

TAXAS DE CÂMBIO: MODELAÇÃO ARMA-GARCH

Michal Hasmuklal Maganlal

Dissertação submetida cumprindo o requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Gestão de Empresas

Orientador:

Professor Doutor José Dias Curto

ISCTE-IUL Business School

Departamento de Métodos Quantitativos para Gestão e Economia

Setembro 2019

TAXAS DE CÂMBIO: MODELAÇÃO ARMA-GARCH

Michal Hasmuklal Maganlal

Dissertação submetida cumprindo o requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Gestão de Empresas

Orientador:

Professor Doutor José Dias Curto

ISCTE-IUL Business School

Departamento de Métodos Quantitativos para Gestão e Economia

Setembro 2019

AGRADECIMENTOS

O desenvolvimento desta dissertação coincidiu com o início de uma nova etapa na minha vida que passou por abraçar um desafio internacional, que me levou a viver em três países, nos quais as linhas deste trabalho foram escritas e a razão pela qual se tornou desafiante concluir o mesmo.

Gostaria de começar por agradecer aos meus pais e ao meu irmão por todos os valores transmitidos que me motivaram a querer atingir novas metas cada vez mais exigentes.

Ao meu tio Ajay, um agradecimento especial por ter alimentado este gosto que tenho pelos mercados financeiros, por todos os conselhos e ensinamentos que tem transmitido nesta área tão complexa e com quem continuo a aprender muito.

Um obrigado à Joana Abrantes Brás, que foi minha companheira neste trajeto que começou no Mestrado Executivo em Gestão Empresarial e que muitos bons conselhos e ideias me deu, para além da sua boa disposição que tão bem me faz.

Não posso deixar de agradecer à Ana Mafalda Reis pela amizade, motivação e contagiante alegria e positivismo que foi transmitindo e que ajudaram a concluir este trabalho.

Ao Professor José Dias Curto, um muito obrigado pela inteira disponibilidade, exigência, prontidão com que sempre respondeu a todas as minhas questões e por todas as palavras que superaram o seu papel de orientador.

Ao Tulku Pema Wangyal Rinpoche pelo toque especial e importante que deu num momento em que a conclusão da presente dissertação parecia uma mera miragem.

TAXAS DE CÂMBIO: MODELAÇÃO ARMA-GARCH

RESUMO

As taxas de câmbio desempenham um papel importante no panorama económico, financeiro e comercial a nível mundial, tornando-se por isso interessante avaliar e prever as suas oscilações. Com base nas cotações diárias de três pares cambiais, o EUR/USD, o GBP/USD e o GBP/EUR, foram estudados, na presente dissertação, os modelos que melhor se ajustavam às séries temporais das taxas de rendibilidade dos referidos câmbios e averiguou-se quais seriam os que apresentavam melhor capacidade preditiva no que diz respeito à volatilidade, utilizando como *proxy* da volatilidade o quadrado das rendibilidades. O estudo e a previsão da volatilidade foram feitos com base numa combinação de modelos ARMA (*Autoregressive Moving Average*) e GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*). Esta combinação é justificada pelo facto de os modelos ARMA não serem capazes de modelar a variação da variância ao longo do tempo no caso das séries financeiras. No presente estudo foram também avaliadas duas variantes do modelo GARCH: o EGARCH e o GJR-GARCH. A previsão da volatilidade foi realizada de duas formas: estática e dinâmica. A previsão dinâmica foi realizada com *rolling* e *expanding windows*. No decorrer do estudo empírico foram verificados vários factos estilizados comuns das séries financeiras, tais como a não estacionaridade das séries temporais financeiras e a existência de *clustering* de volatilidade, entre outros. Os resultados obtidos mostram, neste caso, que o modelo que melhor se ajusta às séries temporais é aquele que tem maior poder de previsão. Por fim, recorrendo às funções de erro foram comparadas as previsões feitas pelos vários modelos.

Palavras-Chave: volatilidade; taxas de câmbio; ARMA-GARCH; taxas de rendibilidade.

EXCHANGE RATES: ARMA-GARCH MODELING

ABSTRACT

Exchange rates play an important role in the global economic, financial and trade panorama which makes it interesting to assess and predict their fluctuation. In this dissertation the daily quotations of three exchange rates (EUR/USD, GBP/USD and GBP/EUR) were taken to study the models that would fit better the returns time series and an investigation was done to check which model could predict the volatility better, using the squared returns as a proxy for the volatility. The study and prediction of the volatility were based on a combination of ARMA (Autoregressive Moving Average) and GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) models. This combination is justified by the inability of ARMA models to capture the variance variation over time in a financial series. Two variants of the GARCH model were also evaluated in this work: EGARCH and GJR-GARCH. To predict volatility a static and a dynamic approaches were used. Dynamic forecasting was performed with rolling and expanding windows. In the course of the empirical study several stylized facts common to the financial series such as non-stationarity and volatility clustering among others were verified. In this case the results show that the model that best fits the returns time series is the one that has the greatest predictive power. Finally, the predictions made with different models were compared using loss functions.

Keywords: volatility; exchange rates; ARMA-GARCH; returns.

SUMÁRIO EXECUTIVO

Na presente dissertação, estabeleceu-se o objetivo de avaliar os modelos que melhor se ajustam e que melhor conseguem prever a volatilidade (por meio do quadrado das rendibilidades) em três pares cambiais. A volatilidade, que representa uma medida de risco, é definida como a variação de um ativo financeiro, como é o caso das taxas de câmbio, num determinado período de tempo (normalmente curto). As taxas de câmbio podem ser modeladas com recurso a modelos univariados ou a modelos multivariados. Esta dissertação focou-se nos primeiros, tendo em conta que foram modeladas as séries temporais dos pares cambiais. Os modelos ARMA-GARCH foram utilizados para modelar e prever a volatilidade dos pares EUR/USD, GBP/USD e GBP/EUR, utilizando também as variações EGARCH e GJR-GARCH das mesmas, o que se mostra relevante porque estas conseguem incluir o efeito dos choques nas séries temporais. As taxas de câmbio apresentam uma variância não constante, facto comprovado por vários autores, por isso os modelos ARMA foram complementados pelos modelos GARCH uma vez que os ARMA não conseguem captar esta variação da variância, denominada heteroscedasticidade. Neste trabalho foram utilizadas as cotações diárias dos pares cambiais em estudo, tendo sido considerada uma parte das mesmas para a estimação dos modelos (dados *in sample*) e outra para a avaliação (dados *out-of-sample*). A aplicação dos modelos está dependente da estacionaridade das séries financeiras, que são por norma não-estacionárias, como se verificou nas dos três pares estudados. A não-estacionaridade leva a que as séries financeiras tenham de sofrer uma diferenciação para se tornarem estacionárias e se poder aplicar os modelos ARMA-GARCH. A confirmação da não-estacionaridade foi feita pela aplicação dos testes ADF, KPSS e PP. Posteriormente foi realizada a diferenciação que dá origem às taxas de rendibilidade, sendo estas estacionárias. As taxas de rendibilidade foram sujeitas a uma análise estatística que revelou um excesso de curtose – típico das séries financeiras –, e outra análise que usou o teste de Jarque-Bera – esta revelou que as séries não apresentavam uma distribuição normal, facto comprovado pela análise das *QQ-plots* e histogramas. De seguida, foram determinadas as ordens dos termos p e q do modelo ARMA, aplicando as FAC e FACP às taxas de rendibilidade. O resultado desta operação foi zero para ambos os termos dos três pares cambiais. Este mesmo resultado foi confirmado pelas medidas de bondade BIC e AIC. Ao quadrado dos resíduos das taxas de rendibilidade foram aplicados a FAC e os testes de Ljung-Box e o Multiplicador de Lagrange para confirmar a presença de heteroscedasticidade. Foi aplicado, de seguida, o modelo GARCH e suas variantes com os

termos r e s a apresentarem valor unitário, com base em vários trabalhos. Os parâmetros dos modelos foram calculados pelo método da Máxima Verosimilhança, que revelou o impacto dos choques positivos e negativos, bem como a persistência da volatilidade. Foi comprovado que os modelos conseguiram captar os efeitos ARCH, e pelas medidas de bondade foram escolhidos os modelos que melhor se ajustavam a cada par cambial. Após estimar os modelos, foram feitas duas previsões, uma estática e outra dinâmica, sendo que esta última se subdivide em duas: a primeira recorre a *rolling windows* e a segunda a *expanding windows*. A dimensão das janelas de estimação utilizadas para realizar a previsão dinâmica variou entre 250 e 1000 observações. Pela avaliação das *loss functions* concluiu-se que a previsão estática apresentava melhores resultados.

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE TABELAS	X
ÍNDICE DE FIGURAS.....	XII
PRINCIPAIS ABREVIATURAS UTILIZADAS.....	XIV
1. Introdução	1
1.1. Motivação	1
1.2. Problemática de Investigação	2
1.3. Objetivos de Investigação.....	4
2. Revisão de Literatura	6
2.1. Modelo do Random Walk sem drift	10
2.2. Modelos ARIMA	11
2.3. Modelos ARCH	14
2.4. Modelos ARMA-GARCH.....	18
2.5. Desenvolvimentos Recentes	22
2.5.1. Modelos DSGE.....	22
2.5.2. Modelos T-DPE.....	23
2.5.3. Modelos ANN.....	24
2.5.4. Modelos Hurst	28
3. Metodologia	30
4. Estudo Empírico.....	45
4.1. Dados	45
4.2. Análise Descritiva dos Dados.....	50
4.3. Modelação da distribuição das taxas de rendibilidade	54
4.4. Previsão	64
4.4.1. Previsão Estática	64
4.4.2. Previsão Dinâmica	67
4.4.2.1. Rolling Windows	67
4.4.2.2. Expanding Windows	72
4.4.3. Comparação Final	75
5. Conclusões e Linhas de Investigação Futuras	77
5.1. Conclusões.....	77

5.2. Linhas de Investigação Futuras	81
BIBLIOGRAFIA	82
APÊNDICE	89

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 4.1 - Testes de estacionaridade aplicados aos pares cambiais.....	49
Tabela 4.2 - Valores críticos dos testes de estacionaridade	49
Tabela 4.3 - Medidas de estatística descritiva das Taxas de Rendibilidade.....	52
Tabela 4.4 - Testes de estacionaridade aplicados às taxas de rendibilidade	54
Tabela 4.5 - Teste de Ljung-Box aplicado às taxas de rendibilidade (lag = 10).....	54
Tabela 4.6 - Valores de AIC e BIC para os vários modelos ARMA(p, q).....	56
Tabela 4.7 - Teste de Ljung-Box aplicados aos resíduos do modelo ARMA(0, 0) (lag = 10)	57
Tabela 4.8 - Teste de Ljung-Box (lag = 10).....	58
Tabela 4.9 - Teste do Multiplicador de Lagrange	58
Tabela 4.10 - Estimativas pelo método da Máxima Verosimilhança e bondade do ajustamento (EUR/USD)	59
Tabela 4.11: Estimativas pelo método da Máxima Verosimilhança e bondade do ajustamento (GBP/USD)	59
Tabela 4.12: Estimativas pelo método da Máxima Verosimilhança e bondade do ajustamento (GBP/EUR)	60
Tabela 4.13: Teste de Ljung-Box aplicado ao quadrado aos resíduos estandardizados (lag = 10).....	61
Tabela 4.14: Medidas de bondade do ajustamento (EUR/USD).....	62
Tabela 4.15: Medidas de bondade do ajustamento (GBP/USD).....	62
Tabela 4.16: Medidas de bondade do ajustamento (GBP/EUR).....	62
Tabela 4.17: Dados estatísticos dos resíduos estandardizados.....	63
Tabela 4.18 - Erros da Previsão Estática para EUR/USD	66
Tabela 4.19 - Erros da Previsão Estática para GBP/USD	66
Tabela 4.20 - Erros da Previsão Estática para GBP/EUR	66
Tabela 4.21 - Erros da Previsão Dinâmica para EUR/USD – Rolling Window (650)	67
Tabela 4.22 - Erros da Previsão Dinâmica para GBP/USD – Rolling Window (250).....	68
Tabela 4.23 - Erros da Previsão Dinâmica para GBP/USD – Rolling Window (450).....	69
Tabela 4.24 - Erros da Previsão Dinâmica para GBP/EUR – Rolling Window (400).....	70
Tabela 4.25 - Erros da Previsão Dinâmica para GBP/EUR – Rolling Window (1000).....	71
Tabela 4.26 - Erros da Previsão Dinâmica para EUR/USD – Expanding Window (450)	72
Tabela 4.27 - Erros da Previsão Dinâmica para GBP/USD – Expanding Window (950)	72
Tabela 4.28 - Erros da Previsão Dinâmica para GBP/USD – Expanding Window (1000)	73

Tabela 4.29 - Erros da Previsão Dinâmica para GBP/EUR – Expanding Window (250)	74
Tabela 4.30 - Erros da Previsão Dinâmica para GBP/EUR – Expanding Window (950)	75
Tabela 4.31 - Comparação de métodos de previsão para o EUR/USD	76
Tabela 4.32 - Comparação de métodos de previsão para o GBP/USD	76
Tabela 4.33 - Comparação de métodos de previsão para o GBP/EUR	76

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 - Modelo KGANN	24
Figura 3.1 - Par EUR/USD entre 1/1/2002 e 31/12/2018.....	31
Figura 3.2 - Método de previsão com rolling windows.....	42
Figura 3.3 - Método de previsão com expanding windows	43
Figura 4.1 - Evolução do par EUR/USD entre 2002 e 2018.....	45
Figura 4.2 - Evolução do par GBP/USD entre 2002 e 2018	46
Figura 4.3 - Evolução do par GBP/EUR entre 2002 e 2018.....	47
Figura 4.4 - Volatilidade resultante da crise do subprime e do brexit	48
Figura 4.5 - Taxas de rendibilidade do EUR/USD.....	50
Figura 4.6 - Taxas de rendibilidade do GBP/USD.....	50
Figura 4.7 - Taxas de rendibilidade do GBP/EUR.....	51
Figura 4.8 - Histograma com sobreposição da curva normal	52
Figura 4.9 - QQ-plots das taxas de rendibilidade para a distribuição normal.....	53
Figura 4.10 - QQ-Plots das taxas de rendibilidade para a distribuição t-student	53
Figura 4.11 - FAC e FACP das taxas de rendibilidade (EUR/USD).....	55
Figura 4.12 - FAC e FACP das taxas de rendibilidade (GBP/USD)	55
Figura 4.13 - FAC e FACP das taxas de rendibilidade (GBP/EUR)	55
Figura 4.14 - FAC dos valores absolutos das taxas de rendibilidade	56
Figura 4.15 - FAC dos quadrados dos resíduos.....	58
Figura 4.16 - News Impact Curves (EUR/USD)	61
Figura 4.17 - News Impact Curves (GBP/USD)	61
Figura 4.18 - News Impact Curves (GBP/EUR)	62
Figura 4.19 - Previsão estática para EUR/USD.....	64
Figura 4.20 - Previsão estática para GBP/USD.....	65
Figura 4.21 - Previsão estática para GBP/EUR.....	65
Figura 4.22 - Previsão com rolling window (650) para o EUR/USD.....	68
Figura 4.23 - Previsão com rolling window (250) para o GBP/USD	69
Figura 4.24 - Previsão com rolling window (450) para o GBP/USD.....	70
Figura 4.25 - Previsão com rolling window (400) para o GBP/EUR.....	71
Figura 4.26 - Previsão com rolling window (1000) para o GBP/EUR.....	71
Figura 4.27 - Previsão com expanding window (450) para o EUR/USD	72

Figura 4.28 - Previsão com expanding window (950) para o GBP/USD.....	73
Figura 4.29 - Previsão com expanding window (1000) para o GBP/USD	74
Figura 4.30 - Previsão com expanding window (250) para o GBP/EUR.....	74
Figura 4.31 - Previsão com expanding window (950) para o GBP/EUR.....	75

PRINCIPAIS ABREVIATURAS UTILIZADAS

AIC – Akaike Information Criterion

ANN – *artificial neural network*

ARCH – *autoregressive conditional heteroscedasticity*

ARIMA – *autoregressive integrated moving average*

ARMA – *autoregressive moving average*

AUD – Dólar Australiano

BCE – Banco Central Europeu

BIC – Bayesian Information Criterion

CAD – Dólar Canadano

CHF – Franco Suíço

CNY – Yuan Chinês

DM – Marco Alemão

EUR – Euro

FAC – função de autocorrelação

FACP – função de autocorrelação parcial

FED – Reserva Federal Americana

FF – Franco Francês

GARCH – *generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*

GBP – Libra Esterlina

INR – Rupia Indiana

IRR – Real Iraniano

JPY – Iéne Japonês

LM – Lira (Italiana)

MAE – *mean absolute error*

MSE – *mean square error*

NZD – Dólar Neo Zelandês

PKR – Rupia Paquistanesa

SDG – Libra Sudanesa

SEK – Coroa Sueca

SLL – Leone da Serra Leoa

USD – Dólar Americano

1. Introdução

No âmbito do Mestrado em Gestão de Empresas, foi desenvolvido o presente trabalho para a obtenção do grau de Mestre.

Neste capítulo será apresentada a motivação que levou à escolha deste tema e serão expostos a problemática e os objetivos da investigação desenvolvida.

1.1. Motivação

O presente trabalho foi desenvolvido com a motivação de explorar o interesse que o candidato nutre pelo vasto mundo dos mercados financeiros, nomeadamente com a intenção de aprofundar o tema das taxas de câmbio.

O conceito de taxa de câmbio é definido como o preço relativo das moedas de dois países, refletindo a quantidade de moeda que se pode comprar ou vender pela venda ou compra da moeda base (Banco de Portugal, 2017).

Neste âmbito, até 1973, vigorava o Acordo de *Bretton Woods* que havia sido celebrado em 1944, e que estipulava que os bancos centrais de cada país se comprometiam a fixar o valor das próprias moedas em relação ao dólar americano, estando o dólar americano, por sua vez, indexado ao ouro (35 dólares equivaliam a uma onça de ouro). De forma a manter estável o valor das moedas relativamente ao dólar, os bancos aumentavam a produção de moeda quando esta dava sinais de força, ou seja, quando a sua procura aumentava, ou compravam-na nos mercados estrangeiros, quando esta apresentava sinais de fraqueza, em momentos em que a oferta era superior à procura. Em 1973, após um período de estagflação, Nixon, então presidente dos EUA, aboliu o Acordo de *Bretton Woods*, dando origem às taxas de câmbio flutuantes. O ouro deixou assim de ter um valor fixo, facto que levou a uma subida considerável do seu valor (Balance, 2017).

Atualmente, existem várias moedas pertencentes a diferentes países e uma que é moeda comum de dezanove países. Estes dezanove países, da União Europeia, representam o Eurogrupo e a

referida moeda, o Euro, é considerada uma das moedas mais fortes no plano mundial, a par do Dólar Americano.

No âmbito do estudo das relações cambiais entre moedas, nem todas as moedas se assemelham tão interessantes quanto estas e suas características especiais, seja porque representam uma economia pequena, seja porque as suas taxas de câmbio não variam ao longo do tempo. É por estes motivos que se torna mais relevante e cativante estudar as relações cambiais mais importantes, tais como os pares EUR/USD, GBP/USD, GBP/EUR e USD/JPY.

São pares cambiais tais como os mencionados que levam a que haja grandes alterações políticas, económicas e monetárias, sendo por isso necessário que se consiga prever as evoluções das suas relações a curto e a longo prazo.

1.2. Problemática de Investigação

Ao longo das últimas décadas foram desenvolvidos muitos modelos com o propósito de prever a variação cambial, mas nenhum que seja capaz de prever com elevado grau de precisão os contornos da evolução de um par cambial. Isto explica-se com o facto de existirem inúmeros fatores que influenciam a variação dessa evolução — eventos políticos, eventos económicos, a incerteza, a não-linearidade, a psicologia do mercado, etc.

Como é sabido, a correlação entre a moeda de um país e as moedas de outros países é um fator de extrema relevância, uma vez que tem consequências a nível macroeconómico. A volatilidade das taxas de câmbio cria incerteza, que se reflete nas importações e exportações, no valor das reservas internacionais, nas posições abertas em moeda estrangeira, no desemprego etc., afetando o saldo da Balança de Pagamentos de um país (Diebold, 1988).

Se considerarmos o panorama nacional, verificamos que se observa uma crescente internacionalização das empresas portuguesas, e não exclusivamente destas. Esta crescente atividade internacional leva a que, na gestão das suas operações, as empresas tenham em conta as taxas de câmbio com o objetivo de aferirem a viabilidade da expansão do negócio, e é cada vez mais frequente no universo corporativo realizarem-se análises do risco tendo em conta o fator cambial.

Dada esta influência das taxas de câmbio nos negócios, a previsão das respectivas variações torna-se essencial sob vários aspectos e é aqui que reside o interesse no desenvolvimento de modelos que o consigam fazer. A capacidade de prever as variações é também um fator com enorme potencial para assegurar a estabilidade dos países, podendo evitar que estes estejam vulneráveis às influências negativas originadas por fenómenos imprevistos.

Na ótica dos investidores, a moeda é um ativo financeiro, pelo que é também do interesse destes que seja possível realizar uma previsão fidedigna da evolução das taxas de câmbio. O apelo da correta previsão da volatilidade está em poder minimizar os riscos, em definir um bom portefólio de ativos, e em estimar o risco associado a esse mesmo portefólio.

As partes interessadas na previsão da volatilidade das taxas de câmbio têm de analisar o nível de precisão das suas estimativas, fazendo a comparação com outros modelos já existentes, tais como o do Passeio Aleatório.

Ao longo das últimas décadas, o modelo Passeio Aleatório (Random Walk), que tem servido de base de comparação entre os modelos que têm sido desenvolvidos, é caracterizado pelo facto de afirmar que as variações nas cotações não seguem um padrão, ou seja, declara que as variações numa cotação atual não apresentam nenhuma relação com as variações passadas. Os modelos que se têm vindo a estudar têm todos o objetivo de superar o modelo Random Walk no que à sua capacidade preditiva diz respeito.

Com a crise prolongada de 2007, muitos princípios fundamentais económicos deixaram de fazer sentido e deixaram de poder ser usados para a previsão da evolução das taxas de câmbio, levando a que muitos dos modelos que os usavam, e que eram até então estudados, se tornassem obsoletos.

Os modelos estudados para prever as taxas de câmbio podem ser divididos em dois grandes grupos, dividindo-se de acordo com o número de variáveis consideradas: os modelos multivariados e os modelos univariados / de séries temporais. Os modelos multivariados têm em conta fatores económicos tais como a inflação, a produção, o PIB, entre outros; e os modelos de séries temporais analisam dados e padrões passados para, após esta análise, preverem o comportamento de um ativo.

1.3. Objetivos de Investigação

O presente estudo irá incidir sobre os modelos de previsão das variações dos pares cambiais mais relevantes no contexto económico mundial, recorrendo à aplicação dos modelos de séries cronológicas ARMA-GARCH. Estes modelos têm duas componentes para modelar a média e a variância condicionais: ARMA e GARCH, respetivamente.

Os modelos ARMA-GARCH são uma combinação entre modelos ARMA – *autoregressive moving average* (autorregressivos de médias móveis) – e GARCH – *generalized autoregressive conditional heteroskedasticity* (autorregressivos generalizados de heteroscedasticidade condicional).

O principal objetivo deste trabalho é estimar os parâmetros dos modelos ARMA-GARCH avaliá-los quando aplicados às taxas de câmbio dos pares EUR/USD, GBP/USD e GBP/EUR. Com esta finalidade será feita a aferição dos métodos existentes, e decidir-se-á quais serão os mais adequados para estimar os parâmetros do modelo, a existência e a força das correlações com as variações logarítmicas de cotações passadas, e fazer a comparação das variações previstas com as reais.

Para desenhar um modelo de previsão das variações das taxas de câmbio utilizar-se-ão dados históricos repartidos por dois períodos: um primeiro, que refletido em dados *in-sample* e cujas observações serão utilizadas para estimar o modelo e efetuar a previsão; e um segundo, que se expressa em dados *out-of-sample*, e cujos valores observados serão comparados com a previsão efetuada.

Para iniciar o processo de análise dos pares cambiais, será relevante conhecer o histórico das cotações verificando se existem singularidades, tais como subidas e descidas abruptas na cotação e procurando entender as origens desses acontecimentos, que poderão estar relacionados com choques positivos ou negativos.

O histórico de cotações utilizado na presente dissertação tem início na data de circulação do Euro, janeiro de 2002 e o fim é datado de dezembro de 2018.

A restante dissertação encontra-se estruturada em cinco capítulos. O segundo capítulo abordará os trabalhos desenvolvidos referentes ao presente tema e fará também uma passagem pelos estudos mais recentes acerca da previsão das variações das taxas de câmbio. No terceiro capítulo será apresentada a metodologia usada no desenvolvimento dos modelos. Do quarto

capítulo fará parte o estudo empírico, e serão apresentados e analisados os dados e serão estimados e avaliados os modelos com base no respetivo poder de previsão. O quinto capítulo fará uma sinopse e apresentará as conclusões. Por fim, no sexto capítulo, serão apresentados os apêndices.

2. Revisão de Literatura

Ao longo dos anos, têm sido estudados vários modelos para fazer a previsão correta das conversões de moedas nos vários países. Esta tarefa tem-se revelado infrutífera devido à existência inúmeros fatores que influenciam direta e indiretamente o valor das moedas dos diferentes países.

O modelo que ainda hoje serve de referência, e que é utilizado para efeitos de *benchmarking*, é o modelo Random Walk. Segundo Fama (1965), o modelo Random Walk baseia-se num mercado eficiente em que os preços dos ativos incluem toda a informação sobre eventos passados e eventos expectáveis, estando esta informação disponível para todos os interessados — pelo que o preço dos ativos irá sempre refletir o respetivo valor intrínseco. Sendo o valor dos ativos influenciado pelo ser humano, prevê-se que o valor de um ativo «vagueie» em torno do seu valor intrínseco (o que originou a denominação Random Walk — Passeio Aleatório). Os ajustes instantâneos do valor dos ativos são característicos dos mercados eficientes, indicando que as alterações do valor são independentes. É esta a definição de um mercado *random walk*. A teoria do modelo Passeio Aleatório defende que as variações dos preços dos ativos não têm relação com o histórico dos mesmos, pelo que não é possível prever o valor futuro dos ativos.

Muitos estudos e modelos estatísticos têm sido desenvolvidos para se prever a variação cambial e para conseguir contrariar o modelo Random Walk, tendo por base o histórico das cotações, e é com base nesse histórico que se pretende desenvolver o presente trabalho, nomeadamente aplicação do modelo ARMA-GARCH.

Grande parte do texto deste capítulo, destinado à revisão de literatura, apresentará os modelos mais importantes e reconhecidos no mundo académico, bem como os trabalhos desenvolvidos recorrendo a modelos ARIMA, ARCH, ARMA-GARCH e outros modelos mais recentes em estudo. E, de um modo geral, este capítulo incidirá sobre os modelos de previsão das taxas de câmbio desenvolvidos e debatidos por outros autores de referência.

As taxas de câmbio podem ser modeladas de duas formas: a primeira passa por aplicar uma abordagem multivariável, ou seja, considera-se uma variável dependente que está associada a variáveis económicas (por exemplo as taxas de juro, a produção e a inflação), designadas variáveis explicativas; a segunda forma recorre a modelos univariados (em que se incluem as

séries temporais), cuja modelação e previsão é realizada com recurso a informação passada incluindo um termo de erro (Pahlavani & Roshan, 2015).

Autores tais como Meese & Rogoff (1983), Rossi (2013), Castillo-Maldonado & Pérez-Macal (2013) e Caraianni (2017) apresentam os seguintes modelos multivariados como os mais utilizados na literatura até aos dias correntes: UIRP – Uncovered Interest Rate Parity, PPP – Power Parity, Monetary Models (Flexible Price e Sticky Price), Taylor Rule, Portfolio Balance e BEER – Behavioural Equilibrium Exchange Rate. Estes modelos baseiam-se em fatores macroeconómicos, tais como a taxa de juro, a taxa de inflação, o valor das *commodities*, entre outros; fatores estes que só é possível medir ao fim de um certo período (normalmente, entre um e três meses).

O facto de os estudos de Meese-Rogoff não conseguirem modelar da melhor forma as taxas de câmbio não significa que as cotações efetivamente executem um *random walk*, é apenas uma evidência de que o modelo do Random Walk é uma melhor aproximação estocástica do que os outros modelos estudados (Diebold, 1988).

Alvarez-Diaz et al. (2008) referem que o estudo de Meese-Rogoff apenas pode ser considerado no caso das séries lineares, pelo que não deverá ser generalizado dado que existe a possibilidade de existirem estruturas não lineares nas dinâmicas das taxas de câmbio.

Sendo o objetivo do presente trabalho a modelação das taxas de câmbio usando informação do passado e do presente, usando até dados de recolha diária, os modelos acima não serão alvo de estudo.

Uma série temporal define-se como uma sequência de dados obtidos em intervalos de tempo regulares ao longo de um período específico (Latorre & Cardoso, 2001).

Os modelos de previsão de séries temporais baseiam-se em os dados históricos, pressupondo que padrões passados possam ser utilizados para prever dados futuros (Ngan, 2016).

Os modelos de séries temporais usados na previsão da taxa de câmbio mais frequentemente referidos na literatura são os modelos de médias móveis, de alisamento exponencial, ARIMA – *autoregressive integrated moving average*, ARCH – *autoregressive conditional heteroskedasticity* e ANN – Artificial Neural Networks (Gooijer & Hyndman, 2006).

Os modelos de médias móveis são utilizados para medir o preço médio ou a taxa de câmbio de um par ao longo de um determinado período. Estes modelos têm o objetivo de mostrar a direção

da tendência e alisar as oscilações do valor e do volume. São designadas médias móveis porque representam médias de valores dos últimos x períodos. Existem dois tipos de médias móveis que são utilizadas pelos analistas: as simples e as exponenciais. Médias móveis referentes a períodos curtos apresentam maiores oscilações, mostrando mais sinais de compra ou venda dos ativos, enquanto as médias móveis referentes a longos períodos impedem muitas vezes que se estabeleça uma posição de compra ou venda (Orabi & Saymeh, 2012).

Os modelos de alisamento exponencial eram considerados uma combinação de técnicas *ad hoc* para extrapolação de vários tipos de séries temporais unidimensionais. Estes modelos eram utilizados para classificar a tendência e a sazonalidade das séries em função da sua linearidade. Muth (1960) in Gooijer & Hyndman (2006) demonstrou que os modelos de Simple Exponential Smoothing (SES) apresentavam bons resultados na previsão para o Random Walk com ruído. Os trabalhos de Box & Jenkins (1970), Roberts, (1982) e Abraham & Ledolter (1983) in Gooijer & Hyndman, (2006) revelaram que algumas previsões lineares de alisamento exponencial eram casos especiais dos modelos ARIMA.

Os modelos ANN são úteis nos processos não lineares que têm uma relação funcional desconhecida, e que por isso são difíceis de modelar (Darbellay & Slama, 2000). Estes modelos filtram as variáveis dependentes por uma ou mais camadas escondidas, consistindo cada camada em unidades ou nós escondidos, resultando depois na variável pretendida. Os modelos não lineares apresentam dois problemas: a) são muito complexos, b) usam demasiados parâmetros que podem não ser necessários (Gooijer & Hyndman, 2006).

Os vários estudos desenvolvidos sobre as séries temporais de ativos financeiros levaram à percepção de que estas apresentam certas de propriedades comuns. Segundo Cont (2001), as séries temporais financeiras partilham determinadas propriedades estatísticas (qualitativas no que diz respeito aos retornos) denominadas factos estilizados. O autor compilou estes factos com base em dados empíricos, que são apresentados de seguida.

- 1) Ausência / insignificância de autocorrelações lineares entre o preço dos ativos financeiros e informação, com a exceção das escalas temporais diárias muito curtas ou das escalas temporais mensais ou semanais;
- 2) Abas pesadas (*heavy tails*): a distribuição de retornos dos ativos financeiros apresenta um índice que mede o peso da aba com valores entre 2 e 5;
- 3) Ganhos / perdas assimétricas: as perdas registadas têm maior amplitude do que os ganhos;

- 4) Aggregational Gaussity: à medida que se aumenta a escala temporal dos retornos, verifica-se a semelhança a uma distribuição normal. Normalmente, a forma da distribuição varia com a escala temporal;
- 5) Intermitência: as taxas de rendibilidade mostram um grau elevado de variabilidade em qualquer escala temporal; esta variabilidade é quantificada pela presença de choques abruptos nas séries temporais de um grande número de estimadores de volatilidade;
- 6) *Clustering* de volatilidade: diferentes medidas de volatilidade mostram autocorrelações positivas num dado período, o que significa que momentos de volatilidade elevada tendem a concentrar-se temporalmente. Momentos de alta volatilidade tendem a ser seguidos por momentos de alta volatilidade; e momentos de baixa volatilidade são também seguidos por momentos de baixa volatilidade;
- 7) Abas pesadas condicionais (Conditional Heavy Tails): mesmo após serem efetuadas as correções de *clustering* de volatilidade (por modelos GARCH), os resíduos das séries temporais continuam a apresentar abas pesadas, apesar de estas serem menos pesadas do que nas distribuições não condicionais das taxas de rendibilidade;
- 8) Decadência lenta da autocorrelação entre taxas de rendibilidade absolutas: a função de autocorrelação entre taxas de rendibilidade absolutas decresce lentamente como função dos *lags*, o que pode ser interpretado como um sinal de dependência num intervalo longo.
- 9) Efeito de alavancagem: a maioria das medidas de volatilidade apresenta uma correlação negativa com as taxas de rendibilidade dos ativos, ou seja, a volatilidade é maior após choques negativos;
- 10) Correlação volume / volatilidade: os volumes de negociação de ativos estão diretamente relacionados com todas as medidas de volatilidade;
- 11) Assimetria em diferentes frequências temporais: medidas mais gerais conseguem prever a volatilidade em períodos curtos de forma mais apropriada.

