

MODELIZAÇÃO PARAMÉTRICA DA SUPERFÍCIE DE  
VOLATILIDADE IMPLÍCITA

João Luís Gomes Ferreira Campos Andrada

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de  
Mestre em Finanças

**Orientador:** Prof. Dr. João Pedro Vidal Nunes  
Professor Catedrático, ISCTE – Instituto Universitário de Lisboa,  
Departamento de Finanças

**Outubro de 2018**

## Resumo

A fórmula do modelo Black-Scholes (BSM) é ainda hoje muito utilizada para calcular o prémio de uma opção do tipo europeu. Contudo, é sabido que alguns dos pressupostos inerentes a este modelo não se verificam na realidade, o que obriga a algumas adaptações.

Assim, ao contrário do que é assumido no modelo a volatilidade implícita para opções sobre um mesmo ativo subjacente varia em função do seu preço de exercício e do tempo remanescente até à maturidade, criando uma superfície de volatilidade dinâmica e não lisa.

Este trabalho procura assim encontrar uma representação paramétrica que permita estimar teoricamente a superfície de volatilidade implícita e que calibre de forma eficiente e eficaz os dados de mercado.

Vários modelos com diferentes parâmetros e especificações foram considerados na análise procurando aquele cujos resultados obtidos minimizem a raiz da soma do quadrado das diferenças para os dados empíricos.

Inicialmente, o objectivo passou por capturar o *efeito sorriso* através de uma forma quadrática presente numa maturidade ao longo dos diferentes preços de exercício para, numa segunda fase, se encontrar uma forma e um conjunto de parâmetros que permitam construir uma superfície semelhante à observada em mercado, tendo também em consideração a estrutura temporal da volatilidade implícita.

Palavras-chave: Opções, Volatilidade, Superfície de Volatilidade, Volatilidade Implícita

JEL: G10, G13, G17

## Abstract

The Black and Scholes model is still today widely used to price an European type vanilla option, despite the fact that some of the assumptions underlying this model are far from realistic which brings the need to adapt the model.

Thus, unlike what is assumed by the model, the implied volatility of a set of options on the same underlying asset, varies in accordance with not only the strike price but also the time to maturity, which creates a dynamic and non-flat implied volatility surface.

The aim of this work is, therefore, to find a theoretical parametric representation that may achieve a good fit with the empirical implied volatility surface.

Several models were studied to find the one with the best results to minimize the ordinary least squares.

The first main goal is to capture the *smile effect* through a quadratic form, for the same maturity and across different strike prices, and then construct the whole implied volatility surface, fitted with the empirical one, considering the implied volatility term structure.

Keywords: Options, Volatility, Volatility Surface, Implied Volatility

JEL: G10, G13, G17

## Agradecimentos

Desejo exprimir os meus mais profundos agradecimentos a todos aqueles que, directa ou indirectamente, me apoiaram na elaboração deste trabalho.

Gostaria de agradecer particularmente ao Professor João Pedro Nunes, a orientação e as sábias directrizes que me permitiram avançar ao longo deste trabalho, especialmente nos momentos mais difíceis, bem como a disponibilidade demonstrada através de todas as rápidas respostas às minhas dúvidas.

Agradeço à Teresa e a toda a minha família, apoios sem os quais não teria sido possível tratar e trabalhar este tema, e a quem retirei muitas horas para me focar no aprofundamento deste trabalho.

Por fim, quero agradecer ao Sérgio e ao Lourenço, pelas longas conversas e discussões que me permitiram sempre abordar o tema por diversos prismas. Foram uma enorme ajuda e espero um dia poder retribuir.

A todos, o meu muito obrigado.

