessário resolver a equação (3.5-10):

$$\cosh(\beta\Delta z) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\beta\Delta z}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} \omega^2 LC \Delta z^2 \quad (3.5-12)$$

o que implica:

$$\omega^2 = \frac{4}{LC\Delta z^2} \sin^2\left(\frac{\beta\Delta z}{2}\right) \rightarrow \omega = \pm \frac{2}{\sqrt{LC}\Delta z} \sin\left(\frac{\beta\Delta z}{2}\right) \quad (3.5-13)$$

Como se pode observar, o valor de  $\omega$  está limitado ao valor máximo  $\omega_{\max} = \frac{2}{\sqrt{LC}\Delta z}$ . Isto quer dizer, a condição  $\omega < \omega_{\max}$  define a banda de passagem da estrutura. A relação de dispersão no caso limite  $\Delta z \rightarrow 0$  é dada por:

$$\omega = \pm \frac{1}{\sqrt{LC}\Delta z} \beta \quad (3.5-14)$$

Este resultado é obtido através da equação (3.5-12) tendo em conta o limite:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \sin\left(\frac{\beta\Delta z}{2}\right) = \frac{\beta}{2} \quad (3.5-15)$$

Esta situação corresponde ao caso clássico de uma linha de transmissão sem perdas, em que os sinais se propagam sem atenuação ou alteração de forma com velocidade de fase  $v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Na Figura 13 é apresentado as curvas normalizadas aos valores máximos  $\omega_{\max}$  e  $\beta_{\max} = \frac{\pi}{\Delta z}$ , nos casos em que  $\Delta z \neq 0$  (curvas a cheio, vermelho) e  $\Delta z = 0$  (curvas tracejadas, azul).

Em conclusão na Figura 13, verifica-se que na estrutura composta por elementos distribuídos com secções de células unitárias de comprimento  $\Delta z \neq 0$  não é permitida a propagação de ondas com frequências maiores que  $\omega_{\max}$ . Se o sinal a ser transmitido na estrutura tem um espectro de frequências com componentes significativas na vizinhança de  $\omega_{\max}$ , então o sinal sofre alguma dispersão o que se traduz em alguma atenuação resultante da sua mudança de forma (fica mais largo à medida que se propaga). Para frequências muito abaixo de  $\omega_{\max}$ , a curva para  $\Delta z \neq 0$  aproxima muito bem a curva do caso sem dispersão  $\Delta z = 0$  e a degradação do sinal não é significativa. Nesta dissertação, dimensiona-se as estruturas para funcionarem nesta zona à custa de uma escolha rigorosa de  $\Delta z$ . Precisa-se por isso de um critério para escolher esse parâmetro. A ideia é escolher esse parâmetro tão grande quanto possível, de forma a que um sinal transite a estrutura sem mudar significativamente de forma, podendo ser reconhecido na saída da estrutura. A razão de se querer um  $\Delta z$  ser tão grande quanto possível é porque na prática reduz ao

máximo o número de células unitárias e, assim, o número de componente na realização prática dos circuitos. Um critério simples para a determinação de  $\Delta z$  é, por exemplo exigir que a frequência máxima presente no sinal  $\omega_{\max}$  seja dez vezes inferior ao limite máximo imposto pela estrutura:  $\omega_{\max,\text{sig}} = 0.1\omega_{\max}$ . Nestas condições, resulta:

$$\omega_{\max,\text{sig}} = 0.1 \times \frac{2}{\sqrt{LC}\Delta z} \leftrightarrow \Delta z = \frac{0.2}{\sqrt{LC}\omega_{\max,\text{sig}}} \quad (3.5-16)$$

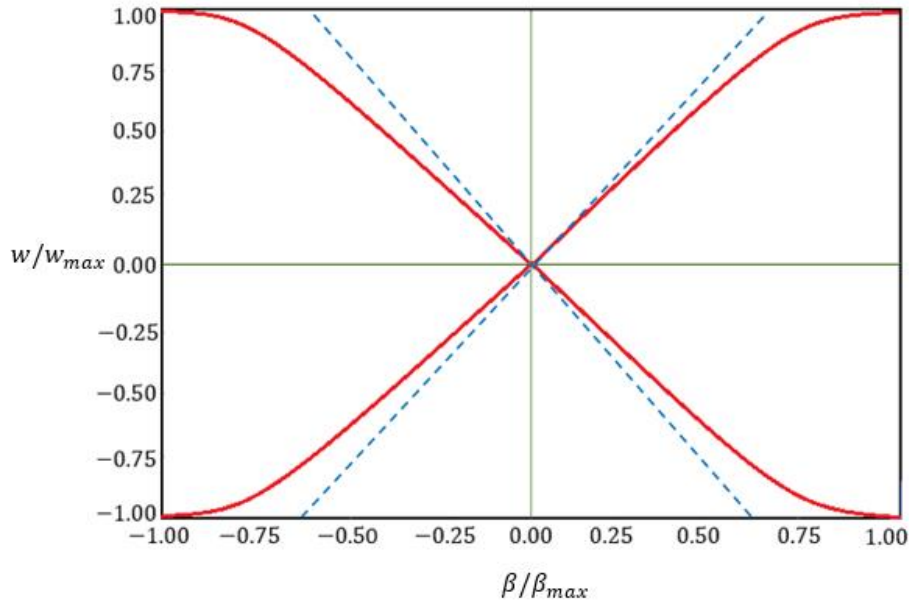


Figura 13 - Relação entre a frequência angular  $\omega$  e a constante de propagação  $\beta$ .

Na Figura 14 apresenta-se um circuito simples constituído por três células unitárias sem perdas, que vai ser usado para comprovar as expressões obtidas na secção 3.4, juntamente com os parâmetros ABCD introduzidos na equação (3.5-5). Tal como pode ser observado na Figura 14, considera-se  $N = 3$ ,  $C\Delta z = 10 \mu\text{F}$ ,  $L\Delta z = 1 \text{ mH}$ ,  $V_g = 1.0 \text{ V}$ ,  $R_g = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_L = 1 \text{ k}\Omega$ .

A banda de passagem está limitada à frequência:

$$\omega_{\max} = \frac{2}{\sqrt{L\Delta z C\Delta z}} \rightarrow f_{\max} = \frac{1}{\pi\sqrt{L\Delta z C\Delta z}} = 3.183 \text{ kHz} \quad (3.5-17)$$

Assim, considera-se duas frequências de funcionamento:  $f_1 = 1.0$  kHz (na banda de passagem) e  $f_2 = 4.0$  kHz (na banda de paragem). Para  $f = f_1$ , as tensões obtidas a partir do circuito simulado com um simulador SPICE foram as seguintes:

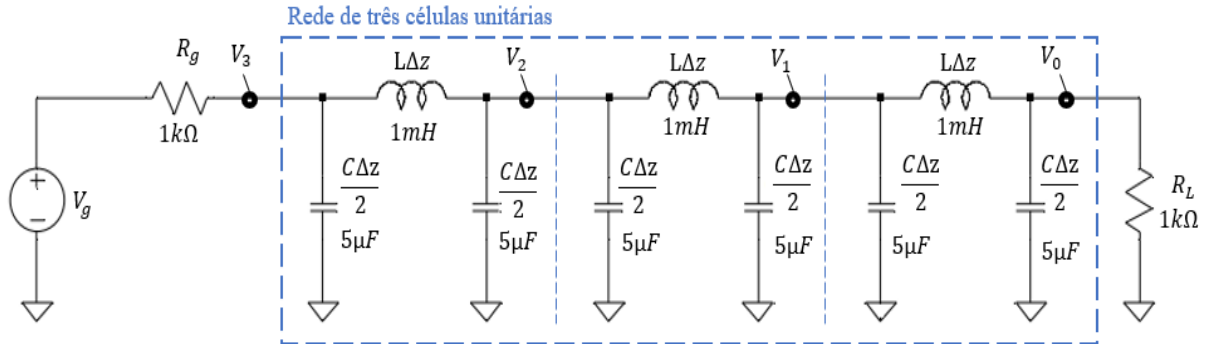


Figura 14 - Circuito de teste para a célula sem perdas com  $N = 3$ ,  $C\Delta z = 10 \mu\text{H}$   $L\Delta z = 1 \text{ mH}$ .

	Magnitude	Fase
$V_0$	0.0111978 V	$-90.4359^\circ$
$V_1$	0.00898775 V	$-89.9874^\circ$
$V_2$	0.00323097 V	$-88.4327^\circ$
$V_3$	0.00380585 V	$-87.8937^\circ$

Tabela 1 - Caso sem perdas: Tensões obtidas pelo Simulador SPICE para  $f = 1000$  Hz

Usando as equações (3.4-13), (3.4-10), (3.4-11) e (3.4-4) resulta:

	Magnitude	Fase
$V_0$	$1.119784 \times 10^{-2}$ V	$-90.435938^\circ$
$V_1$	$8.987748 \times 10^{-3}$ V	$-89.987409^\circ$
$V_2$	$3.230971 \times 10^{-3}$ V	$-88.432732^\circ$
$V_3$	$3.805854 \times 10^{-3}$ V	$-87.893741^\circ$

Tabela 2 - Tensões obtidas teoricamente para  $f = 1000$ Hz

Com:  $Z_B \rightarrow 10.53 \Omega$ ,  $\gamma\Delta z \rightarrow$  Magnitude:  $6.39 \times 10^{-1}$ , fase:  $90^\circ$

Conforme é demonstrado pelas Tabela 1, Tabela 2, os resultados obtidos com as equações comprovam os resultados efetuados no simulador SPICE. Uma vez que, a frequência  $f_1$  encontra-se na banda de passagem, o fator de propagação  $\gamma = \alpha + j\beta$  é imaginário puro significando que  $\alpha = 0$  e  $\beta\Delta z = 0.639$  rad ou  $\frac{\beta}{\beta_{\max}} = 0.203$ . Recorrendo novamente ao simulador SPICE, os resultados obtidos para  $f = f_2 = 4.0$  kHz são:

	Magnitude	Fase
$V_0$	0.000389572 V	91.5064°
$V_1$	0.000840861 V	-89.1608°
$V_2$	0.00324007 V	90.759°
$V_3$	0.0131451 V	-89.2462°

Tabela 3 - Caso sem perdas: Tensões obtidas pelo simulador SPICE para  $f = 4000$  Hz

Usando novamente as equações (3.4-13), (3.4-10), (3.4-11) e (3.4-4) obtém-se:

	Magnitude	Fase
$V_0$	$3.895724 \times 10^{-4}$ V	91.506357°
$V_1$	$8.408607 \times 10^{-4}$ V	-89.160813°
$V_2$	$3.240072 \times 10^{-3}$ V	90.758971°
$V_3$	$1.314506 \times 10^{-2}$ V	-89.246160°

Tabela 4 – Caso sem perdas: Tensões obtidas teoricamente para  $f = 4000$ Hz

Com:  $Z_B \rightarrow 13.14$  j $\Omega$ ,  $\gamma\Delta z \rightarrow$  Magnitude: 3.44, fase: 114.078°

Mais uma vez os resultados obtidos a partir das expressões teóricas (Tabela 4) comprovam as simulações efetuadas no simulador spice (Tabela 3). O fator de propagação é agora complexo, o que significa que existe atenuação ( $\alpha \neq 0$ ). A impedância característica de Bloch é também imaginária pura, algo que também está associado ao facto de existir atenuação.

### 3.6. Célula unitária de uma linha de transmissão (caso com perdas)

Na secção 3.5 foi analisado a transmissão numa estrutura periódica com células unitárias formadas por um modelo elétrico de tipologia  $\pi$ , indutância  $L\Delta z$  e capacidade total  $C\Delta z$ . Conclui-se que existem condições para a propagação de ondas na estrutura em estudo. Contudo, não se teve em conta numa realização real da estrutura existem perdas. Estas perdas podem resultar da resistência finita das bobinas e de possíveis fugas entre placas dos condensadores, por exemplo. Nesta secção considera-se um modelo mais realista de uma linha de transmissão real constituído pelas células unitárias, conforme é apresentado na Figura 15, onde  $R$  representa a resistência série por unidade de comprimento de dois condutores de uma linha em  $\Omega/m$ .

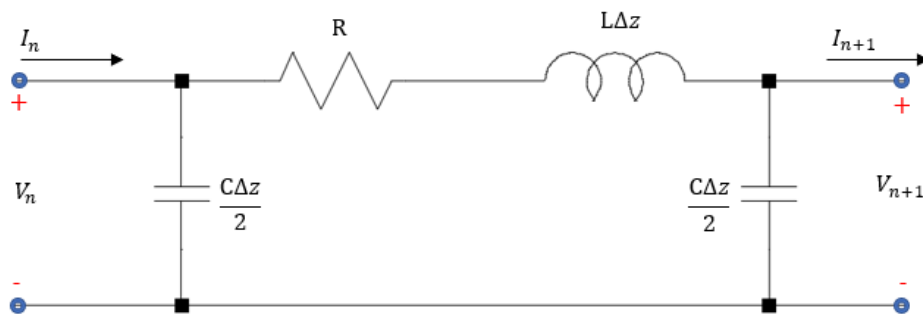


Figura 15 - Célula unitária simétrica com perdas.

Os cálculos dos parâmetros da matriz de transmissão são efetuados a recorrendo a admitâncias, tal como foi abordado na secção 3.5 e conforme é observado na Figura 16. Os cálculos são muito semelhantes, apenas com uma única diferença no cálculo de  $Z_L$ . Para este parâmetro, uma vez que se está a estudar uma linha de transmissão com perdas é necessário ter em conta a resistência da bobina. Assim, os parâmetros  $Z_L$  e  $Z_C$  são:

$$Z_L = R\Delta z + j\omega L\Delta z$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega \frac{C\Delta z}{2}} \quad (3.6-1)$$



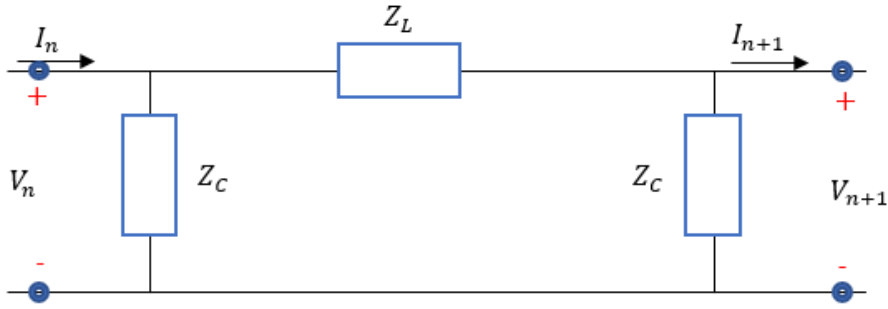


Figura 16 – Caso com Perdas: Esquema equivalente em  $\Pi$  de uma célula unitária.