O autor define ainda alguns problemas relativos à estimação, tais como a estacionaridade (evolução de uma série temporal em torno de uma média constante), a ergodicidade (garantia de que a média temporal de uma quantidade converge para o seu valor esperado), e as propriedades finitas dos estimadores (um estimador não tem necessariamente de ser igual à quantidade estimada – que é definida como o momento da distribuição teórica das observações).

No caso das séries com abas pesadas, os estimadores de funções de autocorrelação tendem a ser pouco credíveis. Adicionalmente, Epaphra (2017), no seu trabalho, faz referência a outros dois factos estilizados já conhecidos das séries financeiras, e que se listam abaixo.

- 1) Não estacionaridade – os ativos financeiros apresentam tendências estocásticas.
- 2) O logaritmo de um par cambial é não estacionário, porém a sua primeira diferença é estacionária.

Nos subcapítulos que se seguem, apresentar-se-á, primeiramente, o modelo que tem servido de comparação com os outros modelos – modelo do Random Walk sem *drift* – e, em seguida, serão apresentados trabalhos relevantes no âmbito das séries temporais com aplicação de modelos ARIMA, ARCH, ARMA-GARCH bem como outros estudos recentes.

2.1. Modelo do Random Walk sem *drift*

Tal como foi referido anteriormente, o modelo do Random Walk é o mais utilizado para realizar o *benchmarking* dos modelos que se têm vindo estudar. Para este feito usa-se o modelo do Random Walk sem *drift*, que, segundo a literatura, é o mais difícil de superar (Rossi, 2013).

O modelo do Random Walk sem *drift* refere que a série da cotação de um ativo dá um passo aleatório em relação ao seu último valor em etapas cujo valor médio é zero. Este modelo pode ser apresentado na forma da seguinte equação (Nau, 2017).

$$\hat{Y}_t = Y_{t-1} \tag{2.1}$$

Em que:

\hat{Y}_t representa o valor esperado da cotação no período t

Y_{t-1} representa o valor da cotação no período t-1

Pela equação anterior verifica-se que o valor esperado da cotação para o período em que se pretende prevê-la é igual ao valor do período anterior.

2.2. Modelos ARIMA

A origem dos modelos ARIMA deve-se a Box & Jenkins (1970), que desenvolveram estes modelos unidimensionais e os seccionaram em três etapas iterativas: identificação, estimação e verificação, tendo ficado conhecido inicialmente como o Modelo Box-Jenkins.

A metodologia proposta por Box & Jenkins (1970) assenta na possibilidade de os vários modelos reproduzirem o comportamento de vários tipos de séries, não necessitando de estimar muitos parâmetros. Existem vários métodos para o cálculo dos parâmetros dos modelos ARIMA, que apesar de serem assintoticamente equivalentes, apresentam muitas diferenças nas propriedades de observações finitas. Uma característica interessante destes modelos é a sua grande eficiência na previsão com base em observações agregadas e desagregadas (Gooijer & Hyndman, 2006).

Segundo Nau (2017), as séries temporais podem ser vistas como uma combinação de sinal com ruído que podem ser filtradas por modelos ARIMA para realizar previsões.

Os modelos ARIMA podem ser utilizados em séries com médias não constantes e/ou com momentos secundários variáveis no tempo (como é o caso de variâncias constantes). Estes modelos apresentam a ideia base de uma série temporal apresentar observações sucessivas com um elevado grau de dependência, geradas a partir de séries independentes de choques (Nwankwo, 2004).

Vários estudos sobre modelos ARIMA multivariáveis – denominados modelos VARIMA (Gooijer & Hyndman, 2006) – foram efetuados sem grande sucesso.

Para a estimação dos parâmetros têm sido utilizados vários métodos, de entre os quais se encontram vários que recorrem a *bootstrap*. Segundo Kim (2003) este método apresenta melhores resultados do que o de Least Squares Estimator; e de acordo com Landsman & Damodaran (1989), o método de James-Stein, para o cálculo dos parâmetros do modelo ARIMA leva a previsões mais corretas. Outros autores, tais como Ngan (2016), Newaz (2008) e Curto et al. (2017), utilizam a *autocorrelation function* e *partial autocorrelation function* para o cálculo dos parâmetros sendo depois as variáveis calculadas através de *software* tal como o EViews.

Os modelos ARIMA apresentam uma falha na previsão dos pontos de inversão, excluindo os casos em que estes pontos de inversão representem uma rendibilidade no longo prazo (Meylet et al., 1998)

Wu (2011) in Rout et al. (2013) apresenta como limitação ao modelo ARIMA a obrigatoriedade da série temporal ser linear e estacionária, o que na realidade não é aplicável uma vez que as séries das taxas de câmbio não são lineares nem estacionárias.

Khashei et al. (2009) identificam ainda duas limitações dos modelos ARIMA:

- 1) limitação linear – os modelos ARIMA pressupõem que os valores futuros de uma série temporal apresentam uma relação linear com os valores atuais e passados, bem como com ruído branco (*white noise*), pelo que estes modelos não podem ser adaptados a problemas não lineares;
- 2) limitação de dados – para obter resultados com um grau elevado de precisão, os modelos ARIMA necessitam de um volume grande de dados históricos.

Como vantagens, os mesmos autores referem a possibilidade de os modelos ARIMA poderem implementar vários modelos de alisamento exponencial, de se verificar que têm um bom poder de previsão em períodos curtos e a facilidade de utilização que lhes é associada.

Rojas, et al. (2008) referem que a estimação dos parâmetros e das ordens do modelo ARIMA continuam a ser alvo de estudo.

A modelação das cotações com base em modelos ARMA, apesar de ser relativamente fiável, não contempla um fator de grande importância para os mercados financeiros: a volatilidade. Isto deve-se ao facto de aos modelos ARMA apresentarem uma natureza homocedástica (Curto et al., 2007).

O artigo de Newaz (2008) reflete o estudo realizado à Rupia indiana (INR) em que são aplicados quatro modelos de previsão: o modelo ARIMA, o modelo de alisamento exponencial e outros dois modelos designados Naive 1 e Naive 2.

Os dados utilizados correspondem ao período entre setembro de 1985 e junho de 2006, mas para a elaboração do modelo foram utilizados dados relativos até dezembro de 2002 (informação *in sample*) – sendo que os restantes dados foram utilizados para verificar o modelo (informação *out-of-sample*). O corolário desta aplicação dos dados ao modelo é que foi feita a

previsão da cotação da moeda indiana para o período compreendido entre janeiro de 2003 e junho de 2006, tendo sido posteriormente comparada esta previsão com as cotações realmente observadas neste período.

A aplicação do modelo ARIMA necessitou de uma diferenciação apenas para tornar a série estacionária. O parâmetro d tomou o valor 1, os outros parâmetros, p e q , foram calculados com base em funções de autocorrelação e autocorrelação parcial, tendo ambos obtido o valor 5. Foram introduzidas duas variáveis *dummy*: uma referente à desvalorização da moeda em 1991 causada pela interferência do governo indiano na política monetária, e outra relativa aos atentados bombistas em Bombaim, em 1993.

Comparando os resultados obtidos pelos modelos quando foram utilizadas medidas de erro, verificou-se que o modelo de previsão que melhor se adaptava à evolução da Rupia indiana era o modelo ARIMA, pois apresentava valores de erro mais baixos comparativamente aos dos outros modelos.

Cheung (1993) aplicou uma versão do modelo ARIMA para verificar a longa memória das taxas de câmbio: o modelo ARFIMA (*autoregressive fractionally integrated moving average*). Este modelo permite incluir na previsão das taxas de câmbio o efeito da memória longa dos mercados financeiros. Foi aplicado a cinco moedas em contraste com o USD: GBP, FF, DM e CHF. Os dados *in sample* utilizados são relativos ao período de 1974 e 1987 e os dados *out-of-sample* estão compreendidos entre o ano de 1988 e 1989.

Com a aplicação do modelo ARFIMA, foi possível confirmar que as taxas de câmbio apresentam memória longa (excetuando a Libra Esterlina) e que as dinâmicas são mais complexas do que o modelo do Random Walk reflete, estando dependentes de outras variáveis económicas.

O modelo ARFIMA mostrou também produzir resultados fiáveis na previsão a longo prazo, mas tal não se verificou para todas as relações cambiais. Através do estudo efetuado, foi possível perceber também que em dados *out-of-sample* o modelo do Random Walk não era superado.

Rout et al. (2013), no seu estudo, combinaram o modelo ARMA com DE (*differential evolution*). A utilização de DE tinha o objetivo de fornecer *inputs* (parâmetros) ao primeiro sobre os dados passados de três pares cambiais: INR (entre janeiro de 1973 e outubro de 2005), GBP (entre janeiro de 1973 e janeiro de 2005) e JPY (entre janeiro de 1973 e janeiro de 2005) face ao USD. Ao combinarem estes modelos verificaram, por comparação com outros modelos

híbridos, que a introdução do modelo DE permitiu obter resultados mais precisos e que apresentava erros de valor menor.

Verifica-se assim que o modelo ARIMA pode ser combinado com outros, formando um modelo híbrido que pode apresentar bons resultados.

O modelo ARIMA foi utilizado para prever cotações de ações e exemplos disto são os estudos de Adebisi et al. (2014), Isenah & Olusanya (2014), Jarret & Kyper (2011) e Mondal et al. (2014). Foi também utilizado para a previsão da evolução da inflação irlandesa por Meyleret et al. (1998), e do ouro por Guha & Bandyopadhyay (2016).

2.3. Modelos ARCH

As séries temporais financeiras apresentam volatilidade, havendo períodos em que esta é alta e outros em que é baixa, sendo este fenómeno descrito como *cluster* de volatilidade.

Engle (1982) introduziu o modelo ARCH, que descreve as variações dinâmicas na variância condicionada como funções quadráticas determinísticas de rendibilidades passadas.

O modelo GARCH (*generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*) foi introduzido por Bollerslev (1986) que lhes adicionou componentes de variância condicional.

Este modelo apresenta uma representação similar ao modelo ARMA o que leva a que ambos partilhem várias propriedades (Gooijer & Hyndman, 2006).

Os estudos empíricos mostram que as taxas de rendibilidade e a variância condicionada das rendibilidades do período seguinte apresentam uma correlação negativa, ou seja, as rendibilidades negativas (ou positivas) estão associadas a revisões para cima (ou para baixo) da volatilidade condicional, fenómeno este que é designado por volatilidade assimétrica (Gooijer & Hyndman, 2006).

Para garantir um processo bem definido, todos os parâmetros do modelo GARCH têm de ser não negativos (Bollerslev et al., 1992).

Diebold, (1988) afirma que todos os pares cambiais mostram a existência de heteroscedasticidade condicional, confirmada pela não linearidade das séries temporais, o que significa que podem ser modelados com recurso a modelos ARCH (*autoregressive conditional heteroskedasticity*) e que as perturbações apresentadas pelo modelo do Random Walk, apesar de não terem correlação, não são independentes.

O mesmo autor demonstra no seu trabalho que os modelos ARCH são leptocúrticos (ou *fat tailed*) e por isso as taxas de câmbio podem ser adaptadas ao modelo do Random Walk com

variantes ARCH. Defende ainda que os modelos ARCH se adaptam de forma bastante precisa às taxas de câmbio e ações. Outros autores defendem que estes modelos conseguem uma boa aproximação à evolução da inflação (Engle, 1982 in Diebold 1988) e das taxas de juro (Engle et al., 1987 in Diebold, 1988).

Bollerslev et al. (1992) reforça a ideia de que os modelos ARCH são adequados à modelação de taxas de câmbio uma vez que conseguem incorporar os períodos contíguos de volatilidade e de estabilidade bem como as suas distribuições leptocúrticas não condicionadas.

Diebold (1988) mostra que, existindo efeitos ARCH nas séries temporais, se consegue prever as variâncias condicionais e que quando se agregam cotações por períodos temporais as séries tornam-se menos leptocúrticas – no caso estudado isto verifica-se quando se passa das cotações semanais para mensais.

O estudo do autor recaiu sobre sete pares cambiais, todos eles em função do dólar americano: GBP, FF, DM, LM, CHF, CAD e o JPY. Os dados que caracterizam este estudo respeitam ao período entre julho de 1973 e agosto de 1985.

Analisando os resultados dos sete pares cambiais (com cotações semanais), Diebold verificou que se verificava uma forte presença do efeito ARCH em todos exceto no FF.

Os modelos a que chegou são de ordem 3 em termos de AR (*autoregressive*) registando perturbações ARCH de ordem 12.

Diebold conclui que as variações nos pares cambiais demonstram um comportamento próximo ao Random Walk, mas contêm não-linearidade, que se manifesta sob a forma de efeitos ARCH. Este facto leva a perceber a existência de leptocurtose e permite a obtenção de intervalos de previsão mais longos.

Os estudos mostram que o modelo ARCH pode ser utilizado para obter intervalos de confiança variáveis no tempo e que permitem a previsão pontual de mudanças nas taxas de câmbio.

O mesmo estudo foi feito com as cotações mensais dos referidos pares cambiais, variação essa que teve o objetivo de verificar que existe redução da heteroscedasticidade condicional quando se passa de cotações semanais para mensais, ou seja, o de comprovar que os efeitos ARCH e a leptocurtose diminuem, confirmando assim o quarto facto estilizado apresentado anteriormente.

Tal como para as cotações semanais, verificou-se a presença de não estacionaridade, além de uma diminuição de volatilidade e de leptocurtose.

Dos sete pares cambiais, três apresentavam poucas evidências de efeitos ARCH: o FF, o CHF e o CAD, enquanto os restantes mostraram efeitos inferiores aos das cotações semanais. Tal deve-se à agregação temporal. Esta conclusão levou a que a série temporal fosse modelada por ARCH de nível 4 (o modelo ARCH para a série temporal de cotações semanais era de nível 12).

As conclusões mais importantes a que Diebold chega são: a) os modelos ARCH permitem analisar a volatilidade num determinado regime ao invés de se limitarem a registá-la; b) os modelos próximos do Random Walk associados a ARCH revelam que as observações, apesar de não terem correlação, não são independentes. Deste conhecimento resultam modelos mais precisos no que toca à capacidade descritiva e de previsão dos intervalos, o que demonstra que existe uma relação direta entre as propriedades das taxas de câmbio e a respetiva volatilidade. Conclui ainda que o método de Maximum Likelihood (ML) é adequado para estimar os parâmetros do modelo.

Autores como Bollerslev & Wooldridge (1992), Iglesias & Phillips (2012) e Laurent (2002) defendem a utilização do método de Quasi Maximum Likelihood (QML) para estimar os parâmetros do modelo ARCH. Jensen & Rahbek (2004) mostram que a estimação feita com recurso a QML é consistente e apresenta uma distribuição assintótica normal, o que se deve ao facto de o quarto momento do processo GARCH ser finito e de o ser independentemente da estacionaridade. Nem sempre o QML é adequado, pelo que, muitas vezes tem, de se utilizar o ML (Bollerslev et al., 1992).

Em alternativa, os modelos ARCH podem ser estimados por Generalized Method of Moments (GMM) (Bollerslev et al., 1992).

Epaphra (2017), no seu artigo, mostra que as séries temporais de pares cambiais apresentam *clustering* de volatilidade (momentos de volatilidade elevada seguidos de períodos de baixa volatilidade), de não-estacionaridade e ainda uma correlação que justifica a utilização de modelos ARCH. Os resultados mostram também que o comportamento das taxas de câmbio está relacionado com informação passada, como é o caso da volatilidade do dia anterior que influencia a volatilidade do dia corrente.

Os modelos ARCH e GARCH são utilizados para se fazer face às características de heteroscedasticidade condicional e de *clustering* de volatilidade.

O objetivo do estudo deste autor é a medição das características da volatilidade incluindo o *clustering* de volatilidade (simetria e assimetria) e o efeito de alavancagem com a utilização de modelos GARCH e EGARCH.

A volatilidade é muitas vezes medida pelo desvio padrão ou pela variância das taxas de rendibilidade, que têm servido como forma de medir o risco de ativos financeiros.

Os modelos GARCH permitem captar a volatilidade condicional presente no par cambial, para além de estimarem a evolução da variância temporal condicionada.

Devido às características das séries financeiras, o autor sugere então que um modelo deve considerar a correlação da série, a variância da variação temporal, os picos e a leptocurtose.

O autor defende a utilização da distribuição *t-student*, dado que as rendibilidades das taxas de câmbio apresentam desvios relativamente à distribuição normal.

De acordo com Brooks (2008) in Epaphra (2017), o modelo GARCH define a variância atual ajustada em função do valor médio da volatilidade passada (de um período longo) e da variância passada ajustada.

O autor conclui que o modelo GARCH (1,1) consegue captar de forma razoável os efeitos do *clustering* de volatilidade.

Outra conclusão importante a que o autor chega é de que os modelos GARCH impõem uma resposta simétrica da volatilidade, tanto a choques positivos quanto negativos. Versões modificadas tais como o GJR e o EGARCH permitem incorporar a assimetria existente nas séries financeiras.

Bollerslev et al. (1992) apresentam como limitação do modelo GARCH o facto de este não diferenciar nem modelar os sinais (positivos ou negativos), ou seja, não tem em conta a assimetria das rendibilidades passadas. Por este apresentar esta limitação, foi concebido o modelo EGARCH, no qual a volatilidade passa não só a depender da magnitude das rendibilidades passadas mas também dos seus sinais. O EGARCH, ao contrário do GARCH, não apresenta restrições de não negatividade no que diz respeito aos parâmetros.

Cížek et al. (2017) mostram outras limitações dos modelos GARCH, tal como a dificuldade em modelar GARCH de ordens superiores uma vez que requerem a imposição de muitas restrições para o cálculo dos parâmetros.

Remiro (2008) refere que os modelos GARCH fazem uma previsão exagerada da volatilidade pois respondem com algum atraso a choques grandes. Outra desvantagem apresentada está relacionada com a baixa periodicidade da volatilidade que o modelo apresenta, exceto os casos em que o parâmetro p (parâmetro referente à componente de regressão) apresenta valores elevados. Refere ainda que os modelos GARCH não disponibilizam nenhuma informação nova para entender as séries temporais financeiras.

2.4. Modelos ARMA-GARCH

Devido à limitação de homocedasticidade dos modelos ARMA estes foram combinados com um modelo que apresenta heteroscedasticidade: o modelo GARCH, que permite incorporar a volatilidade presente nos ativos financeiros.

O modelo ARMA-GARCH é caracterizado por ter duas fases: a primeira prende-se com a utilização do melhor modelo ARIMA para modelar uma série temporal linear, sendo que os resíduos deste modelo conterão apenas dados não lineares; a segunda fase tirará partido da não linearidade dos resíduos do modelo ARIMA, sendo a sua modelação feita com recurso à aplicação do modelo GARCH (Yaziz et al., 2013 in Pahlavani & Roshan, 2015).

Segundo Khashei et al. (2009) os modelos híbridos são normalmente desenvolvidos para padrões não lineares específicos, pelo que apresentam bons desempenhos mas não são capazes de modelar outros tipos de séries temporais não lineares.

O estudo de Curto, et al. (2007) sobre três índices bolsistas, o DJIA (americano), o DAX (alemão) e o PSI20 (português) baseou-se na utilização e comparação de três procedimentos para parametrizar a modelação por ARMA-GARCH. Os três procedimentos em questão são as distribuições Normal, *t-student* e estável de Pareto com variantes.

Os dados *in sample* continham as cotações diárias entre dezembro de 1992 e dezembro de 2001, e os dados *out-of-sample* foram caracterizados por cotações diárias entre janeiro de 2002 e dezembro de 2006.

Deste estudo foi possível extrair que a modelação (feita sempre com base em dados *in sample*) obtinha dados mais fiáveis segundo a distribuição estável de Pareto, apesar de a distribuição *t-student* apresentar resultados ligeiramente inferiores. Em dados *out-of-sample* verificou-se a distribuição *t-student* apresentava um desempenho melhor.

Segundo Nwogugu (2006) a previsão por modelos ARIMA e GARCH é bastante sensível ao período de previsão, ao tipo de distribuição utilizada e à magnitude do desvio-padrão. O autor refere que o modelo GARCH é pouco preciso se para o parâmetro de erro for assumida uma distribuição de Gauss. Outro problema referido no artigo revela que os modelos ARIMA e GARCH apresentam uma volatilidade constante no horizonte temporal de previsão e que as volatilidades estocásticas são substituídas por volatilidades fixas. O modelo GARCH exagera no grau de persistência das rendibilidades associados à volatilidade, segundo este autor.

Nwogugu (2006) afirma ainda que os coeficientes dos modelos ARMA e GARCH são obtidos a partir de regressões, sendo, por isso, bastante sensíveis ao período e aos dados utilizados. A estrutura da regressão não é adequada para prever a volatilidade devido às muitas variáveis envolvidas e que variam rapidamente ao longo do tempo.

Segundo o autor, é errado pressupor que o termo de erro inclui as características inexplicáveis da variável dependente ou as características da volatilidade e que este termo de erro é o melhor indicador da mesma.

O autor considera também errado considerar à partida que o modelo GARCH tem heteroscedasticidade, porém admite que este possa ter uma variância não condicionada constante devido ao facto de que a variância de uma série de preços varia ao longo do tempo. O modelo utiliza variâncias passadas para a previsão de períodos futuros.

O autor conclui afirmando que os modelos ARIMA e GARCH são estruturalmente deficientes e estáticos, até mesmo para períodos de previsão curtos, por não representarem padrões atuais do risco, dos efeitos psicológicos nem dos processos de tomada de decisão económica/financeira. A base da variância média é inadequada para fazer uma previsão precisa.

Zhong (2013) estudou a utilização de modelos ARMA-GARCH no par cambial EUR/USD. Os dados *in sample* referem-se ao período entre 1 de agosto de 2007 e 31 de julho de 2010 e os dados *out-of-sample* estão compreendidos entre 1 de agosto de 2010 e 31 de julho de 2013 (3 anos). Foram utilizadas cotações diárias e semanais no seu estudo. O autor concluiu que o poder de previsão dos dados *out-of-sample* não têm correlação com ajuste dos modelos *in sample*.

Para a série diária, o modelo ARMA (0, 2) – GARCH (3,1) é aquele que apresenta melhor ajuste, mas no que toca ao poder de previsão, o ARMA (0, 2) – GARCH (2,1) obteve melhores resultados. Para a série semanal, verificou que o modelo que melhor se ajustava era o ARMA (0, 2) – EGARCH (1,1) mas tinha pouco poder de previsão.

Verificou também que com as cotações *in sample* diárias obtinham uma previsão melhor do que com os dados semanais, o comprova que dados com elevada frequência levam a previsões mais precisas.

Outra conclusão revela a existência do efeito de alavancagem, da persistência de volatilidade e do *feedback* de volatilidade nos dados *in sample* da série diária e semanal.

Pahlavani & Roshan (2015) no seu estudo sobre o par cambial IRR/USD, que contemplou cotações diárias *in sample* de 20 de março de 2014 a 19 de abril de 2015 e *out-of-sample* de 20 de abril a 20 de junho de 2015, compararam o desempenho do modelo ARIMA com os modelos híbridos ARMA-GARCH.

Analisando as funções de erro tais como o RMSE (*root mean square error*), MAE (*mean absolute error*) e TIC (*theil inequality coefficient*) verificaram que o modelo ARIMA(7,2,12) – GARCH(2,1) era o que melhor conseguia prever a flutuação das cotações refletindo ainda a volatilidade e o efeito de alavancagem do par IRR/USD.

Ramzan et al. (2012) concluíram que o modelo ARMA(1,1) – ARCH(1,2) apresenta os melhores resultados lidando com os efeitos da não estacionaridade e volatilidade, ao passo que o ARMA(1,1) – EGARCH(1,2) ultrapassa de melhor forma o efeito de alavancagem no par cambial PKR/USD. As cotações mensais médias utilizadas são relativas ao período compreendido entre julho de 1981 e maio de 2010.

Thorlie et al. (2014) mostraram no seu estudo que o modelo ARMA – GJR-GARCH com estimação dos parâmetros pela distribuição *t-student* assimétrica é o que melhor prevê a evolução do par cambial SLL/USD no período compreendido entre janeiro de 2004 e dezembro de 2013.

O modelo ARMA-GARCH foi aplicado em índices bolsistas conforme refletido no artigo de Wang et al., (2009). Estes autores referem que o modelo GARCH(1,1) em especial, tem uma aceitação muito grande por duas razões: a primeira prende-se com o facto de terem sido realizados vários testes estatísticos que mostram que as séries temporais dos ativos financeiros,

tais como as taxas de câmbio e índices bolsistas, entre outros, são processos não lineares; a segunda está relacionada com o cálculo dos parâmetros do GARCH(1,1) ser estatisticamente significativo quando o modelo é estimado com base em rendibilidades do mercado de ações e emissões de ações individuais.

O modelo ARIMA, apesar de conseguir contemplar a não estacionaridade de uma série temporal, não consegue modelar a flutuação da variância, que é característica dos ativos financeiros.

O estudo destes autores baseou-se na modelação e previsão de dois índices bolsistas americanos: o Dow Jones Industrial Average (DJIA) e o Standard & Poor's 500 (S&P500), no período compreendido entre 1 de janeiro de 1988 e 1 de janeiro de 2008.

Foi verificada a existência de heteroscedasticidade por meio do teste do Multiplicador de Lagrange (Lagrange Multiplier *test*). Verificou-se também a existência de autocorrelações entre os resíduos.

Após aplicarem vários testes (*QQ plot* aos resíduos, ACF e verificação por meio de histogramas), os autores concluíram que o modelo que melhor representava estes índices era o ARMA(1,1) – GARCH(1,1).

Bunjaku & Näsholm (2010), ao efetuarem uma previsão utilizando uma *rolling window* com 21 observações do par USD/EUR, concluíram que o modelo que apresentava melhores resultados era o EGARCH, tendo sido este modelo estimado com base numa distribuição normal, após comparação com a distribuição *t-student*.

O estudo de Costa (2017) baseado na previsão da volatilidade do índice NASDAQ 100 concluiu que o modelo GARCH era o que apresentava melhor capacidade preditiva com janelas de estimação de 500, 1000 e 2000 observações quer para um modelo ajustado a uma distribuição normal, quer para um modelo ajustado a uma distribuição *t-student*.

2.5. Desenvolvimentos Recentes

2.5.1. Modelos DSGE

O modelo DSGE tem como base o consumo (de bens nacionais e estrangeiros) e a mão-de-obra (relacionada com a produtividade). Os produtores e importadores nacionais operam num ambiente de monopólio e estão sujeitos a uma rigidez nominal *à la Calvo*. A política monetária é conduzida de acordo com regras do tipo Taylor e a economia estrangeira é exógena à economia nacional.

De acordo com Zorzi et al. (2017) os modelos DSGE (*dynamic stochastic general equilibrium*) não conseguem efetuar uma correta previsão da evolução das taxas de câmbio. Esta impossibilidade deve-se a estes modelos incorporarem o excesso de volatilidade das previsões do IPRC (índice de preços relativos do consumidor), o que origina na falha na contabilização das covariações dos preços internacionais observados nos dados.

Outros *frameworks* de modelos, tais como o caso em que se presume que as inflações são iguais no país em questão e no país estrangeiro, levam a resultados melhores na previsão de taxas de câmbio que são até capazes de superar o Random Walk.

Os autores defendem que a complexidade dos modelos DSGE leva aos fracos resultados na previsão da evolução das taxas de câmbio.

O modelo utilizado por estes autores baseou-se em oito indicadores macroeconómicos: os logaritmos de produção para o país de origem e para o país estrangeiro, as inflações de ambos os países, as taxas de juro de curto prazo de ambos os países, o PIB do país de origem e o logaritmo da variação da taxa de câmbio real.

Os dados utilizados dizem respeito ao período entre janeiro de 1975 e abril de 2013, entre os pares USD e AUD, CAD, e GBP e à zona Euro, e mostram que o modelo DSGE não consegue competir com o Random Walk porque não é possível prever o RPI (*relative price index*) de forma adequada o que, por sua vez, pode ser consequência da extrapolação errada de tendências passadas da inflação.

Três modelos de DSGE foram aplicados. O primeiro, que incluía a tendência e a componente cíclica da inflação, não conseguiu superar o Random Walk; o segundo, sem a componente de

tendência, apresentou resultados ligeiramente melhores; e a terceira, sem a componente cíclica, apresentou resultados ainda melhores. Das cinco taxas de câmbio, apenas duas conseguiram superar o modelo de *Random Walk*, o que não é satisfatório.

Segundo os autores, o modelo DSGE sobrestima o grau de correlação entre as variações das taxas de câmbio e RPI com uma grande margem, especialmente no médio e no longo prazo.

2.5.2. Modelos T-DPE

Ishizaki & Inoue (2017) utilizaram o modelo T-DPE (*time-dependent pattern entropy*) para analisar a instabilidade localizada das variações diárias em sete pares cambiais: AUD/USD, CAD/USD, CHF/USD, EUR/USD, GBP/USD, JPY/USD e NZD/USD.

Este modelo permite identificar a instabilidade nos mercados causada por um dado evento e consegue quantificar os subsequentes processos de relaxamento, permitindo ainda medir a complexidade dos padrões de séries temporais de curto prazo.

As cotações diárias recolhidas para os sete pares dizem respeito ao período entre 15 de dezembro de 1998 e 23 de setembro de 2015, tendo sido utilizada a escala logarítmica.

Os autores verificaram que a correlação entre os pares EUR/USD e CHF/USD e entre AUD/USD e NZD/USD era elevada, enquanto a correlação entre JPY/USD e os outros pares era baixa.

Com este estudo os autores conseguiram identificar o efeito que a queda do banco Lehman Brothers teve nos mercados financeiros sensivelmente um ano após o evento, ou seja, registaram grande instabilidade efeito do *clustering* de volatilidade.

Os valores altos de T-DPE indicam períodos de instabilidade alta, enquanto valores baixos refletem um estado de calma nos mercados. O modelo T-DPE é assim considerado eficaz para séries temporais não-estacionárias e com uma distribuição leptocúrtica.

2.5.3. Modelos ANN

Vários autores, tais como Thinyane & Millin (2011), Önder et al. (2013) e Bissoondeal et al. (2011), mostram nos seus estudos que as ANN levam a melhores resultados de previsão das taxas de câmbio do que outros modelos. Porém, apresentam como desvantagem a subjetividade na escolha de camadas e *neurons*.

Outros autores, tais como Foster et al. (1992), Brace et al. (1991), Denton (1995), Hann & Steurer (1996) e Taskaya & Casey (2005), revelam o contrário, ou seja, os modelos ANN nem sempre apresentam melhores resultados do que os modelos tradicionais.

Jena et al. (2015) defendem no seu trabalho que os resultados empíricos da utilização de modelos híbridos, como é o caso de modelos ANN (*Artificial Neural Networks*), na previsão da evolução das taxas de câmbio, são melhores do que outros modelos de previsão de séries temporais.

Outros modelos híbridos exigem muito tempo de treino e pouca precisão, e por essa razão os autores propuseram a utilização de modelos ANN (neste caso específico, KGANN), que requerem menos tempo de treino sendo possível obter maior precisão na previsão.

O modelo em questão encontra-se representado na figura seguinte:

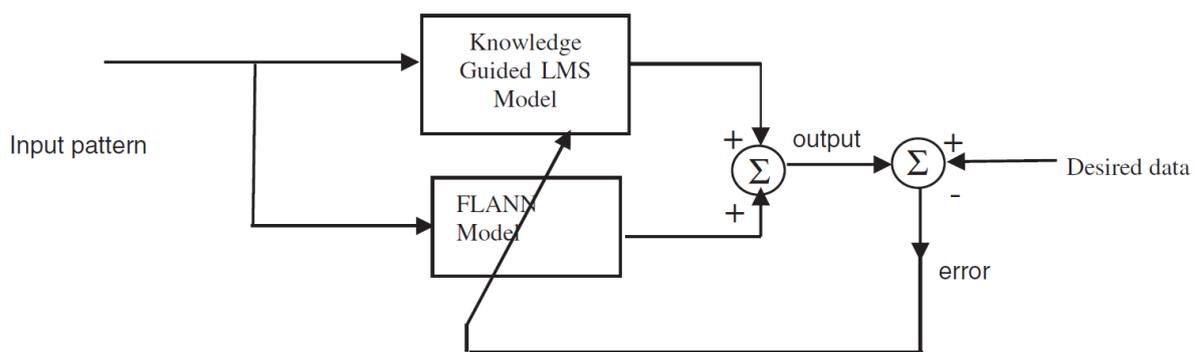


Figura 2.1 - Modelo KGANN

O modelo passa pela geração de um modelo LMS (Least Mean Square) simples e robusto utilizando um combinador linear e uma regra de aprendizagem LMS.

Para melhorar a precisão de previsão é adicionado o modelo FLANN (Functional Link Artificial Neural Network) que é basicamente uma estrutura com uma camada de um neurónio com vários

inputs não-lineares, sendo utilizada uma versão modificada do LMS o KGL (Knowledge Guided LMS).

A combinação destes dois modelos irá gerar um resultado que, caso não cumpra certos critérios, apresentará um erro o que, por seu turno, alimentará o modelo LMS para autoaprendizagem; e este processo continuará até se atingir o resultado desejado. As cotações passadas dos pares cambiais são utilizadas como *inputs*.

Após a conclusão do processo de autoaprendizagem do modelo LMS, os pesos atribuídos a cada combinador são congelados. Posteriormente, os padrões dos *inputs* são aplicados ao modelo híbrido e os valores esperados são comparados com o *output*. O erro obtido é, em seguida, introduzido no sistema FLANN de modo a diminuir ainda mais o erro global.