## Índice

Resumo .....	ii
Abstract.....	iii
Índice .....	v
Índice de figuras .....	vii
Lista de acrónimos.....	x
1. Introdução.....	11
1.1 Opções Financeiras .....	11
1.2 Mercado de Opções .....	11
1.3 Modelo Black-Scholes (BSM).....	11
2. Revisão de Literatura .....	16
2.1. Modelos iniciais de avaliação de opções .....	16
2.2. Modelos de estimação do parâmetro de volatilidade.....	19
2.2.1. Métodos com base em dados históricos .....	20
2.2.2. Modelos de Volatilidade local (determinísticos).....	23
2.2.3. Modelos de Volatilidade Estocástica.....	24
2.2.4. Modelos baseados em representações paramétricas.....	26
2.3. Modelos de Calibração/Otimização .....	33
2.4. Características da Superfície de Volatilidade Implícita e do comportamento dos ativos subjacentes .....	35
3. Dados.....	37
4. Metodologia .....	38
5. Resultados .....	44
5.1. Resultados por <i>sorriso/smirk</i> .....	45
5.1.1. Sorriso da Maturidade 17.08.2018 $\cong$ 0,04 anos .....	45
5.1.2. <i>Smirk</i> da maturidade 21.09.2018 $\cong$ 0,13 anos.....	46
5.1.3. <i>Smirk</i> da Maturidade 21.12.2018 $\cong$ 0,38 anos .....	48

5.1.4.	<i>Smirk</i> da Maturidade 15.03.2019 $\cong$ 0,61 anos .....	49
5.1.5.	<i>Smirk</i> da Maturidade 21.06.2019 $\cong$ 0,88 anos .....	50
5.1.6.	<i>Smirk</i> da Maturidade 20.12.2019 $\cong$ 1,38 anos .....	51
5.1.7.	<i>Smirk</i> da Maturidade 19.06.2020 $\cong$ 1,88 anos .....	52
5.1.8.	Curva de volatilidade da Maturidade 18.12.2020 $\cong$ 2,38 anos .....	53
5.2.	Superfícies de volatilidade geradas pelas diferentes parametrizações.....	54
5.2.1.	<i>Superfície de volatilidade gerada pela parametrização polinomial (PP)</i>	54
5.2.2.	<i>Superfície de volatilidade gerada pela parametrização baseada em volatilidade estocástica original (RSVI)</i> .....	56
5.2.3.	<i>Superfície de volatilidade gerada pela parametrização original baseada em volatilidade estocástica otimizada</i> .....	57
5.2.4.	<i>Superfície de volatilidade gerada pela parametrização natural baseada em volatilidade estocástica</i> .....	59
6.	Conclusões.....	61
	Referências .....	62
	Anexos.....	64
	Anexo 1 – Conjunto de opções cuja volatilidade implícita foi analisada neste trabalho .....	64
	Anexo 2 – Curva de taxas de Juro utilizada no cálculo dos modelos .....	67
	Anexo 3 – Superfície de volatilidade implícita empírica .....	68
	Anexo 4 – Erros dos modelos .....	69

## Índice de figuras

<b>Figura 1.1:</b> Curva de volatilidade implícita das opções de compra transaccionadas na EUREX sobre o índice DAX, cujos preços de exercício estão compreendidos entre os EUR 12.500 e os EUR 14.000, no dia 03 de Agosto de 2018 com maturidade em 17 de Agosto de 2018.....	13
<b>Figura 1.2:</b> Estrutura temporal da volatilidade implícita das opções de compra transaccionadas na EUREX sobre o índice DAX, cujos preços de exercício estão compreendidos entre os EUR 12.500 e os EUR 14.000, no dia 03 de Agosto de 2018 com maturidade em 17 de Agosto de 2018 .....	13
<b>Figura 2:</b> Superfície de Volatilidade Implícita de opções de compra transaccionadas na EUREX, com preços de exercício entre EUR 12.500 e EUR 14.000 correspondente ao dia 03 de Agosto de 2018 .....	14
<b>Figura 3:</b> Processo teórico, segundo o modelo binomial, para o ativo subjacente entre o momento 0 e o momento 1 e respectivas probabilidades .....	17
<b>Figura 4:</b> Preço da opção de compra na sua maturidade .....	17
<b>Figura 5:</b> Pontos empíricos correspondentes à localização relativa de cada uma das opções utilizadas para cálculo dos parâmetros dos modelos e inter/extrapolação da superfície empírica. ....	42
<b>Figura 6:</b> Sorriso empírico e sorrisos estimados via cada um dos modelos em análise referente à maturidade de 17 de Agosto de 2018. Segmentos entre os preços de exercício EUR 12.500 e EUR 14.000 .....	45
<b>Figura 7:</b> Erros médios gerados por cada um dos modelos quando calibrados com o sorriso de mercado para a maturidade 17.08.2018 através do método dos mínimos quadrados ordinários .....	45
<b>Figura 8:</b> Smirk empírico e smirks estimados via cada um dos modelos em análise referentes à maturidade de 21 de Setembro de 2018. Segmento entre os preços de exercício EUR 12.500 e EUR 14.000.....	46
<b>Figura 9:</b> Erros médios gerados por cada um dos modelos quando calibrados com o smirk de mercado para a maturidade 21.09.2018 através do método dos mínimos quadrados ordinários.....	47
<b>Figura 10:</b> Smirk empírico e smirks estimados via cada um dos modelos em análise referentes à maturidade de 21 de Dezembro de 2018. Segmento entre os preços de exercício EUR 12.500 e EUR 14.000.....	48