Para os cálculos da matriz ABCD as fórmulas usadas foram as equações (3.5-4) e (3.6-1). Após os respetivos cálculos chega-se à conclusão de que a matriz de transmissão é:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \omega^2 L \Delta z \frac{C \Delta z}{2} + j \omega R \Delta z \frac{C \Delta z}{2} & R \Delta z + j \omega L \Delta z \\ j \omega C \Delta z - j \omega^3 L \Delta z \left( \frac{C \Delta z}{2} \right)^2 - \omega^2 R \Delta z \left( \frac{C \Delta z}{2} \right)^2 & 1 - \omega^2 L \Delta z \frac{C \Delta z}{2} + j \omega R \Delta z \frac{C \Delta z}{2} \end{bmatrix} \quad (3.6-2)$$

Como se pode observar  $A = D$  devido simetria do circuito. O circuito também é recíproco, sendo que  $AD - BC = 1$ . De acordo com a equação (3.3-3), a impedância característica é dada por:

$$Z_B = \frac{B}{\sqrt{A^2 - 1}} = \frac{R \Delta z + j \omega L \Delta z}{\sqrt{\left( 1 - \omega^2 L \Delta z \frac{C \Delta z}{2} - j \omega R \Delta z \frac{C \Delta z}{2} \right)^2 - 1}} \quad (3.6-3)$$

No caso limite  $\Delta z \rightarrow 0$  obtém-se a equação [2]:

$$Z_B = \frac{\sqrt{R + j \omega L}}{\sqrt{G + j \omega C}} \quad (3.6-4)$$

com  $G = 0$ , considerando não existir perda no dielétrico dos condensadores. Repetindo o mesmo procedimento efetuado para o caso sem perdas, é possível obter a equação característica do sistema na forma:

$$\cosh(\gamma \Delta z) = \frac{A + D}{2} = 1 - \omega^2 L \Delta z \frac{C \Delta z}{2} + j \omega R \Delta z \frac{C \Delta z}{2} \quad (3.6-5)$$

e fazendo  $\gamma = \alpha + j\beta$  vem:

$$\begin{aligned} & \cosh(\alpha\Delta z) \cos(\beta\Delta z) + j \sinh(\alpha\Delta z) \sin(\beta\Delta z) \\ & = 1 - \omega^2 L\Delta z \frac{C\Delta z}{2} + j\omega R\Delta z \frac{C\Delta z}{2} \end{aligned} \quad (3.6-6)$$

o que implica as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \cosh(\alpha\Delta z) \cosh(\beta\Delta z) &= 1 - \omega^2 L\Delta z \frac{C\Delta z}{2} \\ \sinh(\alpha\Delta z) \sin(\beta\Delta z) &= \omega R\Delta z \frac{C\Delta z}{2} \end{aligned} \quad (3.6-7)$$

No caso  $\alpha\Delta z \ll 1$ , que corresponde ao limite de baixas perdas, pode-se aproximar as expressões anteriores da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \cos(\beta\Delta z) &= 1 - \omega^2 L\Delta z \frac{C\Delta z}{2} \\ \alpha\Delta z \sin(\beta\Delta z) &= \omega R\Delta z \frac{C\Delta z}{2} \end{aligned} \quad (3.6-8)$$

uma vez que  $\cosh(\alpha\Delta z) \simeq 1$  e  $\sinh(\alpha\Delta z) \simeq \alpha\Delta z$ . As equações podem ser resolvidas de forma independente. A primeira equação é igual à que foi obtida para o caso sem perdas.

Assim, resulta:

$$w = \pm \frac{2}{\sqrt{LC}\Delta z} \sin\left(\frac{\beta\Delta z}{2}\right) \quad (3.6-9)$$

Substituindo este resultado na segunda equação vem:

$$\alpha = \pm \frac{R}{2Z_0 \cos\left(\frac{\beta\Delta z}{2}\right)} \quad (3.6-10)$$

onde se introduziu  $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$  e  $\sin(\beta\Delta z) = \sin\left(\frac{\beta\Delta z}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta\Delta z}{2}\right)$ . No limite de baixas frequências,  $\beta\Delta z \ll 1$ , obtém-se a fórmula clássica do coeficiente de atenuação para baixas frequências:

$$\alpha = \pm \frac{R}{2Z_0} = \pm \frac{1}{2} R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (3.6-11)$$

Tal como foi realizado na secção 3.5, apresenta-se um circuito simples (ver Figura 17) para comprovar as expressões para circuitos de estruturas periódicas com células unitárias LC com perdas. Como se pode observar, o circuito é semelhante ao da Figura 14, onde a única diferença é as bobinas terem agora um parâmetro  $R\Delta z = 0.5 \Omega$ , que representa as perdas nos fios que fazem o seu enrolamento. No simulador SPICE não é necessário incluir uma resistência, tal como é proposto no circuito da célula unitária da Figura 17, isto porque o simulador permite definir um parâmetro  $R_{ser}$  na bobina que modeliza corretamente a sua resistência. Por esse motivo, apenas optou-se por fazer uma representação do circuito como é apresentado na Figura 17. Do ponto de vista prático, incluir uma resistência no simulador produziria exatamente o mesmo efeito que a utilização de  $R_{ser}$  mas, uma vez que existe esta opção a mesma foi usada.

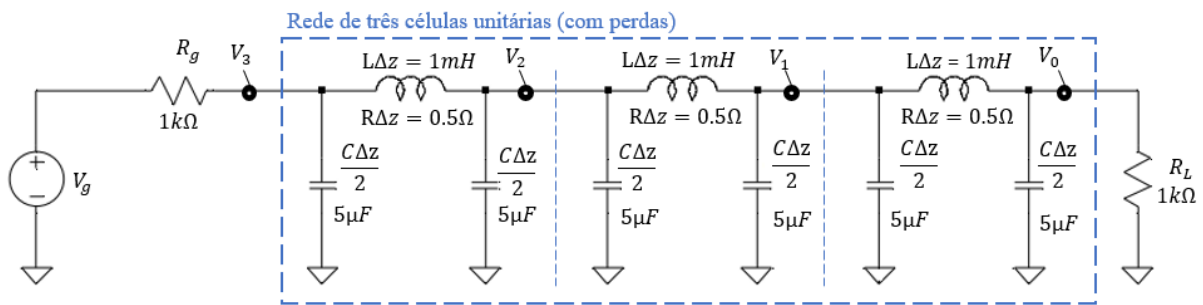


Figura 17- Circuito de teste para a célula com perdas com  $N = 3$ ,  $R\Delta Z = 0.5\Omega$ ,  $C\Delta Z = 10 \mu\text{H}$  e  $L\Delta Z = 1 \text{ mH}$ .

Considerou-se novamente a resposta do circuito para as mesmas duas frequências  $f_1 = 1.0 \text{ kHz}$  e  $f_2 = 4.0 \text{ kHz}$ . Para  $f_1$  as tensões obtidas com o simulador são descritas na Tabela 5, já para  $f_2 = 4.0 \text{ kHz}$  são descritas na Tabela 6.

	Magnitude	Fase
$V_0$	0.0111569 V	$-94.5904^\circ$
$V_1$	0.0089653 V	$-93.0219^\circ$
$V_2$	0.00328852 V	$-82.7397^\circ$
$V_3$	0.00392917 V	$71.5709^\circ$

Tabela 5 – Caso com Perdas: Tensões obtidas pelo simulador SPICE para  $f = 1000$  Hz.

	Magnitude	Fase
$V_0$	0.000388437 V	$98.1338^\circ$
$V_1$	0.000838856 V	$-84.2007^\circ$
$V_2$	0.00323512 V	$-93.6516^\circ$
$V_3$	0.0131336 V	$-88.2594^\circ$

Tabela 6 - Caso com Perdas: Tensões obtidas pelo simulador SPICE para  $f = 4000$  Hz.

Usando as equações (3.4-13), (3.4-10), (3.4-11) e (3.6-3) obteve-se para  $f = f_1 = 1.0$  kHz (Tabela 7) e  $f = f_2 = 4.0$  kHz (Tabela 8).

	Magnitude	Fase
$V_0$	$1.115687 \times 10^{-2}$ V	$-94.590406^\circ$
$V_1$	$8.963532 \times 10^{-3}$ V	$-93.021893^\circ$
$V_2$	$3.288522 \times 10^{-3}$ V	$-82.739743^\circ$
$V_3$	$3.929167 \times 10^{-3}$ V	$71.570857^\circ$

Tabela 7 - Caso com Perdas: Tensões teóricas para  $f = 1000$  Hz.

Na Tabela 7 teve-se em conta:  $Z_B \rightarrow (10.53 j) \Omega$ ,  $\gamma \Delta z \rightarrow$  magnitude:  $6.40 \times 10^{-1}$ , fase:  $87.64^\circ$

	Magnitude	Fase
$V_0$	$3.884372 \times 10^{-4} \text{ V}$	$98.133755^\circ$
$V_1$	$8.388556 \times 10^{-4} \text{ V}$	$-84.200694^\circ$
$V_2$	$3.235117 \times 10^{-3} \text{ V}$	$93.651649^\circ$
$V_3$	$1.313357 \times 10^{-2} \text{ V}$	$-88.259381^\circ$

Tabela 8 - Caso com Perdas: Tensões teóricas Para  $f = 4000 \text{ HZ}$

Na Tabela 8 teve-se em conta:  $Z_B \rightarrow (13.14 j) \Omega$  ,  $\gamma \Delta z \rightarrow$  magnitude: 3.44, fase:  $114.078^\circ$ .

Comparando os resultados obtidos com os dois métodos para duas frequências conclui-se que também no caso da célula simétrica com perdas a concordância entre as equações teóricas e os resultados do simulador SPICE é total.



## Propagação de impulsos em estruturas periódicas

Neste capítulo, apresenta-se um estudo sobre a propagação de impulsos gaussianos numa linha de transmissão, na qual a sua capacidade por unidade de comprimento é modificada ao longo do tempo. Para o efeito, considera-se uma aproximação da linha por uma estrutura periódica formada pelas células unitárias em  $\Pi$  sem perdas (apresentada no capítulo anterior).

Depois de dimensionada a estrutura, tendo em conta a teoria do capítulo anterior, são apresentados os resultados das simulações SPICE para duas situações distintas: na secção 4.1 apresenta-se as simulações para o caso em que a transição de capacidade ocorre de um valor mais alto, para um valor mais baixo. Na secção 4.2 considera-se a transição de um valor mais baixo para um valor mais alto de capacidade.

### 4.1. Transição de capacidade numa estrutura periódica de uma capacidade maior para uma capacidade menor

A indutância numa célula unitária de uma estrutura periódica é representada por:

$$L_{\mu} = L\Delta z \quad (4.1-1)$$

onde  $\Delta z$  corresponde a um tamanho físico de uma célula unitária. A capacidade numa célula unitária de uma estrutura periódica é obtida por:

$$C_{\mu} = C\Delta z \quad (4.1-2)$$

Para calcular a velocidade que um impulso percorre uma célula unitária de um modelo equivalente de uma linha de transmissão recorre-se à expressão:

$$v_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{L_{\mu} \times C_{\mu}}} \quad (4.1-3)$$

O tempo onde ocorre a transição de capacidade na estrutura periódica é dado por:

$$t = t_0 + \frac{k}{\sqrt{v_\mu}} \quad (4.1-4)$$

onde  $k$  é a célula onde se pretende que ocorra a transição de capacidade e  $t_0$  corresponde ao instante inicial da propagação do impulso na estrutura periódica.

A Figura 18 representa o modelo equivalente de uma linha de transmissão usado para as simulações. O valor  $N$  representa o número de células utilizadas na estrutura periódica. O valor  $L\Delta Z$  corresponde à indutância numa célula unitária da estrutura periódica ( $L_\mu$ ). Por outro lado,  $C\Delta Z$  é a capacidade numa célula unitária da estrutura ( $C_\mu$ ). Os nós in e out correspondem respetivamente ao primeiro e último nó da estrutura periódica. Na Tabela 9 são apresentados os valores usados para as simulações da estrutura periódica.

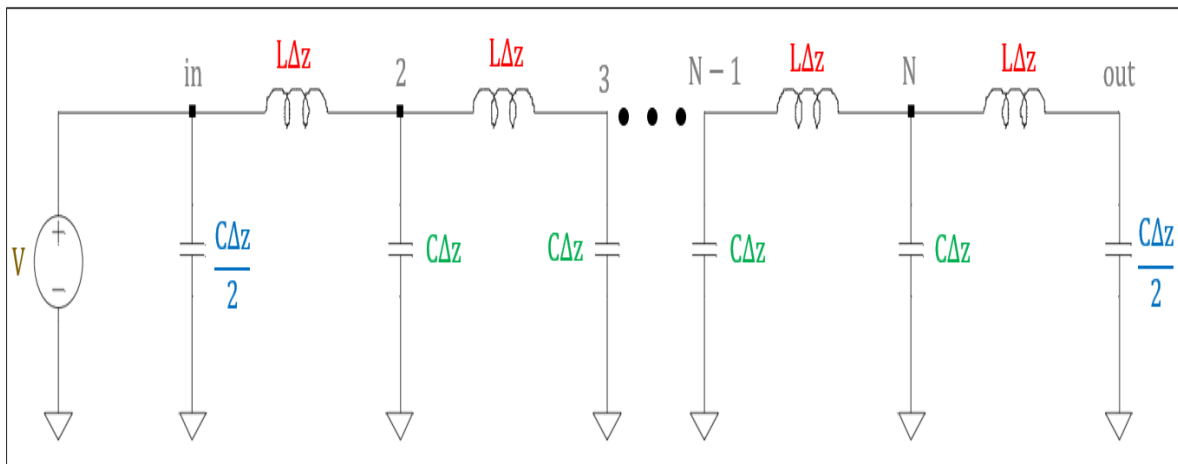


Figura 18 - Modelo equivalente de uma linha de transmissão. A estrutura tem um comprimento de  $N$  células.

$N = 800$
$C_\mu = 100 \text{ nF}$
$L_\mu = 1 \text{ }\mu\text{H}$
$t_0 = 47.43 \text{ }\mu\text{s}$

Tabela 9 – Parâmetros usados para as simulações de uma estrutura periódica.



A Figura 19 representa a propagação do impulso na estrutura periódica sem transição de capacidade. Em  $t_0$  o impulso entra na linha de transmissão na célula  $V_{in}$  (curva a verde). Pretende-se que o impulso altere a capacidade no meio da linha, ou seja, na célula  $V_{400}$  (curva a vermelho) no instante  $t_{transição} = 174.01 \mu s$ , calculado a partir da expressão (4.1-4). A célula  $V_{out}$  mostra o instante em que o impulso sai da linha de transmissão ( $t_{max} = 300.59 \mu s$ ). Os valores de  $t_0$ ,  $t_{transição}$  e  $t_{max}$  podem ser observados no topo da figura.

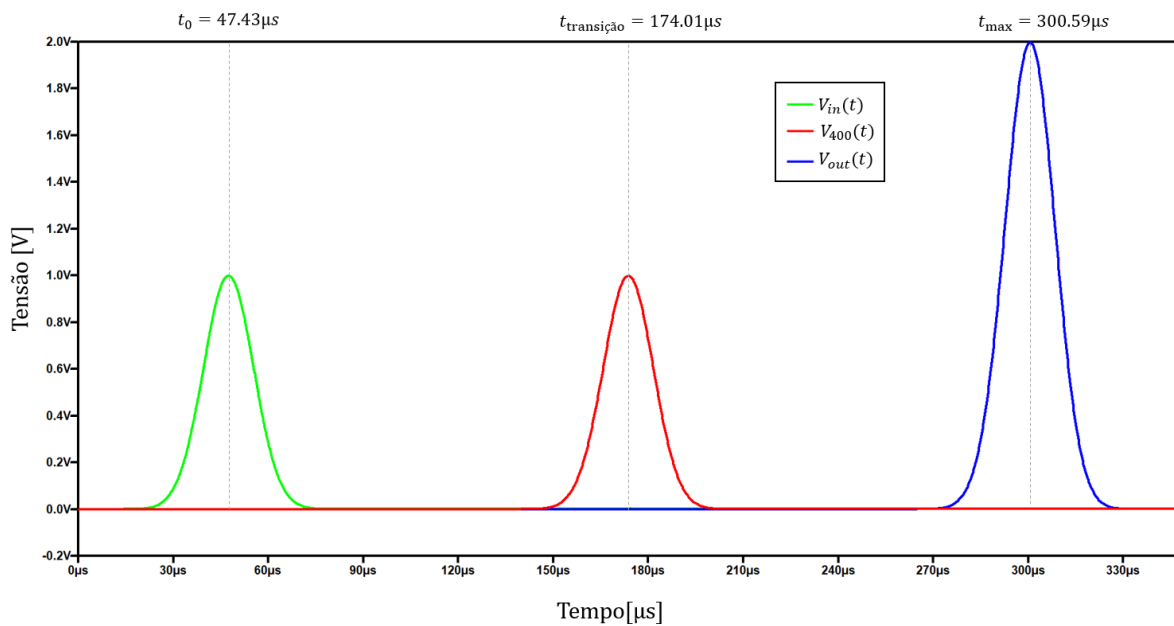


Figura 19 - Propagação de um impulso gaussiano numa estrutura periódica sem transição de capacidade.