O modelo KGANN desenvolvido pelos autores é, assim, um modelo não linear que se adapta a uma série financeira temporal por um processo de aprendizagem supervisionado, conseguindo modelá-la.

Este modelo foi aplicado em dois pares cambiais: GBP/USD e USD/INR.

Para os dois pares foram feitas previsões relativas a prazos de um, três, seis e doze meses, tendo sido obtidos resultados muito positivos quando comparados com outros dois modelos: LMS e FLANN (utilizados em separado).

Galeshchuk (2015) defende que as redes neurais têm a capacidade de aprender, de se adaptarem, de se treinarem e de serem flexíveis, o que as torna mais vantajosas na percepção de dinâmicas não lineares e de outras características complicadas das séries financeiras, levando a bons resultados no campo da previsão.

Khashei et al. (2009) apresentam como grande vantagem dos modelos ANN a sua grande capacidade flexível em modelar a não linearidade, conseguindo aproximar qualquer função contínua mensurável com o grau de precisão desejado. Os autores referem ainda os modelos ANN aprendem com os exemplos e capturam as relações funcionais mais subtis entre os dados. Referem ainda que os modelos ANN são determinados pelas características dos dados, não sendo necessário nenhum pressuposto da forma para construir o modelo.

Tal como os modelos ARIMA, estes autores apontam a limitação de dados dos modelos ANN, ou seja, estes modelos também necessitam de um grande histórico de dados.

Gurusen & Daim (2011) in Galeshchuk (2015) concluíram por um estudo que a abordagem por redes neurais conduzia a melhores resultados do que as abordagens matemáticas e estatísticas.

Segundo Galeshchuk (2015) as características mais importantes das ANN são a resolução de problemas não lineares que outras técnicas mais clássicas não conseguem resolver e o facto de não necessitarem de premissas relativamente à distribuição de dados. As redes ANN conseguem aprender com a informação.

A autora estudou a previsão dos pares EUR/USD, GBP/USD e USD/JPY e verificou que para os períodos temporais diário, semanal e mensal que o modelo ANN consegue obter resultados com um elevado grau de precisão para o curto prazo.

Estas redes, segundo Lam (2004), são ideais para processar dados numéricos tais como séries financeiras e indicadores económicos.

Majhi et al. (2012) efetuaram a previsão dos pares INR/USD, GBP/USD e USD/JPY com recurso a modelos ANN, mais especificamente WANN (Wilcoxon Artificial Neural Network) e WFLANN (Wilcoxon Functional Link Artificial Neural Network). Estes dois modelos apresentam a principal característica de calcularem os parâmetros sem a influência, ou com a influência mínima, de *outliers*.

Os dados utilizados foram as cotações do primeiro dia do mês entre janeiro de 1971 e janeiro de 2005 para os pares GBP/USD e USD/JPY, e entre janeiro de 1973 e outubro de 2005 para o par INR/USD.

Dos resultados da simulação os autores concluíram que os modelos WANN e WFLANN apresentam bons resultados na fase de teste e de treino na presença de muitos e poucos *outliers*. Na fase de previsão tal não se verifica, ou seja, com o aumento de *outliers* o poder de previsão diminui.

Deste estudo foi possível extrair que ambos os modelos apresentam desempenhos semelhantes, sendo o modelo WFLANN menos complexo computacionalmente.

Khashei & Bijari (2011) formularam um modelo híbrido ARIMA-ANN com o objetivo de tirarem partido das potencialidades de cada um. Os modelos ARIMA conseguem obter melhores resultados em séries lineares, enquanto os modelos ANN são mais indicados para séries não lineares.

O modelo híbrido destes autores, o modelo ARIMA, foi utilizado para identificar e ampliar a estrutura linear existente nos dados, e o modelo ANN foi usado para identificar o processo de geração de dados subjacente e realizar a modelação e previsão utilizando dados pré-processados através da aplicação de um *perceptron* de várias camadas. Este modelo foi aplicado em três séries de dados, sendo uma delas o par GBP/USD.

Com o modelo híbrido a possibilidade de modelar a realidade é maior uma vez que este abrange a linearidade e a não linearidade, porém, podem ser inadequados em alguns casos. Os autores apresentam três razões para a utilização do modelo ARIMA – ANN:

- 1) dificuldade em determinar se uma série temporal tem subjacente um processo linear ou não linear;
- 2) as séries temporais raramente são totalmente lineares ou não lineares, apresentando ambos os padrões;
- 3) não há um modelo que consiga ajustar-se na perfeição a todas as situações devido à complexidade das séries temporais.

O modelo ARIMA – ANN, com os pressupostos mencionados acima, foi aplicado às cotações semanais do par GBP/USD entre os anos 1980 e 1993, tendo gerado resultados muito positivos quando comparados com os modelos individuais ARIMA, ANN e o modelo híbrido de Zhang. Nesse mesmo cenário, os indicadores de erro MAE e MSE apresentaram valores inferiores.

Como forma de contornar as limitações apresentadas pelos modelos ARIMA e ANN, Khashei et al. (2009) desenvolveram um modelo híbrido que integra os modelos ARIMA, ANN e um modelo de previsão Fuzzy.

A vantagem de um modelo Fuzzy prende-se com o facto de não necessitar de muita informação, porém o seu desempenho nem sempre é o melhor.

A ideia base dos autores na criação deste modelo foi tirarem proveito das características únicas de cada modelo para captar os diferentes padrões nos dados. Assim, numa primeira fase, o modelo ARIMA foi utilizado para modelar os padrões lineares da série temporal, e os seus residuais não lineares foram modelados pelo modelo ANN na segunda fase. Na terceira e última fase, os parâmetros do modelo foram considerados num formato numérico *fuzzy*, e os valores ótimos dos parâmetros foram calculados por meio de regressão *fuzzy*.

Os autores aplicaram este modelo aos pares cambiais USD/IRR e EUR/IRR (utilizando cotações diárias entre 5 de novembro e 16 de dezembro de 2006) e na *commodity* ouro (preço em USD, por grama, das cotações diárias entre 26 de novembro de 2005 e 18 de janeiro).

Como resultado, o modelo apresentou um intervalo de previsão diário com limites inferior e superior muito aceitáveis, e valores pontuais que superam os resultados obtidos pela aplicação individual dos modelos ARIMA e ANN e pelos os modelos Fuzzy de séries temporais de Yu e Chen.

2.5.4. Modelos Hurst

Garcin (2017) utilizou os exponenciais de Hurst para prever a evolução das taxas de câmbio de nove pares – GBP, CHF, SEK, USD, CAD, AUD, JPY, CNY e SGD – todas face ao EUR. Os exponenciais de Hurst conseguem captar a longa memória das séries financeiras quando o valor do parâmetro H é superior a 0,5.

O modelo de alisamento utilizado pelo autor pode ser aplicado a qualquer série temporal, baseando-se na estimação de um alisador não paramétrico, o que minimiza a diferença quadrática com uma estimação bruta, e que também minimiza as variações quadráticas da nova estimativa.

As previsões são realizadas com base no mBm (*multifractional Brownian motion*) no qual o exponencial de Hurst (em função do tempo) tem grande importância. A precisão das previsões é maior quando o valor de H é superior a 0,5. Se H apresentar um valor inferior a 0,5 significa que há destruição de memória o que leva a um aumento na dificuldade de previsão.

O modelo de alisamento de *wavelets* consegue descrever com maior precisão as singularidades, mas não deve ser utilizado para fazer previsão uma vez que não consegue lidar com as condições de fronteira.

O autor estudou a aplicação do modelo de Hurst com a estimação de mBm dos nove pares cambiais entre o período de 7 de março de 2016 e 7 de setembro de 2016, tendo recorrido a cotações médias de quinze minutos.

O autor conclui que as médias móveis não têm precisão suficiente nas fronteiras e que as técnicas baseadas em *wavelets* são complexas devido à importância dos parâmetros escolhidos.

Pelo contrário, o alisamento variacional é mais simples de se implementar tendo apenas de se escolher o parâmetro penalizador.

3. Metodologia

Tratando-se de um trabalho sobre modelação e previsão de taxas de câmbio, a metodologia a adotar passará por recolher numa primeira fase cotações diárias, no período compreendido entre 1 de janeiro de 2002 e 31 de dezembro 2018, de três pares cambiais com relevo económico, neste caso o EUR/USD, GBP/USD e GBP/EUR.

Os dados serão divididos em duas partes.

- Dentro da amostra (*in-sample*), correspondente a 2/3 do período em questão. Estes dados serão utilizados para modelar a série e fazer a previsão;
- Fora da amostra (*out-of-sample*), relativos ao restante 1/3 do período. Os dados fora da amostra serão comparados aos resultados obtidos na previsão.

Após a fase de recolha de dados, será realizada uma análise descritiva aos mesmos para verificar a existência de valores extremos (subidas e quedas de grande amplitude) e proceder-se-á à aplicação do modelo ARMA-GARCH aos dados *in-sample*.

Estando os modelos estimados, serão realizados dois tipos de previsão: um estático e outro dinâmico.

Após a previsão serão analisados os resultados, calculando os erros de previsão obtidos entre os valores previstos e as cotações reais (dados *out-of-sample*).

A modelação e previsão das séries temporais dos pares EUR/USD, GBP/EUR e GBP/USD será realizada com recurso ao *software* R.

Num primeiro passo é necessário verificar a estacionaridade da série temporal, ou seja, verificar se a média e a variância são constantes (estacionaridade fraca). Uma série não-estacionária leva tem uma tendência determinística, ou estocástica, podendo também apresentar as duas formas.

As séries temporais das taxas de câmbio são, por norma, séries não-estacionárias, como se pode verificar pela figura 3.1 em que se encontra representado o par cambial EUR/USD no período compreendido entre 1 de Janeiro de 2002 e 31 de Dezembro de 2018.



Figura 3.1 - Par EUR/USD entre 1/1/2002 e 31/12/2018

Para verificar a estacionaridade das séries temporais dos pares em estudo será testada a existência de uma raiz unitária (*unit root*). Pretende-se assim verificar se a raiz da equação característica da série temporal é igual a 1. Se tal acontecer, significa que a série temporal não é estacionária. Se as outras raízes apresentarem valores absolutos (ou seja, módulos) inferiores a 1, significa que a primeira diferenciação da série temporal é estacionária.

Para confirmar a existência da raiz unitária serão realizados os testes seguintes:

- 1) Teste ADF (Augmented Dickey-Fuller),
- 2) Teste KPSS (Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin),
- 3) Teste PP (Phillips Peron).

Os testes ADF e PP têm como base as seguintes hipóteses:

- H_0 : a série apresenta raiz unitária, sendo por isso não-estacionária;
- H_a : a série não apresenta raiz unitária, sendo por isso estacionária.

O teste de KPSS admite o contrário:

- H_0 : a série não apresenta raiz unitária, sendo por isso estacionária,
- H_a : a série apresenta raiz unitária, sendo por isso não-estacionária.

Após análise dos resultados e confirmada a não-estacionaridade da série temporal, será realizada a primeira diferenciação logarítmica por meio da seguinte transformação:

$$r_t = \ln(y_t) - \ln(y_{t-1}) \quad (3.1)$$

Após realizada a primeira diferenciação é expectável que a série se torne estacionária, o que será confirmado pela repetição dos testes referidos anteriormente.

A transformação correspondente à primeira diferenciação representa as taxas de rendibilidade dos diferentes pares.

Antes de se avançar para a modelação das séries, será efetuada uma análise descritiva das taxas de rendibilidade.

Será também avaliada a existência de correlação entre as taxas de rendibilidade de cada par por meio do teste de Ljung-Box que tem por base as hipóteses:

- H_0 : não existe correlação entre as taxas de rendibilidade até uma certa ordem,
- H_a : existe correlação entre as taxas de rendibilidade.

MODELO ARMA

Estando confirmada a estacionaridade da série, será estimado o modelo ARMA-GARCH. O modelo ARMA é considerado um caso particular do modelo ARIMA (p, d, q), visto já se ter realizado a primeira diferenciação (o parâmetro d apresenta o valor de 1 no modelo ARIMA). Assim, o parâmetro de diferenciação já não existirá ($d = 0$), pelo que o modelo ARIMA ($p, 1, q$) se reduz ao modelo ARMA (p, q):

$$y_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i \cdot y_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \cdot u_{t-i} + u_t \quad (3.2)$$

Com:

c – constante

ϕ_i – parâmetro de autorregressão

θ_i – parâmetro da média móvel

u_t – termo de erro (inovação)

p – ordem do termo de autorregressão

q – ordem do termo da média móvel

A primeira parte da equação ($c + \sum_{i=1}^p \phi_i \cdot y_{t-i}$) representa a componente autorregressiva enquanto a segunda parte representa a componente de médias móveis ($\sum_{i=1}^q \theta_i \cdot u_{t-i}$).

A metodologia de Box-Jenkins decompõe-se em quatro etapas: identificação das estruturas do modelo, estimação dos parâmetros do modelo, validação dos modelos ajustados (*fitted models*) e previsão dos valores futuros. Será com base nesta metodologia que se desenvolverá o estudo empírico.

As estruturas do modelo são dadas pelas ordens dos termos de autorregressão e média móvel que são obtidas pelas funções de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP), bem como pela análise dos critérios Akaike Information Criterion (AIC) e Bayesian Information Criterion (BIC).

Após definidos os valores de p e q , os parâmetros serão estimados pelo método da Máxima Verossimilhança (Maximum Likelihood).

De seguida, devem ser aplicados métodos de diagnóstico para verificar se os resíduos satisfazem os requisitos de um processo de ruído branco: média zero, variância constante e processo sem correlação. Para tal, será aplicado o teste de Ljung-Box caracterizado por:

- H_0 : os resíduos seguem um processo de ruído branco,
- H_a : os resíduos não seguem um processo de ruído branco.

Para os modelos ARMA tradicionais, o termo de erro ε_t apresenta média zero e variância constante, sendo ε_t homoscedástico. No caso de existir heteroscedasticidade condicional, como se verifica nas séries de taxas de câmbio, os modelos ARCH propostos por Engle devem ser complementares aos modelos ARMA resultando no modelo ARMA-GARCH.

Os modelos ARMA apresentam como principais limitações a incapacidade de incorporar a volatilidade e a não-linearidade existente nas séries financeiras, como tal, os modelos ARCH aparentam ser uma boa solução complementar.

A presença de heteroscedasticidade condicionada será verificada recorrendo aos testes de Ljung-Box e do Multiplicador de Lagrange proposto por Engle (1982) que serão aplicados ao quadrado dos resíduos do modelo ARMA.

No teste de Ljung-Box consideram-se as seguintes hipóteses:

- H_0 : os coeficientes de autocorrelação dos resíduos ao quadrado são nulos até uma certa ordem,
- H_a : os coeficientes de autocorrelação dos resíduos ao quadrado são nulos até à ordem p .

O teste de Multiplicador de Lagrange considera:

- H_0 : não se verifica a presença de efeitos ARCH no quadrado dos resíduos,
- H_a : verifica-se a presença de efeitos ARCH no quadrado dos resíduos.

A estatística do teste é dada por:

$$\lambda_{LM} = nR^2 \quad (3.3)$$

Sendo n o número de observações consideradas e R^2 o quadrado dos resíduos.

Se a hipótese nula for rejeitada implica que os erros do modelo ARMA são heteroscedásticos; não apresentando variância constante e verifica-se a presença dum efeito ARCH.

Confirmada a heteroscedasticidade condicional nos resíduos, o modelo ARCH será aplicado.

MODELO ARCH

Os modelos ARCH são caracterizados por pressuporem que o excesso de curtose presente nas séries temporais está relacionado com uma distribuição condicionada, provavelmente normal, na qual a variância não se mantém constante ao longo do tempo.

Estes modelos pressupõem ainda que a volatilidade é uma variável aleatória caracterizada por um processo estocástico tipo ARCH. A volatilidade mede a intensidade das variáveis aleatórias das taxas de rendibilidade dos ativos financeiros, estando ligada às variações na amplitude das mesmas ao longo do tempo. Tal como referido no capítulo de revisão de literatura, os ativos

financeiros apresentam *clusters* de volatilidade, ou seja, períodos de volatilidade alta e períodos de volatilidade baixa. Por norma, os períodos de alta volatilidade são precedidos por períodos de baixa volatilidade e vice-versa.

A heteroscedasticidade condicionada pretende assim explicar que a volatilidade (medida pela variância condicionada) varia ao longo do tempo e é função da volatilidade ocorrida anteriormente.

Seja a variável aleatória u_t definida por:

$$u_t = \varepsilon_t \cdot \sigma_t \quad (3.4)$$

ε_t – processo de ruído branco gaussiano por defeito, mas neste trabalho foi considerada uma distribuição *t-student* devido à presença de *heavy tails* nas distribuições empíricas

em que $E(\varepsilon_t) = 0$, $VAR(\varepsilon_t) = 1$, ε_t é independente de u_{t-i} ($i \in Z$) e

$$VAR(u_t) = \sigma_t^2 = f(u_{t-1}, u_{t-2}, \dots, u_{t-r}).$$

Para representar uma distribuição condicionada em que o segundo momento se altera ao longo do tempo, define-se uma variável u_t condicionada pelo conjunto de informação disponível no momento $t-1$: $u_t | \Phi_{t-1}$, em que $\Phi_{t-1} = \{u_{t-1}, u_{t-2}, \dots, u_{t-r}\}$. Os modelos ARCH admitem que $u_t | \Phi_{t-1} \sim N(0; \sigma_t^2)$. No caso deste estudo considera-se $\varepsilon_t \sim t(\nu)$, em que $t(\nu)$ representa uma distribuição *t-student* com média zero e ν graus de liberdade.

Um modelo ARCH de ordem r é representado pelo sistema de equações seguinte:

$$\begin{cases} y_t = x_t \beta + u_t \\ u_t = \varepsilon_t \cdot \sigma_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i \cdot u_{t-i}^2 \end{cases} \quad (3.5)$$

em que:

- ε_t é um processo IID independente de u_{t-i} ($i \in Z$), $E(\varepsilon_t) = 0$ e $VAR(\varepsilon_t) = 1$;
- $\alpha_0 > 0$ e $\alpha_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$) para garantir que a variância condicionada e a não-condicionada são positivas – os coeficientes α_i devem satisfazer certas condições para assegurar uma variância finita para u_t ;

- $E(y_t) = x_t\beta$ é uma combinação linear de variáveis exógenas e endógenas desfasadas incluídas no conjunto de informação Φ_{t-1} , constituindo a equação da média condicionada;
- β é um vetor de parâmetros desconhecidos;
- a variância condicionada de u_t pode variar ao longo do tempo e é uma função linear do quadrado dos erros de períodos anteriores.

As últimas duas equações do sistema apresentado descrevem o processo ARCH.

Pela última equação do sistema verifica-se que a variância condicionada é uma função estocástica do seu passado.

MODELO GARCH

O modelo GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) desenvolvido por Bollerslev (1986) veio colmatar certas limitações presentes no modelo ARCH. Entre essas limitações consta o facto de o modelo ARCH necessitar de que a ordem de r seja muito elevada para conseguir captar a memória longa das séries económicas e financeiras. Isto causa que os modelos estimados não sejam parcimoniosos e não respeitem as restrições impostas aos parâmetros, o que, por sua vez, leva a que as estimativas possam apresentar valores negativos, tendo implicações no sinal da variância condicionada. Assim, o modelo GARCH é bastante mais parcimonioso na descrição dos fenómenos. De acordo com Engle e Bollerslev (1986) um modelo GARCH de ordem reduzida deve ter as mesmas propriedades de um modelo ARCH de ordem elevada sem os problemas de estimar muitos parâmetros sujeitos às restrições de não-negatividade.

O modelo GARCH de ordem r e s , GARCH(r, s), pode ser definido pelo seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_t = x_t\beta + u_t \\ u_t = \varepsilon_t \cdot \sigma_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i \cdot u_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^s \delta_i \cdot \sigma_{t-i}^2 \end{array} \right. \quad (3.6)$$

em que:

- y_t é a variável dependente, x_t é um vetor de variáveis explicativas e β é um vetor de parâmetros desconhecidos;
- $E(\varepsilon_t) = 0, VAR(\varepsilon_t) = 1$ e $u_t | \Phi_{t-1} \cap N(0; \sigma_t^2)$;
- $r \geq 0, s > 0, \alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, s)$ e $\delta_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, r)$.

O modelo GARCH apresenta ainda as seguintes propriedades (Curto, J. D., 2003):

- 1) quando $r = 0$, $GARCH(0, s) = ARCH(s)$;
- 2) se $r = s = 0$, u_t é um processo de ruído branco com média zero e variância constante;
- 3) num processo $ARCH(s)$ a variância condicionada é apenas uma função linear do quadrado dos erros passados, enquanto num processo $GARCH(r, s)$ também se incluem as variâncias condicionadas dos períodos anteriores;
- 4) a variância condicionada pode também ser apresentada em função do operador de desfasamento L da análise tradicional de sucessões cronológicas

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + A(L)u_t^2 + B(L)\sigma_t^2, \text{ em que:}$$

- $A(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_s L^s$,
- $B(L) = \delta_1 L + \delta_2 L^2 + \dots + \delta_r L^r$;

- 5) um processo GARCH de ordem r e s é um processo ARCH de ordem infinita

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + A(L)u_t^2 + B(L)\sigma_t^2$$

$$\sigma_t^2 - B(L)\sigma_t^2 = \alpha_0 + A(L)u_t^2$$

$$\sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{1 - B(1)} + \frac{A(L)}{1 - B(L)} u_t^2$$

$$\sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{1 - B(1)} + D(L)u_t^2, \text{ em que } D(L) = \frac{A(L)}{1 - B(L)} = \gamma_1 L + \gamma_2 L^2 + \gamma_3 L^3 + \dots$$

$$\text{logo, } \sigma_t^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^r \delta_i} + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i u_{t-i}^2 \text{ que é um ARCH}(\infty);$$

- 6) se $B(1) = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_r < 1$ então os coeficientes γ_i da equação anterior decrescem à medida que i aumenta, levando a que a variância condicionada seja influenciada pela variabilidade ocorrida nos períodos mais recentes;
- 7) se $A(1) + B(1) = \sum_{i=1}^r \alpha_i + \sum_{i=1}^r \delta_j < 1$ (condição de estacionaridade de segunda ordem para um modelo GARCH) implica que um processo $GARCH(r, s)$ pode ser aproximado por um processo $ARCH(Q)$, com Q suficientemente elevado;

- 8) um processo GARCH(r, s) pode ser interpretado por um processo ARMA em u_t^2 de ordem $m = \max\{r; s\}$ e r , respetivamente;
- 9) face às considerações anteriores, a metodologia de Box-Jenkins pode ajudar a calcular as ordens r e s de um processo GARCH, dado que as funções de autocorrelação (FAC) e de autocorrelação parcial (FACP) do processo u_t^2 apresentam um comportamento semelhante às de um processo ARMA – assim, num processo ARCH(s) a FAC deve tender lentamente para zero e a FACP deve tender rapidamente para zero depois do desfasamento s ; num processo GARCH(r, s) ambas as funções tendem lentamente para zero, sendo mais difícil identificar as ordens do processo;
- 10) para verificar se os dados podem ter sido obtidos por um processo GARCH pode-se aplicar um teste baseado no multiplicador de Lagrange – admitem-se assim as seguintes hipóteses

- $H_0: \delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_r = 0$
- $H_a: \exists \delta_i > 0$

a estatística do teste é dada por:

$$\lambda_{LM}^* = nR^2 \cap^a \chi^2(r),$$

onde R^2 é o coeficiente da regressão de $\frac{\hat{u}_t^2 - \hat{\sigma}_t^2}{\hat{\sigma}_t^2}$ sobre

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_t^2} [1 \ \hat{u}_1^2 \ \hat{u}_2^2 \ \dots \ \hat{u}_{t-s}^2 \ \hat{u}_{t-s-1}^2 \ \dots \ \hat{u}_{t-s-r}^2]^T;$$

- 11) em geral, a distribuição não-condicionada de u_t é simétrica e leptocúrtica quando $u_t | \Phi_{t-1} \sim N(0; \sigma_t^2)$.

No modelo GARCH, a influência de u_t é simétrica, ou seja, boas ou más notícias têm igual impacto. Os parâmetros α_0 , α_i e δ_i do modelo GARCH assumem valores não-negativos.

Face ao exposto, o modelo ARMA-GARCH é um modelo que combina as componentes de autorregressão e média móvel do modelo ARMA, sendo o termo de erro dado pelo modelo GARCH.

Pelos estudos empíricos realizados por Bollerslev (1988), verificou-se que um modelo GARCH(1,1) é geralmente suficiente para captar a dependência na variância condicional, pelo que neste trabalho também serão considerados para r e s os mesmos valores, obtendo-se desta forma a seguinte expressão:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot u_{t-1}^2 + \delta_1 \cdot \sigma_{t-1}^2 \quad (3.7)$$

em que:

α_0, α_1 e δ_1 são os parâmetros do modelo,

σ_{t-1}^2 representa a variância condicional no período $t-1$,

u_{t-1}^2 é o erro ao quadrado no mesmo período.

Face ao exposto, será utilizado o método da Máxima Verosimilhança para calcular o modelo ARMA-GARCH ajustado às séries das taxas de rentabilidade. Complementarmente, e para uma fase posterior, serão também calculadas as medidas de bondade do ajustamento: valor máximo do logaritmo da função de verosimilhança (L), AIC e BIC.

O modelo GARCH apresenta duas grandes limitações:

- 1) considera apenas a magnitude das variações das taxas de rentabilidade (e não o respetivo sinal) sobre a variância condicionada;
- 2) restringe o sinal dos parâmetros para que estes sejam sempre positivos, para que σ_t^2 seja sempre maior ou igual a zero – a restrição de não-negatividade dos parâmetros leva a que um aumento de ε_t^2 implique sempre num aumento de σ_{t+m}^2 para $m \geq 1$, não tendo em consideração nenhum comportamento oscilatório de σ_t^2 .

Para fazer face às limitações apresentadas do modelo GARCH, serão consideradas outras especificações para modelar o efeito assimétrico na variância condicionada (*good and bad news* têm impacto diferente sobre a volatilidade): o GJR-GARCH e o EGARCH. Pelos estudos realizados verificou-se que existe uma correlação negativa entre as taxas de rentabilidade e as variações na volatilidade, as más notícias geram maior volatilidade e as boas notícias implicam menor volatilidade.

MODELO GJR-GARCH

O modelo GJR-GARCH, da autoria de Glosten *et al.* (1993), é similar ao GARCH contemplando apenas a adição de um termo relativo à assimetria (neste caso os valores r e s são também iguais a 1):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot u_{t-1}^2 + \delta_1 \cdot \sigma_{t-1}^2 + \gamma_1 \cdot u_{t-1}^2 \cdot I_{t-1} \quad (3.8)$$

O valor de I estará dependente do sinal de erro, assim:

$$I = \begin{cases} 1 & \text{se } u_{t-1} < 0 \\ 0 & \text{se } u_{t-1} \geq 0 \end{cases}$$

Este modelo impõe as seguintes restrições de não-negatividade:

$$\alpha_0 > 0, \quad \delta_1 > 0 \quad e \quad \delta_1 + \gamma_1 \geq 0$$

MODELO EGARCH

O modelo EGARCH(1,1) proposto por Nelson (1991) é representado pela seguinte expressão:

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \delta_1 \cdot \ln(\sigma_{t-1}^2) + \alpha_1 \cdot \frac{|u_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} + \gamma_1 \frac{u_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \quad (3.9)$$

Para se verificar a estacionaridade da série, o valor de δ_1 tem de ser maior que 0 e inferior a 1.

A variável α_1 representa o efeito simétrico do modelo ou a magnitude do efeito, enquanto δ_1 é uma medida da persistência da volatilidade condicionada, independente dos choques que afetam o mercado. Se o valor de δ_1 é relativamente elevado, então a volatilidade persiste durante bastante tempo após observação de um choque no mercado. O efeito da assimetria ou alavancagem é medido pelo parâmetro γ_1 .

Se $\gamma_1 < 0$ significa que a volatilidade é assimétrica e que os impactos positivos (boas notícias) têm um impacto menor do que os impactos negativos, ou seja, geram menor volatilidade. Neste caso, a variância aumenta quando u_{t-1} é negativo.

Se $\gamma_1 = 0$ significa que a volatilidade é simétrica.

Se $\gamma_1 > 0$ significa que os choques positivos geram maior volatilidade do que os negativos. A variância diminui quando u_{t-1} é positivo.

A utilização de logaritmos por parte deste modelo leva a que os parâmetros possam ser negativos sem que a variância também o seja.

Após estimação dos modelos, será aplicado o teste de Ljung-Box ao quadrado dos resíduos estandardizados dados pela equação seguinte:

$$z_t = \frac{e_t}{\hat{\sigma}_t} \quad (3.10)$$

Com:

e_t – resíduos calculados pela equação da média,

$\hat{\sigma}_t$ – desvios-padrão estimado.

O objetivo da aplicação do teste de Ljung-Box é verificar se o efeito ARCH persiste ou se desaparece após estimar o modelo. O teste assenta nas seguintes hipóteses:

- H_0 : o efeito ARCH foi capturado pelo modelo estimado,
- H_a : o efeito ARCH não foi capturado pelo modelo estimado.

Para os modelos GJR-GARCH e EGARCH serão ainda construídas as *news impact curves* (NIC), para se ter uma perceção visual do impacto das boas e das más notícias nas taxas de rendibilidade.

PREVISÃO

Como referido anteriormente, serão realizados dois tipos de previsão.

- 1) Previsão estática: a previsão para cada período ($t+1, t+2, \dots$) é realizada com base em todas as observações que fazem parte dos dados *in-sample*.
- 2) Previsão dinâmica
 - 2.1) *Rolling windows*: a previsão para cada período é realizada com base em \mathbf{X} observações anteriores (janelas de estimação), sendo \mathbf{X} variável. A opção de não se definir um número fixo de observações está relacionado com o facto de se

pretender comparar os resultados obtidos para as várias janelas de estimação. Para cada janela de estimação será estimado um modelo, que irá ser utilizado para realizar a previsão. Na figura seguinte encontra-se representado o método de previsão com *rolling windows*.

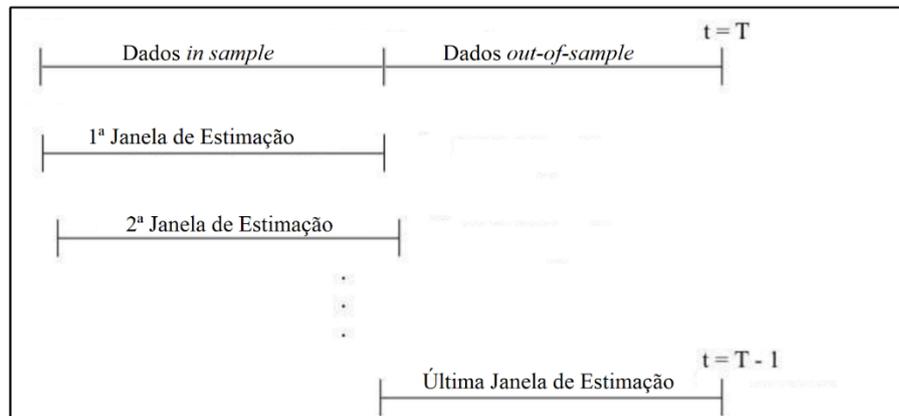


Figura 3.2 - Método de previsão com *rolling windows*

- 2.2) *Expanding windows*: nesta variante será utilizada uma janela de estimação inicial com X observações, que irá também variar, para estimar o modelo e prever a taxa de rendibilidade no período $X+1$. Para estimar o resultado no período $X+2$, a janela de estimação incluirá a observação estimada anteriormente ($X+1$) e será estimado um novo modelo e assim sucessivamente até que sejam incluídas todas as observações que se pretendam, ou seja, a janela de estimação irá aumentar à medida que se pretenda prever as taxas de rendibilidade em períodos mais distantes.

Como exemplo, pode-se estimar um modelo com as 100 primeiras observações que será utilizado para prever a observação 101. De seguida, inclui-se esta observação nos dados *in sample* e o modelo é estimado novamente e será então estimada a observação 102. O processo repete-se até se estimarem todas as observações pertencentes aos dados *out-of-sample*.

Na figura seguinte encontra-se representado o conceito de *expanding windows*.

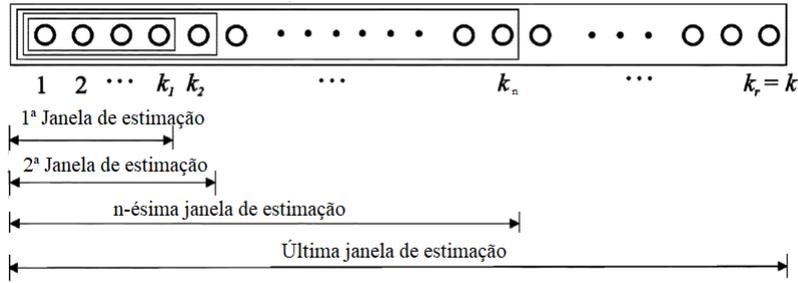


Figura 3.3 - Método de previsão com *expanding windows*

A variância obtida pela previsão será comparada com os dados *out-of-sample*, sendo esta comparação avaliada pelos critérios baseados nas *loss functions* seguintes:

- 1) Mean Absolute Error (MAE)

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_{pi} - y_{ai}| \quad (3.11)$$

y_{pi} – valor previsto da variância,

y_{ai} – valor real da variância.