<b>Figura 11:</b> Erros médios gerados por cada um dos modelos quando calibrados com o smirk de mercado para a maturidade 21.12.2018 através do método dos mínimos quadrados ordinários. ....	48
<b>Figura 12:</b> Smirk empírico e smirk estimados via cada um dos modelos em análise referentes à maturidade de 15 de Março de 2019. Segmento entre os preços de exercício EUR 12.500 e EUR 14.000. ....	49
<b>Figura 13:</b> Erros médios gerados por cada um dos modelos quando calibrados com o smirk de mercado para a maturidade 15 de Março de 2019 através do método dos mínimos quadrados ordinários. ....	49
<b>Figura 14:</b> Smirk empírico e smirks estimados via cada um dos modelos em análise referentes à maturidade de 21 de Junho de 2019. Segmento entre os preços de exercício EUR 12.500 e EUR 14.000. ....	50
<b>Figura 15:</b> Erros médios gerados por cada um dos modelos quando calibrados com o smirk de mercado para a maturidade 21.06.2019 através do método dos mínimos quadrados ordinários. ....	50
<b>Figura 16:</b> Smirk empírico e smirks estimados via cada um dos modelos em análise referentes à maturidade de 20 de Dezembro de 2019. Segmento entre os preços de exercício EUR 12.500 e EUR 14.000. ....	51
<b>Figura 17:</b> Erros médios gerados por cada um dos modelos quando calibrados com o smirk de mercado para a maturidade 20.12.2019 através do método dos mínimos quadrados ordinários ....	51
<b>Figura 18:</b> Smirk empírico e smirks estimados via cada um dos modelos em análise referentes à maturidade de 19 de Junho de 2020. Segmento entre os preços de exercício EUR 12.500 e EUR 14.000. ....	52
<b>Figura 19:</b> Erros médios gerados por cada um dos modelos quando calibrados com o smirk de mercado para a maturidade 20.12.2019 através do método dos mínimos quadrados ordinários ....	52
<b>Figura 20:</b> Curva de volatilidade empírica referentes à maturidade de 18 de Dezembro de 2020. Segmento entre os preços de exercício EUR 12.500 e EUR 14.000. ....	53
<b>Figura 21:</b> Superfície de volatilidade implícita estimada através da parametrização polinomial, entre os preços de Exercício EUR 12.500 e EUR 14.000. ....	54
<b>Figura 22:</b> Mapa dos módulos da diferença entre a superfície estimada via parametrização polinomial e a superfície empírica. Cada ponto desta área corresponde ao	



módulo do ponto com as mesmas coordenadas estimado via modelo polinomial subtraído do mesmo ponto da superfície empírica. .... 55

**Figura 23:** Superfície de volatilidade implícita estimada através da parametrização baseada em volatilidade estocástica original entre os preços de Exercício EUR 12.500 e EUR 14.000 ..... 56

**Figura 24:** Mapa dos módulos da diferença entre a superfície estimada via parametrização baseada em volatilidade estocástica original e a superfície empírica. Cada ponto desta área corresponde ao módulo do ponto com as mesmas coordenadas estimado via RSVI subtraído do mesmo ponto da superfície empírica. .... 57