Na próxima simulação ocorre uma transição de capacidade na estrutura periódica de uma capacidade maior ( $C_{\mu} = 100 \text{ nF}$ ), para uma capacidade menor ( $C_{\mu} = 50 \text{ nF}$ ). Considerou-se como condições iniciais as tensões obtidas a meio da linha de transmissão, ou seja, em  $V_{400}$ , obtidas a partir da simulação da Figura 19. De seguida, aplicou-se a expressão:

$$q_1 = q_2 \Leftrightarrow v_2 = \frac{C_1}{C_2} v_1 \quad (4.1-5)$$

Em que  $q_1$  representa a carga de  $C_\mu = 100$  nF. Por outro lado,  $q_2$  representa a carga de  $C_\mu = 50$  nF.

A Figura 20 mostra uma sequência de imagens ordenadas de 1 a 6 da propagação do impulso na estrutura periódica através de uma simulação SPICE. Cada imagem representa a tensão do impulso num dado instante temporal. Por exemplo, a primeira imagem representa a tensão do impulso da célula  $\approx 100$  no instante 1.89 ms ( $V(0.0018981)[V]$ ). De seguida, na imagem 2 ( $V(0.0024094)[V]$ ) o impulso gaussiano está aproximadamente na célula 250. A imagem 3 ( $V(0.0018981)[V]$ ) corresponde ao instante em que irá ocorrer a transição de capacidade na célula 400. Na imagem 4 ( $V(0.0018981)[V]$ ), a capacidade na estrutura periódica já foi alterada para  $C_\mu = 50$  nF. Com esta alteração, identifica-se o efeito provocado na transição de capacidade com a separação de um impulso em dois impulsos. Com a evolução temporal (imagens 5 e 6) da propagação dos impulsos na estrutura periódica observa-se que o impulso menor viaja para a esquerda, enquanto o impulso maior viaja para a direita. O impulso menor que viaja no sentido  $-x$ . Já o impulso maior que viaja no sentido  $+x$ . Os coeficientes de transmissão  $\tau_b$  e  $\tau_f$  correspondem às amplitudes das ondas que são geradas após a transição de capacidade. Nesta tese calculou-se estes coeficientes obtendo as expressões finais:

$$\tau_b = \frac{C_1}{C_2} \times \frac{\sqrt{C_1} - \sqrt{C_2}}{2\sqrt{C_1}} \quad (4.1-6)$$

$$\tau_f = \frac{C_1}{C_2} \times \frac{\sqrt{C_1} + \sqrt{C_2}}{2\sqrt{C_1}} \quad (4.1-7)$$

em que  $C_1$  é a capacidade inicial ( $C_\mu = 100$  nF) e  $C_2$  a capacidade final ( $C_\mu = 50$  nF).

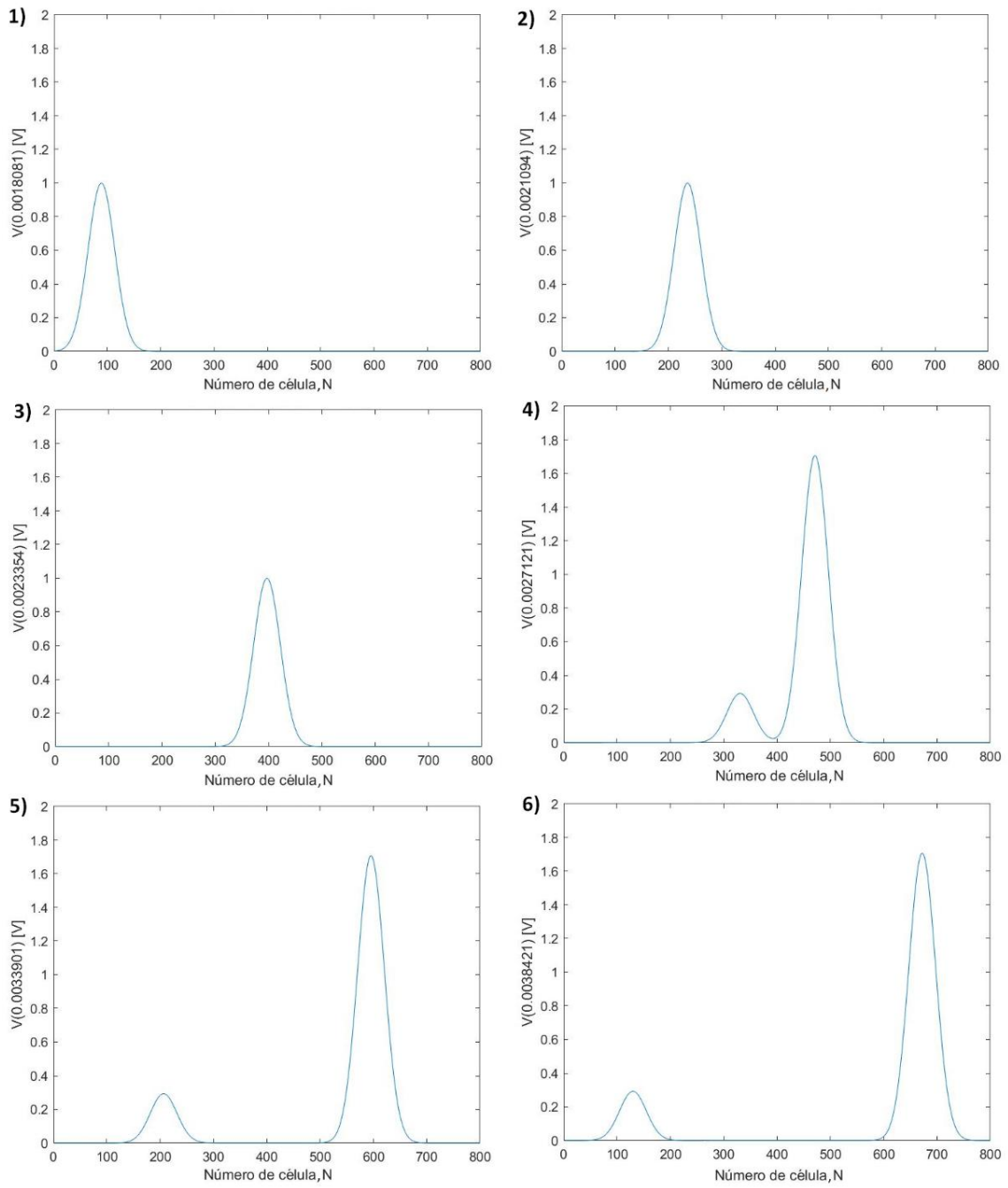


Figura 20 - Evolução temporal da tensão na estrutura periódica numa transição de capacidade  $C_\mu = 100$  nF para  $C_\mu = 50$  nF.

A Figura 21 mostra as amplitude dos impulsos  $\tau_b$  e de  $\tau_f$  após a transição de capacidade, mais concretamente, no instante 3.90 ms. Recorrendo às expressões (4.1-6) e (4.1-7), os cálculos das amplitudes de  $\tau_b$  e de  $\tau_f$  são respetivamente, 0.2933 V e 1.707 V. Comparando estes resultados com a Figura 21, conclui-se que os mesmos são iguais.

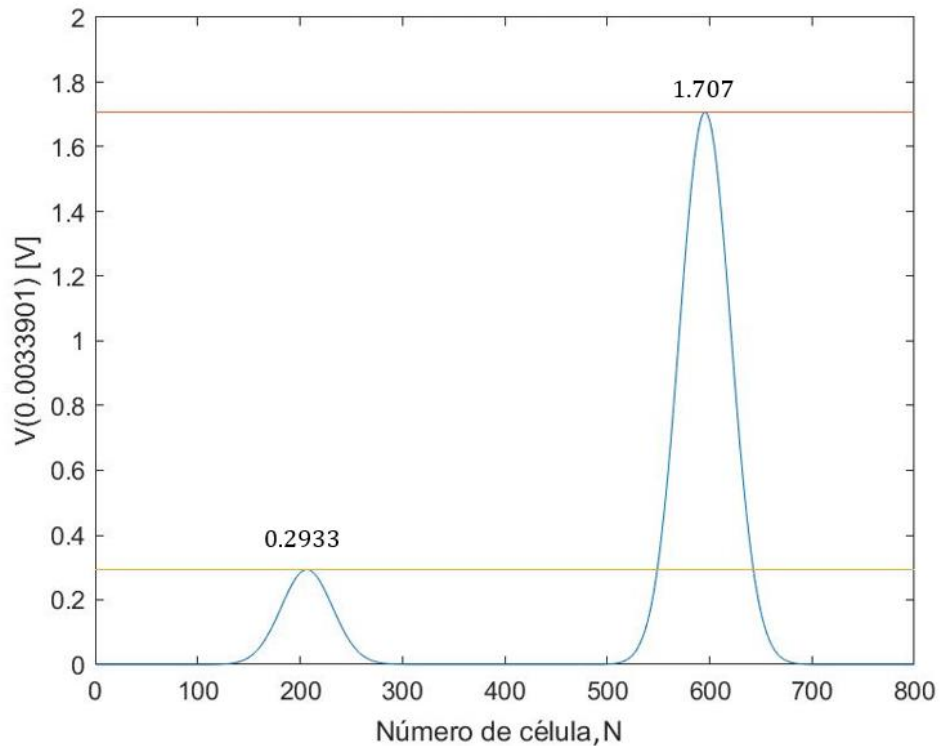


Figura 21 - As duas ondas após a transição de capacidade  $C_\mu = 100$  nF para  $C_\mu = 50$  nF.

A onda do lado esquerdo viaja para a esquerda. A onda do lado direito viaja para a direita.

#### 4.2. Transição de capacidade numa estrutura periódica de uma capacidade menor para uma capacidade maior

Nesta secção é analisada a transição de capacidade numa linha de transmissão de uma capacidade menor ( $C_\mu = 100$  nF) para uma capacidade maior ( $C_\mu = 200$  nF).

Os parâmetros iniciais usados para esta simulação são descritos na Tabela 9. Tendo em conta que  $C_\mu$  inicial é igual ao da secção 4.1, o cálculo do tempo para a transição ocorrer a meio da estrutura periódica é também igual, ou seja, em  $174.01 \mu\text{s}$  (equação (4.1-4)). Para o cálculo das tensões nos condensadores após a transição de capacidade aplica-se o mesmo procedimento da secção 4.1.

O resultado da propagação do impulso numa estrutura periódica em que existe alteração de capacidade de uma capacidade menor para uma capacidade maior é apresentada na Figura 22. A figura representa uma sequência em imagens ordenadas pelo instante de tempo. A primeira imagem representa o impulso a viajar na célula 100 no instante  $1.88 \text{ ms}$ . No instante  $2.18 \text{ ms}$  (segunda imagem) o impulso viaja na célula 300. A terceira imagem representa o momento onde irá ocorrer a transição de capacidade, ou seja, na célula 400. A partir deste instante a capacidade da linha é alterada para  $C_\mu = 200 \text{ nF}$ . A partir da imagem 4 observa-se a separação de um impulso em dois impulsos. O impulso menor ( $\tau_b$ ) viaja no sentido  $-x$ , por outro lado, o impulso maior  $\tau_f$  viaja no sentido  $+x$ , conforme pode ser observado pelas imagens 5 e 6.

Na Figura 23 é apresentada as amplitudes  $\tau_b$  e  $\tau_f$  após a transição de capacidade, no instante  $3.84 \text{ ms}$ . Com recurso às equações (4.1-6) e (4.1-7), calcula-se a amplitude do impulso  $\tau_b$  (0.103) e a amplitude do impulso  $\tau_f$  (0.603). Estes resultados podem ser comprovados pela Figura 23.

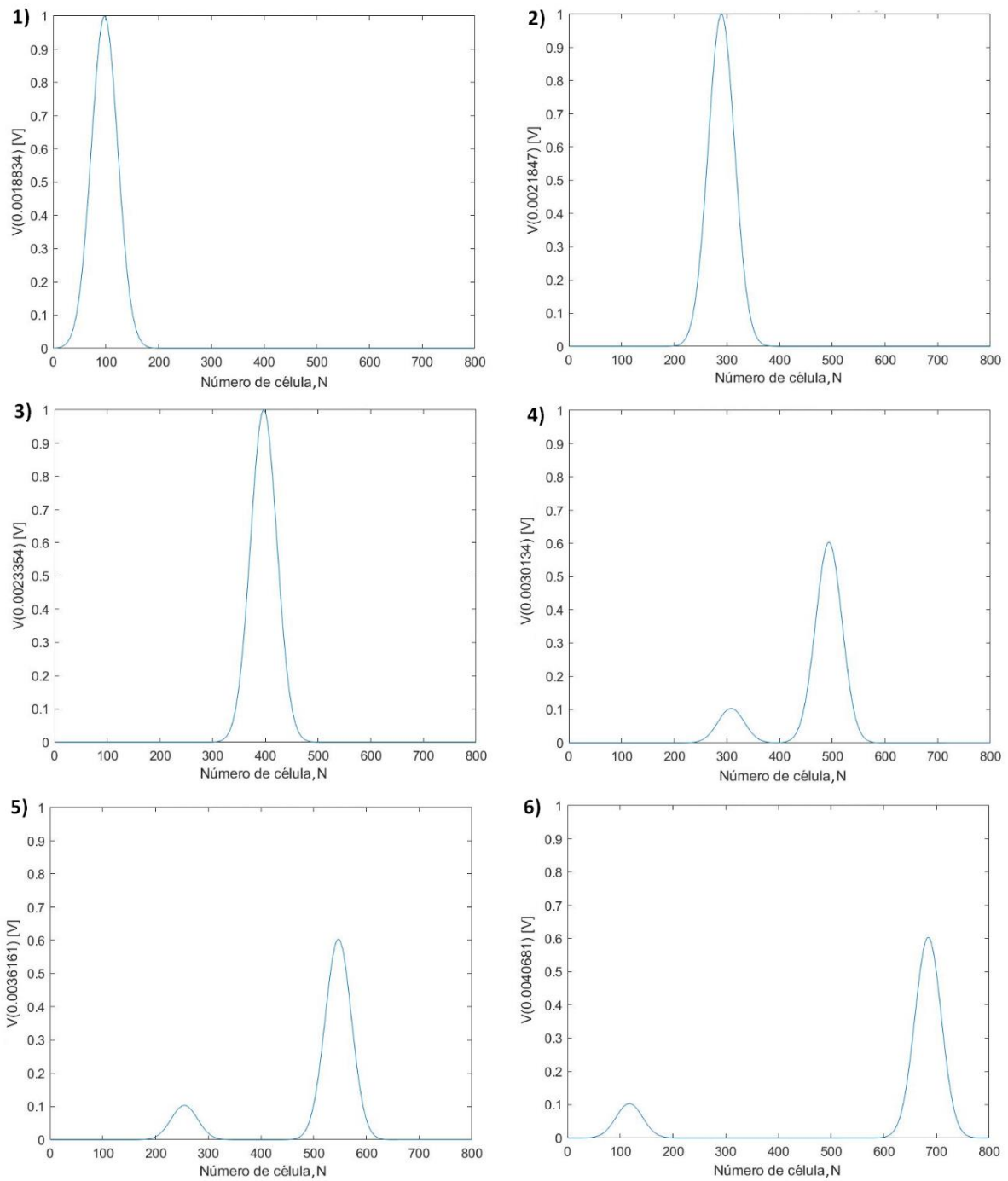


Figura 22 - Evolução temporal da tensão na estrutura periódica numa transição de capacidade  $C_{\mu} = 100$  nF para  $C_{\mu} = 200$  nF.