- 2) Mean Squared Error (MSE)

$$MSE = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (y_{pi} - y_{ai})^2 \quad (3.12)$$

- 3) Root Mean Square Error (RMSE)

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (y_{pi} - y_{ai})^2} \quad (3.13)$$

O valor real da variância, será calculada pelo quadrado das taxas de rendibilidade dos dados fora da amostra, que simulará a volatilidade atual de acordo com Poon & Granger (2003).

$$y_{ai} = r_{tai}^2 \quad (3.14)$$

r_{tai} - taxas de rendibilidade dos dados fora da amostra

O objetivo principal das *loss functions* passa pelo cálculo da diferença entre a variância estimada e as rendibilidades ao quadrado que se consideram como *proxy* da volatilidade realizada. Esta diferença é denominada erro de previsão e quanto menor for melhor, pois mais preciso é o modelo.

Finalmente, os valores obtidos pelas *loss functions* para cada modelo, serão comparados para verificar qual dos modelos apresenta melhor poder de previsão.

4. Estudo Empírico

4.1. Dados

As cotações diárias referentes aos pares EUR/USD, GBP/USD e GBP/EUR foram obtidas do sítio de internet investing.com e compreendem o período entre 1 de janeiro de 2002 e 31 de dezembro de 2018.

Para o par EUR/USD foi considerada uma amostra de 4523 observações diárias enquanto para os pares GBP/USD e GBP/EUR são consideradas 4465.

Abaixo estão representadas as evoluções dos pares cambiais EUR/USD, GBP/USD e GBP/EUR, bem como uma análise ao seu comportamento no período em estudo.



Figura 4.1 - Evolução do par EUR/USD entre 2002 e 2018

Pelo gráfico do par cambial EUR/USD verifica-se que, entre 2002 e 2005, a tendência ascendente é predominante. No início do ano 2005 observa-se uma correção, que antecede mais um período de subidas a partir de 2006, com uma duração aproximada de dois anos, tendo atingido o máximo histórico cifrado em 1,5988 a 22 de abril de 2008. Entre meados de 2008 e meados de 2014, o par esteve sujeito a tendências ascendentes e descendentes de médio prazo, oscilando entre 1,20 e 1,55. É de notar ainda o efeito da crise do setor imobiliário (crise do *subprime*), em meados de 2008, que levou a uma queda abrupta do par, havendo maior procura

do USD como ativo de segurança. No mesmo ano de 2008, a crise da dívida soberana da Grécia instaurou um receio de divisão da zona do Euro, agravando a desvalorização do EUR. Entre o meio de 2014 e o início de 2015, o par EUR/USD apresentou uma tendência de queda, consolidado posteriormente entre 1,05 e 1,18 e assim permanecendo até inícios de 2017. Em 2017, iniciou uma tendência ascendente, tendo atingido um máximo no início de 2018. Após este máximo, o par entrou num período de correção.

É de referir ainda que, no final de 2018, o par EUR/USD se encontrava 28% abaixo dos máximos históricos.

Face ao exposto e atendendo ao gráfico, numa primeira análise, pode afirmar-se que a série não parece ser estacionária.



Figura 4.2 - Evolução do par GBP/USD entre 2002 e 2018

O par cambial GBP/USD apresentou, entre 2002 e meio de 2008, uma tendência ascendente, valendo a libra esterlina no seu pico 2,1078 dólares americanos. Durante este período, o par passou por uma correção no ano de 2005. Após este período positivo, o par apresentou uma queda abrupta amparada nos inícios do ano 2009. Uma vez mais, é notório o efeito da crise do *subprime* em meados de 2008, que definiu a tendência descendente até 2009. No período seguinte, entre meio de 2009 e finais de 2015, o par recuperou ligeiramente e lateralizou, oscilando entre 1,4303 e 1,7166. Seguiu-se um período em que o par caiu, até inícios de 2017, verificando-se posteriormente uma recuperação, até inícios de 2018. Após esta recuperação, o

par segue uma tendência descendente até final do ano 2018, quando apresenta um valor 39% abaixo do máximo do período em análise.

A partir de julho de 2008, a Libra Esterlina desvalorizou de forma considerável, durante várias sessões, devido à crise financeira que foi espoletada pela queda do banco Lehman Brothers.

No dia 23 de junho de 2016, foi realizado o referendo relativo à saída do Reino Unido da União Europeia (*brexite*). Quando o “sim” ganhou a votação, levou a que a libra esterlina desvalorizasse bastante nas sessões seguintes, não tendo recuperado o seu valor até finais de 2018.

A percepção dada pelo gráfico é de que a série não é estacionária.

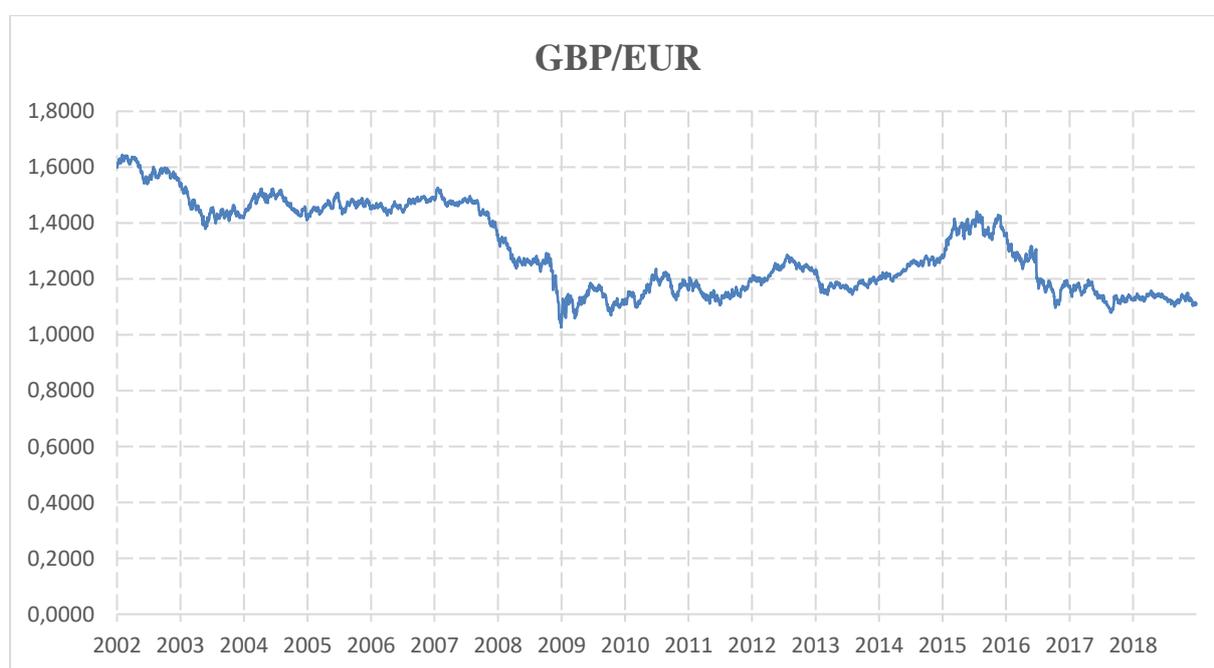


Figura 4.3 - Evolução do par GBP/EUR entre 2002 e 2018

Entre 2002 e inícios de 2003, o par GBP/EUR apresentou uma tendência descendente, tendo, após esta fase, lateralizado durante seis anos, oscilando entre 1,3544 e 1,5262. Verificou-se, de seguida, uma queda constante até ao início do ano de 2008, altura em que criou uma base que se prolongou até cerca do final do mesmo ano, e que resultou numa queda mais acentuada. Após esta queda, o par iniciou uma tendência ascendente de longo prazo até a meio do ano 2015, altura em que iniciou uma nova fase descendente que se prolongou até meados de 2017, altura a partir da qual o par iniciou a sua fase de lateralização, entre 1,0792 e 1,1581.

É de referir que o par desvalorizou apenas no final do ano de 2008, ou seja, verificou-se um efeito retardado da crise financeira no par GBP/USD. Como mencionado anteriormente, a desvalorização do EUR neste ano deveu-se à crise instalada na Grécia.

É notória, tal como no par anterior, a desvalorização do GBP após o referendo em 2016. Mais uma vez, pelo gráfico percebe-se que a série não apresenta estacionaridade.

Tal como é visível no gráfico seguinte referente ao par GBP/USD, os eventos como a crise do *subprime* e o *brexit* levaram a um aumento da volatilidade (com base no quadrado das taxas de rendibilidade) nos pares cambiais.

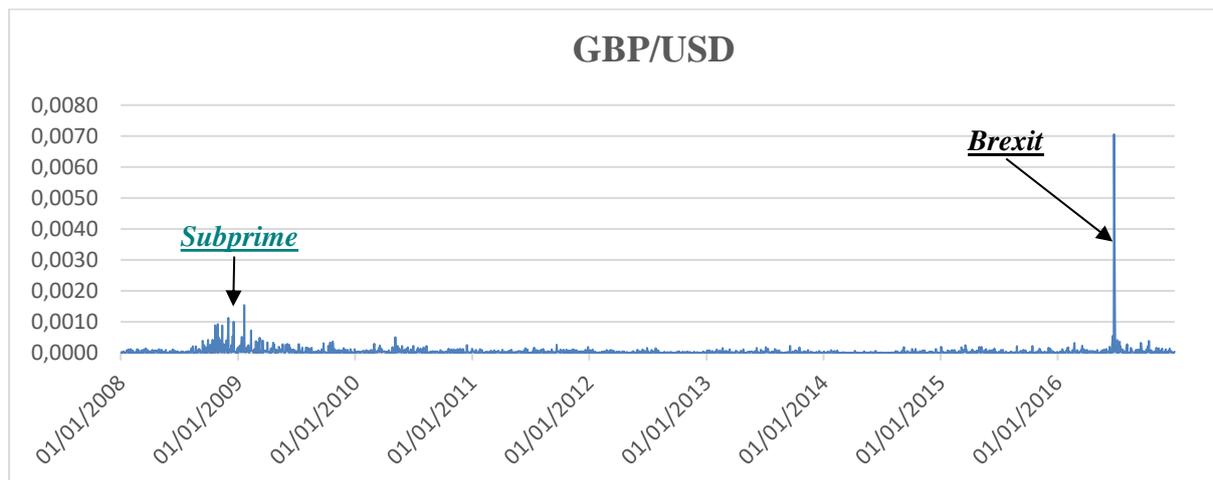


Figura 4.4 - Volatilidade resultante da crise do *subprime* e do *brexit*

Outros eventos, tais como o aumento/corte das taxas de juro e a aplicação/redução de estímulos pela Reserva Federal Americana (FED) e pelo Banco Central Europeu (BCE), afetam as relações cambiais entre países podendo apresentar um impacto semelhante quando comparados a eventos como o *brexit*.

No caso do EUR/USD, verificou-se uma valorização do Euro quando, em 2008, a Reserva Federal Americana (FED) baixou as taxas de juro para valores próximos de 0%, e uma desvalorização quando o presidente do Banco Central Europeu (BCE) anunciou os estímulos à economia, em 2014.

Os dados *in-sample* são representados pelos seguintes períodos para cada par:

- EUR/USD: entre 01/01/2002 e 22/07/2013 (3015 cotações)
- GBP/USD: entre 02/01/2002 e 30/05/2013 (2977 cotações)
- GBP/EUR: entre 01/01/2002 e 31/05/2013 (2977 cotações)

A divisão *out-of-sample* é referente aos seguintes períodos:

- EUR/USD: entre 23/07/2013 e 31/12/2018 (1508 cotações)
- GBP/USD: entre 31/05/2013 e 31/12/2018 (1488 cotações)
- GBP/EUR: entre 03/06/2002 e 31/12/2018 (1488 cotações)

Para testar a estacionaridade das séries temporais dos três pares cambiais, sugerida pela análise visual dos gráficos, foram realizados os testes Augmented Dickey-Fuller (ADF), Kwiatkowski–Phillips–Schmidt–Shin (KPSS) e Phillips-Perron (PP) aos dados *in-sample*, cujos resultados são apresentados nas tabelas seguinte:

Tabela 4.1 - Testes de estacionaridade aplicados aos pares cambiais

	ADF	KPSS	PP
EUR/USD	-2,8578	6,973	-2,6567
GBP/USD	-2,2819	4,4074	-2,0983
GBP/EUR	-2,1809	2,1662	-2,0206

Tabela 4.2 - Valores críticos dos testes de estacionaridade

		1%	5%	10%
EUR/USD	ADF	-3,96	-3,41	-3,12
	KPSS	0,216	0,146	0,119
	PP	-3,96565	-3,413494	-3,128435
GBP/USD	ADF	-3,96	-3,41	-3,12
	KPSS	0,216	0,146	0,119
	PP	-3,966612	-3,413959	-3,128713
GBP/EUR	ADF	-3,96	-3,41	-3,12
	KPSS	0,216	0,146	0,119
	PP	-3,966612	-3,413959	-3,128713

Os resultados obtidos pelos três testes confirmam que as séries apresentam raiz unitária, porque apresentam valores superiores aos valores críticos, o que implica que as séries não são estacionárias, o que, por sua vez, comprova o facto estilizado 12 (não-estacionaridade) apresentado no Capítulo 2.

4.2. Análise Descritiva dos Dados

A análise descritiva dos dados será feita à primeira diferença dos mesmos, ou seja, usando as taxas de rendibilidade.

Nas figuras seguintes, estão apresentadas as taxas de rendibilidade dos três pares cambiais em estudo.

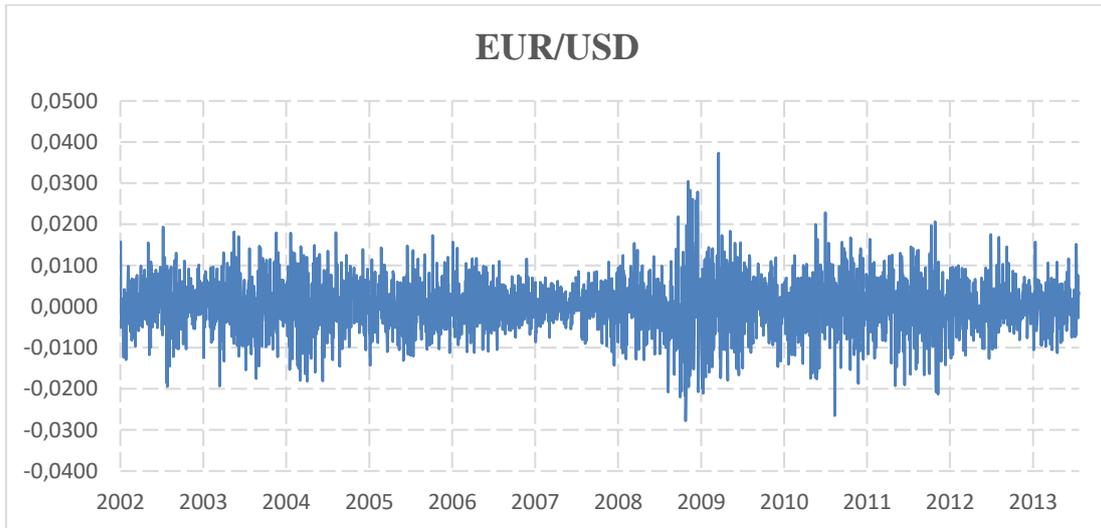


Figura 4.5 - Taxas de rendibilidade do EUR/USD

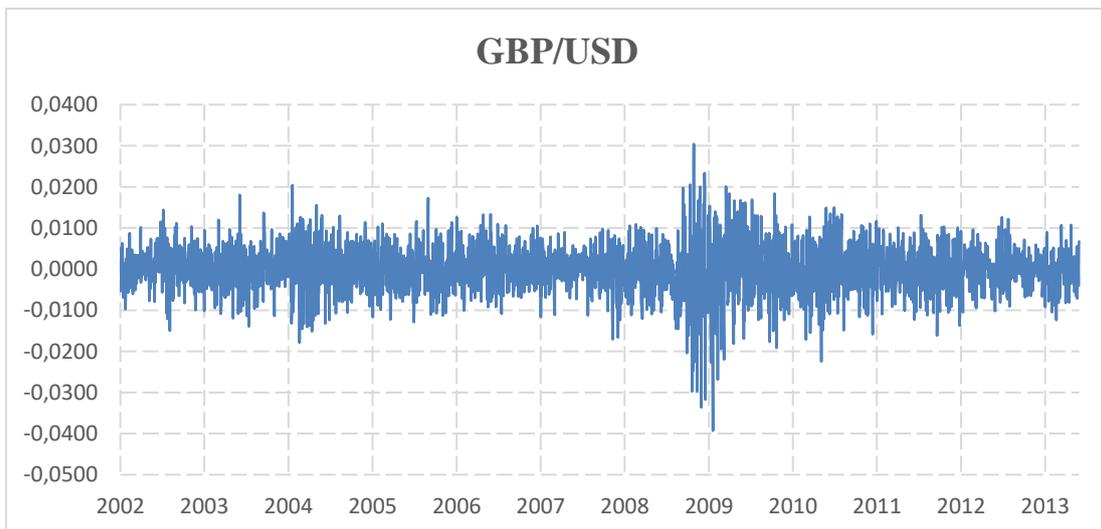


Figura 4.6 - Taxas de rendibilidade do GBP/USD

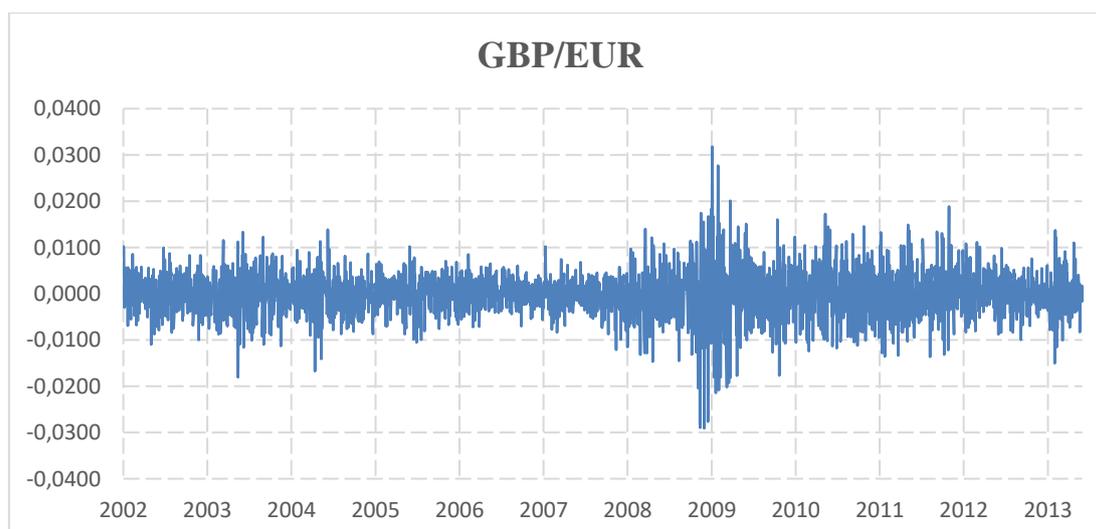


Figura 4.7 - Taxas de rendibilidade do GBP/EUR

Analisando os gráficos anteriores, é possível verificar a existência de períodos de baixa volatilidade que são sucedidos por períodos de baixa volatilidade, e de períodos de alta volatilidade que são sucedidos por períodos de alta volatilidade; ou seja, os *clusters* de volatilidade estão bem patentes nas taxas de rendibilidade, o que é uma característica comum dos ativos financeiros e que comprova o facto estilizado 6. Dada a irregularidade das taxas de rendibilidade, o facto estilizado 5 (intermitência) está, assim, confirmado.

A Tabela 4.3 - Medidas de estatística descritiva das Taxas de Rendibilidade mostra que as rendibilidades apresentadas não seguem uma distribuição normal, verificando-se um excesso de curtose, bem como assimetria. Esta verificação é confirmada pela aplicação do teste de Jarque-Bera (JB) em que o valor-p apresenta um valor bastante inferior a 0,01, nos três casos.

A distribuição normal é caracterizada por ser uma distribuição simétrica, sendo o coeficiente de simetria igual a 0 e por ser mesocúrtica, ou seja, o coeficiente de curtose apresenta um valor igual a 3.

As rendibilidades apresentam assim abas mais pesadas (confirmação do facto estilizado 2), porém, as observações estão concentradas em zonas diferentes.

O par EUR/USD apresenta uma distribuição, ainda que ligeira, assimétrica positiva, estando por isso as suas observações mais concentradas à esquerda da média. A distribuição empírica deste par é, como esperado, leptocúrtica com um valor de curtose igual a 4,534937.

O par GBP/USD tem uma distribuição assimétrica negativa, o que significa que a maior parte das observações se encontram à direita da média. Tal como o par anterior, a distribuição empírica é leptocúrtica, apresentando a curtose um valor igual a 5,870643.

O par GBP/EUR é caracterizado por uma distribuição assimétrica negativa, concentrando-se as observações à direita da média. Da mesma forma, o par GBP/EUR é definido por ser leptocúrtico, com uma curtose igual a 6,337414.

Sendo a assimetria positiva, isto reflete que a amplitude dos ganhos é maior do que a amplitude das perdas. A assimetria negativa tem o significado oposto, o que comprova o facto estilizado 3.

Tabela 4.3 - Medidas de estatística descritiva das Taxas de Rendibilidade

	EUR/USD	GBP/USD	GBP/EUR
Nº de observações	3.014	2.976	2.976
Média	0,000131	0,0000175	-0,00011
Mediana	0,000202	0,000177	0
Moda	0	0	0
Máximo	0,037333	0,030422	0,031779
Mínimo	-0,02781	-0,03928	-0,02911
Desvio-padrão	0,006433	0,005895	0,004986
Variância	0,0000414	0,0000348	0,0000249
Curtose	4,534937	5,870643	6,337414
Assimetria	0,022121	-0,37928	-0,11589
JB	294,38	1088,2	1.381,5
JB valor-p	$<2,2 \times 10^{-16}$	$<2,2 \times 10^{-16}$	$<2,2 \times 10^{-16}$

Os histogramas das taxas de rendibilidade apresentados de seguida confirmam que as distribuições são leptocúrticas relativamente à distribuição normal.

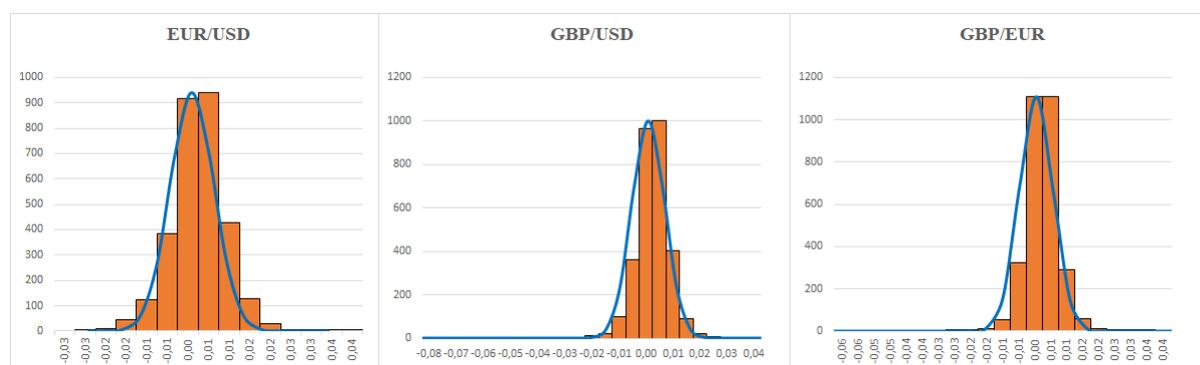


Figura 4.8 - Histograma com sobreposição da curva normal

Para as taxas de rendibilidade foi ainda realizado o teste de Jarque-Bera, que rejeita a hipótese nula de distribuição normal visto o valor-p ser inferior a 1%.

Foi ainda efetuada uma análise aos *QQ-plots* (*quantile-quantile plot*) das taxas de rendibilidade dos três pares, na qual se nota um desfasamento nas extremidades relativamente à linha média da distribuição normal.

Pelas análises anteriores, conclui-se que, de facto, a distribuição das taxas de rendibilidade não corresponde a uma distribuição normal.

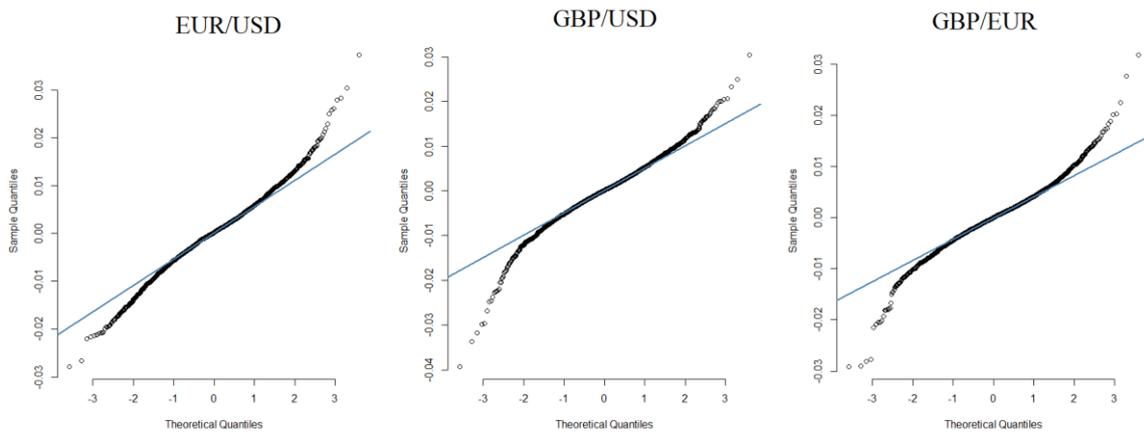


Figura 4.9 - *QQ-plots* das taxas de rendibilidade para a distribuição normal

De seguida, encontram-se apresentados os *QQ-plots* das taxas de rendibilidade para uma distribuição *t-student* com sete graus de liberdade. Neste caso, verifica-se um melhor ajuste comparativamente com os *QQ-plots* da distribuição normal.

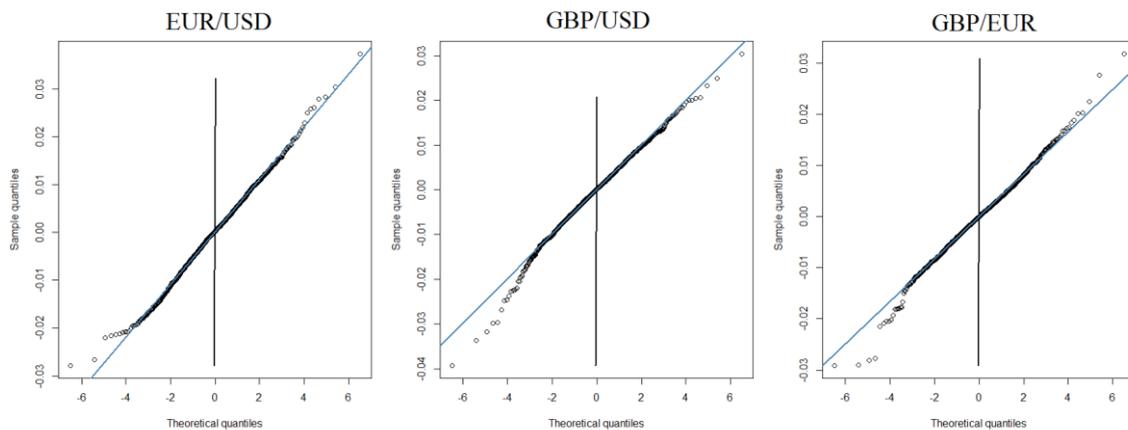


Figura 4.10 - *QQ-Plots* das taxas de rendibilidade para a distribuição *t-student*

Repete-se o mesmo procedimento que o aplicado às séries dos três pares cambiais para verificar a estacionaridade das taxas de rendibilidade. Os resultados dos testes ADF, KPSS e PP encontram-se apresentados na tabela seguinte:

Tabela 4.4 - Testes de estacionaridade aplicados às taxas de rendibilidade

	ADF	KPSS	PP
EUR/USD	-39,5168	0,0345	-55,5995
GBP/USD	-38,6508	0,0667	-52,6305
GBP/EUR	-39,2867	0,0565	-52,8575

Comparando os resultados apresentados com os valores críticos da Tabela 4.2 - Valores críticos dos testes de estacionaridade, verifica-se que as taxas de rendibilidade são estacionárias, não apresentando raiz unitária – confirmando-se, assim, o facto estilizado 13.

As taxas de rendibilidade foram sujeitas ao teste de Ljung-Box para averiguar a existência de correlação entre elas. Na tabela seguinte, verifica-se que a hipótese nula (que diz não existir correlação entre as taxas de rendibilidade), não é rejeitada, uma vez que o resultado do valor-p é superior a 1% e 5% para os três pares, o que leva a crer que as taxas de rendibilidade foram geradas por um processo de ruído branco (facto estilizado 1).

Tabela 4.5 - Teste de Ljung-Box aplicado às taxas de rendibilidade (lag = 10)

	χ^2	valor-p
EUR/USD	0,41126	0,5213
GBP/USD	3,7074	0,05417
GBP/EUR	2,7782	0,09555

4.3. Modelação da distribuição das taxas de rendibilidade

A modelação inicia-se com a construção dos gráficos das funções de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP) a partir das taxas de rendibilidade, que se encontram ilustradas nas figuras seguintes. A partir da visualização gráfica das FAC e FACP foi possível identificar a ordem do processo ARMA.

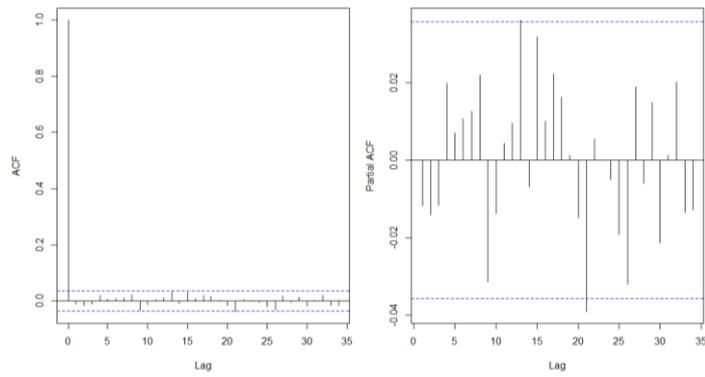


Figura 4.11 - FAC e FACP das taxas de rendibilidade (EUR/USD)

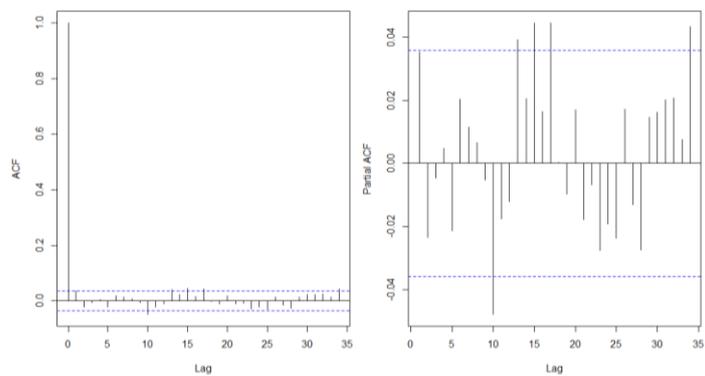


Figura 4.12 - FAC e FACP das taxas de rendibilidade (GBP/USD)

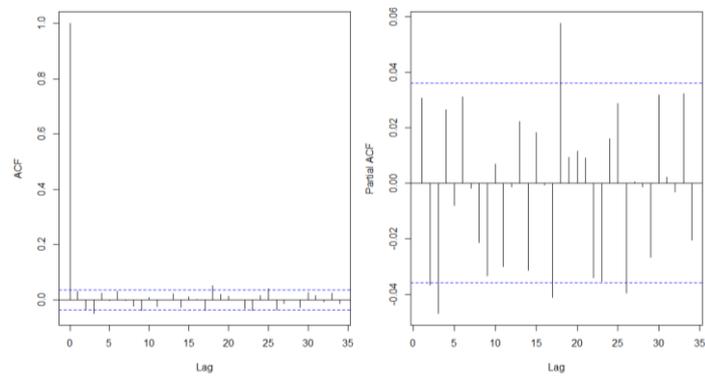


Figura 4.13 - FAC e FACP das taxas de rendibilidade (GBP/EUR)

Pela análise dos gráficos apresentados anteriormente, verifica-se que com o aumento dos *lags* não se verifica uma convergência para zero, pelo que se entende que as taxas de rendibilidade dos três pares apresentam um processo de ruído branco. Isto significa que os termos de u_t não apresentam correlação ao longo do tempo.