**Figura 25:** Superfície de volatilidade implícita estimada através da parametrização baseada em volatilidade estocástica original otimizada entre os preços de Exercício EUR 12.500 e EUR 14.000 ..... 57

**Figura 26:** Mapa dos módulos da diferença entre a superfície estimada via parametrização baseada em volatilidade estocástica original otimizada e a superfície empírica. Cada ponto desta área corresponde ao módulo do ponto com as mesmas coordenadas estimado via OPT SVI subtraído do mesmo ponto da superfície empírica. .... 58

**Figura 27:** Superfície de volatilidade implícita estimada através da parametrização baseada em volatilidade estocástica natural entre os preços de Exercício EUR 12.500 e EUR 14.000 ..... 59

**Figura 28:** Mapa dos módulos da diferença entre a superfície estimada via parametrização baseada em volatilidade estocástica natural e a superfície empírica. Cada ponto desta área corresponde ao módulo do ponto com as mesmas coordenadas estimado via NSVI subtraído do mesmo ponto da superfície empírica. .... 60

## Lista de acrónimos

*ATM – At-the-money*

*OTM -Out-of-the-money*

*ITM – In-the-money*

*SVI – Stochastic volatility Inspired*

PIB – Produto interno bruto

*RSVI – Raw Stochastic Volatility Inspired*

*NSVI – Natural Stochastic Volatility Inspired*

## 1. Introdução

### 1.1. Opções Financeiras

Uma opção é um contrato que confere ao seu comprador o direito, mas não a obrigação, de comprar/vender um determinado ativo, a um preço pré-determinado e em/até uma determinada data futura.

Existem dois grandes tipos de opções: as de tipo americano, que permitem ao seu detentor exercer a opção em qualquer momento durante a vida da opção e as de tipo europeu, que permitem tal exercício apenas no momento de maturidade de opção.

Assim, o comprador pagará ao vendedor da opção um prémio no momento da negociação para que fique com o direito de opção do seu lado. O vendedor do contrato ficará assim sujeito à vontade do comprador do mesmo durante toda a sua vigência, tendo para isso cobrado o referido prémio.

E assim possível comprar (*Long*) e vender (*Short*) opções de compra (*Calls*) de um determinado ativo subjacente, bem como opções de venda (*Puts*).

### 1.2. Mercado de Opções

Apesar de não ser possível calcular um valor exacto para o valor nocional total do mercado global de derivados financeiros, onde se incluem as opções, estima-se que este seja várias vezes superior ao PIB Mundial.

As opções tanto podem ser utilizadas como instrumento de cobertura de risco ou como instrumento de especulação, sendo amplamente utilizadas pela banca de investimento para estruturar diferentes produtos. É possível combinar opções de diferentes características para criar um perfil de resultados tal que permita aproveitar qualquer que seja a visão do investidor para o comportamento previsional do ativo subjacente.

### 1.3. Modelo Black-Scholes (BSM)

O modelo de Black e Scholes (1973) tornou-se rapidamente o método mais comum para cotar opções. Este modelo define o preço teórico de uma opção de compra (*Call*) através da seguinte fórmula:

$$C = S N(d_1) - N(d_2)K e^{-r\tau} \quad (1)$$

Onde  $C$  corresponde ao preço da *Call* do tipo Europeu sobre uma acção que não pague dividendos,  $S$  é o preço à vista do ativo subjacente,  $\tau$  é o tempo em anos até à maturidade da opção,  $K$  é o preço de exercício da opção,  $r$  é a taxa de juro do ativo *sem risco*,  $N(d_1)$  e  $N(d_2)$  são a função distribuição acumulada de uma normal padrão (entendida como uma distribuição normal cujos os parâmetros são média = 0 e Variância = 1),  $\sigma$  é o desvio padrão do ativo subjacente, sendo o seu quadrado a variância e, por fim, LN o logaritmo natural de uma qualquer variável.