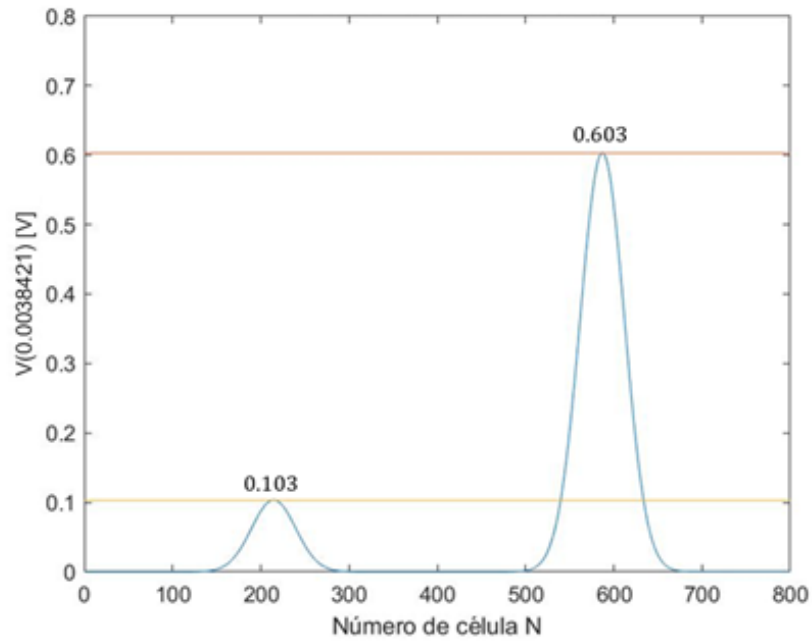


Figura 23 - As duas ondas após a transição de capacidade  $C_{\mu} = 100$  nF para  $C_{\mu} = 200$  nF. A onda do lado esquerdo viaja para a esquerda. A onda do lado direito viaja para a direita.





## Desenho de circuitos com capacidade variável

Neste capítulo, apresentam-se dois circuitos onde o objetivo é variar a capacidade de um valor  $C_1$  para um valor  $C_2$ . Os dois circuitos funcionam de maneiras diferentes. No primeiro é imposta a conservação da energia enquanto no segundo se impõe a conservação da carga. Na secção 5.1, discute-se a conservação da energia e da carga, demonstrando que não é possível respeitar simultaneamente estas duas leis numa transição de capacidade ao longo do tempo. Na secção 5.2, implementa-se um circuito com variação de capacidade onde a conservação da energia é garantida. Na secção 5.3, é apresentado um circuito com variação de capacidade para garantir o conceito de conservação da carga.

### 5.1. Conservação da energia e conservação da carga

Nesta secção demonstra-se que um condensador, cuja capacidade é alterada no tempo, não pode ser considerado como um sistema isolado se a carga é conservada. Um sistema isolado pressupõe que a energia total é conservada ao longo do tempo. A conservação da carga e a conservação da energia não podem ser garantidas em simultâneo, conforme irá ser comprovado.

Na Figura 24a) considera-se um condensador com uma capacidade constante  $C$  e com carga elétrica inicial  $Q$ , dentro de um volume  $V$  ( $S_V$  é a superfície fechada deste volume). A energia elétrica armazenada no condensador é obtida através da expressão:

$$U_e = \frac{Q^2}{2C} \quad (5.1-1)$$

Esta energia resulta do desequilíbrio de carga entre as duas placas do condensador, não sendo modificada ao longo do tempo, uma vez que a carga do condensador não pode viajar de uma placa para a outra. O sistema é isolado e por isso a energia é conservada, não existindo trocas de energia com o exterior através da superfície  $S_V$  do sistema.

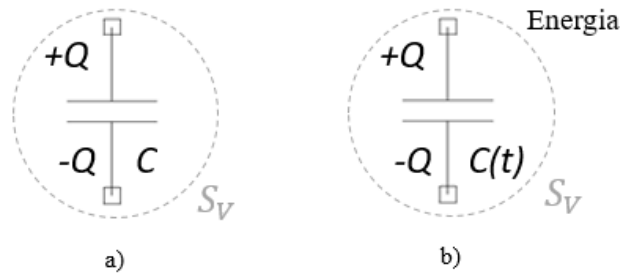


Figura 24 - Esquema de conservação da carga.

Na Figura 24b), mostra-se um condensador em que a capacidade é modificada ao longo do tempo. Assume-se então:

$$C(t) = \begin{cases} C_1, & t < 0 \\ C_2, & t > 0 \end{cases} \quad (5.1-2)$$

A carga vai manter-se constante, tal como no caso representado na Figura 24a), porque a carga não tem como viajar entre as placas. Também não existe forma de fluir para o exterior através da fronteira já que o condensador não se encontra ligado a nenhum circuito do exterior. Assim, a energia é determinada por:

$$U_e(t) = \begin{cases} \frac{Q^2}{2C_1}, & t < 0 \\ \frac{Q^2}{2C_2}, & t > 0 \end{cases} \quad (5.1-3)$$

Com a equação (5.1-3), comprova-se que a energia do sistema não é conservada, ou seja, o sistema não é isolado. Para o caso em que  $C_1 > C_2$  resulta  $U_e(t^-) < U_e(t^+)$ . Assim a transição de capacidade pode ser obtida se for injetada energia no sistema. Por outro lado, para o caso  $C_1 < C_2$  resulta  $U_e(t^-) > U_e(t^+)$ , pelo que a transição pode ser efetuada se for extraída energia no sistema.

## 5.2. Circuito com capacidade variável: caso conservação de energia

Numa tentativa de contextualizar um circuito que implementa um condensador variável, considera-se o esquema da Figura 25. O condensador variável da Figura 25 consiste em dois condensadores,  $C_1$  e  $C_2$ . Para  $t < 0$  apenas o condensador  $C_1$  está ligado ao circuito, sendo que a carga armazenada em  $C_1$  pode mudar por interação com o circuito elétrico. Assume-se então que no instante  $t = 0^-$  o condensador  $C_1$  têm carga  $Q_1(0^-) = Q$ . Por outro lado, o condensador  $C_2$  está descarregado ( $Q_2(0^-) = 0$ ). Em  $t = 0$  o interruptor muda de posição ficando o condensador  $C_2$  ligado ao circuito elétrico. O condensador  $C_1$  é desligado no circuito elétrico nesse instante. Contudo, o circuito apenas funciona se toda a carga  $Q$  for transferida do condensador  $C_1$  para o condensador  $C_2$  no instante  $t = 0$ , tal como é sugerido na Figura 25. Este processo é impossível porque é necessário tempo para passar toda a carga do condensador  $C_1$  para o condensador  $C_2$ , sendo este intervalo designado por lapso de tempo. Se o lapso de tempo for muito pequeno, comparado com as constantes de tempo do circuito, pode dizer-se que o dispositivo se comporta como um condensador variável, e independente da implementação do circuito.

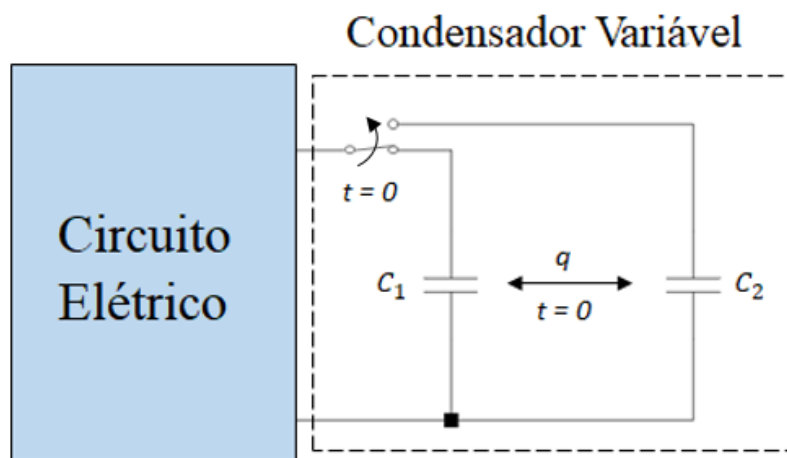


Figura 25 - Conceito simplificado de um circuito com capacidade variável.

O processo de transferência de energia a implementar pode dividir-se em duas partes. Primeiro, implementa-se um circuito em que se transfere toda a energia armazenada no condensador  $C_1$  para o condensador  $C_2$ . Neste processo a energia não se perde nem se

ganha, uma vez que toda a energia que se encontrava no condensador  $C_1$  pode ser encontrada após a transferência no condensador  $C_2$ , garantindo assim a conservação de energia. Na seção 5.1, mostrou-se que a carga armazenada inicialmente no condensador  $C_1$  não pode ser igual à carga no condensador  $C_2$  após a transferência de energia (com conservação). Isto significa que para conservar a carga elétrica é necessário retirar ou injetar energia no sistema. Este processo é descrito detalhadamente na seção 5.3. Para implementar um condensador variável (com conservação de energia) usa-se um indutor, dois condensadores e um conjunto de interruptores, conforme se mostra na Figura 26. O circuito pode ser dividido em duas partes. A primeira, o circuito principal, é constituído por uma célula unitária com elementos de rede como condensadores,  $C_1$  e  $C_2$ , o indutor  $L_1$ . Os transístores NMOS M5, M7, M8 e M11, todos do tipo IRFH6200, são usados para implementar os interruptores comandados. Estes dispositivos foram escolhidos de forma a ter um  $R_{on}$  baixo (0.8 m $\Omega$ ). Para controlar estes interruptores utiliza-se um circuito de controlo por interruptor (evidenciado com linhas a tracejado azul, verde, vermelho e cinzento na Figura 26). Estes circuitos permitem controlar os interruptores com níveis de tensão  $V_a$  e  $V_b$  adequados. Nesta tese utiliza-se  $V_a = 10$  V e  $V_b = -10$  V.

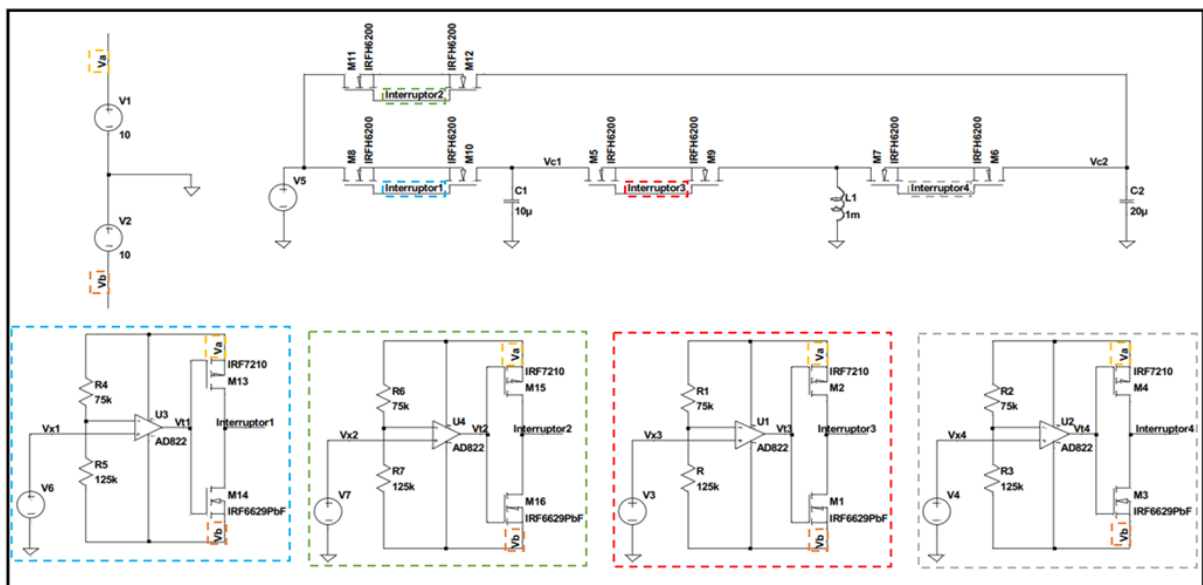


Figura 26 - Condensador variável bidirecional controlado por transístores: caso com conservação de energia.

Para  $t < t_a$  o circuito elétrico exterior está ligado ao condensador  $C_1$  através do interruptor 1. Todos os outros interruptores estão abertos de acordo com o esquema de sinais de controlo apresentado na Figura 27. Assim, para  $t < t_a$  o condensador variável comporta-se como um condensador de capacidade  $C_1$ . No intervalo  $[t_a, t_b]$  o interruptor 3 está fechado, o interruptor 1 está aberto, assim como os restantes interruptores continuam abertos. Neste intervalo o condensador  $C_1$  e o indutor L formam um circuito ressonante sem perdas, e a energia armazenada no condensador  $C_1$  passa para o indutor L.

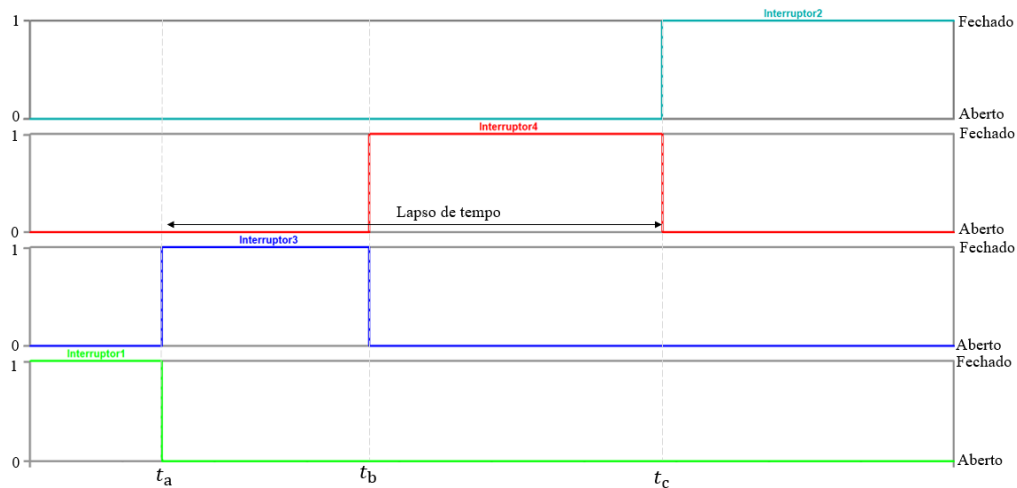


Figura 27 - Sequência temporal dos sinais de controlo do circuito para uma transição de capacidade no sentido de  $C_1$  para  $C_2$  com conservação de energia.