Para confirmar o facto estilizado 8 (decaimento lento da autocorrelação das taxas de rendibilidade em valor absoluto) foram produzidos os gráficos da função FAC para os três pares:

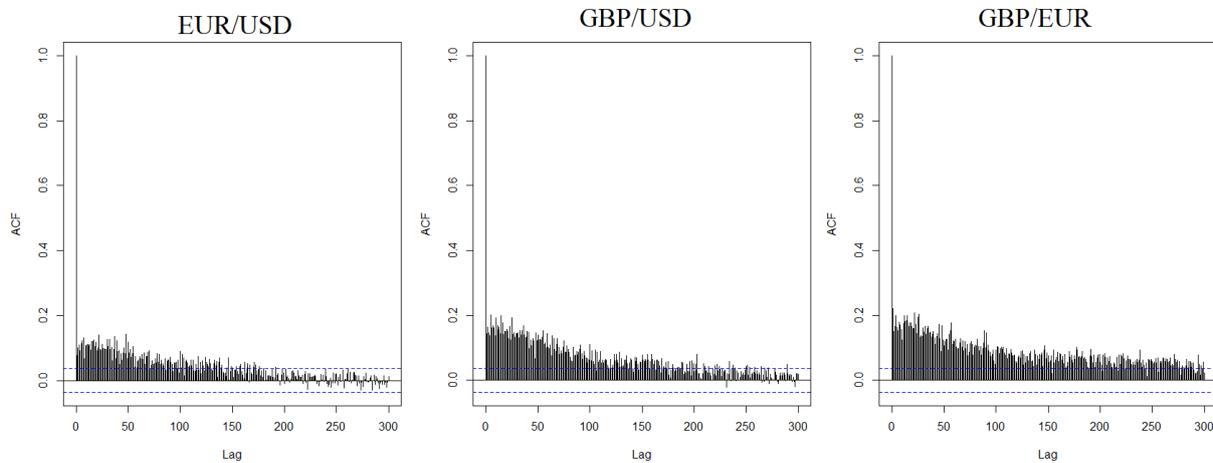


Figura 4.14 - FAC dos valores absolutos das taxas de rendibilidade

Para definir a ordem dos termos p e q do modelo ARMA foram ainda calculados os critérios BIC e AIC de vários modelos ARMA. Estes valores encontram-se apresentados na tabela seguinte:

Tabela 4.6 - Valores de AIC e BIC para os vários modelos ARMA(p, q)

(p, q)	EUR/USD		GBP/USD		GBP/USD	
	AIC	BIC	AIC	BIC	AIC	BIC
(0, 0)	-21.862,42	-21.850,40	-22.106,82	-22.094,83	-23.103,62	-23.091,62
(1, 0)	-21.860,84	-21.842,80	-22.108,53	-22.090,53	-23.104,39	-23.086,40
(2, 0)	-21.859,44	-21.835,39	-22.108,17	-22.084,17	-23.106,44	-23.082,45
(3, 0)	-21.857,79	-21.827,79	-22.106,23	-22.076,24	-23.111,00	-23.081,01
(0, 1)	-21.860,85	-21.842,81	-22.108,71	-22.090,71	-23.104,60	-23.086,60
(0, 2)	-21.859,43	-21.835,39	-22.108,09	-22.084,10	-23.105,66	-23.081,66
(0, 3)	-21.857,77	-21.827,71	-22.106,26	-22.076,27	-23.111,05	-23.081,06
(1, 1)	-21.858,77	-21.834,72	-22.107,48	-22.083,49	-23.103,30	-23.079,31
(2, 1)	-21.857,48	-21.827,43	-22.106,15	-22.076,16	-23.106,98	-23.076,99
(3, 1)	-21.855,84	-21.819,77	-22.104,23	-22.068,24	-23.112,69	-23.076,70
(1, 2)	-21.857,39	-21.827,33	-22.106,11	-22.076,11	-23.106,26	-23.076,27
(1, 3)	-21.856,03	-21.819,96	-22.104,26	-22.068,27	-23.112,25	-23.076,26
(2, 2)	-21.855,74	-21.819,68	-22.104,13	-22.068,14	-23.109,19	-23.073,20
(3, 2)	-21.855,20	-21.813,12	-22.102,23	-22.060,25	-23.110,83	-23.068,84
(2, 3)	-21.854,26	-21.812,18	-22.102,38	-22.060,39	-23.110,47	-23.068,49
(3, 3)	-21.852,26	-21.804,18	-22.102,33	-22.054,34	-23.109,11	-23.061,12

Por ser mais penalizador, o critério BIC foi selecionado para definir a ordem do modelo ARMA. De realçar ainda a diferença apresentada pelo critério AIC na escolha do modelo ARMA para os pares GBP/USD e GBP/EUR.

Face aos gráficos de FAC e FACP, e aos dados da Tabela 4.6 - Valores de AIC e BIC para os vários modelos ARMA(p, q), conclui-se que as taxas de rendibilidade seguem um processo ARMA (0, 0), sendo a ordem dos termos p e q igual a zero. Assim, o modelo ARMA(0, 0) é representado por:

$$y_t = c + u_t \quad (4.1)$$

Foi aplicado o teste de Ljung-Box aos resíduos obtidos após aplicar o modelo ARMA(0, 0) com o intuito de verificar se este modelo conseguiu capturar a dependência das taxas de rendibilidade. Os resultados da tabela seguinte mostram que a hipótese nula não é rejeitada, para os três, o que leva a concluir que o modelo foi bem sucedido.

Tabela 4.7 - Teste de Ljung-Box aplicados aos resíduos do modelo ARMA(0, 0) ($lag = 10$)

	χ^2	valor- p
EUR/USD	6,6641	0,7567
GBP/USD	15,336	0,1203
GBP/EUR	6,4094	0,7798

Antes de proceder à estimação do modelo ARCH é necessário verificar primeiro a existência de heteroscedasticidade condicional. Os testes para verificar os efeitos ARCH são aplicados aos quadrados dos resíduos que são gerados a partir da equação da média condicional, após aplicação do modelo ARMA às taxas de rendibilidade.

Na figura seguinte estão representadas as FAC dos quadrados dos resíduos dos três pares cambiais. Desta figura conclui-se que existem efeitos ARCH devido à existência de várias estimativas para os coeficientes de autocorrelação correspondentes a diferentes *lags*, que são estatisticamente significativos.

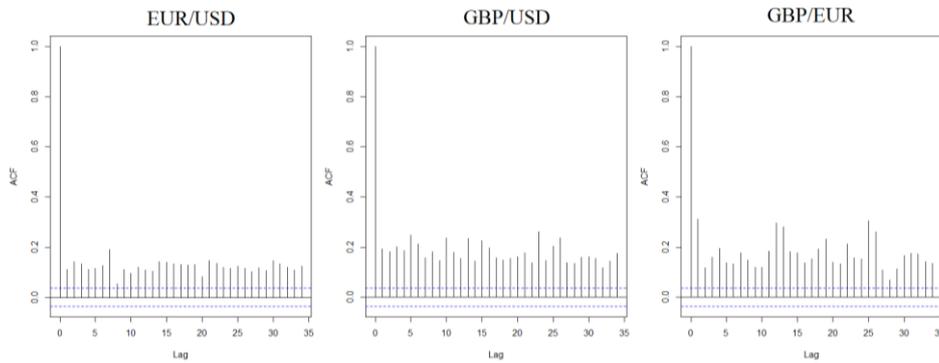


Figura 4.15 - FAC dos quadrados dos resíduos

Para confirmar a presença de heteroscedasticidade condicional foram calculados dois testes ao quadrado dos resíduos: Ljung-Box e Multiplicador de Lagrange proposto por Engle (1982). Pela Tabela 4.8 - Teste de Ljung-Box ($lag = 10$), verifica-se que os valores- p para cada par cambial são inferiores a 1% o que leva a rejeitar a hipótese nula de que os dados apresentam homoscedasticidade condicional, verificando-se assim a presença de efeitos ARCH. O teste de Multiplicador de Lagrange, apresentado na Tabela 4.9 - Teste do Multiplicador de Lagrange, mostra que os valores- p para todos os pares são iguais a zero, significando que a hipótese nula de não-existência de efeitos ARCH é rejeitada.

Tabela 4.8 - Teste de Ljung-Box ($lag = 10$)

	χ^2	valor- p
EUR/USD	464,19	$< 2,2 \times 10^{-16}$
GBP/USD	1.155,6	$< 2,2 \times 10^{-16}$
GBP/EUR	879,21	$< 2,2 \times 10^{-16}$

Tabela 4.9 - Teste do Multiplicador de Lagrange

Ordem	EUR/USD		GBP/USD		GBP/EUR	
	ML	valor-p	ML	valor-p	ML	valor-p
4	1579	0	1852	0	1749	0
8	669	0	729	0	767	0
12	432	0	445	0	484	0
16	305	0	306	0	288	0
20	235	0	241	0	217	0
24	190	0	187	0	174	0

Após verificar a existência de heteroscedasticidade condicional, procede-se à estimação dos modelos GARCH (1,1), GJR-GARCH (1,1) e EGARCH (1,1) para cada par. Nas tabelas seguintes, encontram-se as estimativas e os erros-padrão entre parêntesis para os parâmetros de cada modelo obtidos pelo método da Máxima Verossimilhança, bem como os critérios de

avaliação da bondade do ajustamento (L, AIC, BIC). Os dados apresentados nas tabelas seguintes foram obtidos pelo *software* R.

Tabela 4.10 - Estimativas pelo método da Máxima Verosimilhança e bondade do ajustamento (EUR/USD)

Estimativas	ARMA(0,0) - GARCH(1, 1)	ARMA(0,0) - GJR-GARCH (1, 1)	ARMA(0,0) - EGARCH (1, 1)
Parâmetros do modelo ARMA			
c	4,669418 x 10 ⁻⁴ (2,010864 x 10 ⁻⁴)	5,135224 x 10 ⁻⁴ (2,126227 x 10 ⁻⁴)	5,409677 x 10 ⁻⁴ (3,21393 x 10 ⁻⁴)
archm ^a	-7,509726 (5,28255)	-9,258522 (5,733086)	-9,9994161980 (8,290756)
Parâmetros do modelo GARCH			
α ₀	1,544763 x 10 ⁻⁷ (1,349722 x 10 ⁻⁷)	1,391389 x 10 ⁻⁷ (7,679257 x 10 ⁻⁸)	-5,63113878 x 10 ⁻² (1,04912 x 10 ⁻³)
α ₁	3,474548 x 10 ⁻² (1,027519 x 10 ⁻³)	2,679784 x 10 ⁻² (4,424 x 10 ⁻³)	7,82045447 x 10 ⁻² (1,095825 x 10 ⁻²)
δ ₁	0,9615482 (1,413221 x 10 ⁻³)	0,962888 (6,737641 x 10 ⁻⁴)	0,9944454462 (7,969288 x 10 ⁻⁸)
γ ₁	-	1,431781 x 10 ⁻² (8,608183 x 10 ⁻³)	-8,1999863 x 10 ⁻³ (7,048277 x 10 ⁻³)
shape ^b	14,0864 (1,131894)	14,87135 (3,57727)	14,2887051389 (1,597036)
L	11.134,96	11.136,27	11.130,63
AIC	-7,3848	-7,3850	-7,3813
BIC	-7,3729	-7,3711	-7,3673
α ₁ + δ ₁	0,99629368	0,98968584	

^aarchm – efeito ARCH na média condicional

^bshape – graus de liberdade

Tabela 4.11: Estimativas pelo método da Máxima Verosimilhança e bondade do ajustamento (GBP/USD)

Estimativas	ARMA(0,0) - GARCH (1, 1)	ARMA(0,0) - GJR-GARCH (1, 1)	ARMA(0,0) - EGARCH (1, 1)
Parâmetros do modelo ARMA			
C	3,727895 x 10 ⁻⁴ (1,773682 x 10 ⁻⁴)	3,126742 x 10 ⁻⁴ (1,84891 x 10 ⁻⁴)	2,894738 x 10 ⁻⁴ (1,073761 x 10 ⁻⁴)
archm	-9,2151716 (5,819519)	-7,7176 (6,183816)	-6,6378687551 (3,772982)
Parâmetros do modelo GARCH			
α ₀	2,101496 x 10 ⁻⁷ (6,153495 x 10 ⁻⁸)	1,936304 x 10 ⁻⁷ (8,496351 x 10 ⁻⁸)	-7,51168973 x 10 ⁻² (1,262842 x 10 ⁻³)
α ₁	4,230759 x 10 ⁻² (1,659884 x 10 ⁻³)	3,621516 x 10 ⁻² (4,674863 x 10 ⁻³)	9,54205125 x 10 ⁻² (1,244946 x 10 ⁻²)
δ ₁	0,9513406 (2,092183 x 10 ⁻³)	0,9527441 (2,579399 x 10 ⁻³)	0,9927629406 (2,640055 x 10 ⁻⁷)
γ ₁	-	1,03678 x 10 ⁻³ (9,907252 x 10 ⁻³)	-7,2710209 x 10 ⁻³ (7,714597 x 10 ⁻³)
shape	20,52277 (6,46734)	21,02078 (6,880847)	18,9686596654 (0,703706)
L	11.338,42	11.338,9	11.334,7
AIC	-7,6159	-7,6155	-7,6127
BIC	-7,6036	-7,6014	-7,5986
α ₁ + δ ₁	0,99364819	0,98895926	

Tabela 4.12: Estimativas pelo método da Máxima Verosimilhança e bondade do ajustamento (GBP/EUR)

Estimativas	ARMA(0,0) - GARCH (1, 1)	ARMA(0,0) - GJR-GARCH (1, 1)	ARMA(0,0) - EGARCH (1, 1)
Parâmetros do modelo ARMA			
C	$-4,97337 \times 10^{-5}$ ($1,224930 \times 10^{-4}$)	$-1,042493 \times 10^{-4}$ ($1,147391 \times 10^{-4}$)	$3,616179 \times 10^{-6}$ ($1,022448 \times 10^{-4}$)
archm	$5,83831 \times 10^{-2}$ (5,908843)	1,1253357 (5,541328)	-5,153381 (4,654471)
Parâmetros do modelo GARCH			
α_0	$1,250695 \times 10^{-7}$ ($2,168225 \times 10^{-7}$)	$1,068137 \times 10^{-7}$ ($1,060667 \times 10^{-7}$)	$-4,842857 \times 10^{-2}$ ($1,209171 \times 10^{-4}$)
α_1	$4,657341 \times 10^{-2}$ ($5,061057 \times 10^{-3}$)	$2,363465 \times 10^{-2}$ ($4,144755 \times 10^{-3}$)	$8,98948 \times 10^{-2}$ ($1,32687 \times 10^{-2}$)
δ_1	0,9479023 ($5,110419 \times 10^{-3}$)	0,9543312 ($2,617627 \times 10^{-3}$)	0,9955323 ($3,490357 \times 10^{-7}$)
γ_1	-	$3,378876 \times 10^{-2}$ ($1,046765 \times 10^{-2}$)	$-2,626634 \times 10^{-2}$ ($1,209171 \times 10^{-3}$)
shape	16,17793 (3,951663)	18,00683 (4,856299)	16,77864 (1,411747)
L	11.896,66	11.901,47	11.898,48
AIC	-7,9910	-7,9936	-7,9916
BIC	-7,9789	-7,9795	-7,9775
$\alpha_1 + \delta_1$	0,99447571	0,97796585	

Pela análise das tabelas acima, é possível constatar que o resultado da soma $\hat{\alpha}_1 + \hat{\delta}_1$ (modelos GARCH e GJR -GARCH) é muito próximo de 1, o que sugere um modelo quase integrado na variância em que os choques têm um efeito persistente na volatilidade condicional ao longo do tempo. Estes resultados sustentam ainda o facto de os modelos escolhidos estarem muito próximos de apresentarem raiz unitária na variância. Visto que a frequência dos dados é muito alta (taxas de rendibilidade diárias), seria expetável um valor próximo de 1.

Tal como descrito no capítulo da Metodologia, para os três casos do modelo GJR -GARCH, os valores de $\hat{\alpha}_0$, $\hat{\delta}_1$ e $\hat{\delta}_1 + \hat{\gamma}_1$ são positivos.

Para os modelos EGARCH, o valor de $\hat{\delta}_1$ é muito próximo de 1, o que significa que a volatilidade persiste durante um longo período após ocorrência de um choque. O parâmetro de assimetria $\hat{\gamma}_1$ apresenta valores negativos, refletindo o maior impacto que as más notícias têm em comparação com o que têm as boas notícias, comprovando assim o facto estilizado 9.

Aplicando mais uma vez o teste de Ljung-Box ao quadrado dos resíduos estandardizados dos modelos estimados, com base na Tabela 4.13: Teste de Ljung-Box aplicado ao quadrado aos resíduos estandardizados ($lag = 10$), verifica-se que para os modelos dos três pares os valores-p

são superiores a 5%. Conclui-se, assim, que todos os modelos estimados conseguiram captar com sucesso os efeitos ARCH (*clusters* de volatilidade), não se verificando dependência de segunda ordem nos resíduos estandardizados.

Tabela 4.13: Teste de Ljung-Box aplicado ao quadrado aos resíduos estandardizados (*lag* = 10)

		GARCH(1, 1)	GJR -GARCH(1, 1)	EGARCH(1, 1)
EUR/USD	χ^2	12,995	13,586	11,867
	valor-p	0,224	0,1928	0,2941
GBP/USD	χ^2	11,551	11,916	12,391
	valor-p	0,3162	0,2907	0,2596
GBP/EUR	χ^2	13,33	11,398	15,032
	valor-p	0,2058	0,3274	0,1309

De forma a analisar melhor o impacto das notícias nos três pares cambiais, foram construídas as *news impact curves* que se encontram apresentadas nas figuras seguintes.

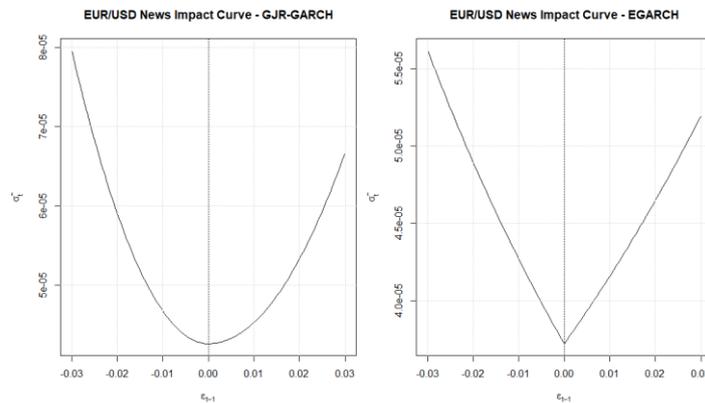


Figura 4.16 - News Impact Curves (EUR/USD)

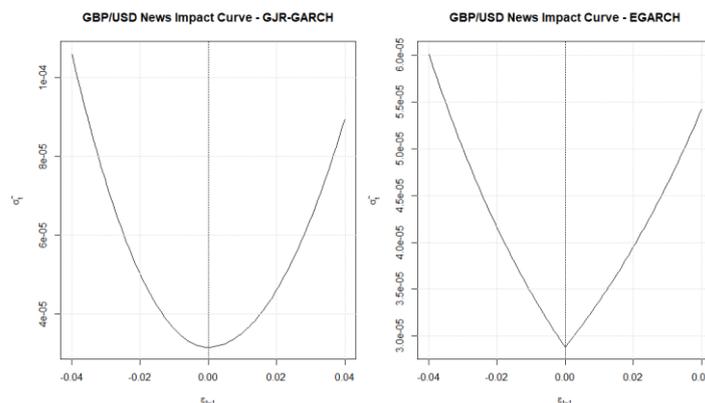


Figura 4.17 - News Impact Curves (GBP/USD)

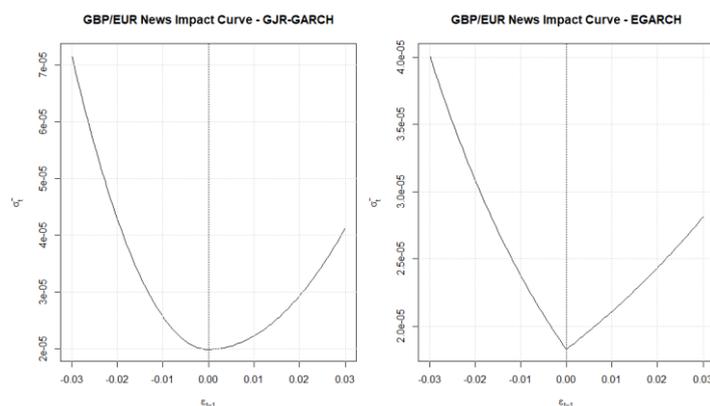


Figura 4.18 - News Impact Curves (GBP/EUR)

Os gráficos mostram que as más notícias têm um maior impacto do que as boas notícias, isto é, os choques negativos geram maior volatilidade do que os choques positivos (confirmação do facto estilizado 9). Verifica-se uma maior diferença entre os pares EUR/USD e GBP/USD, o que poderá ser normal dado terem em comum a moeda americana, enquanto o par GBP/EUR é referente a duas moedas europeias.

O passo seguinte passa por decidir qual é o modelo mais apropriado para captar a dependência das taxas de rendibilidade. Para o fazer, serão comparadas as medidas de bondade do ajustamento dos modelos estimados para cada par.

Tabela 4.14: Medidas de bondade do ajustamento (EUR/USD)

Medidas	ARMA(0, 0)-GARCH(1, 1)	ARMA(0, 0)-GJR-GARCH(1, 1)	ARMA(0, 0)-EGARCH(1, 1)
L	11.134,96	11.136,27	11.130,63
AIC	-7,3848	-7,3850	-7,3813
BIC	-7,3729	-7,3711	-7,3673

Tabela 4.15: Medidas de bondade do ajustamento (GBP/USD)

Medidas	ARMA(0, 0)-GARCH(1, 1)	ARMA(0, 0)-GJR-GARCH(1, 1)	ARMA(0, 0)-EGARCH(1, 1)
L	11.338,42	11.338,90	11.334,7
AIC	-7,6159	-7,6155	-7,6127
BIC	-7,6036	-7,6014	-7,5986

Tabela 4.16: Medidas de bondade do ajustamento (GBP/EUR)

Medidas	ARMA(0, 0)-GARCH(1, 1)	ARMA(0, 0)-GJR-GARCH(1, 1)	ARMA(0, 0)-EGARCH(1, 1)
L	11.896,66	11.901,47	11.898,48
AIC	-7,9910	-7,9936	-7,9916
BIC	-7,9789	-7,9795	-7,9775

Para o par EUR/USD, verifica-se que o modelo ARMA(0, 0)-GJR-GARCH(1, 1) pode ser o mais adequado, pois é o que apresenta o maior valor de logaritmo da função de verosimilhança

e menor valor no critério AIC, porém, analisando o critério BIC, a decisão não é tão evidente. Este critério sugere que o ARMA(0, 0)-GARCH(1, 1) é o modelo que apresenta melhor desempenho. Sendo o BIC o critério mais penalizador, optou-se por lhe atribuir maior importância.

Pelo valor do logaritmo da função de verosimilhança, o modelo ARMA(0, 0)-GJR-ARCH(1, 1) aparenta ser o mais apropriado para o par GBP/USD. Os critérios AIC e BIC apontam para o modelo ARMA(0, 0)-GARCH(1, 1) como sendo o mais adequado. Tal como o caso anterior, o critério BIC foi considerado como o mais crítico tendo sido por isso escolhido o modelo ARMA(0, 0)-GARCH(1, 1).

Quanto ao par GBP/EUR, os valores do logaritmo da função de verosimilhança e dos critérios AIC e BIC estão em sintonia e sugerem que o modelo ARMA(0, 0)-GJR-GARCH(1, 1) é o mais apropriado.

Os modelos que melhor explicam a dependência nas séries temporais não são obrigatoriamente os que apresentam os melhores resultados na fase de previsão. Por esta razão, todos os modelos serão estimados e comparados na fase de previsão.

Antes de se prosseguir para a previsão, resta verificar as propriedades estatísticas dos resíduos estandardizados, especialmente no que toca à assimetria e à curtose.

Tabela 4.17: Dados estatísticos dos resíduos estandardizados

		GARCH(1, 1)	GJR-GARCH(1, 1)	EGARCH(1, 1)
EUR/USD	Assimetria	-0,03	-0,03	-0,02
	Curtose	3,46	3,47	3,47
	JB	26,825	27,966	28,035
	JB valor-p	$1,496 \times 10^{-6}$	$8,458 \times 10^{-7}$	$8,17 \times 10^{-7}$
GBP/USD	Assimetria	-0,10	-0,10	-0,10
	Curtose	3,27	3,27	3,31
	JB	14,704	14,514	17,319
	JB valor-p	$6,412 \times 10^{-4}$	$7,052 \times 10^{-4}$	$1,734 \times 10^{-4}$
GBP/EUR	Assimetria	-0,10	-0,10	-0,10
	Curtose	3,38	3,35	3,38
	JB	23,238	20,452	23,499
	JB valor-p	$8,992 \times 10^{-6}$	$3,622 \times 10^{-5}$	$7,895 \times 10^{-6}$

Os valores da Tabela 4.17: Dados estatísticos dos resíduos estandardizados mostram que, para os três pares, o valor da curtose se encontra ligeiramente acima de 3, o que vai ao encontro do facto estilizado 7. Porém, não se pode afirmar que os modelos tenham conseguido capturar a leptocurtose da distribuição condicionada. O valor da assimetria encontra-se muito próximo de

zero, o que leva a concluir que a distribuição dos resíduos é muito próxima de uma distribuição simétrica. Os valores do teste de Jarque-Bera rejeitam a hipótese de normalidade dos resíduos.

4.4. Previsão

4.4.1. Previsão Estática

A previsão estática baseia-se na totalidade da informação contida nos dados *in-sample*. Com recurso a esta informação, foi possível obter os gráficos seguintes para cada par cambial nos quais se apresentam as previsões efetuadas com base em cada modelo estimado anteriormente. Nestes gráficos, estão também representados os valores realmente observados da volatilidade tendo o quadrado das taxas de rendibilidade como *proxy*.

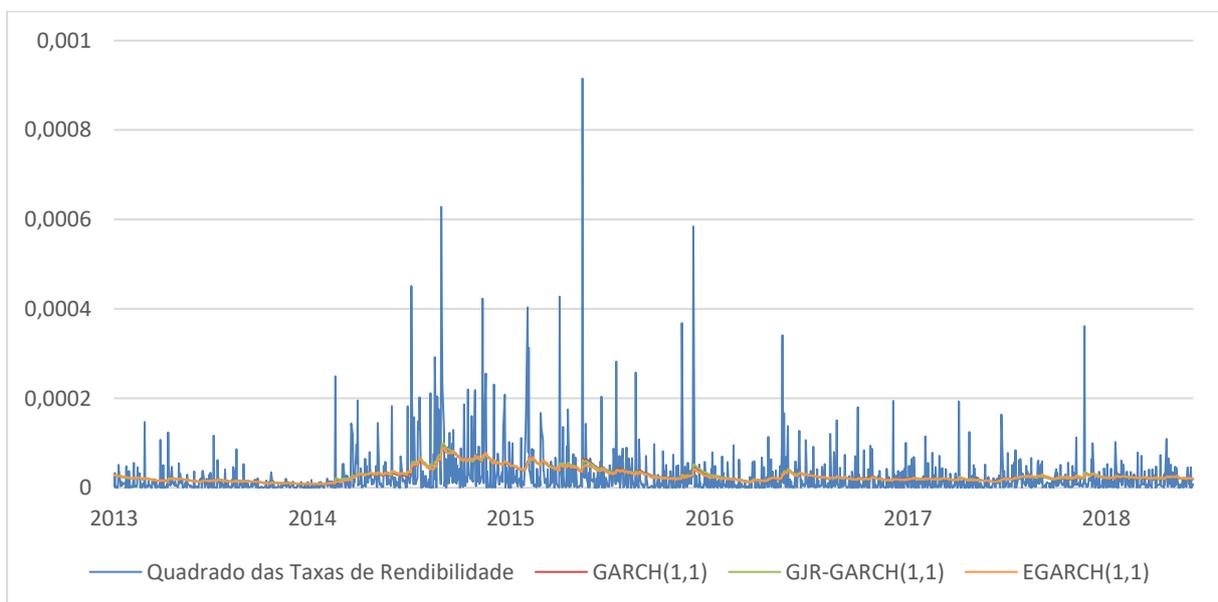


Figura 4.19 - Previsão estática para EUR/USD

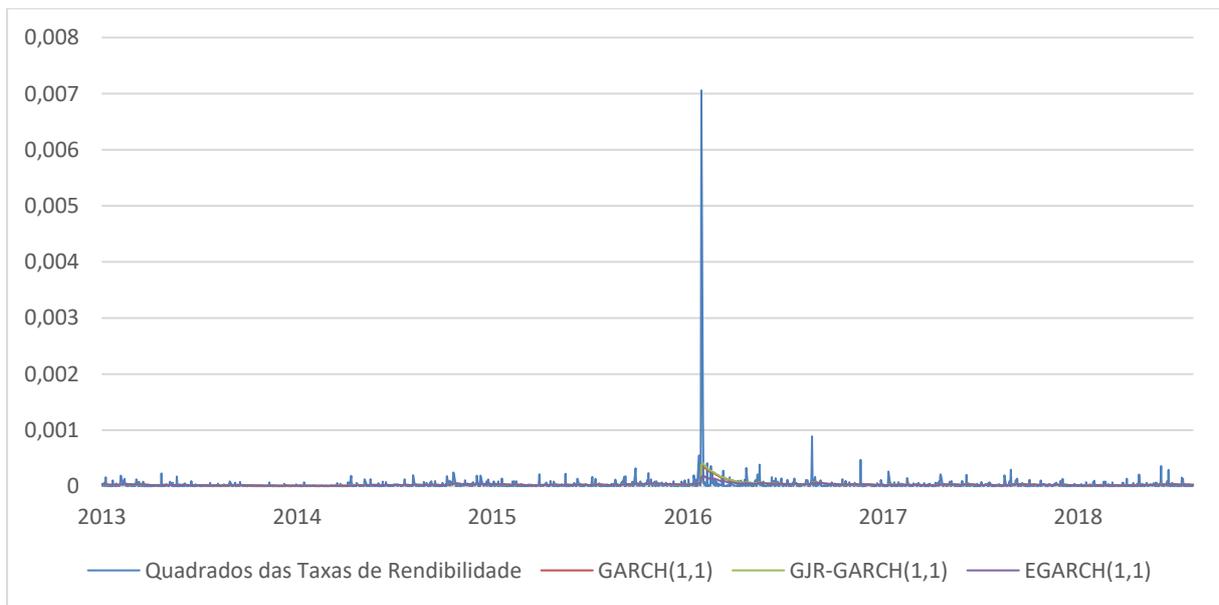


Figura 4.20 - Previsão estática para GBP/USD

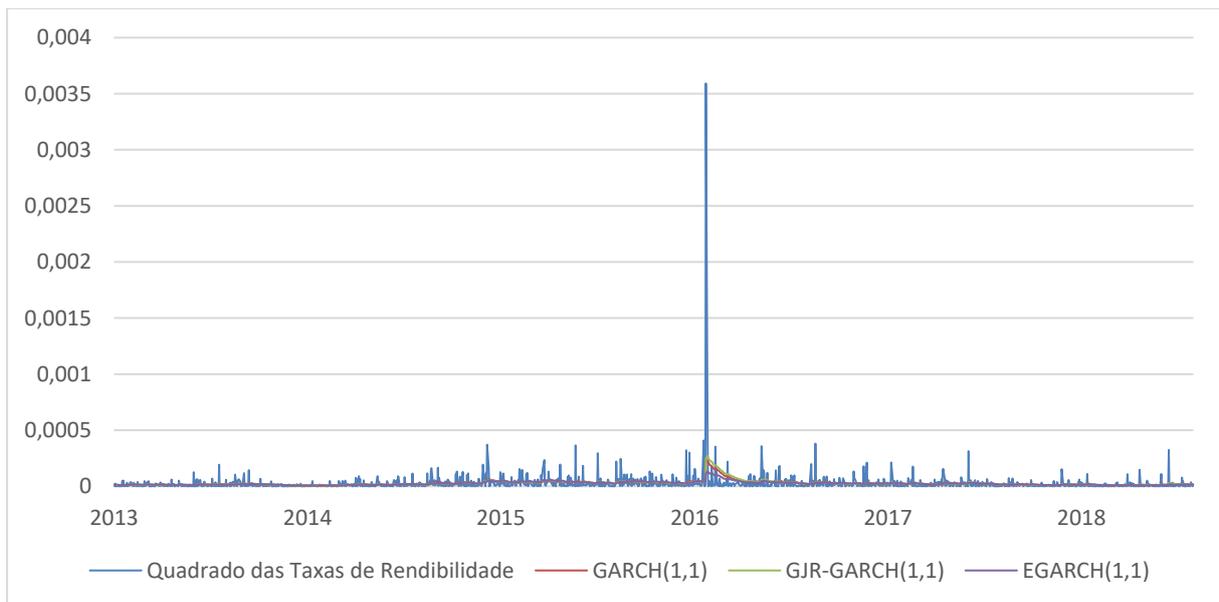


Figura 4.21 - Previsão estática para GBP/EUR

Para analisar o poder de previsão de cada modelo, foram calculadas as *loss functions* que se encontram apresentadas nos quadros seguinte:

Tabela 4.18 - Erros da Previsão Estática para EUR/USD

	GARCH(1, 1)	GJR-GARCH(1, 1)	EGARCH(1, 1)
MAE	2,7182 x 10 ⁻⁵	2,7349 x 10 ⁻⁵	2,6972 x 10 ⁻⁵
MSE	2,7855 x 10 ⁻⁹	2,7876 x 10 ⁻⁹	2,8247 x 10 ⁻⁹
RMSE	5,2778 x 10 ⁻⁵	5,2798 x 10 ⁻⁵	5,3148 x 10 ⁻⁵

Tabela 4.19 - Erros da Previsão Estática para GBP/USD

	GARCH(1, 1)	GJR-GARCH(1, 1)	EGARCH(1, 1)
MAE	3,5707 x 10 ⁻⁵	3,6042 x 10 ⁻⁵	3,3642 x 10 ⁻⁵
MSE	3,3757 x 10 ⁻⁸	3,3630 x 10 ⁻⁸	3,5272 x 10 ⁻⁸
RMSE	1,8373 x 10 ⁻⁴	1,8338 x 10 ⁻⁴	1,8781 x 10 ⁻⁴

Tabela 4.20 - Erros da Previsão Estática para GBP/EUR

	GARCH(1, 1)	GJR-GARCH(1, 1)	EGARCH(1, 1)
MAE	2,7247 x 10 ⁻⁵	2,7986 x 10 ⁻⁵	2,6428 x 10 ⁻⁵
MSE	9,6495 x 10 ⁻⁹	9,6557 x 10 ⁻⁹	1,0071 x 10 ⁻⁸
RMSE	9,8232 x 10 ⁻⁵	9,8263 x 10 ⁻⁵	1,0035 x 10 ⁻⁴

A Tabela 4.18 - Erros da Previsão Estática para EUR/USD mostra que, para o par EUR/USD, o modelo EGARCH é o que apresenta melhor poder de previsão de acordo com o MAE. As outras duas funções de erro de previsão (MSE e RMSE) mostram que o modelo GARCH apresentam melhor capacidade preditiva.