Por seu turno,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad (2)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \quad (3)$$

O modelo *BSM* assenta nos seguintes pressupostos: [I] É possível obter financiamento e fazer aplicações à taxa constante  $r$ , a qual representa a taxa de retorno de um ativo sem risco; [II] O preço do ativo subjacente segue um movimento Browniano geométrico, com *drift*<sup>1</sup> e volatilidade constantes; [III] A empresa não distribui dividendos; [IV] Não existem oportunidades de arbitragem; [V] É possível comprar ou vender qualquer quantidade do ativo subjacente, mesmo que seja um número não natural; [VI] Não existem custos de transacção.

Apesar da validade de muitos destes pressupostos ser questionável, o modelo continua a ser amplamente utilizado, na sua forma original ou mais comumente com algumas adaptações e extensões.

Depois da publicação do artigo de Black e Scholes (1973), passou a ser possível para os agentes de mercado de opções atingirem uma estimativa de preços com algum fundamento matemático. Os autores definiram assim que o preço de uma opção de compra seria positivamente influenciado por parâmetros como o tempo até à maturidade ( $\tau$ ), volatilidade ( $\sigma$ ), taxas de juro ( $r$ ) e *Moneyness* ( $M$ ), sendo esta última definida como:

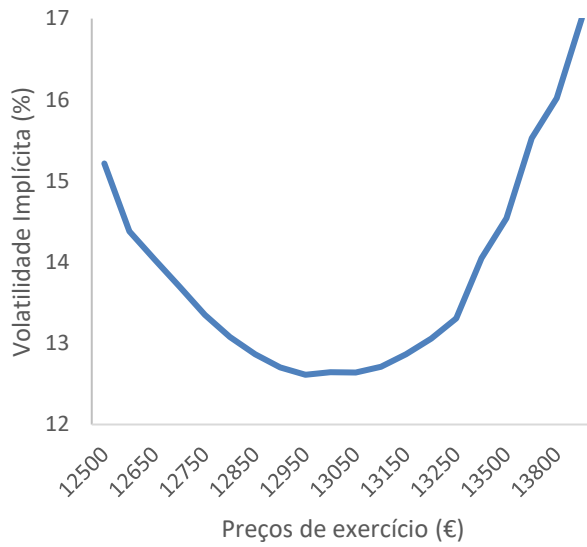
$$Moneyness (M) = \ln\left(\frac{S}{k}\right) \quad (4)$$

---

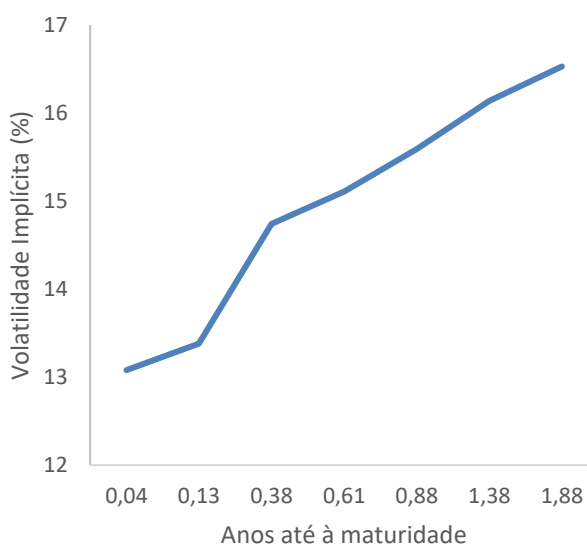
<sup>1</sup> Variação média por unidade de tempo transcorrido

Os parâmetros  $\tau$ ,  $r$  e  $M$  podem ser directamente observados em mercado. Por outro lado, existe um vasto espectro de métodos e modelos para estimar o parâmetro de volatilidade ( $\sigma$ ) a considerar no modelo.