Ajustando o intervalo de tempo  $\Delta t_{ab} = t_b - t_a$  para ser exactamente  $\frac{T}{4}$ , em que  $T$  é o período de oscilação:

$$\Delta t_{ab} = \frac{\pi\sqrt{LC_1}}{2} \quad (5.2 -1)$$

conseguimos garantir que toda a energia armazenada no campo eléctrico do condensador  $C_1$  é transferida para o campo magnético no indutor  $L$ . O intervalo de tempo não depende do valor inicial da carga armazenada no condensador  $C_1$ , por isso, este procedimento pode ser implementado, produzindo o resultado esperado, independente da interação do circuito eléctrico com o condensador  $C_1$  para  $t < t_a$ .

Entre  $t = t_b$  e  $t = t_c$  o interruptor 4 está fechado. Nesse intervalo de tempo existe outro circuito ressonante, agora formado por  $L$  e  $C_2$ . O tempo que demora a transferir a energia do indutor para o condensador  $C_2$  é:

$$\Delta t_{bc} = t_c - t_b = \frac{3\pi\sqrt{LC_2}}{2} \quad (5.2-2)$$

Note-se que durante todo o processo do transporte de energia entre o condensador  $C_1$  e o condensador  $C_2$ , o interruptor 2 apenas é ligado no final, quando o condensador  $C_2$  é ligado com o circuito exterior.

O tempo total para transferir toda a energia do condensador  $C_1$  para o condensador  $C_2$  é dado por:

$$\Delta t_{ac} = \frac{\pi\sqrt{L}(\sqrt{C_1} + \sqrt{C_2})}{2} \quad (5.2-3)$$

Note-se que do ponto de vista teórico, este intervalo de tempo (lapso de tempo) pode ser feito tão pequeno quanto desejável escolhendo o valor de  $L$ .

A energia armazenada no condensador  $C_1$  no instante  $t = t_a$  é:

$$U_{e1} = \frac{Q_1^2}{2C_1} \quad (5.2-4)$$

e no condensador  $C_2$  no instante  $t = t_b$  é:

$$U_{e2} = \frac{Q_2^2}{2C_2} \quad (5.2-5)$$

Uma vez que neste processo não existe dissipação de energia, sendo  $U_{e1} = U_{e2}$  então:

$$Q_2 = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} Q_1 \quad (5.2-6)$$

De maneira a corroborar a teoria descrita nesta secção, recorreu-se ao simulador SPICE com o circuito apresentado na Figura 26. Foram considerados dois casos diferentes. Primeiro o caso em que a energia está armazenada inicialmente em  $C_1$  e é transferida para  $C_2$ . De seguida, a transferência no sentido contrário.

No primeiro caso considera-se como condições iniciais  $V(C_2) = 0$  e  $I(L_1) = 0$ . Os valores das tensões e componentes usados no circuito são apresentados na Tabela 10.

$V_a = 10 \text{ V}$
$V_b = -10 \text{ V}$
$C_1 = 10 \text{ } \mu\text{F}$
$C_2 = 20 \text{ } \mu\text{F}$
$L_1 = 1 \text{ mH}$
$R = R_3 = 75 \text{ k}\Omega$
$R_1 = R_2 = 125 \text{ k}\Omega$

Tabela 10 – Componentes e tensões usadas para o circuito do condensador variável:  
Caso conservação de energia.

Utilizando as equações (5.2 -1), (5.2-2), (5.2-3) calcula-se os seguintes intervalos de tempo teóricos:

$\Delta t_{ab} = 157.07 \text{ } \mu\text{s}$
$\Delta t_{bc} = 666.43 \text{ } \mu\text{s}$

Tabela 11 - Cálculos teóricos do intervalo de tempo necessário para transportar energia de  $C_1$  para  $C_2$ : Caso conservação de energia

Na Figura 28 apresenta-se o resultado de uma simulação SPICE com os parâmetros da Tabela 10. As curvas a verde, azul e vermelho são respetivamente a tensão no condensador  $C_1$ , a corrente na bobine  $L_1$  e a tensão no condensador  $C_2$ . O tempo necessário para transportar toda a energia do condensador  $C_1$  para o indutor  $L_1$  pode ser medido através da figura e o valor obtido é muito perto do valor teórico calculado  $\Delta t_{ab} = 157.2 \text{ } \mu\text{s}$ . Por outro lado, o tempo necessário para transportar toda a energia do indutor  $L_1$  para o condensador  $C_2$  também corresponde ao valor teórico  $\Delta t_{bc} = 667.78 \text{ } \mu\text{s}$ . Assim, os resultados teóricos da Tabela 11 corroboram os resultados da Figura 28 com uma margem de erro de  $\simeq 1 \mu\text{s}$ , comprovando o funcionamento do circuito.



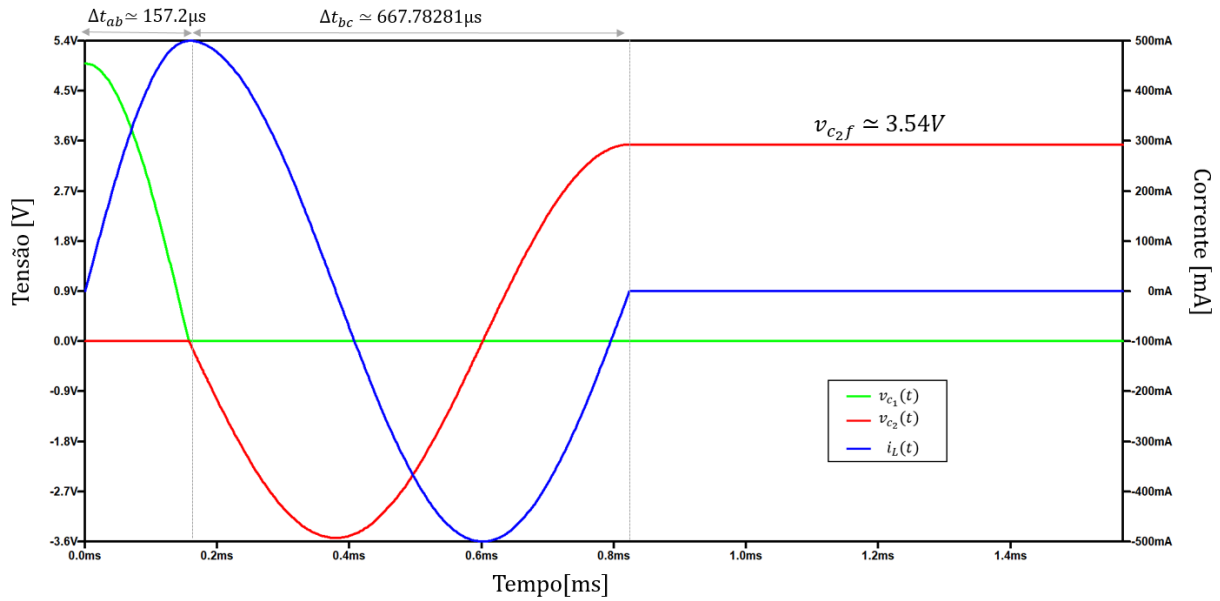


Figura 28 - Transição de energia entre  $C_1$ ,  $L_1$  e  $C_2$  num circuito de condensador variável no sentido de  $C_1$  para  $C_2$  com conservação de energia.

Uma vez que existe conservação de energia, a energia inicial acumulada no condensador  $C_1$  tem de ser igual à energia final acumulada no condensador  $C_2$ . Na Figura 29 mostram-se os resultados das simulações do circuito na Figura 26 onde se considerou tensões iniciais ( $v_{c_{1i}}$ ) no condensador  $C_1$  com valores entre 0V e 5V com intervalos de 0.5V. O gráfico mostra a azul a energia inicial armazenada no condensador  $C_1$  ( $U_{e_i}$ ) e a laranja a energia final armazenada no condensador  $C_2$  ( $U_{e_f}$ ). As expressões utilizadas para as calcular são as seguintes:

$$U_{e_i} = \frac{1}{2} C_1 v_{c_{1i}}^2 \quad (5.2-7)$$

$$U_{e_f} = \frac{1}{2} C_2 v_{c_{2f}}^2 \quad (5.2-8)$$

onde  $v_{c_{1i}}$  representa a tensão inicial no condensador  $C_1$ , enquanto  $v_{c_{2f}}$  representa a tensão final no condensador  $C_2$ . Como pode ver-se as duas curvas estão sobrepostas porque existe conservação de energia ( $U_{e_i} = U_{e_f}$ ).

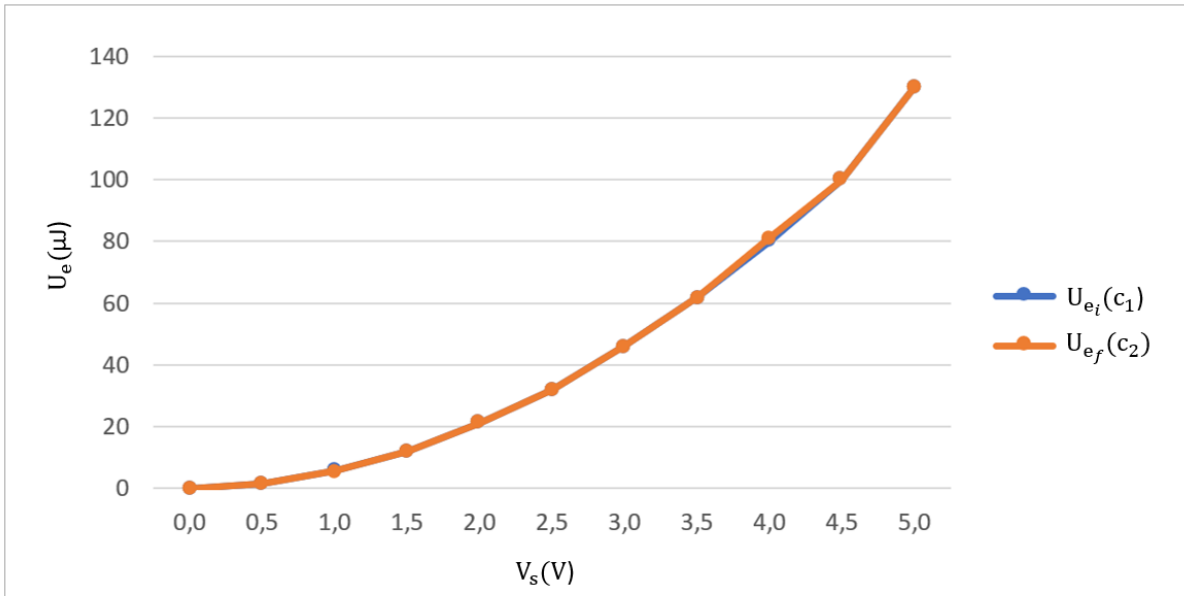


Figura 29 - Variação da energia elétrica num circuito com capacidade variável no sentido do condensador  $C_1$  para  $C_2$  com conservação de energia.

O próximo caso a ser analisado é referente à passagem de energia de  $C_2$  para  $C_1$ , tendo como condições iniciais  $V(C_1) = 0$ ,  $I(L_1) = 0$  e  $V(C_2) \neq 0$ . Os valores dos componentes para esta simulação são dados na Tabela 10.

O cálculo do tempo necessário para transferir a energia de  $C_2$  para  $L_1$  ( $\Delta t_{ab}$ ) é:

$$\Delta t_{ab} = \frac{\pi\sqrt{LC_2}}{2} = 222.20 \mu\text{s} \quad (5.2-9)$$

e o tempo necessário para transferir a energia de  $L_1$  para  $C_1$  é:

$$\Delta t_{bc} = \frac{3\pi\sqrt{LC_1}}{2} = 471.23 \mu\text{s} \quad (5.2-10)$$

Na Figura 30 pode-se ver os resultados obtidos pela simulação SPICE. No topo desta figura é possível ver os tempos medidos no simulador para passar a energia do condensador  $C_2$  para a bobine  $L_1$  e da bobine para o condensador  $C_1$ . Os resultados obtidos e os cálculos teóricos são bastante semelhantes como uma margem de erro máxima de  $\approx 0.2 \mu\text{s}$ .

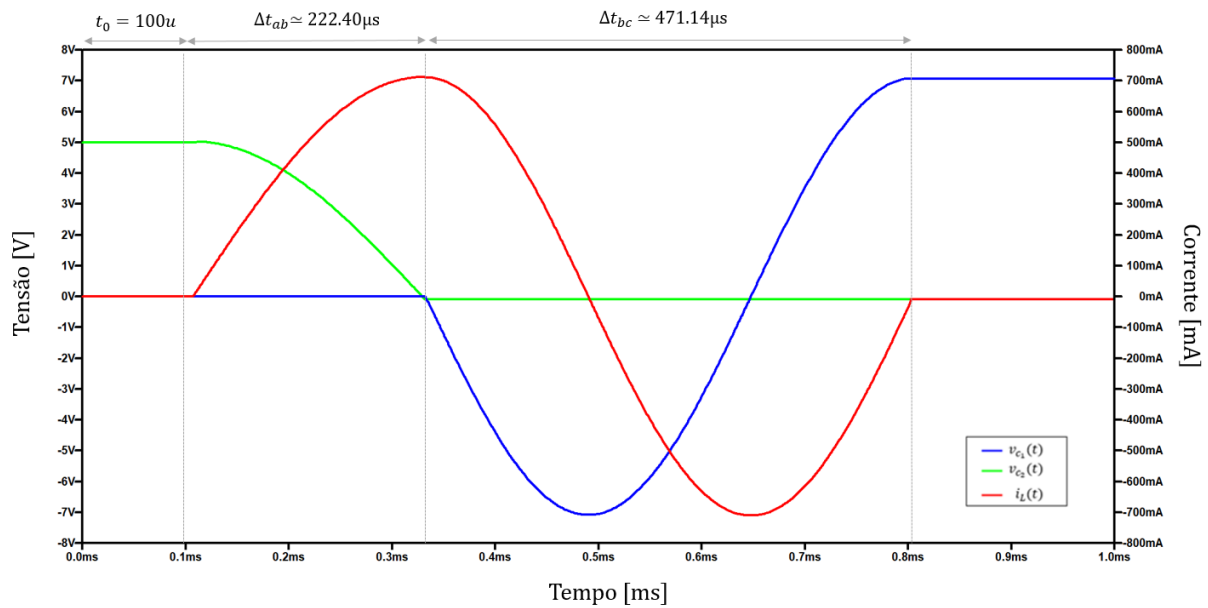


Figura 30 - Transição de energia entre  $C_2$ ,  $L_1$  e  $C_1$  num circuito de condensador variável no sentido de  $C_2$  para  $C_1$  com conservação de energia.

A simulação foi ainda executada repetidamente considerando a tensão inicial no condensador  $C_2$  com valores de tensão entre 0 V e 5 V com intervalos de 0.5 V. A fim de corroborar a conservação da energia calcula-se para cada um destes valores a energia elétrica armazenada inicialmente no condensador  $C_2$  e a energia final disponível no condensador  $C_1$ , usando as expressões:

$$U_{e_i} = \frac{1}{2} C_2 v_{C_{2i}}^2 \quad (5.2-11)$$

$$U_{e_f} = \frac{1}{2} C_1 v_{C_{1f}}^2 \quad (5.2-12)$$

em que  $v_{C_{2i}}$  representa a tensão inicial no condensador  $C_2$ , enquanto  $v_{C_{1f}}$  representa a tensão final no condensador  $C_1$ . O resultado é o que se apresenta na Figura 31 onde se verifica outra vez a conservação de energia.