A Tabela 4.19 - Erros da Previsão Estática para GBP/USD mostra que, para o par GBP/USD, o modelo GJR-GARCH apresenta menores valores nas funções MSE e RMSE, enquanto o modelo EGARCH apresenta maior poder de previsão de acordo com a MAE.

O par GBP/EUR apresenta, para o modelo EGARCH, o menor valor de MAE e, para o modelo GARCH, apresenta os menores valores de MSE e RMSE.

Nos três casos verifica-se uma divergência nas funções de erro levando a que não se consiga concluir qual o melhor modelo para realizar a previsão.

4.4.2. Previsão Dinâmica

A previsão dinâmica foi realizada com base em diferentes janelas de estimação, iniciando-se com 250 observações e tendo sido adicionadas 50 observações posteriormente, até se obter uma janela com o tamanho de 1000 observações.

Ao realizar as previsões dinâmicas, encontraram-se algumas dificuldades na obtenção de resultados: ao utilizar o modelo ARMA(0, 0) não era possível obter uma solução convergente; pelo que foi adotado o modelo ARMA(1, 1). Na maioria dos casos, não foi possível obter resultados devido a limitações do *software* ou a características de processamento do computador, pelo que a solução passou por aplicar *variance targeting* aquando da estimação.

4.4.2.1. Rolling Windows

Para os vários pares cambiais, as janelas de estimação que apresentam melhores resultados diferem.

Para o EUR/USD, aquela que obteve os menores valores nas três *loss functions* foi a janela com 650 observações, sendo o modelo GJR-GARCH (1, 1) aquele que sobressai com maior poder de previsão, tal como se verifica pela tabela seguinte.

Tabela 4.21 - Erros da Previsão Dinâmica para EUR/USD – Rolling Window (650)

	GARCH(1, 1)	GJR-GARCH(1, 1)	EGARCH(1, 1)
MAE	$2,79041 \times 10^{-5}$	$2,72124 \times 10^{-5}$	$3,2496 \times 10^{-5}$
MSE	$3,00344 \times 10^{-9}$	$2,95527 \times 10^{-9}$	$3,3440 \times 10^{-9}$
RMSE	$5,48036 \times 10^{-5}$	$5,43624 \times 10^{-5}$	$5,7827 \times 10^{-5}$

No apêndice I, encontram-se apresentados os erros de previsão para as várias janelas temporais.

No gráfico seguinte, estão representados os valores observados do quadrado das taxas de rendibilidade tal como os valores estimados para uma *rolling window* de 650 observações.

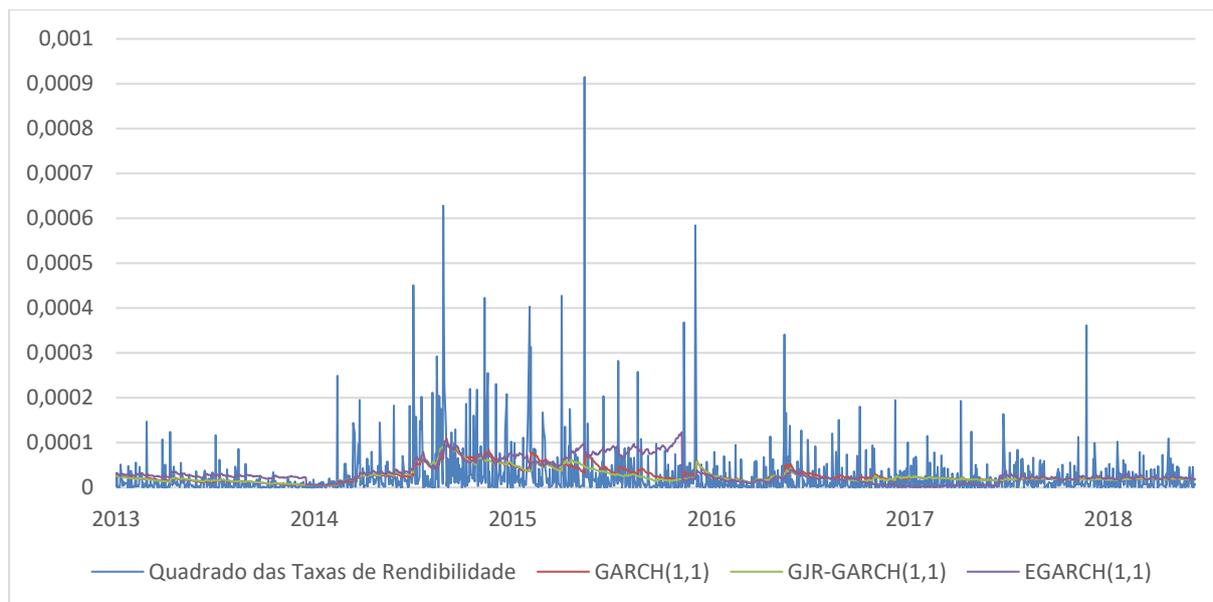


Figura 4.22 - Previsão com *rolling window* (650) para o EUR/USD

Para o par GBP/USD, o modelo GJR-GARCH(1, 1) apresentou o valor mais baixo na função de erro MAE para uma janela de estimação com 250 observações, como se pode verificar pela tabela seguinte.

Tabela 4.22 - Erros da Previsão Dinâmica para GBP/USD – *Rolling Window* (250)

	GARCH(1, 1)	GJR-GARCH(1, 1)	EGARCH(1, 1)
MAE	$3,8399 \times 10^{-5}$	$3,6513 \times 10^{-5}$	$3,8487 \times 10^{-5}$
MSE	$3,7520 \times 10^{-8}$	$3,7081 \times 10^{-8}$	$3,7363 \times 10^{-8}$
RMSE	$1,9370 \times 10^{-4}$	$1,9256 \times 10^{-4}$	$1,9330 \times 10^{-4}$

Os erros de previsão para as diferentes janelas temporais estão apresentados no apêndice II.

A figura seguinte apresenta um comparativo visual entre o quadrado das taxas de rendibilidade e as previsões obtidas por cada modelo.

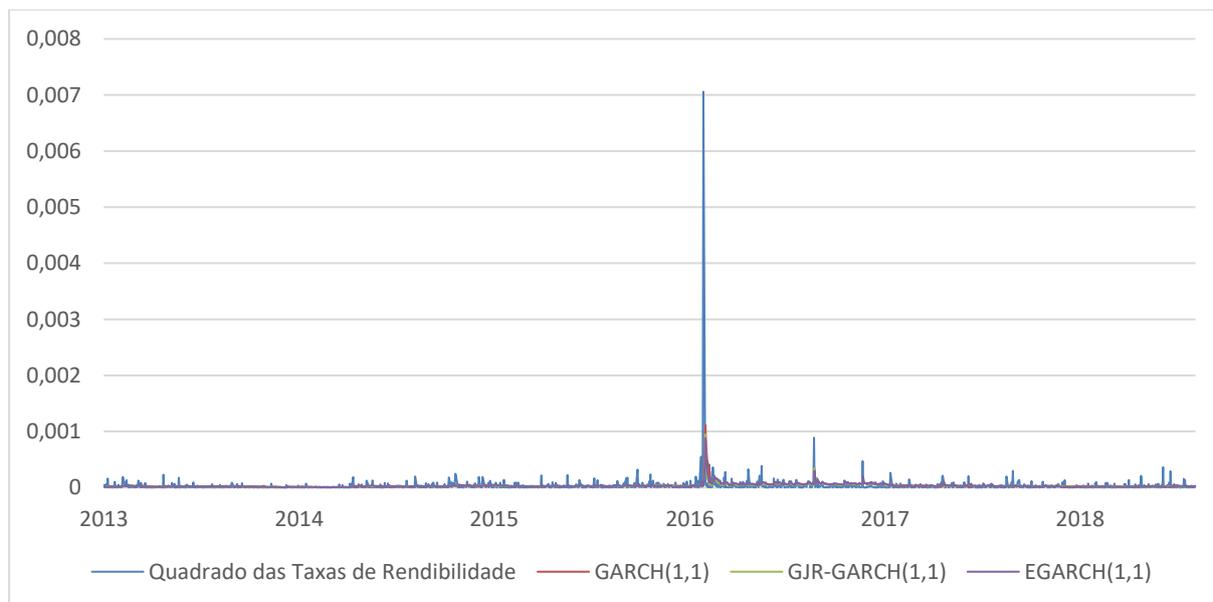


Figura 4.23 - Previsão com *rolling window* (250) para o GBP/USD

Com base nas funções de erro MSE e RMSE, para o mesmo par, o modelo EGARCH(1, 1) foi aquele que apresentou melhores resultados, com a utilização de uma *rolling window* com 450 observações. Os valores das *loss functions* encontram-se apresentados na tabela seguinte.

Tabela 4.23 - Erros da Previsão Dinâmica para GBP/USD – *Rolling Window* (450)

	GARCH(1, 1)	GJR-GARCH(1, 1)	EGARCH(1, 1)
MAE	$3,7894 \times 10^{-5}$	$3,8282 \times 10^{-5}$	$3,8062 \times 10^{-5}$
MSE	$3,7026 \times 10^{-8}$	$3,6974 \times 10^{-8}$	$3,6856 \times 10^{-8}$
RMSE	$1,9242 \times 10^{-4}$	$1,9229 \times 10^{-4}$	$1,9198 \times 10^{-4}$

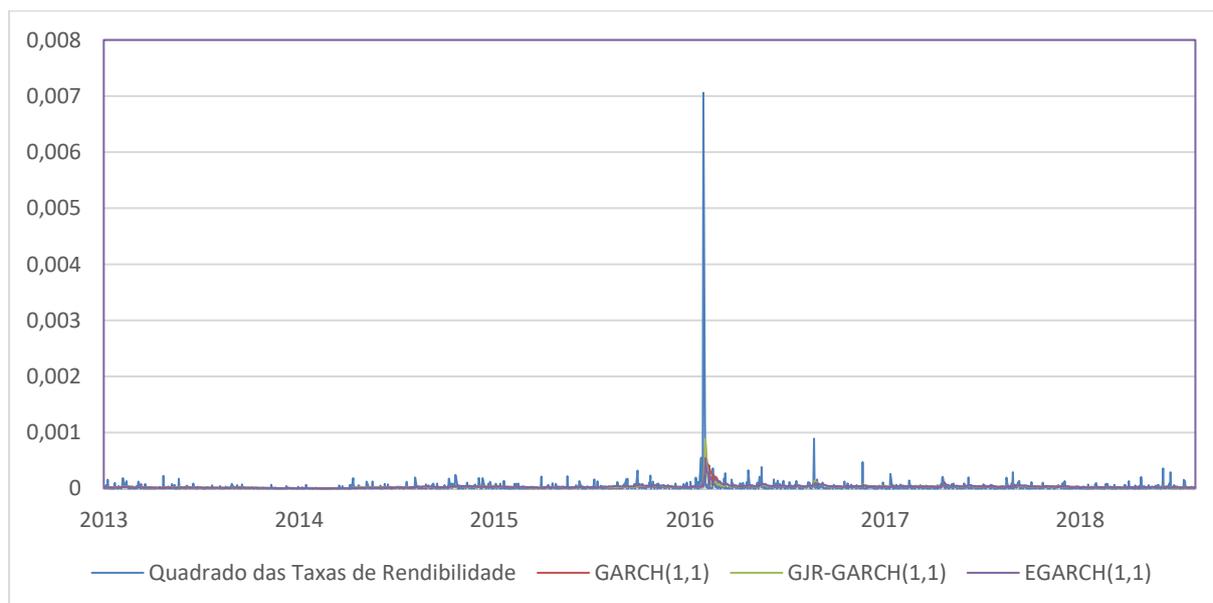


Figura 4.24 - Previsão com *rolling window* (450) para o GBP/USD

No caso do GBP/EUR, o modelo GARCH(1, 1) apresenta melhor poder de previsão, tendo em conta as funções de erro MSE e RMSE, quando a janela de estimação é constituída por 400 observações.

Tabela 4.24 - Erros da Previsão Dinâmica para GBP/EUR – *Rolling Window* (400)

	GARCH(1, 1)	GJR-GARCH(1, 1)	EGARCH(1, 1)
MAE	2,9193 x 10 ⁻⁵	2,9252 x 10 ⁻⁵	2,9755 x 10 ⁻⁵
MSE	1,0574 x 10 ⁻⁸	1,0625 x 10 ⁻⁸	1,1852 x 10 ⁻⁸
RMSE	1,0283 x 10 ⁻⁴	1,0308 x 10 ⁻⁴	1,0889 x 10 ⁻⁴

No apêndice III, encontram-se apresentados os erros de previsão para as várias janelas temporais.

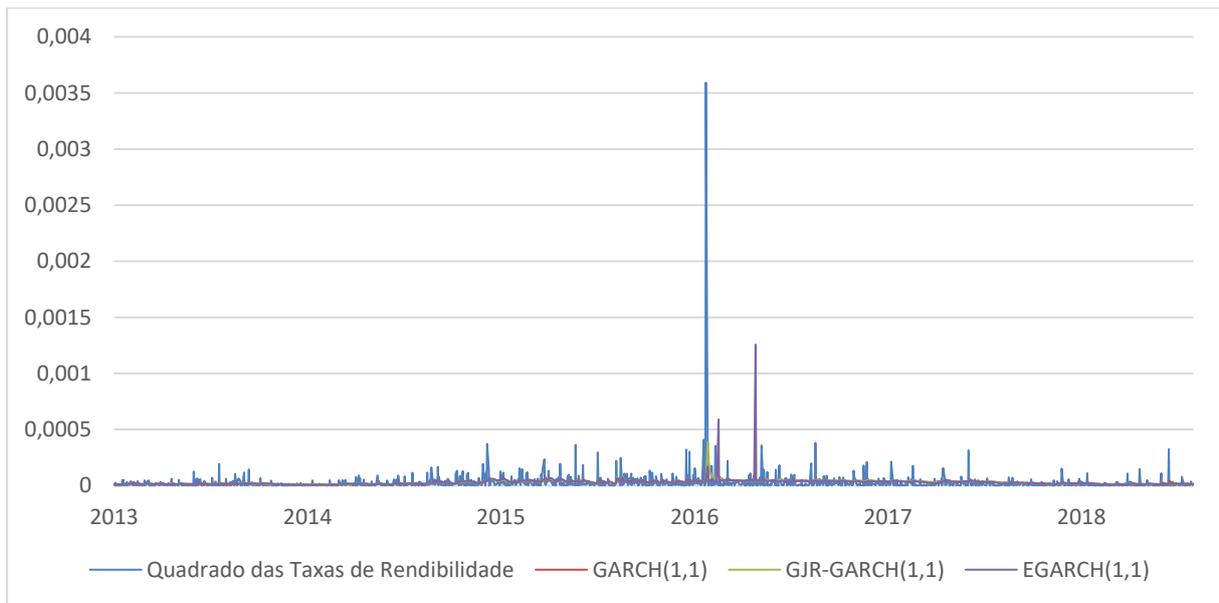


Figura 4.25 - Previsão com *rolling window* (400) para o GBP/EUR

A função de erro MAE indica, porém, que o modelo que mais se adequa é o EGARCH(1,1) para uma *rolling window* constituída por 1000 observações.

Tabela 4.25 - Erros da Previsão Dinâmica para GBP/EUR – *Rolling Window* (1000)

	GARCH(1, 1)	GJR-GARCH(1, 1)	EGARCH(1, 1)
MAE	$2,9105 \times 10^{-5}$	$2,9210 \times 10^{-5}$	$2,7991 \times 10^{-5}$
MSE	$1,0684 \times 10^{-8}$	$1,0834 \times 10^{-8}$	$1,0598 \times 10^{-8}$
RMSE	$1,034 \times 10^{-4}$	$1,0408 \times 10^{-4}$	$1,0294 \times 10^{-4}$

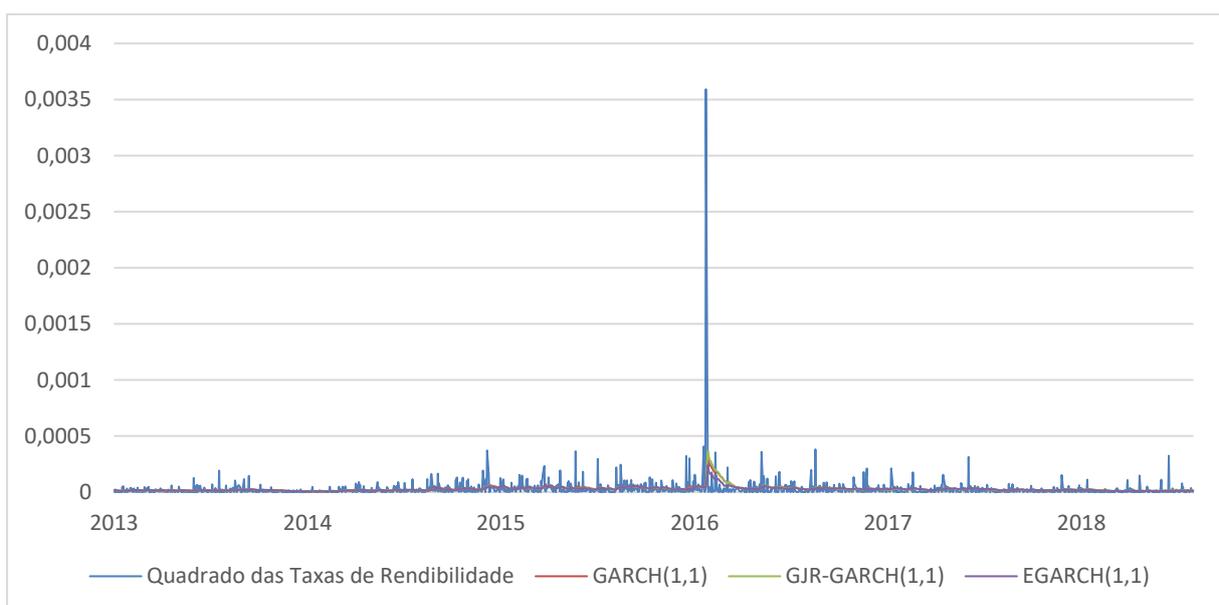


Figura 4.26 - Previsão com *rolling window* (1000) para o GBP/EUR

4.4.2.2. Expanding Windows

Tal como no caso das *rolling windows*, as janelas de estimação que apresentam melhores resultados são diferentes para cada par cambial.

Para o EUR/USD, a *expanding window* com 450 observações foi a que obteve melhor desempenho na avaliação das três funções de erro, sendo o modelo GJR -GARCH(1,1) o mais eficaz. Os resultados encontram-se apresentados na tabela seguinte.

Tabela 4.26 - Erros da Previsão Dinâmica para EUR/USD – *Expanding Window* (450)

	GARCH(1, 1)	GJR-GARCH(1, 1)	EGARCH(1, 1)
MAE	$2,7724 \times 10^{-5}$	$2,7257 \times 10^{-5}$	$2,7840 \times 10^{-5}$
MSE	$2,9994 \times 10^{-9}$	$2,9623 \times 10^{-9}$	$2,9693 \times 10^{-9}$
RMSE	$5,4767 \times 10^{-5}$	$5,4427 \times 10^{-5}$	$5,4491 \times 10^{-5}$

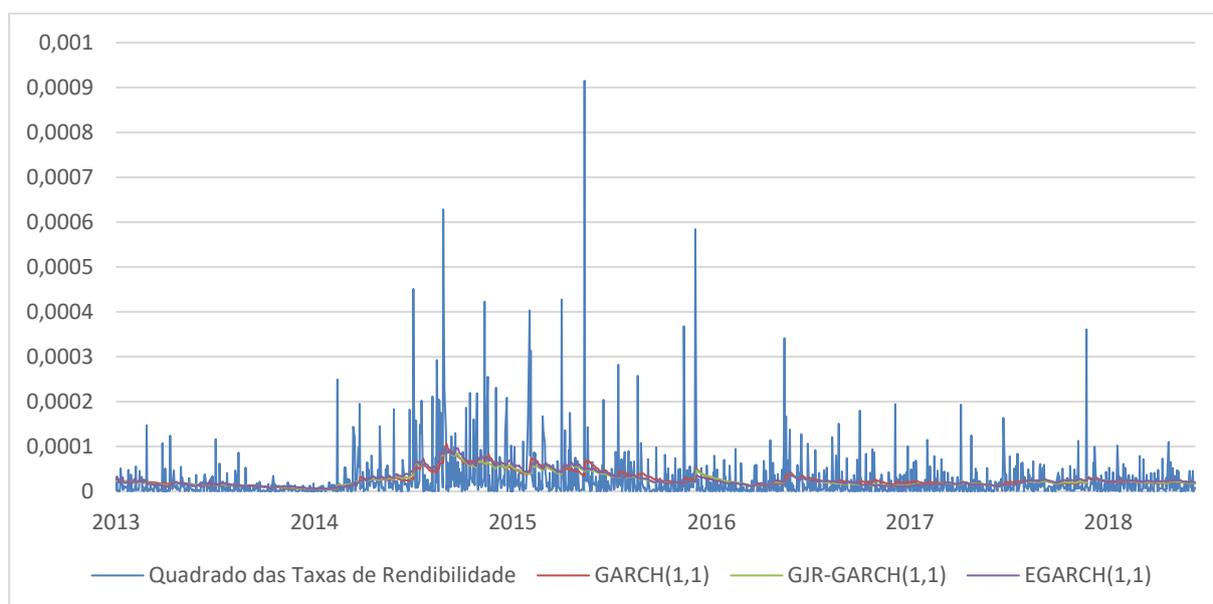


Figura 4.27 - Previsão com *expanding window* (450) para o EUR/USD

Os erros de previsão para as diferentes janelas temporais estão apresentados no apêndice IV.

Para o par GBP/USD, a *expanding window* com 950 observações define o modelo EGARCH(1, 1) como o melhor, tendo como base as funções de erro MSE e RMSE.

Tabela 4.27 - Erros da Previsão Dinâmica para GBP/USD – *Expanding Window* (950)

	GARCH(1, 1)	GJR-GARCH(1, 1)	EGARCH(1, 1)
MAE	$3,7436 \times 10^{-5}$	$4,0249 \times 10^{-5}$	$3,6060 \times 10^{-5}$
MSE	$3,7290 \times 10^{-8}$	$3,8407 \times 10^{-8}$	$3,6949 \times 10^{-8}$
RMSE	$1,9311 \times 10^{-4}$	$1,9598 \times 10^{-4}$	$1,9222 \times 10^{-4}$

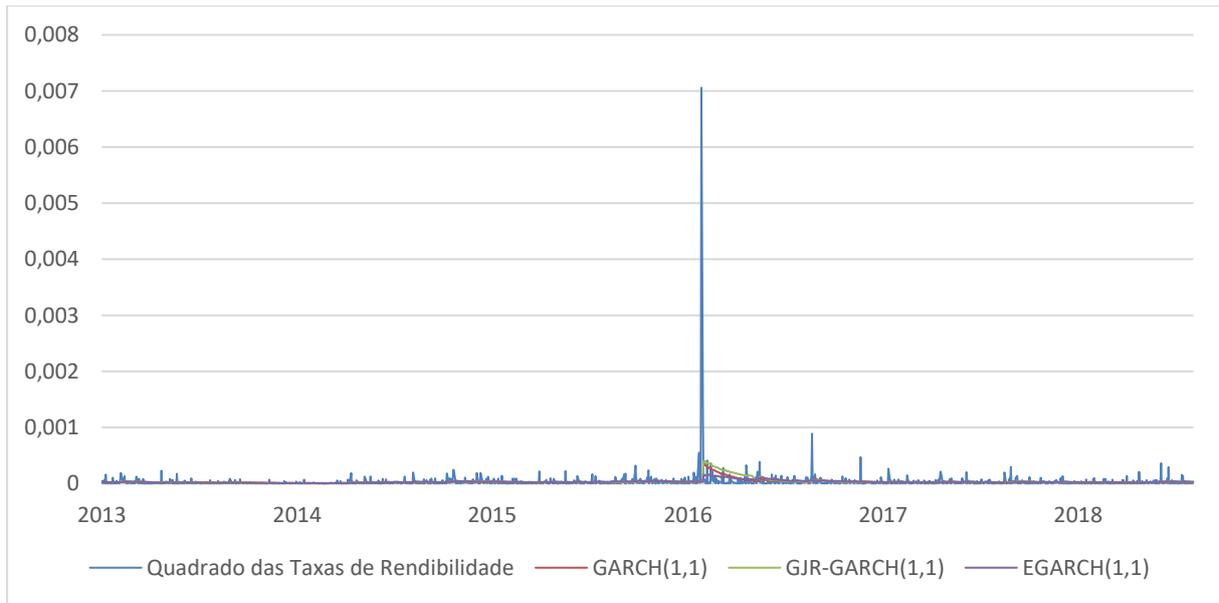


Figura 4.28 - Previsão com *expanding window* (950) para o GBP/USD

A função de erro MAE define também o EGARCH(1, 1) como o melhor modelo, mas para uma janela de estimação com 1000 observações, como consta na tabela seguinte. Os valores da função MAE não apresentam uma diferença significativa quando se comparam as janelas com 950 e 1000 observações.

Tabela 4.28 - Erros da Previsão Dinâmica para GBP/USD – *Expanding Window* (1000)

	GARCH(1, 1)	GJR-GARCH(1, 1)	EGARCH(1, 1)
MAE	$3,7434 \times 10^{-5}$	$4,0135 \times 10^{-5}$	$3,5936 \times 10^{-5}$
MSE	$3,7267 \times 10^{-8}$	$3,8277 \times 10^{-8}$	$3,6954 \times 10^{-8}$
RMSE	$1,9305 \times 10^{-4}$	$1,9565 \times 10^{-4}$	$1,9223 \times 10^{-4}$

No apêndice V, encontram-se apresentados os erros de previsão para as várias janelas temporais.

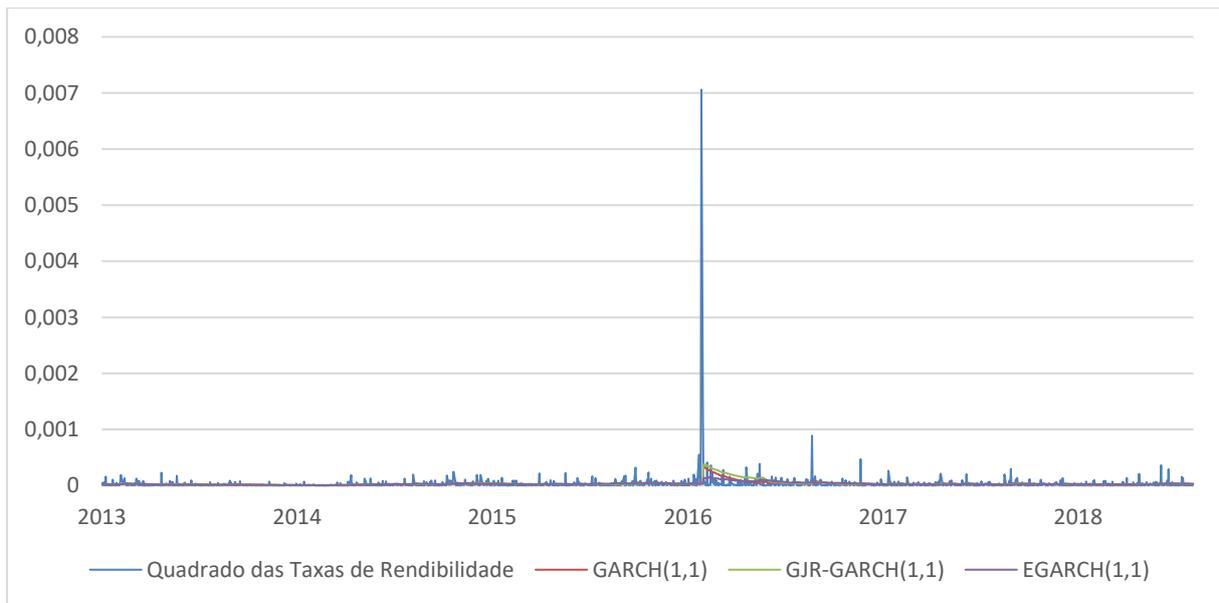


Figura 4.29 - Previsão com *expanding window* (1000) para o GBP/USD

A função de erro MAE indica que o melhor modelo para efetuar as previsões para o par GBP/EUR é o EGARCH(1, 1) para uma janela de estimação com 250 observações, como mostra a tabela seguinte.

Tabela 4.29 - Erros da Previsão Dinâmica para GBP/EUR – *Expanding Window* (250)

	GARCH(1, 1)	GJR-GARCH(1, 1)	EGARCH(1, 1)
MAE	$2,8699 \times 10^{-5}$	$2,9269 \times 10^{-5}$	$2,7748 \times 10^{-5}$
MSE	$1,0781 \times 10^{-8}$	$1,1015 \times 10^{-8}$	$1,0684 \times 10^{-8}$
RMSE	$1,0383 \times 10^{-4}$	$1,0495 \times 10^{-4}$	$1,0336 \times 10^{-4}$

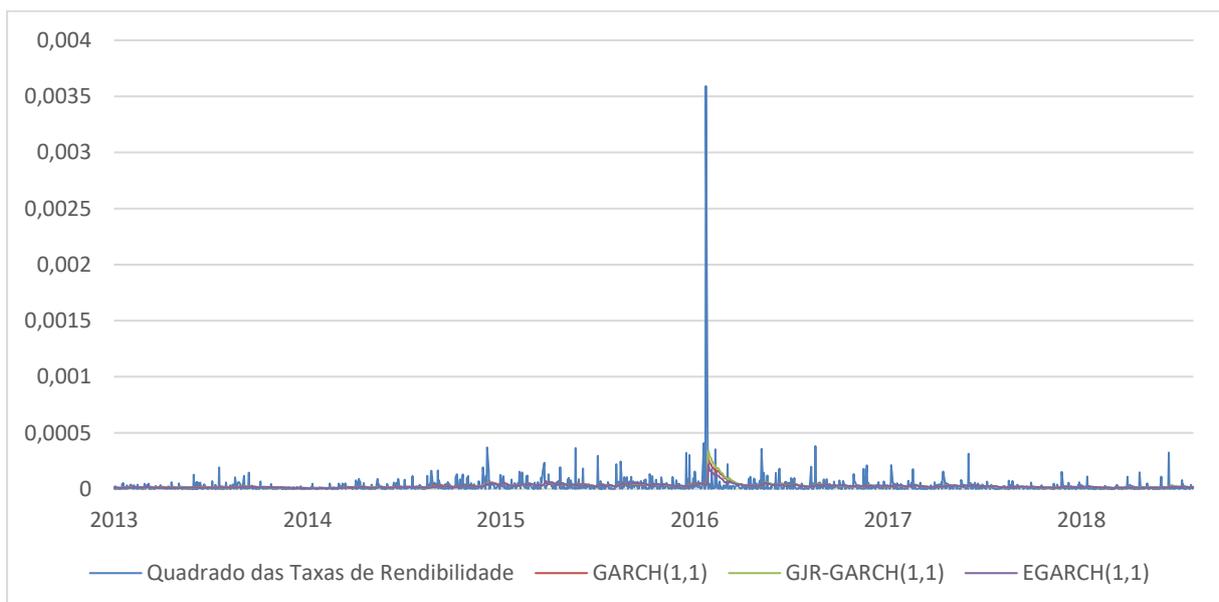


Figura 4.30 - Previsão com *expanding window* (250) para o GBP/EUR

Analisando as funções MSE e RMSE, verifica-se que o modelo EGARCH(1, 1) é o mais adequado, mas para uma janela de estimação com 950 observações. Verifica-se pela tabela seguinte que os valores não diferem muito dos calculados para a janela com 250 observações.

Tabela 4.30 - Erros da Previsão Dinâmica para GBP/EUR – *Expanding Window* (950)

	GARCH(1, 1)	GJR-GARCH(1, 1)	EGARCH(1, 1)
MAE	$2,8911 \times 10^{-5}$	$2,9442 \times 10^{-5}$	$2,7917 \times 10^{-5}$
MSE	$1,0733 \times 10^{-8}$	$1,0885 \times 10^{-8}$	$1,0610 \times 10^{-8}$
RMSE	$1,0360 \times 10^{-4}$	$1,0433 \times 10^{-4}$	$1,0300 \times 10^{-4}$

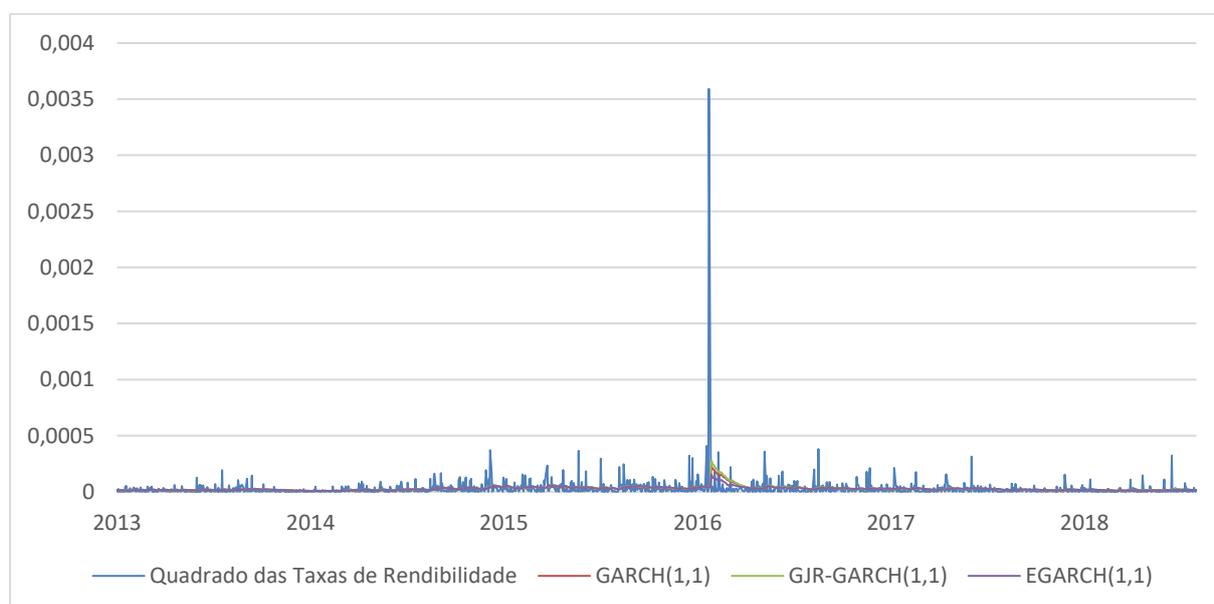


Figura 4.31 - Previsão com *expanding window* (950) para o GBP/EUR

Os erros de previsão para as diferentes janelas temporais estão apresentados no apêndice VI.