**Figura 1.1:** Curva de volatilidade implícita das opções de compra transaccionadas na EUREX sobre o índice DAX, cujos preços de exercício estão compreendidos entre os EUR 12.500 e os EUR 14.000, no dia 03 de Agosto de 2018 com maturidade em 17 de Agosto de 2018



**Figura 1.2:** Estrutura temporal da volatilidade implícita das opções de compra transaccionadas na EUREX sobre o índice DAX, cujos preços de exercício estão compreendidos entre os EUR 12.500 e os EUR 14.000, no dia 03 de Agosto de 2018 com maturidade em 17 de Agosto de 2018



Caso o pressuposto [\[III\]](#) considerado no modelo para este parâmetro se verificasse na realidade, a volatilidade seria constante e transversal a todas as maturidades. Contudo é hoje em dia aceite por toda a comunidade académica e de praticantes de mercado que tal não se verifica, sendo, portanto, absolutamente necessário que se complemente ou substitua este modelo para o aproximar da realidade vivida no mercado. Esta continua a ser uma área muito investigada pela comunidade académica.

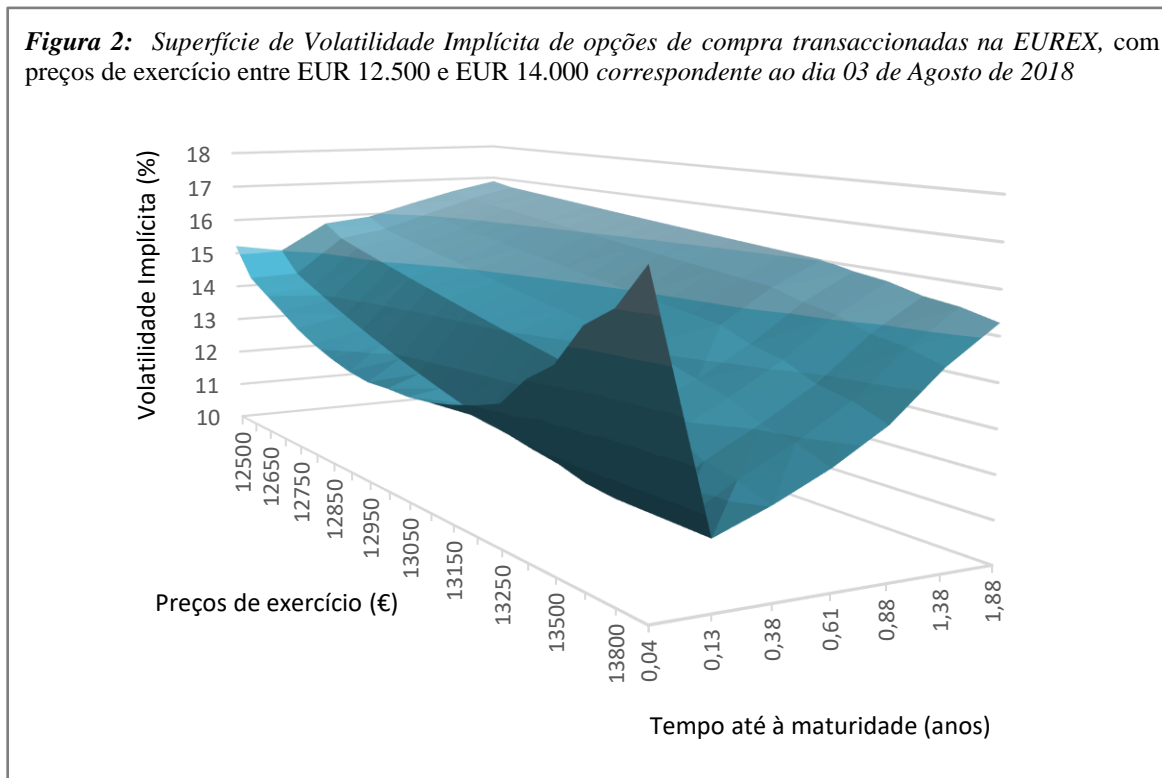
Para estudar o comportamento deste parâmetro geometricamente é comum mapear a volatilidade implícita contra a *moneyness* (ou contra o  $\text{delta}^2$  ou preço de exercício) e contra a o tempo remanescente até à maturidade da opção, constituindo assim dois gráficos (Figuras 1.1 e 1.2) a duas dimensões.