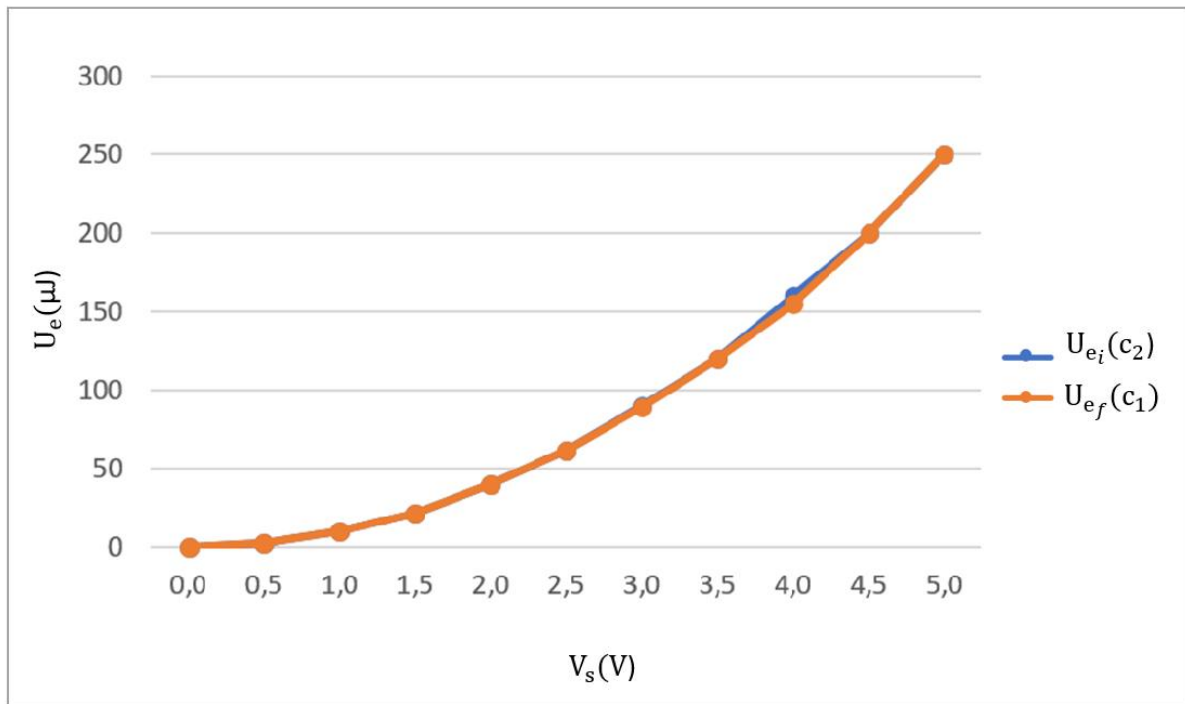


Figura 31 - Variação da energia elétrica num circuito com capacidade variável no sentido do condensador  $C_2$  para  $C_1$  com conservação de energia.

### 5.3. Circuitos com capacidade variável: caso com conservação da carga

O circuito apresentado na secção 5.2 (Figura 26) pode ser modificado de forma a garantir a conservação da carga em vez da conservação da energia se forem implementados dois mecanismos, um para injetar energia e outro para remover energia do sistema. Esta solução é apresentada na Figura 32. Neste circuito é usada uma resistência negativa ( $R_u < 0$ ) para injetar energia no sistema sempre que houver uma transferência de carga do condensador  $C_1$  para  $C_2$  (está a considerar-se que  $C_1$  é menor que  $C_2$ ). Isto é necessário para garantir a conservação da carga. Por outro lado, a resistência  $R_d$  tem como função dissipar energia no condensador  $C_2$  e é usada quando a transferência de energia é feita do condensador  $C_2$  para  $C_1$ . Uma resistência negativa não existe na vida real. No circuito para implementar este componente recorreu-se a uma conversão de impedância negativa. Para tal, é usado um amplificador operacional: o Ampop AD822.

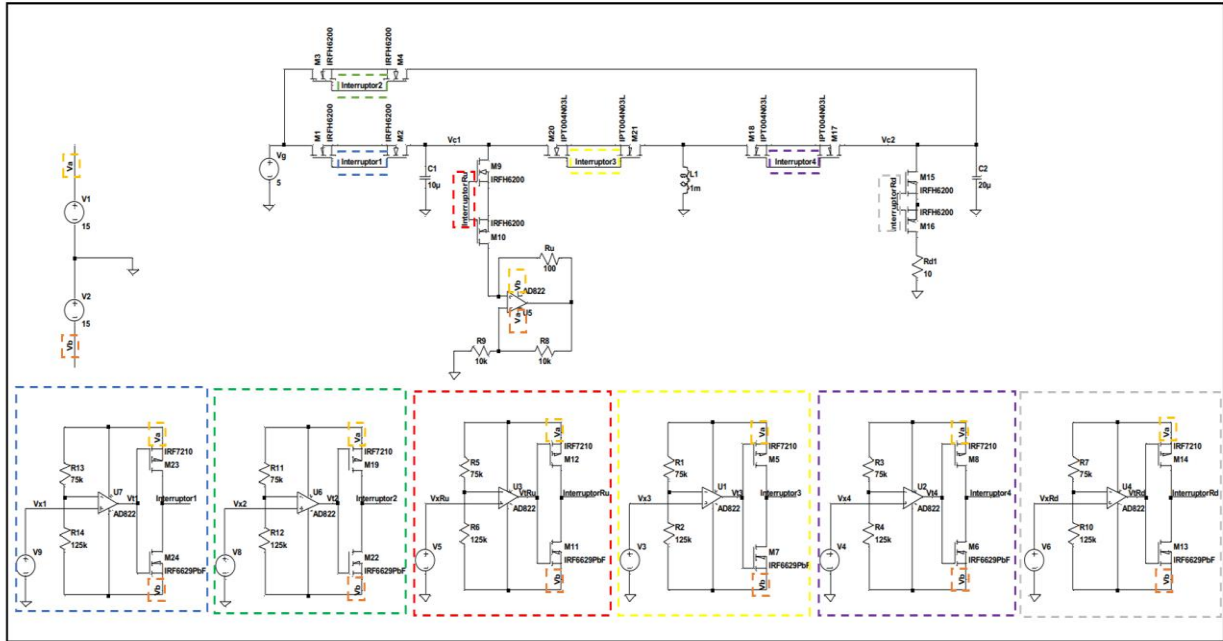


Figura 32 - Condensador variável bidirecional controlado por transístores: caso com conservação de Carga.

O tempo necessário para transferir toda a carga desde  $C_1$  para  $C_2$  pode ser obtido através da expressão:

$$\Delta t = \frac{\pi\sqrt{LC_1}}{2} + \frac{3\pi\sqrt{LC_2}}{2} + \frac{R_d C_2}{2} \ln\left(\frac{C_2}{C_1}\right) \quad (5.3-1)$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação, representa o tempo necessário para transferir toda a energia do condensador  $C_1$  para o indutor  $L$ . O segundo termo corresponde ao tempo para transferir a energia do indutor  $L$  para o condensador  $C_2$ . Por último, o terceiro termo representa o tempo necessário para diminuir a energia do valor  $U_{e1}$  para  $U_{e2} = U_{e1}C_1/C_2$  no condensador  $C_2$  utilizando a resistência  $R_d$ .

Se a carga está inicialmente no condensador  $C_2$  e o objetivo é transferir para o condensador  $C_1$ , é necessário injetar energia no sistema. Este processo é realizado através do circuito formado por  $C_1$  e  $R_u$  quando o interruptor  $R_u$  é fechado. Note-se que este circuito é formado por uma resistência negativa ( $R_u < 0$ ) e, portanto, quando ativada, a energia no condensador aumenta exponencialmente com o tempo.

Considerando o cenário em que a energia é transferida de  $C_2$  para  $C_1$ , e supondo que inicialmente  $C_2$  tem carga  $Q$ , a energia armazenada em  $C_2$  é então:

$$U_{e2} = \frac{Q^2}{2C_2} \quad (5.3-2)$$

Recorrendo ao interruptor 4, transfere-se toda a energia do condensador  $C_2$  para o indutor  $L$ . O tempo necessário é:

$$\Delta t_{ab} = \frac{\pi\sqrt{LC_2}}{2} \quad (5.3-3)$$

De seguida, transfere-se toda a energia do indutor  $L$  para o condensador  $C_1$ , usando o interruptor 3. O respetivo tempo requerido é:

$$\Delta t_{bc} = \frac{3\pi\sqrt{LC_1}}{2} \quad (5.3-4)$$

Finalmente, é preciso aumentar a energia do sistema uma vez que o condensador  $C_1$  tem menos carga que a que foi inicialmente armazenada em  $C_2$ :

$$Q_1 = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} Q \quad (5.3-5)$$

Para resolver este problema, usa-se o circuito da resistência negativa para fornecer energia ao condensador  $C_1$ . A equação da carga no condensador  $C_1$  é a seguinte:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\tau_u} q \quad (5.3-6)$$

em que  $q(t)$  representa a carga armazenada em  $C_1$  e  $\tau_u = |R_u|C_1$  é a constante de tempo. A solução para esta equação é:

$$q(t) = Q_1 e^{(t-t_1)/\tau_u} \quad (5.3-7)$$

onde  $Q_1$  é a energia armazenada em  $C_1$  no instante  $t = t_1$  (instante em que o interruptor  $r_u$  é fechado). Então, num instante  $t_2 > t_1$  será  $q(t_2) = Q$ , de tal modo que:

$$\Delta t_{12} = t_2 - t_1 = \frac{1}{2} |R_u| C_1 \ln\left(\frac{C_2}{C_1}\right) \quad (5.3-8)$$

é o tempo necessário para aumentar a carga elétrica no condensador  $C_1$  para o valor pretendido de carga  $Q$ .

Para comprovar o conceito de conservação da carga no circuito apresentado na Figura 32, recorreu-se ao simulador SPICE para simular a transferência de energia do condensador  $C_1$  para o condensador  $C_2$  e do condensador  $C_2$  para o condensador  $C_1$ . Na primeira simulação considera-se que a carga está inicialmente no condensador  $C_1$  e o objetivo é transferir para o condensador  $C_2$ . Neste caso, as condições iniciais para a simulação do circuito são  $v_{c_1} = 5 \text{ V}$ ,  $i_{L_1} = 0 \text{ V}$  e  $v_{c_2} = 0 \text{ V}$ , sendo que os valores dos componentes usados são apresentados na Tabela 12.

$V_a = 15 \text{ V}$
$V_b = -15 \text{ V}$
$C_1 = 10 \mu\text{F}$
$C_2 = 20 \mu\text{F}$
$L_1 = 1 \text{ mH}$
$R = R_3 = R_5 = 75 \text{ k}\Omega$
$R_1 = R_2 = R_6 = 125 \text{ k}\Omega$
$R_d = 10 \Omega$
$R_u = 100 \Omega$

Tabela 12 - Componentes e tensões usadas para o circuito do condensador variável:  
Caso conservação de carga.

Em  $t < t_a$  o interruptor 1 está fechado, ou seja, o circuito elétrico exterior está ligado ao condensador  $C_1$ . Os restantes interruptores estão abertos conforme é mostrado na Figura 33. No intervalo  $[t_a, t_b]$  o interruptor 3 está fechado e o interruptor 1 está aberto, tal como os restantes interruptores. O interruptor  $rd$  no intervalo  $[t_c, t_d]$  está fechado, sendo que os outros interruptores estão abertos. Este intervalo corresponde ao tempo necessário para dissipar energia do sistema de forma a que a carga no condensador  $C_2$  (no fim da simulação) seja igual à carga do condensador  $C_1$  (no início da simulação). O

intervalo de tempo  $\Delta t_{ad}$  é chamado de lapso de tempo e corresponde ao tempo necessário para transferir toda a energia de  $C_1$  para  $C_2$ .

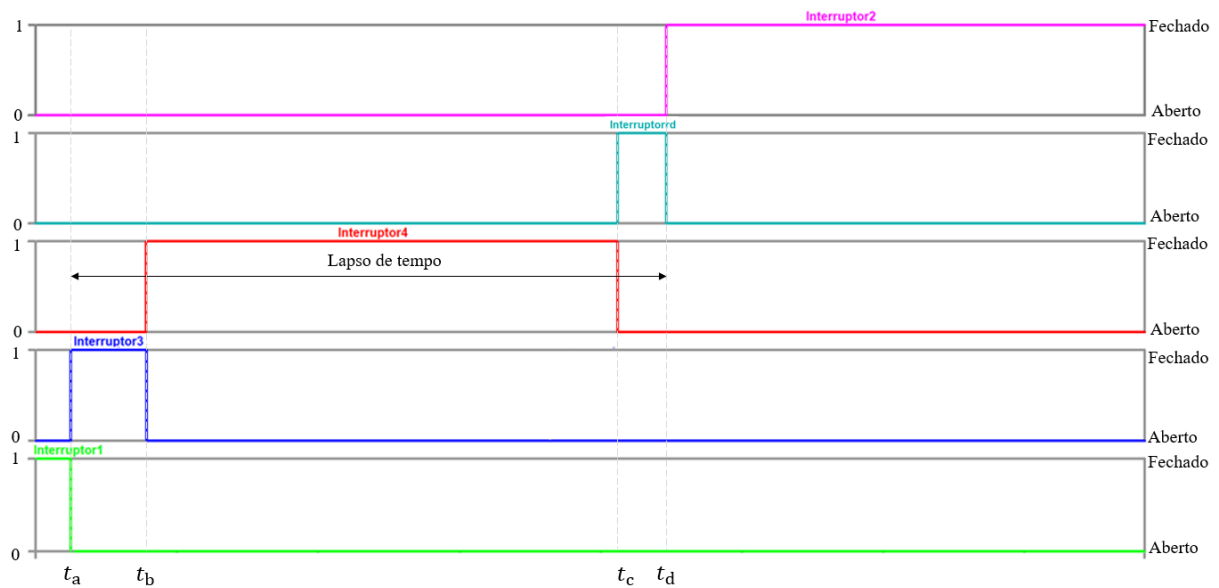


Figura 33 - Sequência temporal de um circuito com capacidade variável no sentido de  $C_1$  para  $C_2$  com conservação de carga.

Na Figura 34 são mostrados os resultados obtidos na simulação SPICE para o caso em que a energia é transportada do condensador  $C_1$  para o condensador  $C_2$ . Na parte de cima da figura é possível ver os tempos obtidos no simulador entre a transferência de energia do condensador  $C_1$  para a bobine  $L_1$  e da bobine para o condensador  $C_2$ . Os cálculos teóricos da Tabela 13 e os resultados da referida figura são idênticos com uma margem de erro máxima de  $\approx 1.3 \mu\text{s}$ .