4.4.3. Comparação Final

Tendo como base as *loss functions* calculadas, é possível aferir qual o método de previsão que apresenta melhores resultados. As tabelas abaixo permitem concluir que a previsão estática apresenta menores erros pelo que será o método mais adequado. Este facto pode ser justificado pela memória longa dos mercados, dado que, para este método, a totalidade dos dados *in sample* foi utilizada para realizar a previsão, enquanto para a previsão dinâmica com *rolling* e *expanding windows* apenas uma parte dos dados foi utilizada.

Nas tabelas seguintes, encontram-se apresentadas as comparações entre os dois tipos de previsão, tendo em conta os modelos mais adequados obtidos anteriormente.

Tabela 4.31 - Comparação de métodos de previsão para o EUR/USD

	Previsão Estática		Previsão Dinâmica	
			<i>Rolling window 650</i>	<i>Expanding window 450</i>
	GARCH(1, 1)	EGARCH(1, 1)	GJR-GARCH(1, 1)	GJR-GARCH(1, 1)
MAE	-	$2,6973 \times 10^{-5}$	$2,7212 \times 10^{-5}$	$2,7257 \times 10^{-5}$
MSE	$2,7855 \times 10^{-9}$	-	$2,9553 \times 10^{-9}$	$2,9623 \times 10^{-9}$
RMSE	$5,2778 \times 10^{-5}$	-	$5,4362 \times 10^{-5}$	$5,4427 \times 10^{-5}$

Tabela 4.32 - Comparação de métodos de previsão para o GBP/USD

	Previsão Estática		Previsão Dinâmica			
			<i>Rolling window 250</i>	<i>Rolling window 450</i>	<i>Expanding window 950</i>	<i>Expanding window 1000</i>
	GJR-GARCH(1, 1)	EGARCH(1, 1)	GJR-GARCH(1, 1)	EGARCH(1, 1)	EGARCH(1, 1)	EGARCH(1, 1)
MAE	-	$3,3642 \times 10^{-5}$	$3,6513 \times 10^{-5}$	-	-	$3,5936 \times 10^{-5}$
MSE	$3,3630 \times 10^{-8}$	-	-	$3,6856 \times 10^{-8}$	$3,6949 \times 10^{-8}$	-
RMSE	$1,8339 \times 10^{-4}$	-	-	$1,9198 \times 10^{-4}$	$1,9222 \times 10^{-4}$	-

Tabela 4.33 - Comparação de métodos de previsão para o GBP/EUR

	Previsão Estática		Previsão Dinâmica			
			<i>Rolling window 400</i>	<i>Rolling window 1000</i>	<i>Expanding window 250</i>	<i>Expanding window 1000</i>
	GARCH(1, 1)	EGARCH(1, 1)	GARCH(1,1)	EGARCH(1, 1)	EGARCH(1, 1)	EGARCH(1, 1)
MAE	-	$2,6428 \times 10^{-5}$	-	$2,7991 \times 10^{-5}$	$2,7748 \times 10^{-5}$	-
MSE	$9,6557 \times 10^{-9}$	-	$1,0574 \times 10^{-8}$	-	-	$1,0610 \times 10^{-8}$
RMSE	$9,8263 \times 10^{-5}$	-	$1,0283 \times 10^{-4}$	-	-	$1,0300 \times 10^{-4}$

Pelas tabelas apresentadas verifica-se que para os pares EUR/USD e GBP/EUR, os modelos com melhor poder de previsão são o GARCH(1, 1) e o EGARCH(1, 1), enquanto para o GBP/USD aqueles que obtêm melhores são os modelos GJR-GARCH(1, 1) e EGARCH(1, 1).

5. Conclusões e Linhas de Investigação Futuras

5.1. Conclusões

As taxas de câmbio (TC) apresentam-se, nos dias de hoje, como fatores de grande relevância nos contextos comercial, político e económico. Podem ser consideradas um fator de risco para empresas que desenvolvem a sua atividade em mercados internacionais.

Nas últimas décadas, têm sido desenvolvidos vários trabalhos que se baseiam no estudo da evolução das TC. A previsão da variação das TC tem se mostrado muito desafiante, tendo em conta as diversas dificuldades inerentes às variáveis envolvidas, nomeadamente, as políticas, as económicas, a incerteza, a psicologia de mercado e as mudanças de ciclo.

O modelo que hoje em dia serve de base e que tem sido alvo de tentativas de superação é o modelo do Passeio Aleatório, mais conhecido como Random Walk. Este modelo defende que as cotações dos ativos financeiros não seguem um padrão, nem apresentam nenhuma relação com as variações passadas.

Os modelos ARIMA (Box & Jenkins, 1970) e ARCH (Engle, 1982) têm sido os mais utilizados para contrariar o modelo do Passeio Aleatório.

Dado que os modelos ARIMA apresentam certas limitações, tais como a não inclusão da volatilidade inerente aos ativos financeiros, estes são frequentemente complementados pelos modelos ARCH.

Diebold (1988), desenvolveu um dos trabalhos com maior relevância, no qual comprova a existência de efeitos ARCH em vários pares cambiais.

Os modelos ARMA-GARCH foram alvo de estudo em vários pares cambiais, não apresentando sempre aplicabilidade consensual.

Outros modelos têm vindo a ganhar mais força e importância na previsão da variação de ativos financeiros, nomeadamente os modelos ANN (Artificial Neural Networks).

No estudo empírico realizado no presente trabalho foi primeiramente confirmada a não-estacionaridade das séries temporais dos pares em estudo, de forma visual e por meio dos testes ADF, KPSS e PP. Para que o modelo ARIMA seja aplicável, é necessária uma série

estacionária, e, assim sendo, foi efetuada a primeira diferenciação da série temporal, tendo sido obtidas as taxas de rendibilidade (que são estacionárias).

As taxas de rendibilidade foram sujeitas a uma análise estatística, que revelou um excesso de curtose (uma vez que apresentam uma leptocurtose) e uma distribuição assimétrica. Aplicando o teste de Jarque-Bera, fazendo análises gráficas do histograma e da curva normal e de *QQ-plots*, verificou-se a não-existência de normalidade nas taxas de rendibilidade, estando estas mais próximas de uma distribuição *t-student*.

Após execução da análise da normalidade, foram aplicadas as funções de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP), que demonstraram que as taxas de rendibilidade seguiam um processo de ruído branco, em que não existe correlação ao longo do tempo entre os termos de u_t .

As ordens dos termos p e q igual a zero foram confirmadas usando as medidas de bondade BIC e AIC, para os vários modelos ARMA dos três pares.

A presença de heteroscedasticidade foi confirmada pela aplicação da FAC, pelo teste de Ljung-Box e o Multiplicador de Lagrange ao quadrado dos resíduos das taxas de rendibilidade, corroborando, assim, o trabalho desenvolvido por Diebold (1988).

Os modelos GARCH e as variantes de ordem (1, 1) foram escolhidos por se apresentarem como os mais fiáveis no que diz respeito a resultados.

Os parâmetros dos modelos ARMA-GARCH foram calculados pelo método da Máxima Verossimilhança, com recurso ao *software* R.

O cálculo dos parâmetros dos modelos permitiu perceber o efeito de persistência da volatilidade nos três pares cambiais, bem como o facto das más notícias terem um impacto maior do que as boas notícias, isto para as variantes EGARCH e GJR-GARCH.

Verificou-se que os modelos estimados conseguiram captar com sucesso os efeitos ARCH através do teste de Ljung-Box.

Pelas medidas de bondade (BIC e AIC) foi escolhido o modelo que melhor se ajustava a cada par cambial, ou seja, aquele que melhor conseguia captar a dependência nas taxas de rendibilidade. Para os pares EUR/USD e GBP/USD, o modelo ARMA(0, 0)-GARCH(1, 1) foi

aquele que obteve melhor resultado, enquanto para o GBP/EUR, o modelo ARMA(0, 0)-GJR-GARCH(1, 1) mostrou ser o mais apropriado de acordo com o BIC.

Não se verificou sintonia entre as medidas de bondade do ajustamento quanto ao modelo que melhor se ajusta às taxas de rendibilidade.

Concluída a estimação dos modelos, foram analisados os resíduos estandardizados que mostraram ainda um excesso de curtose. A normalidade foi rejeitada.

Cont (2001) e Epaphra (2017) confirmaram nos seus trabalhos que as séries temporais de ativos financeiros gozam de certas propriedades comuns a que os autores designaram factos estilizados.

Os resultados do estudo empírico corroboram a grande maioria dos factos estilizados apresentados pelos autores anteriormente citados. Nos três pares foram, então, verificadas as seguintes propriedades:

- inexistência de autocorrelações lineares das cotações;
- existência de abas pesadas;
- maior amplitude das perdas quando comparada com a amplitude dos ganhos;
- intermitência das taxas de rendibilidade;
- *clustering* de volatilidade;
- existência de abas pesadas nos resíduos estandardizados dos modelos estimados;
- decadência lenta da autocorrelação das taxas de rendibilidade absolutas;
- efeito de alavancagem;
- não-estacionaridade das séries temporais das taxas de câmbio;
- estacionaridade das taxas de rendibilidade.

Apenas três factos estilizados não foram verificados:

- *Aggregational Gaussity*, por não terem sido estudadas outras escalas temporais de maior amplitude;
- Correlação Volume/Volatilidade, por não ter sido analisado o volume negociado dos pares cambiais;
- Assimetria nas escalas temporais, por não terem sido estudadas outras escalas temporais.

A última fase deste trabalho teve o objetivo de avaliar os modelos com base no poder de previsão dos modelos. Foram realizados dois tipos de previsão, estático e dinâmico, em que a primeira apresentou melhor desempenho.

Tendo em conta as *loss functions*, os modelos que, de um modo global, apresentam melhores resultados são o GARCH(1, 1) e EGARCH(1, 1) para os pares EUR/USD e GBP/EUR, enquanto para o GBP/USD os modelos GJR-GARCH(1, 1) e EGARCH(1, 1) aparentam ser os mais adequados. As *loss functions* demonstraram, no entanto, resultados diferentes, verificando-se normalmente uma divergência entre o MAE e o MSE e RMSE.

Uma vez que os dados utilizados para realizar a análise dinâmica são mais recentes relativamente ao período de previsão, não tendo em conta ciclos passados, era expectável a obtenção de melhores resultados quando esta fosse comparada com a análise estática.

Esperava-se também que o modelo EGARCH ou o GJR-GARCH apresentassem melhores resultados do que o modelo GARCH, visto terem em conta a assimetria nas séries temporais em que o impacto dos choques positivos e negativos é diferente.

O insucesso das *rolling* e *expanding windows* poderá estar relacionado com a memória longa dos mercados financeiros, dado que o método estático demonstrou ser mais eficaz devido à quantidade de informação que engloba.

Com o estudo empírico foi possível verificar que não existe uma janela de estimação ótima que se possa aplicar a todos os pares cambiais. Não é possível, também, afirmar que determinado modelo é mais eficaz do que os outros.

Verifica-se ainda que os modelos que melhor se ajustam às taxas de rendibilidade e que têm maior capacidade preditiva, são os mesmos, porém este facto nem sempre se verifica.

Analisando o exposto, conclui-se que os modelos ARMA-GARCH utilizados para a modelação da volatilidade das taxas de câmbio, conseguem captar as propriedades mais importantes destes ativos financeiros, estando posteriormente refletidas na fase de previsão.

5.2. Linhas de Investigação Futuras

O presente trabalho incidiu essencialmente na aplicação do modelo ARMA-GARCH e variantes em apenas três pares cambiais importantes no mundo dos mercados financeiros, porém, muitos mais existem, tais como o USD/JPY, o EUR/JPY ou ainda o USD/CHF e o EUR/CHF que consideramos constituírem um interessante alvo de estudo para futuras investigações.

Dada a dificuldade em encontrar na literatura a aplicação dos métodos dinâmicos com recurso a *rolling* e *expanding windows*, sugere-se um aprofundamento do estudo destes métodos com alteração de certas variáveis ou com o ajuste da dimensão das janelas de estimação.

Os modelos desenvolvidos neste trabalho assentaram numa distribuição *t-student*, pelo que se sugere a aplicação dos modelos ARMA-GARCH com base em outras distribuições tais como a de Pareto Estável.

Outra linha de investigação, que poderá ser interessante seguir, será a da aplicação de modelos ANN aos pares cambiais estudados realizando posteriormente uma comparação com os modelos ARMA-GARCH.

BIBLIOGRAFIA

- Abraham, B., & Ledolter, J. (1983). Forecast functions implied by autoregressive integrated moving average models and other related forecast procedures. *International Statistical Review*, 54, 51-66.
- Adebiyi., A. A., Adewumi, A. O., & Ayo, C. K. (2014). Stock Price Prediction Using the ARIMA Model. *16th International Conference on Computer Modelling and Simulation* (pp. 1-7). Cambridge, United Kingdom: IEEE.
- Alvarez-Diaz, M., Bissoondeal, R., Binner, J., Bhuruth, M., Gazely, A., & Mootanah, V. (2008). Forecasting exchange rates with linear and non linear models. *Applied Economics*, 40, 1969-1984.
- Balance, T. (16 de Novembro de 2017). *The Balance*. Obtido de <https://www.thebalance.com/bretton-woods-system-and-1944-agreement-3306133>
- Banco de Portugal. (16 de Novembro de 2017). *Banco de Portugal*. Obtido de <http://clientebancario.bportugal.pt/pt-PT/TaxasJuroCambio/Taxasdecambio/PerguntasFrequentes/Paginas/default.aspx>
- Bissoondeal, R. K., Karoglou, M., & Gazely, A. M. (2011). Forecasting the UK/US exchange rate with divisia monetary models and neural networks. *Scottish Journal of Political Economy*, 58 (1), 127-152.
- Bollerslev, T. P. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31 (3), 307–327.
- Bollerslev, T., & Wooldridge, J. M. (1992). Quasi maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time varying covariances. *Econometric Reviews*, 11, 143–172.
- Bollerslev, T., Chou, R. Y., & Kroner, K. F. (1992). ARCH modeling in finance: a review of the theory and empirical evidence. *Journal of Econometrics*, 52, 5-59.
- Box, G., & Jenkins, G. (1970). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. San Francisco: Holden Day.
- Brace, M., Schmidt, J., & Hadlin, M. (1991). Comparison of the forecasting accuracy of neural networks with other established techniques. *Proceedings of the First Forum on Application for Weight Elimination* (pp. 31-35). Seattle, WA: IEEE Transactions on Neural Networks of Neural Networks to Power Systems.
- Brooks, C. (2008). *Introductory Econometrics for Finance. 2nd Edition*. Cambridge.

- Bunjaku, B., & Näsholm, A. (2010). Forecasting Volatility - A comparison study of model based forecasts and implied volatility. Master Thesis, Lund University
- Caraiani, P. (2017). Evaluating exchange rate forecasts along time and frequency. *International Review of Economics and Finance*, 60-81.
- Castillo-Maldonado, C. E., & Pérez-Macal, F. (2013). Assessment of models to forecast exchange rates: the Quetzal-U.S. Dollar exchange rate. *Journal of Applied Economics*, 71-99.
- Cheung, Y.-W. (1993). Long Memory in Foreign-Exchange Rates. *Journal of Business & Economic Statistics*, 11 (1), 93-101.
- Cížek, P., Härdle, W., & Weron, R. (1 de Dezembro de 2017). *Research Data Center*. Obtido de ARCH and GARCH Models: http://sfb649.wiwi.hu-berlin.de/fedc_homepage/xplore/tutorials/sfehtmlnode66.html
- Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance, Volume I*, 223–236.
- Costa, F. (2017). Forecasting Volatility using GARCH models. Master Thesis. Univesity of Minho
- Curto, J. D. (2003). Modelação das taxas de rendibilidade: estudo comparativo dos mercados de capitais português, alemão e norte-americano. Tese de Doutoramento, ISCTE
- Curto, J. D. (Fevereiro de 2017). Forecasting Methods. *Folhas das Aulas Teóricas*. Lisboa.
- Curto, J. D., Pinto, J. C., & Tavares, G. N. (2007). Modeling stock markets' volatility using GARCH models with Normal, Student's t and stable Paretian distributions. *Statistical Papers*, 311-321.
- Darbellay, G., & Slama, M. (2000). Forecasting the short-term demand for electricity: Do neural networks stand a better chance? *International Journal of Forecasting*, 16, 71–83.
- Denton, J. (1995). How good are neural networks for causal forecasting? *The Journal of Business Forecasting*, 14 (2), 17-20.
- Diebold, F. X. (1988). *Empirical Modeling of Exchange Rate Dynamics*. Washington DC, EUA: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of the United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50, 987–1008.
- Engle, R. F. (1982). Estimates of the Variance of US Inflation Based on the ARCH Model. *Journal of Money, Credit and Banking*, 15, 286-301.

- Engle, R. F., Lillien, D. M., & R. P. Robins. (1987). Estimating Time-Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model. *Econometrica*, 55 (2), 391-407.
- Epaphra, M. (2017). Modeling Exchange Rate Volatility: Application of the GARCH and EGARCH Models. *Journal of Mathematical Finance*, 7, 121-143.
- Fama, E. F. (1965). Random Walks In Stock Market Prices. *Financial Analysts Journal*, 55-59.
- Foster, W., Collopy, F., & Ungar, L. (1992). Neural network forecasting of short, noisy time series. *Computers and Chemical Engineering*, 16 (4), 292-297.
- Galeshchuk, S. (2015). Neural networks performance in exchange rate prediction. *Neurocomputing*, 1-7.
- Garcin, M. (2017). Estimation of time-dependent Hurst exponents with variational smoothing and application to forecasting foreign exchange rates. *Physica A*, 1-29.
- Glosten, L., Jagannathan, R., & Runkle, D. (1993). On the relation between expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of Finance*, 48, 1779-1801.
- Gooijer, J. G., & Hyndman, R. J. (2006). 25 Years of Time Series Forecasting. *International journal of forecasting*, 22 (3), 443-473.
- Guha, B., & Bandyopadhyay, G. (2016). Gold Price Forecasting Using ARIMA Model. *Journal of Advanced Management Science*, 4 (2), 117-121.
- Gurusen, E., G., K., & Daim, T. (2011). Using artificial neural network model in stock market index prediction. *Expert Systems with Applications*, 40 (6), 10389-10397.
- Hann, T., & Steurer, E. (1996). Much ado about nothing? Exchange rate forecasting: neural networks vs. linear models using monthly and weekly data. *Neurocomputing*, 10, 323-339.
- Iglesias, E. M., & Phillips, G. D. (2012). Estimation, Testing, and Finite Sample Properties of Quasi-Maximum Likelihood Estimators in GARCH-M Models. *Econometric Reviews*, 31 (5), 532-557.
- Isenah, G. M., & Olusanya, E. (2014). Forecasting Nigerian Stock Market Returns Using Arima and Artificial Neural Network Models. *CBN Journal of Applied Statistics*, 5 (2), 25-48.
- Ishizaki, R., & Inoue, M. (2017). ime-series analysis of multiple foreign exchange rates using time-dependent pattern entropy. *Physica A*, 1-17.
- Ismailov, A., & Rossi, B. (2017). Uncertainty and Deviations from Uncovered Interest Rate Parity. *Journal of International Money and Finance*.
- Jarret, J. E., & Kyper, E. (2011). ARIMA Modeling With Intervention to Forecast and Analyze Chinese Stock Prices. *International Journal of Engineering Business Management*, 3 (3), 53-58.

- Jena, P. R., Majhi, R., & Majhi, B. (2015). Development and performance evaluation of a novel knowledge guided artificial neural network (KGANN) model for exchange rate prediction. *Journal of King Saud University – Computer and Information Sciences*, 27, 450-457.
- Jensen, S. T., & Rahbek, A. (2004). Asymptotic normality of the QMLE of ARCH in the nonstationary case. *Econometrica*, 72 (2), 641–646.
- Khashei, M., & Bijari, M. (2011). A novel hybridization of artificial neural networks and ARIMA models for time series forecasting. *Applied Soft Computing*, 11, 2664–2675.
- Khashei, M., Bijari, M., & Ardali, G. A. (2009). Improvement of auto-regressive integrated moving average models using fuzzy logic and artificial neural networks (ANN). *Neurocomputing*, 73, 956-967.
- Kim, J. H. (2003). Forecasting autoregressive time series with bias-corrected parameter estimators. *International Journal of Forecasting*, 19, 493–502.
- Lam, M. (2004). Neural network techniques for financial performance prediction: integrating fundamental and technical analysis. *Decision Support Systems*, 37 (4), 567-581.
- Landsman, W., & Damodaran, A. (1989). A comparison of quarterly earnings per share forecast using James-Stein and unconditional least squares parameter estimators. *International Journal of Forecasting*, 5, 491-500.
- Latorre, M. d., & Cardoso, M. R. (2001). Análise de séries temporais em epidemiologia: uma introdução sobre os aspectos metodológicos. *Revista Brasileira de Epidemiologia*, 4 (3), 145-152.
- Laurent, S. (2002). G@RCH 2.2: An Ox Package for Estimating and Forecasting Various ARCH Models. *Journal of Economic Surveys*, 16 (3), 447-485.
- Majhi, B., Rout, M., Majhi, R., Panda, G., & Fleming, P. J. (2012). New robust forecasting models for exchange rates prediction. *Expert Systems with Applications*, 39, 12658–12670.
- Malkiel, B. G. (1973). *A Random Walk Down Wall Street*. W.W. Norton & Company, Inc.
- Meese, R., & Rogoff, K. (1983). Empirical Exchange Rate Models of the Seventies: Do They Fit Out of Sample? *Journal of International Economics*, 3-24.
- Meese, R., & Rogoff, K. (1988). Was it Real? The Exchange Rate-Interest Differential Relation Over the Modern Floating-Rate. *The Journal of Finance*, 933-948.
- Meyler, A., Kenny, G., & Quinn, T. (1998). *Forecasting Irish Inflation Using Arima Model*. Central Bank and Financial Services Authority of Ireland.

- Mondal, P., Shit, L., & Goswami, S. (2014). Study on Effectiveness of Time Series Modelling (Arima) in Stock Prices. *International Journal of Computer Science, Engineering and Applications*, 4 (2), 13-29.
- Muth, J. F. (1960). Optimal properties of exponentially weighted forecasts. *Journal of the American Statistical Association*, 299-306.
- Nakatsuma, T., & Tsurumi, H. (1999). Bayesian Estimation of ARMA-GARCH Model of Weekly Foreign Exchange Rates. *Asia-Pacific Financial Markets*, 6, 71-84.
- Nau, R. (30 de Novembro de 2017). *ARIMA models for time series forecasting*. Obtido de Statistical forecasting: notes on regression and time series analysis: <https://people.duke.edu/~rnau/411arim.htm>
- Nau, R. (10 de Novembro de 2017). *Random Walk Model*. Obtido de Statistical forecasting: notes on regression and time series analysis: <https://people.duke.edu/~rnau/411rand.htm>
- Nelson, D.B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach. *Econometrica* 59 (2), 347–370.
- Newaz, M. (2008). Comparing the performance of time series models for forecasting exchange rate. *BRAC University Journal*, V (2), 55-65.
- Ngan, T. M. (2016). Forecasting Foreign Exchange Rate by using ARIMA Model: A Case of VND/USD Exchange Rate. *Research Journal of Finance and Accounting*, 7 (12), 1-7.
- Nwankwo, S. C. (2004). Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA) Model for Exchange Rate (Naira to Dollar). *Academic Journal of Interdisciplinary Studies*, 3 (4), 429-433.
- Nwogugu, M. (2006). Further critique of GARCH/ARMA/VAR/EVT Stochastic-Volatility models and related approaches. *Applied Mathematics and Computation*, 182, 1735-1748.
- Önder, E., Firat, B., & Hepşen, A. (2013). Forecasting macroeconomic variables using artificial neural network and traditional smoothing techniques. *Journal of Applied Finance and Banking*, 3 (4), 3-104.
- Orabi, M. M., & Saymeh, A. A. (2012). Effect of Interest, Moving Average, and Historical Volatility in Forecasting Exchange Prices of Major International Currencies. *International Journal of Economics and Finance*, 4 (5), 246-253.
- Pahlavani, M., & Roshan, R. (2015). The Comparison among ARIMA and hybrid ARIMA-GARCH Models in Forecasting the Exchange Rate of Iran. *International Journal of Business and Development Studies*, 7 (1), 31-50.
- Poon, S., Granger, C. W. J. (2003). Forecasting Volatility in Financial Markets: A Review. *Journal of Economic Literature*, Vol. 41 (2), 478-539

- Ramzan, S., Ramzan, S., & Zahid, F. M. (2012). Modeling and Forecasting Exchange Rate Dynamics in Pakistan using Arch Family of Models. *Electronic Journal of Applied Statistical Analysis*, 5 (1), 15-29.
- Remiro, R. K. (2008). Introduction to time series. *Heterocedastic Models - Folhas das aulas*.
- Roberts, S. (1982). A general class of Holt-Winters type forecasting models. *Management Science*, 28, 808-820.
- Rojas, I., Valenzuela, O., Rojas, F., Guillén, A., Herrera, L. J., Pomares, H., . . . Pasadas, M. (2008). Soft-computing techniques and ARMA model for time series prediction. *Neurocomputing*, 71 (4–6), 519-537.
- Rossi, B. (2013). Exchange rate predictability. *Journal of Economic Literature*, 1063-1119.
- Rout, M., Majhi, B., Majhi, R., & Panda, G. (2013). Forecasting of currency exchange rates using an adaptive ARMA model with differential evolution based training. *Journal of King Saud University – Computer and Information Sciences*, 1-12.
- Taskaya, T., & Casey, M. (2005). A comparative study of autoregressive neural network hybrids. *Neural Networks*, 18, 781–789.
- Thinnyane, H., & Millin, J. (2011). An investigation into the use of intelligent systems for trading. *Computational Economics*, 37 (4), 363–374.
- Thorlie, M. A., Song, L., Wang, X., & Amin, M. (2014). Modelling Exchange Rate Volatility Using Asymmetric GARCH Models (Evidence from Sierra Leone). *International Journal of Science and Research*, 3 (11), 1206-1214.
- Wang, W., Guo, Y., Niu, Z., & Cao, Y. (2009). Stock Indices Analysis Based on ARMA-GARCH Model. *Proceedings of the 2009 IEEE IEEM* (pp. 1-5). Hong Kong, China: IEEE.
- Wiphatthanananthakul, C., & Sriboonchitta, S. (2010). The Comparison among ARMA-GARCH, -EGARCH, -GJR, and -PGARCH models on Thailand Volatility Index. *The Thailand Econometrics Society*, 2 (2), 140-148.
- Wu, J. C. (2011). Prediction of hourly solar radiation using a novel hybrid model of ARMA and TDNN. *Solar Energy*, 85, 808-817.
- Yaziz, S., Azizan, N., Zakaria, R., & Ahmad, M. (2013). The performance of hybrid ARIMA-GARCH modeling in forecasting gold price. *20th International Congress on Modelling and Simulation*. Adelaide, Australia.
- Zhong, Y. (2013). Forecast volatility in value of the EUR/USD. *Unpublished Master Thesis*. University of Nottingham.
- Zorzi, M. C., Kolasa, M., & Rubaszek, M. (2017). Exchange rate forecasting with DSGE models. *Journal of International Economics*, 1-47.

APÊNDICE

**APÊNDICE I – FUNÇÕES DE ERRO DA PREVISÃO COM *ROLLING*
WINDOWS (EUR/USD)**

TAMANHO DA JANELA	LOSS FUNCTIONS	GARCH (1,1)	GJR-GARCH (1,1)	EGARCH (1,1)
250	MAE	3,0469 x 10 ⁻⁵	3,0462 x 10 ⁻⁵	2,9524 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,4069 x 10 ⁻⁹	3,4104 x 10 ⁻⁹	3,0168 x 10 ⁻⁹
	RMSE	5,8369 x 10 ⁻⁵	5,8399 x 10 ⁻⁵	5,4925 x 10 ⁻⁵
300	MAE	2,7749 x 10 ⁻⁵	2,7380 x 10 ⁻⁵	2,9550 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,0215 x 10 ⁻⁹	2,9609 x 10 ⁻⁹	3,0468 x 10 ⁻⁹
	RMSE	5,4968 x 10 ⁻⁵	5,4415 x 10 ⁻⁵	5,5198 x 10 ⁻⁵
350	MAE	2,8194 x 10 ⁻⁵	2,7630 x 10 ⁻⁵	2,9684 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,0437 x 10 ⁻⁹	3,0507 x 10 ⁻⁹	3,1129 x 10 ⁻⁹
	RMSE	5,5169 x 10 ⁻⁵	5,5233 x 10 ⁻⁵	5,5793 x 10 ⁻⁵
400	MAE	2,8024 x 10 ⁻⁵	2,7601 x 10 ⁻⁵	2,9240 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,0467 x 10 ⁻⁹	3,0142 x 10 ⁻⁹	3,0838 x 10 ⁻⁹
	RMSE	5,5197 x 10 ⁻⁵	5,4902 x 10 ⁻⁵	5,5532 x 10 ⁻⁵
450	MAE	2,7983 x 10 ⁻⁵	2,7696 x 10 ⁻⁵	2,9684 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,0358 x 10 ⁻⁹	3,0120 x 10 ⁻⁹	3,1129 x 10 ⁻⁹
	RMSE	5,5098 x 10 ⁻⁵	5,4881 x 10 ⁻⁵	5,5793 x 10 ⁻⁵
500	MAE	2,7932 x 10 ⁻⁵	2,7625 x 10 ⁻⁵	2,8828 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,0195 x 10 ⁻⁹	2,9831 x 10 ⁻⁹	3,0397 x 10 ⁻⁹
	RMSE	5,4950 x 10 ⁻⁵	5,4618 x 10 ⁻⁵	5,5133 x 10 ⁻⁵
550	MAE	2,7930 x 10 ⁻⁵	2,7648 x 10 ⁻⁵	3,2629 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,0182 x 10 ⁻⁹	2,9804 x 10 ⁻⁹	3,3353 x 10 ⁻⁹
	RMSE	5,4939 x 10 ⁻⁵	5,4593 x 10 ⁻⁵	5,7752 x 10 ⁻⁵
600	MAE	2,7893 x 10 ⁻⁵	2,7385 x 10 ⁻⁵	2,8337 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,0094 x 10 ⁻⁹	2,9598 x 10 ⁻⁹	2,9738 x 10 ⁻⁹
	RMSE	5,4858 x 10 ⁻⁵	5,4404 x 10 ⁻⁵	5,4533 x 10 ⁻⁵
650	MAE	2,7904 x 10 ⁻⁵	2,7212 x 10 ⁻⁵	3,2496 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,0034 x 10 ⁻⁹	2,9553 x 10 ⁻⁹	3,3440 x 10 ⁻⁹
	RMSE	5,4804 x 10 ⁻⁵	5,4362 x 10 ⁻⁵	5,7827 x 10 ⁻⁵
700	MAE	2,7906 x 10 ⁻⁵	2,7291 x 10 ⁻⁵	2,8544 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,0043 x 10 ⁻⁹	2,9600 x 10 ⁻⁹	2,9954 x 10 ⁻⁹
	RMSE	5,4811 x 10 ⁻⁵	5,4406 x 10 ⁻⁵	5,4730 x 10 ⁻⁵
750	MAE	2,7875 x 10 ⁻⁵	2,7235 x 10 ⁻⁵	2,8417 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,0026 x 10 ⁻⁹	2,9595 x 10 ⁻⁹	2,9989 x 10 ⁻⁹
	RMSE	5,4796 x 10 ⁻⁵	5,4401 x 10 ⁻⁵	5,4762 x 10 ⁻⁵
800	MAE	2,7901 x 10 ⁻⁵	2,7296 x 10 ⁻⁵	2,8269 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,0043 x 10 ⁻⁹	2,9577 x 10 ⁻⁹	2,9721 x 10 ⁻⁹