$^2 \frac{\partial C}{\partial S} = N(d1)$

Apesar dos gráficos apresentados nas imagens constituírem meros exemplos, e da forma apresentada variar consoante o tipo de ativo subjacente, pode-se afirmar que ao contrário do que prevê o modelo, ambas as linhas apresentam sempre uma inclinação positiva ou negativa, ou ambas em diferentes segmentos.

Para uma visão mais abrangente, é igualmente possível mapear as três variáveis num gráfico a três dimensões onde observamos o comportamento da volatilidade ao longo das restantes variáveis. Aqui estamos então perante a *superfície de volatilidade implícita* (Figura 2), que mais uma vez demonstra empiricamente, que a volatilidade varia consoante o tempo até à maturidade da opção e da *moneyness*; ao contrário do previsto pelo modelo *BSM* (1973) não se trata de uma superfície lisa.

**Figura 2:** Superfície de Volatilidade Implícita de opções de compra transaccionadas na EUREX, com preços de exercício entre EUR 12.500 e EUR 14.000 correspondente ao dia 03 de Agosto de 2018



Sabendo que o pressuposto (II) do modelo *BSM*, referente à superfície de volatilidade implícita é violado, importa estudar que métodos são então utilizados pelos profissionais dos mercados financeiros para ultrapassar esta limitação, e estimar este parâmetro, a fim de obter o preço de equilíbrio das diferentes opções, bem como os seus pressupostos, diferenças e limitações. Importa igualmente saber que tipo de dinâmicas moldam esta superfície ao longo do tempo, porque apesar de ser útil cotar opções em termos do referido parâmetro para efeitos de comparação entre opções com diferentes características, urge,

contudo, que se estime tal parâmetro para que seja possível encontrar o verdadeiro preço de equilíbrio de cada opção nas respectivas unidades monetárias.

## 2. Revisão de Literatura

Ao longo desta secção ir-se-ão compilar as principais obras bibliográficas que servirão de suporte para este trabalho de investigação.

### 2.1. Modelos iniciais de avaliação de opções

No ano da publicação do modelo *BSM*, Merton (1973) criou uma extensão ao modelo calculando assim o preço de equilíbrio de opções sobre acções e índices com uma *dividend yield* ( $\delta$ ) contínua. Uma vez que deter a opção sobre uma acção não confere ao seu portador o direito ao dividendo que a acção pagará, o autor considerou que a *dividend yield* ( $\delta$ ) comportar-se-ia como se de uma taxa de juro negativa se tratasse. Desta forma as equações (1) a (3) passariam a ser dadas por:

$$C = e^{-\delta \times T} S N(d_1) - N(d_2) K e^{-r\tau} \quad (5)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad (6)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \quad (7)$$

O modelo poderia ainda ser adaptado a fim de considerar acções que pagassem dividendos discretos durante a vida da opção europeia, tendo para isso tais dividendos de ser conhecidos e com data certa aquando da avaliação da opção de forma a poder subtrair-se ao preço de mercado à vista do ativo subjacente o valor do dividendo actualizado para esse mesmo momento. O autor mostrou ainda que uma *call* do tipo americano será igual a uma *call* do tipo europeu caso não haja lugar à distribuição de dividendos, não fazendo por isso sentido exercer antecipadamente tal opção. Contudo se houver lugar à distribuição de dividendos poderá ser aconselhável o exercício da opção antes do pagamento do dividendo para o poder receber, uma vez que o preço da acção será corrigido pelo valor do dividendo entretanto pago.

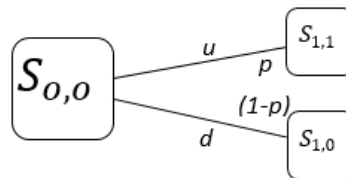
Este modelo pressupõe que o preço da acção ou índice subjacente, segue o seguinte processo