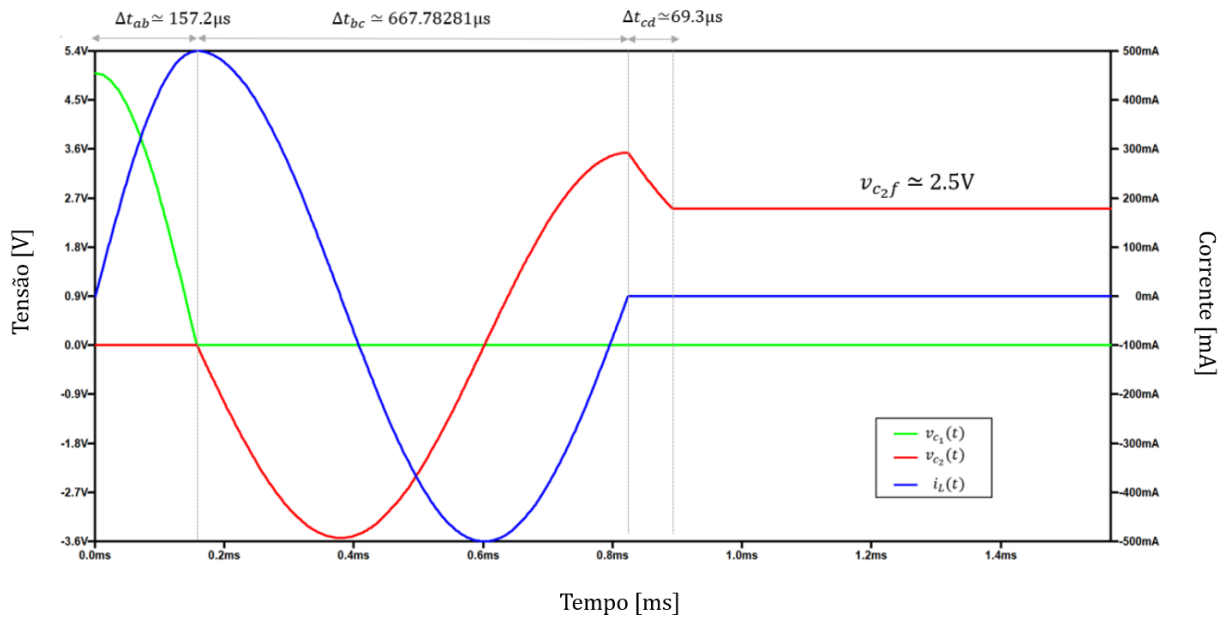


Figura 34 - Transição de energia entre  $C_1$ ,  $L_1$  e  $C_2$  num circuito de condensador variável no sentido de  $C_1$  para  $C_2$  com conservação de carga.

$\Delta t_{ab} = 157.07 \mu s$
$\Delta t_{bc} = 666.43 \mu s$
$\Delta t_{cd} = 69.31 \mu s$

Tabela 13 - Cálculos teóricos dos intervalos de tempo entre cada componente de  $C_1$  para  $C_2$

Para provar o conceito de conservação de carga recorreu-se às seguintes equações:

$$q_{1i} = C_1 v_{c1i} = 50 \mu C \quad (5.3-9)$$

$$q_{2f} = C_2 v_{c2f} = 50 \mu C \quad (5.3-10)$$

onde se fez  $v_{c1i} = 5 V$  e  $v_{c2f} = 2.5 V$  (estes valores foram obtidos da Figura 34). Uma vez que  $q_{1i} = q_{2f}$ , fica provada a conservação da carga na transferência de energia do condensador  $C_1$  para o condensador  $C_2$ .

Foi feita uma segunda simulação para provar a conservação da carga na transferência de energia do condensador  $C_2$  para o condensador  $C_1$ . Neste caso, as condições iniciais

para a simulação do circuito são  $v_{c_1} = 0\text{ V}$ ,  $i_{L_1} = 0\text{ V}$  e  $v_{c_2} = 5\text{ V}$ . Os valores dos componentes usados são mostrados na Tabela 12. Na Figura 35 apresenta-se o resultado. As curvas a verde, vermelho e azul são respectivamente a tensão no condensador  $C_2$ , a corrente na bobine  $L_1$  e a tensão no condensador  $C_1$ . O tempo necessário para transportar toda a energia do condensador  $C_2$  para o indutor  $L_1$  pode ser medido na figura e é muito perto do valor teórico calculado  $\Delta t_{ab} = 222.14\ \mu\text{s}$ . O tempo necessário para transportar toda a energia do indutor  $L_1$  para o condensador  $C_1$  também corresponde ao valor teórico  $\Delta t_{bc} = 471.23\ \mu\text{s}$ . O tempo necessário para aumentar a energia do condensador  $C_1$  até se observar a conservação da carga também corresponde ao valor teórico  $\Delta t_{cd} = 346.57\ \mu\text{s}$ . Nos cálculos teóricos da transição de  $C_2$  para  $C_1$  são utilizadas as equações (5.3-3), (5.3-4) e (5.3-8). Os resultados de cada intervalo de tempo são apresentados na Tabela 14.

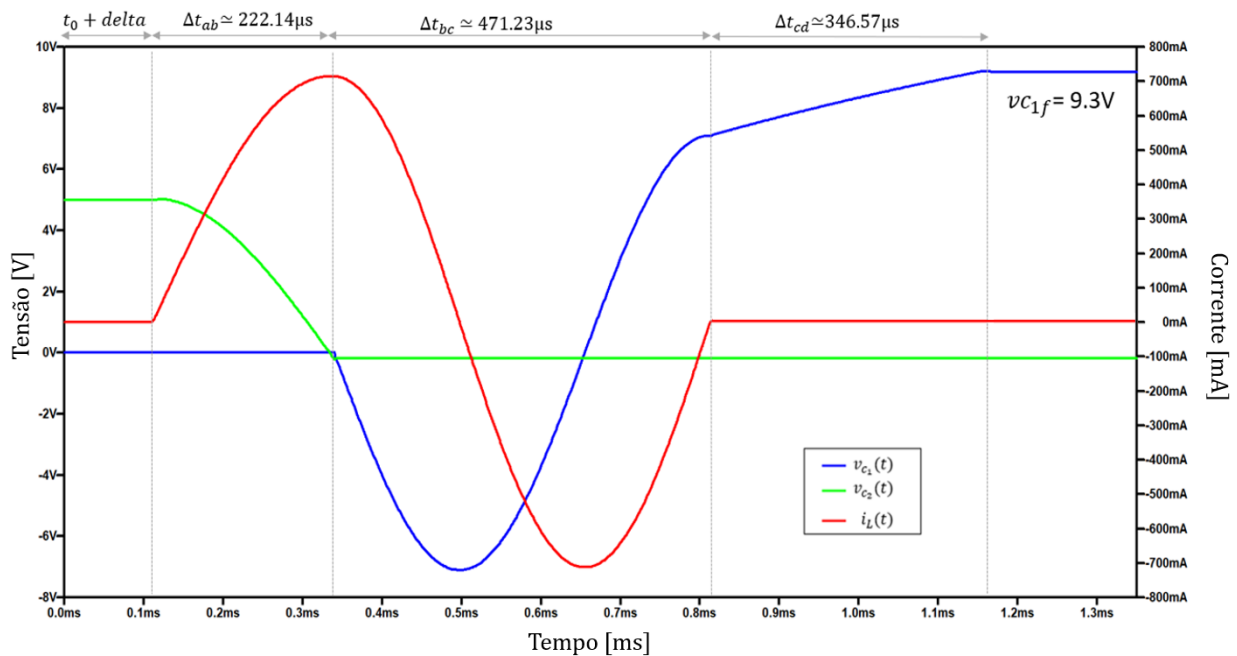


Figura 35 - Transição de energia entre  $C_2$ ,  $L_1$  e  $C_1$  num circuito de condensador variável no sentido de  $C_2$  para  $C_1$  com conservação de carga.

$\Delta t_{ab} = 222.14 \mu s$
$\Delta t_{bc} = 471.23 \mu s$
$\Delta t_{cd} = 346.57 \mu s$

Tabela 14 - Cálculos teóricos dos intervalos de tempo entre cada componente de  $C_2$  para  $C_1$

A carga inicial no condensador  $C_2$  e a carga final no condensador  $C_1$  são obtidas por:

$$q_{2i} = C_2 v_{c2i} = 1 \mu C \quad (5.3-11)$$

$$q_{1f} = C_1 v_{c1f} = 0.88 \mu C \quad (5.3-12)$$

Comparando as expressões (5.3-11) e (5.3-12) verifica-se que existe uma diferença de  $0.12 \mu C$ . Outra forma de observar esta diferença é observar na Figura 35 a tensão final no condensador  $C_1$  (9.3 V) e a tensão inicial no condensador  $C_2$  é (5.0 V). Com os valores dos componentes do condensador  $C_1$  (10  $\mu F$ ) e do condensador  $C_2$  (20  $\mu F$ ), para garantir a conservação da carga o valor de  $v_{c1f}$  deveria ser exatamente o dobro, o que não se verifica. Para mitigar esta diferença são simuladas várias tensões iniciais no condensador  $C_2$  ( $v_{c2i}$ ) desde os 0 V aos 8 V com intervalos de 0.5 V. Uma vez que a escolha da resistência  $R_u$  tem impacto nas simulações, simulou-se ainda para 4 cenários diferentes:  $R_u=10 \Omega$ ,  $R_u=50 \Omega$ ,  $R_u=100 \Omega$  e  $R_u=1000 \Omega$ . Estes resultados são mostrados nas Figura 36, Figura 37, Figura 38 e Figura 39. O gráfico mostra a azul a carga inicial armazenada no condensador  $C_2$  ( $q_{2i}$ ) e a laranja a carga final armazenada no condensador  $C_1$  ( $q_{1f}$ ). A partir das figuras conclui-se que o circuito não funciona como desejado para tensões acima dos 4 V. O tempo necessário para injetar energia dependeria da tensão aplicada o que não é pretendido. Assim, se o objetivo for injetar energia no sistema, conclui-se que o circuito para a conservação da carga tem uma limitação.

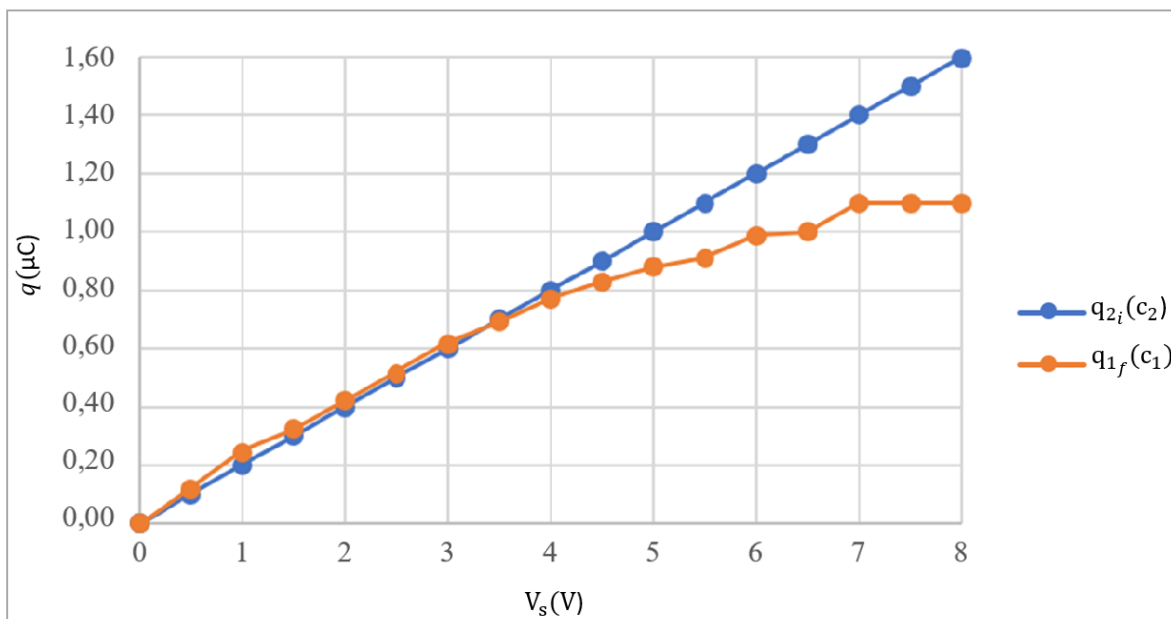


Figura 36 - Variação de carga num circuito com capacidade variável no sentido do condensador  $C_2$  para  $C_1$  com  $R_u = 10 \Omega$  caso com conservação de carga.

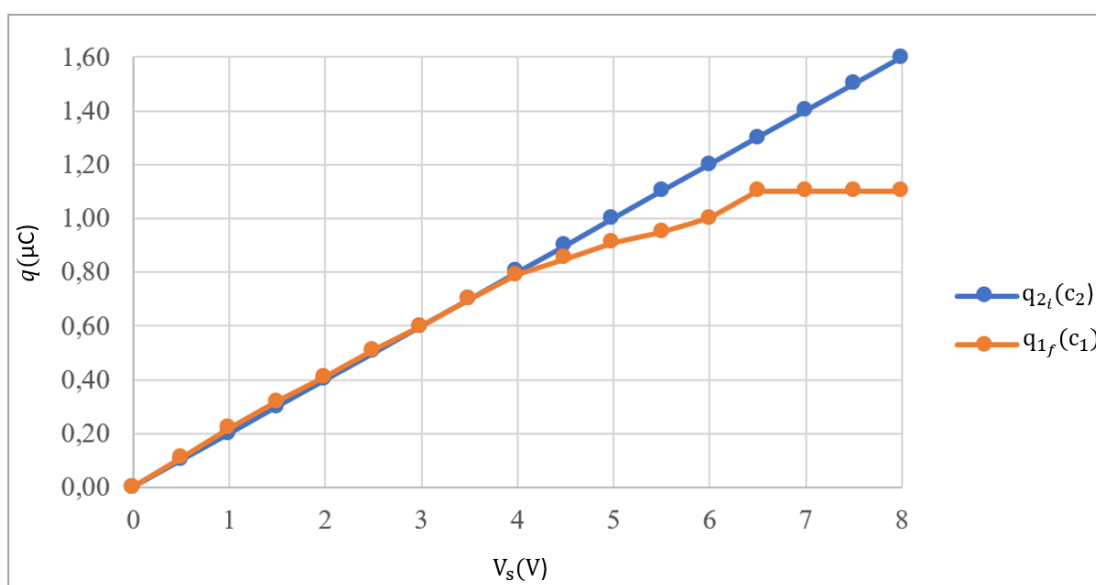


Figura 37 - Variação de carga num circuito com capacidade variável no sentido do condensador  $C_2$  para  $C_1$  com  $R_u = 50 \Omega$  caso com conservação de carga.