TAMANHO DA JANELA	LOSS FUNCTIONS	GARCH (1,1)	GJR-GARCH (1,1)	EGARCH (1,1)
		RMSE	$5,4811 \times 10^{-5}$	$5,4385 \times 10^{-5}$
850	MAE	$2,7928 \times 10^{-5}$	$2,7311 \times 10^{-5}$	$2,9684 \times 10^{-5}$
	MSE	$3,0047 \times 10^{-9}$	$2,9596 \times 10^{-9}$	$3,1129 \times 10^{-9}$
	RMSE	$5,4816 \times 10^{-5}$	$5,4402 \times 10^{-5}$	$5,5793 \times 10^{-5}$
900	MAE	$2,7921 \times 10^{-5}$	$2,7356 \times 10^{-5}$	$2,8208 \times 10^{-5}$
	MSE	$3,0035 \times 10^{-9}$	$2,9650 \times 10^{-9}$	$3,0110 \times 10^{-9}$
	RMSE	$5,4805 \times 10^{-5}$	$5,4452 \times 10^{-5}$	$5,4873 \times 10^{-5}$
950	MAE	$2,7945 \times 10^{-5}$	$2,7387 \times 10^{-5}$	$2,8417 \times 10^{-5}$
	MSE	$3,0043 \times 10^{-9}$	$2,9648 \times 10^{-9}$	$2,9989 \times 10^{-9}$
	RMSE	$5,4811 \times 10^{-5}$	$5,4450 \times 10^{-5}$	$5,4762 \times 10^{-5}$
1000	MAE	$2,7922 \times 10^{-5}$	$2,7367 \times 10^{-5}$	$2,7998 \times 10^{-5}$
	MSE	$3,0043 \times 10^{-9}$	$2,9632 \times 10^{-9}$	$2,9742 \times 10^{-9}$
	RMSE	$5,4811 \times 10^{-5}$	$5,4435 \times 10^{-5}$	$5,4536 \times 10^{-5}$

**APÊNDICE II – FUNÇÕES DE ERRO DA PREVISÃO COM *ROLLING*
WINDOWS (GBP/USD)**

TAMANHO DA JANELA	LOSS FUNCTION	GARCH (1,1)	GJR-GARCH (1,1)	EGARCH (1,1)
250	MAE	3,8399 x 10 ⁻⁵	3,6513 x 10 ⁻⁵	3,8487 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,7520 x 10 ⁻⁸	3,7081 x 10 ⁻⁸	3,7363 x 10 ⁻⁸
	RMSE	1,9370 x 10 ⁻⁴	1,9257 x 10 ⁻⁴	1,9330 x 10 ⁻⁴
300	MAE	3,8004 x 10 ⁻⁵	3,8399 x 10 ⁻⁵	3,8459 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,6948 x 10 ⁻⁸	3,7520 x 10 ⁻⁸	3,7095 x 10 ⁻⁸
	RMSE	1,9222 x 10 ⁻⁴	1,9370 x 10 ⁻⁴	1,9260 x 10 ⁻⁴
350	MAE	3,8283 x 10 ⁻⁵	3,7781 x 10 ⁻⁵	3,8636 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,6974 x 10 ⁻⁸	3,7544 x 10 ⁻⁸	3,7073 x 10 ⁻⁸
	RMSE	1,9229 x 10 ⁻⁴	1,9376 x 10 ⁻⁴	1,9254 x 10 ⁻⁴
400	MAE	3,7833 x 10 ⁻⁵	3,7288 x 10 ⁻⁵	3,8326 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,7214 x 10 ⁻⁸	3,7445 x 10 ⁻⁸	3,7009 x 10 ⁻⁸
	RMSE	1,9291 x 10 ⁻⁴	1,9351 x 10 ⁻⁴	1,9238 x 10 ⁻⁴
450	MAE	3,7894 x 10 ⁻⁵	3,8283 x 10 ⁻⁵	3,8062 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,7026 x 10 ⁻⁸	3,6974 x 10 ⁻⁸	3,6856 x 10 ⁻⁸
	RMSE	1,9242 x 10 ⁻⁴	1,9229 x 10 ⁻⁴	1,9198 x 10 ⁻⁴
500	MAE	3,8052 x 10 ⁻⁵	3,6862 x 10 ⁻⁵	3,8039 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,7170 x 10 ⁻⁸	3,7004 x 10 ⁻⁸	3,6886 x 10 ⁻⁸
	RMSE	1,9280 x 10 ⁻⁴	1,9237 x 10 ⁻⁴	1,9206 x 10 ⁻⁴
550	MAE	3,8107 x 10 ⁻⁵	3,8475 x 10 ⁻⁵	3,8773 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,7109 x 10 ⁻⁸	3,8077 x 10 ⁻⁸	3,7656 x 10 ⁻⁸
	RMSE	1,9264 x 10 ⁻⁴	1,9513 x 10 ⁻⁴	1,9405 x 10 ⁻⁴
600	MAE	3,8620 x 10 ⁻⁵	3,8620 x 10 ⁻⁵	3,8933 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,7112 x 10 ⁻⁸	3,7112 x 10 ⁻⁸	3,7569 x 10 ⁻⁸
	RMSE	1,9265 x 10 ⁻⁴	1,9265 x 10 ⁻⁴	1,9383 x 10 ⁻⁴
650	MAE	3,8655 x 10 ⁻⁵	4,0530 x 10 ⁻⁵	3,8855 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,7030 x 10 ⁻⁸	3,8574 x 10 ⁻⁸	3,7431 x 10 ⁻⁸
	RMSE	1,9243 x 10 ⁻⁴	1,9640 x 10 ⁻⁴	1,9347 x 10 ⁻⁴
700	MAE	3,8808 x 10 ⁻⁵	4,0837 x 10 ⁻⁵	3,8017 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,7018 x 10 ⁻⁸	3,8421 x 10 ⁻⁸	3,7129 x 10 ⁻⁸
	RMSE	1,9240 x 10 ⁻⁴	1,9601 x 10 ⁻⁴	1,9269 x 10 ⁻⁴
750	MAE	3,8588 x 10 ⁻⁵	3,8588 x 10 ⁻⁵	3,7976 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,6972 x 10 ⁻⁸	3,6972 x 10 ⁻⁸	3,7122 x 10 ⁻⁸
	RMSE	1,9228 x 10 ⁻⁴	1,9228 x 10 ⁻⁴	1,9267 x 10 ⁻⁴
800	MAE	3,8464 x 10 ⁻⁵	4,0555 x 10 ⁻⁵	3,7094 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,6964 x 10 ⁻⁸	3,8077 x 10 ⁻⁸	3,6871 x 10 ⁻⁸
	RMSE	1,9226 x 10 ⁻⁴	1,9513 x 10 ⁻⁴	1,9202 x 10 ⁻⁴

TAMANHO DA JANELA	LOSS FUNCTION	GARCH (1,1)	GJR-GARCH (1,1)	EGARCH (1,1)
850	MAE	$3,8247 \times 10^{-5}$	$4,0291 \times 10^{-5}$	$3,7263 \times 10^{-5}$
	MSE	$3,6940 \times 10^{-8}$	$3,7991 \times 10^{-8}$	$3,6916 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,9220 \times 10^{-4}$	$1,9491 \times 10^{-4}$	$1,9213 \times 10^{-4}$
900	MAE	$3,8034 \times 10^{-5}$	$3,9966 \times 10^{-5}$	$3,7365 \times 10^{-5}$
	MSE	$3,6924 \times 10^{-8}$	$3,7923 \times 10^{-8}$	$3,6935 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,9216 \times 10^{-4}$	$1,9474 \times 10^{-4}$	$1,9218 \times 10^{-4}$
950	MAE	$3,8135 \times 10^{-5}$	$4,0074 \times 10^{-5}$	$3,8018 \times 10^{-5}$
	MSE	$3,6990 \times 10^{-8}$	$3,8081 \times 10^{-8}$	$3,6958 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,9233 \times 10^{-4}$	$1,9514 \times 10^{-4}$	$1,9224 \times 10^{-4}$
1000	MAE	$3,7670 \times 10^{-5}$	$3,9626 \times 10^{-5}$	$3,8431 \times 10^{-5}$
	MSE	$3,6954 \times 10^{-8}$	$3,8134 \times 10^{-8}$	$3,7049 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,9223 \times 10^{-4}$	$1,9528 \times 10^{-4}$	$1,9248 \times 10^{-4}$

**APÊNDICE III – FUNÇÕES DE ERRO DA PREVISÃO COM *ROLLING*
WINDOWS (GBP/EUR)**

TAMANHO DA JANELA	LOSS FUNCTIONS	GARCH (1,1)	GJR-GARCH (1,1)	EGARCH (1,1)
250	MAE	2,8976 x 10 ⁻⁵	2,8993 x 10 ⁻⁵	2,9167 x 10 ⁻⁵
	MSE	1,0619 x 10 ⁻⁸	1,0637 x 10 ⁻⁸	1,1799 x 10 ⁻⁸
	RMSE	1,0305 x 10 ⁻⁴	1,0313 x 10 ⁻⁴	1,0862 x 10 ⁻⁴
300	MAE	2,9254 x 10 ⁻⁵	2,8976 x 10 ⁻⁵	2,9143 x 10 ⁻⁵
	MSE	1,0613 x 10 ⁻⁸	1,0619 x 10 ⁻⁸	1,1139 x 10 ⁻⁸
	RMSE	1,0302 x 10 ⁻⁴	1,0305 x 10 ⁻⁴	1,0554 x 10 ⁻⁴
350	MAE	2,9187 x 10 ⁻⁵	2,9237 x 10 ⁻⁵	2,9248 x 10 ⁻⁵
	MSE	1,0582 x 10 ⁻⁸	1,0650 x 10 ⁻⁸	1,1472 x 10 ⁻⁸
	RMSE	1,0287 x 10 ⁻⁴	1,0320 x 10 ⁻⁴	1,0711 x 10 ⁻⁴
400	MAE	2,9193 x 10 ⁻⁵	2,9252 x 10 ⁻⁵	2,9755 x 10 ⁻⁵
	MSE	1,0574 x 10 ⁻⁸	1,0625 x 10 ⁻⁸	1,1852 x 10 ⁻⁸
	RMSE	1,0283 x 10 ⁻⁴	1,0308 x 10 ⁻⁴	1,0887 x 10 ⁻⁴
450	MAE	2,9260 x 10 ⁻⁵	2,9187 x 10 ⁻⁵	2,8661 x 10 ⁻⁵
	MSE	1,0592 x 10 ⁻⁸	1,0582 x 10 ⁻⁸	1,0575 x 10 ⁻⁸
	RMSE	1,0292 x 10 ⁻⁴	1,0287 x 10 ⁻⁴	1,0283 x 10 ⁻⁴
500	MAE	2,8806 x 10 ⁻⁵	2,9368 x 10 ⁻⁵	2,8797 x 10 ⁻⁵
	MSE	1,0585 x 10 ⁻⁸	1,0605 x 10 ⁻⁸	1,0642 x 10 ⁻⁸
	RMSE	1,0288 x 10 ⁻⁴	1,0298 x 10 ⁻⁴	1,0316 x 10 ⁻⁴
550	MAE	2,9787 x 10 ⁻⁵	2,9784 x 10 ⁻⁵	2,8958 x 10 ⁻⁵
	MSE	1,0655 x 10 ⁻⁸	1,0746 x 10 ⁻⁸	1,0601 x 10 ⁻⁸
	RMSE	1,0322 x 10 ⁻⁴	1,0366 x 10 ⁻⁴	1,0296 x 10 ⁻⁴
600	MAE	3,0065 x 10 ⁻⁵	2,9489 x 10 ⁻⁵	2,9048 x 10 ⁻⁵
	MSE	1,0689 x 10 ⁻⁸	1,0708 x 10 ⁻⁸	1,0615 x 10 ⁻⁸
	RMSE	1,0339 x 10 ⁻⁴	1,0348 x 10 ⁻⁴	1,0303 x 10 ⁻⁴
650	MAE	3,0026 x 10 ⁻⁵	3,0065 x 10 ⁻⁵	2,8754 x 10 ⁻⁵
	MSE	1,0667 x 10 ⁻⁸	1,0731 x 10 ⁻⁸	1,0589 x 10 ⁻⁸
	RMSE	1,0328 x 10 ⁻⁴	1,0359 x 10 ⁻⁴	1,0290 x 10 ⁻⁴
700	MAE	2,9482 x 10 ⁻⁵	2,9688 x 10 ⁻⁵	2,8543 x 10 ⁻⁵
	MSE	1,0667 x 10 ⁻⁸	1,0748 x 10 ⁻⁸	1,0585 x 10 ⁻⁸
	RMSE	1,0328 x 10 ⁻⁴	1,0367 x 10 ⁻⁴	1,0288 x 10 ⁻⁴
750	MAE	2,9688 x 10 ⁻⁵	2,9688 x 10 ⁻⁵	2,8395 x 10 ⁻⁵
	MSE	1,0660 x 10 ⁻⁸	1,0660 x 10 ⁻⁸	1,0585 x 10 ⁻⁸
	RMSE	1,0325 x 10 ⁻⁴	1,0325 x 10 ⁻⁴	1,0288 x 10 ⁻⁴
800	MAE	2,9265 x 10 ⁻⁵	2,9433 x 10 ⁻⁵	2,8228 x 10 ⁻⁵
	MSE	1,0657 x 10 ⁻⁸	1,0719 x 10 ⁻⁸	1,0582 x 10 ⁻⁸
	RMSE	1,0323 x 10 ⁻⁴	1,0353 x 10 ⁻⁴	1,0287 x 10 ⁻⁴

TAMANHO DA JANELA	LOSS FUNCTIONS	GARCH (1,1)	GJR-GARCH (1,1)	EGARCH (1,1)
850	MAE	$2,9229 \times 10^{-5}$	$2,9332 \times 10^{-5}$	$2,8112 \times 10^{-5}$
	MSE	$1,0640 \times 10^{-8}$	$1,0712 \times 10^{-8}$	$1,0580 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,0315 \times 10^{-4}$	$1,0350 \times 10^{-4}$	$1,0286 \times 10^{-4}$
900	MAE	$2,9420 \times 10^{-5}$	$2,9433 \times 10^{-5}$	$2,8114 \times 10^{-5}$
	MSE	$1,0686 \times 10^{-8}$	$1,0767 \times 10^{-8}$	$1,0582 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,0337 \times 10^{-4}$	$1,0376 \times 10^{-4}$	$1,0287 \times 10^{-4}$
950	MAE	$2,9108 \times 10^{-5}$	$2,9471 \times 10^{-5}$	$2,8110 \times 10^{-5}$
	MSE	$1,0663 \times 10^{-8}$	$1,0854 \times 10^{-8}$	$1,0604 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,0326 \times 10^{-4}$	$1,0418 \times 10^{-4}$	$1,0298 \times 10^{-4}$
1000	MAE	$2,9105 \times 10^{-5}$	$2,9210 \times 10^{-5}$	$2,7991 \times 10^{-5}$
	MSE	$1,0684 \times 10^{-8}$	$1,0834 \times 10^{-8}$	$1,0598 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,0336 \times 10^{-4}$	$1,0408 \times 10^{-4}$	$1,0294 \times 10^{-4}$

**APÊNDICE IV – FUNÇÕES DE ERRO DA PREVISÃO COM
EXPANDING WINDOWS (EUR/USD)**

TAMANHO DA JANELA	LOSS FUNCTIONS	GARCH (1,1)	GJR-GARCH (1,1)	EGARCH (1,1)
250	MAE	2,7812 x 10 ⁻⁵	2,7462 x 10 ⁻⁵	2,8456 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,0014 x 10 ⁻⁹	2,9693 x 10 ⁻⁹	3,0030 x 10 ⁻⁹
	RMSE	5,4785 x 10 ⁻⁵	5,4491 x 10 ⁻⁵	5,4800 x 10 ⁻⁵
300	MAE	2,7732 x 10 ⁻⁵	2,7420 x 10 ⁻⁵	2,8609 x 10 ⁻⁵
	MSE	2,9999 x 10 ⁻⁹	2,9640 x 10 ⁻⁹	2,9968 x 10 ⁻⁹
	RMSE	5,4771 x 10 ⁻⁵	5,4443 x 10 ⁻⁵	5,4743 x 10 ⁻⁵
350	MAE	2,7649 x 10 ⁻⁵	2,7411 x 10 ⁻⁵	2,7891 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,0002 x 10 ⁻⁹	2,9636 x 10 ⁻⁹	2,9652 x 10 ⁻⁹
	RMSE	5,4774 x 10 ⁻⁵	5,4439 x 10 ⁻⁵	5,4454 x 10 ⁻⁵
400	MAE	2,7698 x 10 ⁻⁵	2,7312 x 10 ⁻⁵	2,8375 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,0001 x 10 ⁻⁹	2,9642 x 10 ⁻⁹	3,0104 x 10 ⁻⁹
	RMSE	5,4773 x 10 ⁻⁵	5,4444 x 10 ⁻⁵	5,4867 x 10 ⁻⁵
450	MAE	2,7724 x 10 ⁻⁵	2,7257 x 10 ⁻⁵	2,7840 x 10 ⁻⁵
	MSE	2,9994 x 10 ⁻⁹	2,9623 x 10 ⁻⁹	2,9693 x 10 ⁻⁹
	RMSE	5,4767 x 10 ⁻⁵	5,4427 x 10 ⁻⁵	5,4491 x 10 ⁻⁵
500	MAE	2,7802 x 10 ⁻⁵	2,7399 x 10 ⁻⁵	2,7677 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,0020 x 10 ⁻⁹	2,9660 x 10 ⁻⁹	2,9687 x 10 ⁻⁹
	RMSE	5,4790 x 10 ⁻⁵	5,4461 x 10 ⁻⁵	5,4486 x 10 ⁻⁵
550	MAE	2,7739 x 10 ⁻⁵	2,7363 x 10 ⁻⁵	2,7577 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,0008 x 10 ⁻⁹	2,9660 x 10 ⁻⁹	2,9702 x 10 ⁻⁹
	RMSE	5,4779 x 10 ⁻⁵	5,4461 x 10 ⁻⁵	5,4499 x 10 ⁻⁵
600	MAE	2,7615 x 10 ⁻⁵	2,7339 x 10 ⁻⁵	2,7617 x 10 ⁻⁵
	MSE	2,9982 x 10 ⁻⁹	2,9669 x 10 ⁻⁹	2,9730 x 10 ⁻⁹
	RMSE	5,4755 x 10 ⁻⁵	5,4469 x 10 ⁻⁵	5,4525 x 10 ⁻⁵
650	MAE	2,7612 x 10 ⁻⁵	2,7392 x 10 ⁻⁵	2,7738 x 10 ⁻⁵
	MSE	2,9976 x 10 ⁻⁹	2,9686 x 10 ⁻⁹	2,9799 x 10 ⁻⁹
	RMSE	5,4751 x 10 ⁻⁵	5,4485 x 10 ⁻⁵	5,4589 x 10 ⁻⁵
700	MAE	2,7620 x 10 ⁻⁵	2,7369 x 10 ⁻⁵	2,7734 x 10 ⁻⁵
	MSE	2,9968 x 10 ⁻⁹	2,9656 x 10 ⁻⁹	2,9768 x 10 ⁻⁹
	RMSE	5,4743 x 10 ⁻⁵	5,4458 x 10 ⁻⁵	5,4560 x 10 ⁻⁵
750	MAE	2,7626 x 10 ⁻⁵	2,7422 x 10 ⁻⁵	2,7695 x 10 ⁻⁵
	MSE	2,9973 x 10 ⁻⁹	2,9771 x 10 ⁻⁹	2,9873 x 10 ⁻⁹
	RMSE	5,4748 x 10 ⁻⁵	5,4563 x 10 ⁻⁵	5,4656 x 10 ⁻⁵
800	MAE	2,7662 x 10 ⁻⁵	2,7350 x 10 ⁻⁵	2,7940 x 10 ⁻⁵
	MSE	3,0001 x 10 ⁻⁹	2,9769 x 10 ⁻⁹	2,9906 x 10 ⁻⁹
	RMSE	5,4773 x 10 ⁻⁵	5,4561 x 10 ⁻⁵	5,4686 x 10 ⁻⁵

TAMANHO DA JANELA	LOSS FUNCTIONS	GARCH (1,1)	GJR-GARCH (1,1)	EGARCH (1,1)
850	MAE	$2,7662 \times 10^{-5}$	$2,7341 \times 10^{-5}$	$2,7767 \times 10^{-5}$
	MSE	$2,9975 \times 10^{-9}$	$2,9669 \times 10^{-9}$	$2,9790 \times 10^{-9}$
	RMSE	$5,4749 \times 10^{-5}$	$5,4469 \times 10^{-5}$	$5,4580 \times 10^{-5}$
900	MAE	$2,7669 \times 10^{-5}$	$2,7331 \times 10^{-5}$	$2,7770 \times 10^{-5}$
	MSE	$2,9977 \times 10^{-9}$	$2,9659 \times 10^{-9}$	$2,9779 \times 10^{-9}$
	RMSE	$5,4751 \times 10^{-5}$	$5,4460 \times 10^{-5}$	$5,4571 \times 10^{-5}$
950	MAE	$2,7683 \times 10^{-5}$	$2,7286 \times 10^{-5}$	$2,7699 \times 10^{-5}$
	MSE	$2,9983 \times 10^{-9}$	$2,9664 \times 10^{-9}$	$2,9780 \times 10^{-9}$
	RMSE	$5,4757 \times 10^{-5}$	$5,4465 \times 10^{-5}$	$5,4571 \times 10^{-5}$
1000	MAE	$2,7691 \times 10^{-5}$	$2,7288 \times 10^{-5}$	$2,7660 \times 10^{-5}$
	MSE	$2,9982 \times 10^{-9}$	$2,9658 \times 10^{-9}$	$2,9767 \times 10^{-9}$
	RMSE	$5,4756 \times 10^{-5}$	$5,4459 \times 10^{-5}$	$5,4560 \times 10^{-5}$

**APÊNDICE V – FUNÇÕES DE ERRO DA PREVISÃO COM
EXPANDING WINDOWS (GBP/USD)**

TAMANHO DA JANELA	LOSS FUNCTIONS	GARCH (1,1)	GJR-GARCH (1,1)	EGARCH (1,1)
250	MAE	$3,7265 \times 10^{-5}$	$3,9600 \times 10^{-5}$	$3,6873 \times 10^{-5}$
	MSE	$3,7453 \times 10^{-8}$	$3,8698 \times 10^{-8}$	$3,7115 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,9353 \times 10^{-4}$	$1,9672 \times 10^{-4}$	$1,9265 \times 10^{-4}$
300	MAE	$3,7191 \times 10^{-5}$	$3,9424 \times 10^{-5}$	$3,6738 \times 10^{-5}$
	MSE	$3,7437 \times 10^{-8}$	$3,8622 \times 10^{-8}$	$3,7079 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,9349 \times 10^{-4}$	$1,9653 \times 10^{-4}$	$1,9256 \times 10^{-4}$
350	MAE	$3,7177 \times 10^{-5}$	$3,9428 \times 10^{-5}$	$3,6680 \times 10^{-5}$
	MSE	$3,7407 \times 10^{-8}$	$3,8591 \times 10^{-8}$	$3,7081 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,9341 \times 10^{-4}$	$1,9645 \times 10^{-4}$	$1,9256 \times 10^{-4}$
400	MAE	$3,7171 \times 10^{-5}$	$3,9489 \times 10^{-5}$	$3,7025 \times 10^{-5}$
	MSE	$3,7381 \times 10^{-8}$	$3,8535 \times 10^{-8}$	$3,7084 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,9334 \times 10^{-4}$	$1,9630 \times 10^{-4}$	$1,9257 \times 10^{-4}$
450	MAE	$3,7239 \times 10^{-5}$	$3,9763 \times 10^{-5}$	$3,7009 \times 10^{-5}$
	MSE	$3,7363 \times 10^{-8}$	$3,8596 \times 10^{-8}$	$3,7006 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,9329 \times 10^{-4}$	$1,9646 \times 10^{-4}$	$1,9237 \times 10^{-4}$
500	MAE	$3,7261 \times 10^{-5}$	$3,9736 \times 10^{-5}$	$3,6226 \times 10^{-5}$
	MSE	$3,7348 \times 10^{-8}$	$3,8581 \times 10^{-8}$	$3,7024 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,9326 \times 10^{-4}$	$1,9642 \times 10^{-4}$	$1,9242 \times 10^{-4}$
550	MAE	$3,7232 \times 10^{-5}$	$3,9821 \times 10^{-5}$	$3,5998 \times 10^{-5}$
	MSE	$3,7328 \times 10^{-8}$	$3,8549 \times 10^{-8}$	$3,7014 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,9320 \times 10^{-4}$	$1,9634 \times 10^{-4}$	$1,9239 \times 10^{-4}$
600	MAE	$3,7211 \times 10^{-5}$	$3,9732 \times 10^{-5}$	$3,6150 \times 10^{-5}$
	MSE	$3,7315 \times 10^{-8}$	$3,8472 \times 10^{-8}$	$3,7005 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,9317 \times 10^{-4}$	$1,9614 \times 10^{-4}$	$1,9237 \times 10^{-4}$
650	MAE	$3,7214 \times 10^{-5}$	$3,9875 \times 10^{-5}$	$3,6173 \times 10^{-5}$
	MSE	$3,7304 \times 10^{-8}$	$3,8475 \times 10^{-8}$	$3,6995 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,9314 \times 10^{-4}$	$1,9615 \times 10^{-4}$	$1,9234 \times 10^{-4}$
700	MAE	$3,7267 \times 10^{-5}$	$3,9944 \times 10^{-5}$	$3,6159 \times 10^{-5}$
	MSE	$3,7299 \times 10^{-8}$	$3,8418 \times 10^{-8}$	$3,6990 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,9313 \times 10^{-4}$	$1,9600 \times 10^{-4}$	$1,9233 \times 10^{-4}$
750	MAE	$3,7257 \times 10^{-5}$	$3,9865 \times 10^{-5}$	$3,6172 \times 10^{-5}$
	MSE	$3,7285 \times 10^{-8}$	$3,8360 \times 10^{-8}$	$3,6974 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,9309 \times 10^{-4}$	$1,9586 \times 10^{-4}$	$1,9229 \times 10^{-4}$
800	MAE	$3,7364 \times 10^{-5}$	$3,9775 \times 10^{-5}$	$3,6291 \times 10^{-5}$
	MSE	$3,7315 \times 10^{-8}$	$3,8327 \times 10^{-8}$	$3,6977 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,9317 \times 10^{-4}$	$1,9577 \times 10^{-4}$	$1,9229 \times 10^{-4}$

TAMANHO DA JANELA	LOSS FUNCTIONS	GARCH (1,1)	GJR-GARCH (1,1)	EGARCH (1,1)
850	MAE	$3,7408 \times 10^{-5}$	$4,0051 \times 10^{-5}$	$3,6401 \times 10^{-5}$
	MSE	$3,7305 \times 10^{-8}$	$3,8338 \times 10^{-8}$	$3,6973 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,9315 \times 10^{-4}$	$1,9580 \times 10^{-4}$	$1,9228 \times 10^{-4}$
900	MAE	$3,7404 \times 10^{-5}$	$4,0100 \times 10^{-5}$	$3,6189 \times 10^{-5}$
	MSE	$3,7302 \times 10^{-8}$	$3,8376 \times 10^{-8}$	$3,6989 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,9314 \times 10^{-4}$	$1,9590 \times 10^{-4}$	$1,9233 \times 10^{-4}$
950	MAE	$3,7436 \times 10^{-5}$	$4,0249 \times 10^{-5}$	$3,6060 \times 10^{-5}$
	MSE	$3,7290 \times 10^{-8}$	$3,8407 \times 10^{-8}$	$3,6949 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,9311 \times 10^{-4}$	$1,9598 \times 10^{-4}$	$1,9222 \times 10^{-4}$
1000	MAE	$3,7434 \times 10^{-5}$	$4,0135 \times 10^{-5}$	$3,5936 \times 10^{-5}$
	MSE	$3,7267 \times 10^{-8}$	$3,8277 \times 10^{-8}$	$3,6954 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,9305 \times 10^{-4}$	$1,9565 \times 10^{-4}$	$1,9223 \times 10^{-4}$

**APÊNDICE VI – FUNÇÕES DE ERRO DA PREVISÃO COM
EXPANDING WINDOWS (GBP/EUR)**

TAMANHO DA JANELA	LOSS FUNCTIONS	GARCH (1,1)	GJR-GARCH (1,1)	EGARCH (1,1)
250	MAE	$2,8699 \times 10^{-5}$	$2,9269 \times 10^{-5}$	$2,7748 \times 10^{-5}$
	MSE	$1,0781 \times 10^{-8}$	$1,1015 \times 10^{-8}$	$1,0684 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,0383 \times 10^{-4}$	$1,0495 \times 10^{-4}$	$1,0336 \times 10^{-4}$
300	MAE	$2,8639 \times 10^{-5}$	$2,9271 \times 10^{-5}$	$2,7823 \times 10^{-5}$
	MSE	$1,0775 \times 10^{-8}$	$1,1004 \times 10^{-8}$	$1,0677 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,0380 \times 10^{-4}$	$1,0490 \times 10^{-4}$	$1,0333 \times 10^{-4}$
350	MAE	$2,8601 \times 10^{-5}$	$2,9319 \times 10^{-5}$	$2,7789 \times 10^{-5}$
	MSE	$1,0773 \times 10^{-8}$	$1,1038 \times 10^{-8}$	$1,0681 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,0379 \times 10^{-4}$	$1,0506 \times 10^{-4}$	$1,0335 \times 10^{-4}$
400	MAE	$2,8615 \times 10^{-5}$	$2,9402 \times 10^{-5}$	$2,7808 \times 10^{-5}$
	MSE	$1,0767 \times 10^{-8}$	$1,1037 \times 10^{-8}$	$1,0682 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,0376 \times 10^{-4}$	$1,0506 \times 10^{-4}$	$1,0335 \times 10^{-4}$
450	MAE	$2,8716 \times 10^{-5}$	$2,9556 \times 10^{-5}$	$2,7936 \times 10^{-5}$
	MSE	$1,0762 \times 10^{-8}$	$1,1046 \times 10^{-8}$	$1,0673 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,0374 \times 10^{-4}$	$1,0510 \times 10^{-4}$	$1,0331 \times 10^{-4}$
500	MAE	$2,8721 \times 10^{-5}$	$2,9527 \times 10^{-5}$	$2,7985 \times 10^{-5}$
	MSE	$1,0755 \times 10^{-8}$	$1,1007 \times 10^{-8}$	$1,0661 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,0371 \times 10^{-4}$	$1,0491 \times 10^{-4}$	$1,0325 \times 10^{-4}$
550	MAE	$2,8770 \times 10^{-5}$	$2,9535 \times 10^{-5}$	$2,7964 \times 10^{-5}$
	MSE	$1,0755 \times 10^{-8}$	$1,1004 \times 10^{-8}$	$1,0660 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,0371 \times 10^{-4}$	$1,0490 \times 10^{-4}$	$1,0325 \times 10^{-4}$
600	MAE	$2,8787 \times 10^{-5}$	$2,9488 \times 10^{-5}$	$2,7955 \times 10^{-5}$
	MSE	$1,0745 \times 10^{-8}$	$1,0976 \times 10^{-8}$	$1,0646 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,0366 \times 10^{-4}$	$1,0477 \times 10^{-4}$	$1,0318 \times 10^{-4}$
650	MAE	$2,8793 \times 10^{-5}$	$2,9518 \times 10^{-5}$	$2,7993 \times 10^{-5}$
	MSE	$1,0741 \times 10^{-8}$	$1,0971 \times 10^{-8}$	$1,0648 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,0364 \times 10^{-4}$	$1,0474 \times 10^{-4}$	$1,0319 \times 10^{-4}$
700	MAE	$2,8808 \times 10^{-5}$	$2,9512 \times 10^{-5}$	$2,7864 \times 10^{-5}$
	MSE	$1,0737 \times 10^{-8}$	$1,0956 \times 10^{-8}$	$1,0638 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,0362 \times 10^{-4}$	$1,0467 \times 10^{-4}$	$1,0314 \times 10^{-4}$
750	MAE	$2,8820 \times 10^{-5}$	$2,9538 \times 10^{-5}$	$2,7869 \times 10^{-5}$
	MSE	$1,0733 \times 10^{-8}$	$1,0950 \times 10^{-8}$	$1,0635 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,0360 \times 10^{-4}$	$1,0464 \times 10^{-4}$	$1,0312 \times 10^{-4}$
800	MAE	$2,8883 \times 10^{-5}$	$2,9553 \times 10^{-5}$	$2,7911 \times 10^{-5}$
	MSE	$1,0736 \times 10^{-8}$	$1,0942 \times 10^{-8}$	$1,0632 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,0362 \times 10^{-4}$	$1,0460 \times 10^{-4}$	$1,0311 \times 10^{-4}$

TAMANHO DA JANELA	<i>LOSS FUNCTIONS</i>	GARCH (1,1)	GJR-GARCH (1,1)	EGARCH (1,1)
850	MAE	$2,8894 \times 10^{-5}$	$2,9502 \times 10^{-5}$	$2,7927 \times 10^{-5}$
	MSE	$1,0742 \times 10^{-8}$	$1,0924 \times 10^{-8}$	$1,0622 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,0364 \times 10^{-4}$	$1,0452 \times 10^{-4}$	$1,0306 \times 10^{-4}$
900	MAE	$2,8875 \times 10^{-5}$	$2,9463 \times 10^{-5}$	$2,7884 \times 10^{-5}$
	MSE	$1,0733 \times 10^{-8}$	$1,0906 \times 10^{-8}$	$1,0619 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,0360 \times 10^{-4}$	$1,0443 \times 10^{-4}$	$1,0305 \times 10^{-4}$
950	MAE	$2,8911 \times 10^{-5}$	$2,9442 \times 10^{-5}$	$2,7917 \times 10^{-5}$
	MSE	$1,0733 \times 10^{-8}$	$1,0885 \times 10^{-8}$	$1,0610 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,0360 \times 10^{-4}$	$1,0433 \times 10^{-4}$	$1,0300 \times 10^{-4}$
1000	MAE	$2,8906 \times 10^{-5}$	$2,9483 \times 10^{-5}$	$2,7901 \times 10^{-5}$
	MSE	$1,0729 \times 10^{-8}$	$1,0904 \times 10^{-8}$	$1,0615 \times 10^{-8}$
	RMSE	$1,0358 \times 10^{-4}$	$1,0442 \times 10^{-4}$	$1,0303 \times 10^{-4}$