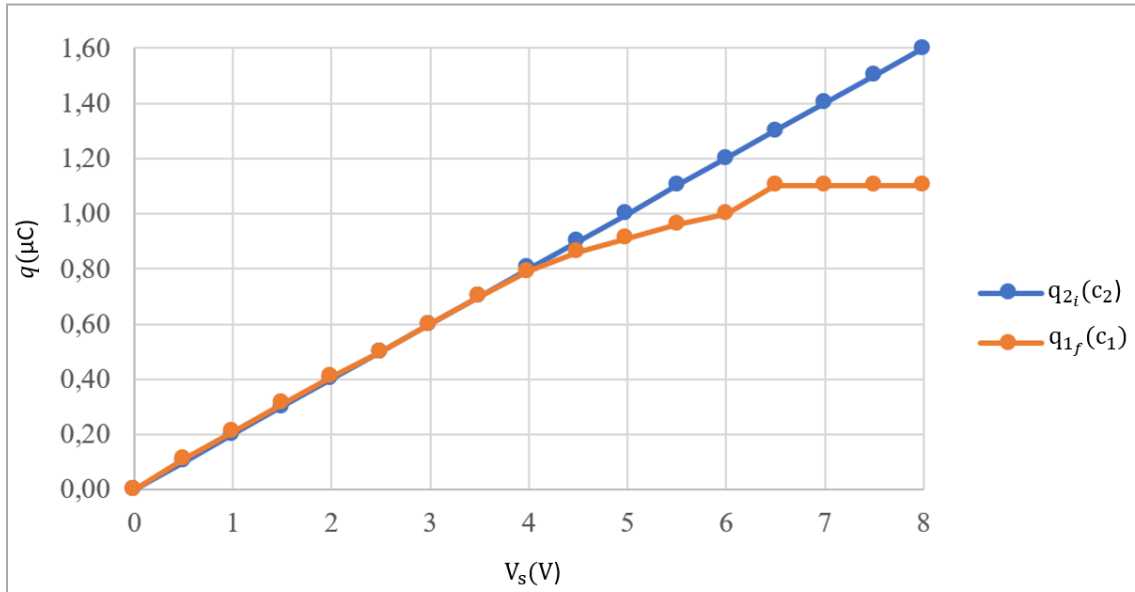


Figura 38 - Variação de carga num circuito com capacidade variável no sentido do condensador  $C_2$  para  $C_1$  com  $R_u = 100 \Omega$  caso com conservação de carga.

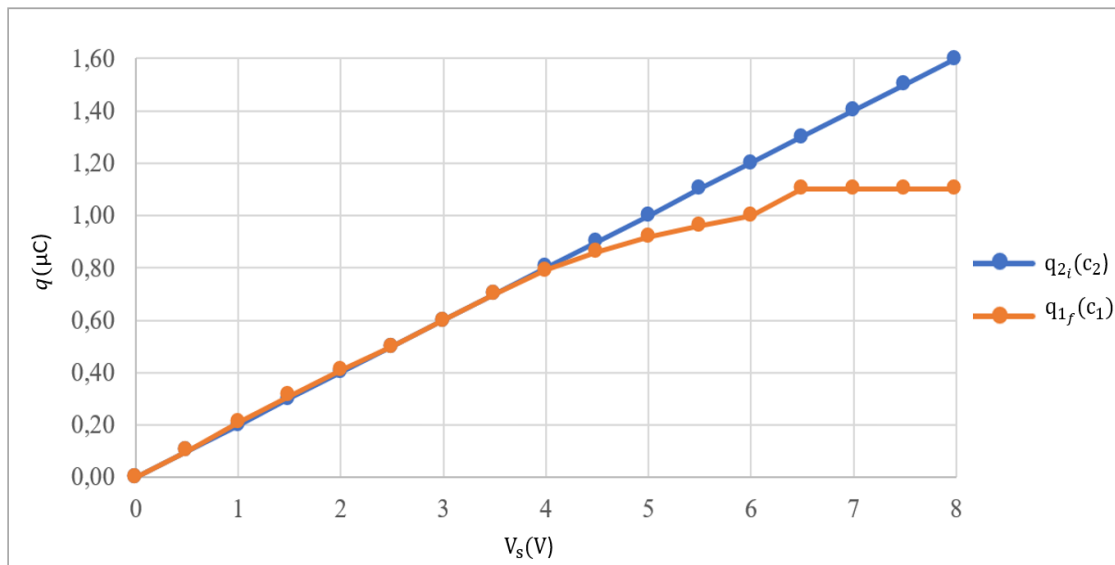


Figura 39 - Variação de carga num circuito com capacidade variável no sentido do condensador  $C_2$  para  $C_1$  com  $R_u = 1000 \Omega$  caso com conservação de carga.

Para resolver a limitação do circuito da Figura 32, foi necessário implementar um novo circuito como o da Figura 40. Este circuito já tem o comportamento esperado quando é necessário injetar energia no sistema.

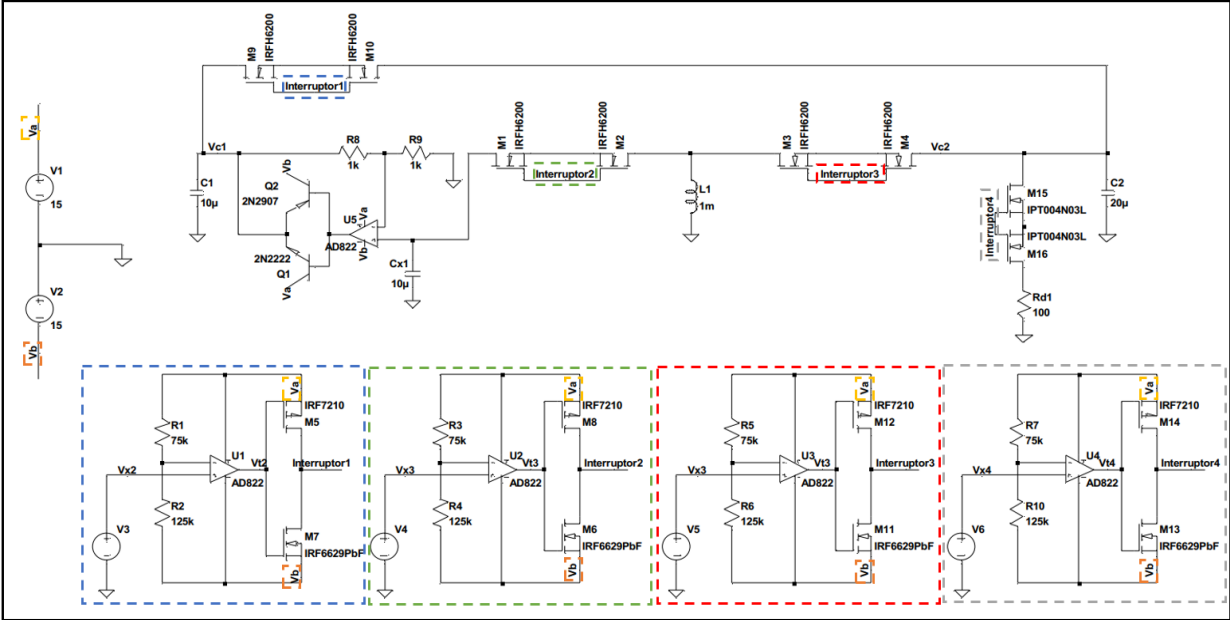


Figura 40 - Condensador variável bidirecional controlado por transístores: caso com conservação de Carga II.



## Conclusão e Trabalho futuro

### 6.1. Conclusão

Ao longo desta dissertação estudou-se a teoria da propagação em redes periódicas com células unitárias, que variam no tempo e que modelizam uma linha de transmissão com capacidade variável. Este estudo, permitiu-me recordar os conhecimentos sobre a propagação de ondas eletromagnéticas. Embora os conceitos abordados não tenham sido uma novidade, não estava confortável com todos os temas. No entanto, e apesar das dificuldades encontradas, consegui provar que existem condições para a propagação de ondas nas células unitárias apresentadas (sem perdas e com perdas).

Foi necessário fazer um simulador (SPICE e MATLAB) que permitisse visualizar a propagação de impulsos numa estrutura periódica. Inicialmente, não estava a ser possível obter os resultados teóricos na simulação devido aos parâmetros  $t_0$  e  $t_{transição}$ . Contudo, foi demonstrado que é possível haver transição de capacidade na estrutura periódica estudada.

Adicionalmente, foram calculadas as amplitudes dos impulsos gaussianos resultantes após a transição de capacidade, sendo os cálculos comprovados nas simulações efetuadas.

De seguida, foram desenhados circuitos elétricos para um condensador variável. Os circuitos são desenhados com base em dois cenários: a conservação da energia e a conservação da carga. Demonstrou-se que não é possível implementar um dispositivo onde a conservação da energia e a conservação da carga são garantidas simultaneamente.

Do meu ponto de vista, o desenho de circuitos com capacidade variável foi a parte mais interessante da dissertação, apesar de ter representado um grande desafio para mim. Foi necessário criar um circuito e compreender quais os componentes ideais a utilizar. Contudo, apenas foi possível provar o circuito de um condensador variável, com conservação de energia. Para o circuito do condensador variável com conservação da



carga foi encontrada uma limitação. Se o objetivo for injetar energia no sistema, o circuito só funciona para tensões abaixo dos 4V.

## 6.2. Trabalho futuro

Nesta dissertação, fica pendente, testes detalhados do circuito da Figura 40, à semelhança dos que foram apresentados no capítulo 5. Este circuito resolve a limitação, já referida, do caso em que ocorre conservação de carga. Tal como foi discutido anteriormente, o circuito Figura 32 não tem o comportamento espetável, quando é necessário injetar energia no circuito (tensões acima dos 4V).

Caso se opte por implementar um novo circuito para a conservação da carga, um fator importante é a escolha dos AMPOPs e MOSFETs a utilizar, sendo fundamental perceber as zonas de funcionamento de cada elemento escolhido. Estes componentes, no limiar das suas zonas de funcionamento, impõem comportamentos instáveis aos circuitos, o que não é desejado.

Pretende-se ainda, a implementação do circuito do condensador bidirecional desenvolvido no capítulo 4 numa linha de transmissão. A linha de transmissão seria com um maior número de células, cerca de 2000. Adicionalmente, também seria relevante demonstrar a evolução temporal das correntes das bobinas ao longo da estrutura periódica, tal como foi demonstrado e comprovado pelas tensões nos condensadores.

No futuro, também seria interessante implementar um condensador variável que não dependesse tanto da característica,  $R_{on}$  dos transístores *MOSFET*. O condensador variável bidirecional implementado depende de  $R_{on}$  baixos  $\approx 0.6\text{m}\Omega$ . No entanto, o preço de componentes com esta característica é mais dispendioso, comparativamente com componentes com  $R_{on}$  mais elevados.

## Referências Bibliográficas

- [1] Sedra, S.A., & Smith, C. K. *Microelectronic Circuits*, 6th Edition. Oxford University, 2009.
- [2] D.M. Pozar. *Microwave Engineering*. Wiley, 1997.
- [3] Maxwell JC. 1865 A dynamical theory of the electromagnetic field (PDF). *Phil. Trans. R. Soc.*155, 459–512. <https://doi:10.1098/rstl.1865.0008>
- [4] Heaviside O. 1893 *Electromagnetic theory*, vol. I. London, UK: The Electrician Publishing.
- [5] R.E. Collin. *Foundations for Microwave Engineering*. McGraw-Hill, 1992.
- [6] David K. Cheng. *Field and wave electromagnetics*, 2th Edition. Addison-Wesley, 1992.
- [7] Silva Neto, L. P., Rossi, J. O., & Silva Junior, A. R. (2011). Characterization of dielectric properties of commercial ceramic capacitors for pulsed power applications. COBEP 2011 - 11th Brazilian Power Electronics Conference, 347–351. <https://doi.org/10.1109/COBEP.2011.6085283>
- [8] Kankanamalage, R. R., Foster, M. P., & Davidson, J. N. (2019). Online electrolytic capacitor prognosis system for PWM drives. 2019 21st European Conference on Power Electronics and Applications, EPE 2019 ECCE Europe, P.1-P.8. <https://doi.org/10.23919/EPE.2019.8914936>
- [9] Anderson, R. (1996). Select the right plastic film capacitor for your power electronic applications. *Conference Record - IAS Annual Meeting (IEEE Industry Applications Society)*, 3, 1327–1330. <https://doi.org/10.1109/ias.1996.559237>
- [10] Yaici, W., Kouchachvili, L., Entchev, E., & Longo, M. (2020). Performance Analysis of Battery/Supercapacitor Hybrid Energy Source for the City Electric Buses and Electric Cars. *Proceedings - 2020 IEEE International Conference on Environment and Electrical Engineering and 2020 IEEE Industrial and Commercial Power Systems Europe, IEEEIC / I and CPS Europe 2020*. <https://doi.org/10.1109/IEEEIC/ICPSEurope49358.2020.9160567>

- [11] Raymond A. Serway, John W. Jewett (2004), *Physics for Scientists and Engineers*, 6th Edition. Thomson Brooks/Cole
- [12] Naayagi, R. T., & Forsyth, A. J. (2012). Design of high frequency air-core inductor for DAB converter. PEDES 2012 - IEEE International Conference on Power Electronics, Drives and Energy Systems, 0–3. <https://doi.org/10.1109/PEDES.2012.6484367>
- [13] Grandi, G., Kazimierczuk, M. K., Massarini, A., Reggiani, U., & Sancineto, G. (2004). Model of laminated iron-core inductors for high frequencies. *IEEE Transactions on Magnetics*, 40(4 I), 1839–1845. <https://doi.org/10.1109/TMAG.2004.830508>
- [14] Yu, Q., Holmes, T. W., & Naishadham, K. (2002). RF equivalent circuit modeling of ferrite-core inductors and characterization of core materials. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 44(1), 258–262. <https://doi.org/10.1109/15.990733>
- [15] Tan, E. L., & Heh, D. Y. (2018). Demonstration of electromagnetic waves propagation along transmission lines on iPad. 2018 IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility and 2018 IEEE Asia-Pacific Symposium on Electromagnetic Compatibility, EMC/APEMC 2018, (4), 599–601. <https://doi.org/10.1109/ISEMC.2018.8393849>
- [16] Kingston, R., Holmberg, N., Kotek, J., & Baghzouz, Y. (1994). Series capacitor placement on transmission lines with slightly distorted currents. *Proceedings of the IEEE Power Engineering Society Transmission and Distribution Conference*, 221–226. <https://doi.org/10.1109/tdc.1994.328384>
- [17] Othman, A., Barrak, R., Abib, G. I., & Mabrouk, M. (2019). A varactor based tunable RF filter for multistandard wireless communication receivers. *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, 102, 69–77. <https://doi.org/10.1016/j.aeue.2019.02.008>
- [18] Timoshenkov, S. P., Boyko, A. N., Gaev, D. S., & Kalmykov, R. M. (2018). An Integrated High-Capacitance Varicap Based on Porous Silicon. *Russian Microelectronics*, 47(7), 465–467. <https://doi.org/10.1134/S1063739718070156>

- [19] Samizadeh Nikoo, M., & Hashemi, S. M. A. (2017). New Soliton Solution of a Varactor-Loaded Nonlinear Transmission Line. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 65(11), 4084–4092. <https://doi.org/10.1109/TMTT.2017.2700306>
- [20] Surin, Y. V., Spiridonov, A. B., Litsoev, S. V., Martinova, V. P., Mezhov, A. V., & Karpovskaya, A. A. (2017). Parameter Calculation and Investigation of a MIS Varicap with Charge Transfer for L-Range Microwave Devices. *Russian Microelectronics*, 46(7), 484–488. <https://doi.org/10.1134/S1063739717070113>
- [21] Surin, Y. V., Spiridonov, A. B., & Litsoev, S. V. (2016). Development and research of MIS varicaps with charge transfer. *Russian Microelectronics*, 45(7), 484–487. <https://doi.org/10.1134/S1063739716070179>
- [22] Zakharov, A. V. (2011). Quality of tunable transmission line resonators with capacitor. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 56(5), 603–610. <https://doi.org/10.1134/S1064226911030144>
- [23] Velez, A., Bonache, J., & Martin, F. (2008). Varactor-loaded complementary split ring resonators (VLCSRR) and their application to tunable metamaterial transmission lines. *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, 18(1), 28–30. <https://doi.org/10.1109/LMWC.2007.911983>
- [24] Hegazi, E., & Abidi, A. A. (2003). Varactor characteristics, oscillator tuning curves, and AM-FM conversion. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, 38(6), 1033–1039. <https://doi.org/10.1109/JSSC.2003.811968>