$$dS = u S dt + \sigma S dz \quad (8)$$

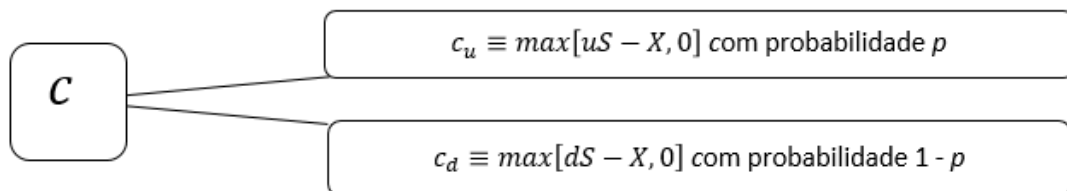
Cox, Ross e Rubinstein (1979) constituíram um modelo de avaliação de opções com base numa árvore de decisão binomial. Este modelo considera o tempo discreto e pode ser considerado matematicamente mais simples que o modelo *BSM*, sendo mais comumente utilizado para cotar acções do tipo americano que paguem dividendos. É assim assumido que em cada momento do tempo o preço do ativo subjacente ( $S$ ) só pode assumir um de dois comportamentos no momento posterior: ou sobe a proporção  $u$  para  $uS$  ou desce a proporção  $d$  para  $dS$  (com  $u > 1$  e  $d < 1$ ). A probabilidade de subida será  $p$  e a de descida será necessariamente  $d = (1-p)$ .

**Figura 3:** Processo teórico, segundo o modelo binomial, para o ativo subjacente entre o momento 0 e o momento 1 e respectivas probabilidades



O Preço da opção da *call* na sua maturidade será assim dado por:

**Figura 4:** Preço da opção de compra na sua maturidade



O modelo na sua forma mais simples procura cotar uma opção do tipo europeu que não pague dividendos. Para encontrar o preço para opções do tipo americano uma pequena alteração tem de ser feita, testando em cada *time-step*<sup>3</sup> a oportunidade de a opção ser exercida antecipadamente, através da comparação entre o valor intrínseco que se materializaria através do exercício antecipado com o valor actual do *payoff*<sup>4</sup> esperado.

<sup>3</sup> Intervalo de tempo

<sup>4</sup> Lucro esperado

Estes foram os principais modelos utilizados para encontrar o prémio de equilíbrio de contratos de opção.

## 2.2. Modelos de estimação do parâmetro de volatilidade

Black e Scholes (1973) desenvolveram um modelo que permite calcular o prémio de equilíbrio de uma opção do tipo europeu sobre uma acção que não pague dividendos. Merton (1973) através de uma ligeira extensão ao modelo permitiu que fosse igualmente possível encontrar o preço de equilíbrio de uma opção sobre acções ou índices de acções com uma determinada taxa de dividendo, tendo ainda suavizado os pressupostos do modelo permitindo, por exemplo que o parâmetro de volatilidade fosse uma função tempo.

É um facto comprovável em toda a literatura que o pressuposto referente à volatilidade tomado por Black e Scholes (1973) não se verificava na realidade e que, inclusivamente, após a *crash*<sup>5</sup> dos índices de acções em 1987, as opções com preços de exercício mais baixos começaram a apresentar níveis de volatilidade implícita superiores aos das opções semelhantes mas com preços de exercício mais altos.

Foi nesse momento que surgiu o conceito de *sorriso de volatilidade* ou *Smirk*<sup>6</sup> para descrever o comportamento do parâmetro de volatilidade ao longo da *moneyness* das opções. Duas grandes explicações foram consideradas para justificar esta assimetria no *sorriso*. A primeira delas, apresentada por Rubinstein (1994) aponta como principal motivo a *crash-o-phobia*<sup>7</sup> sentida a partir de então, o receio de que uma desvalorização acentuada como a ocorrida em 1987 voltasse a acontecer, levando os participantes do mercado a actuar em conformidade, atribuindo maior valor às opções com preços de exercício mais baixos. Outra explicação, apresentada por Hull (2015) é relativa à alavancagem da própria empresa cujas acções servem de ativo subjacente à opção em análise. Quando o valor do capital próprio da empresa diminui, devido à queda do preço das acções, a alavancagem da empresa necessariamente aumenta. Assim, quando existe um aumento no valor do capital próprio da empresa, a alavancagem é reduzida e o risco relativo às acções da empresa diminui, reduzindo-se assim igualmente a sua volatilidade.

Para além do já exposto, o facto de as opções com uma determinada maturidade comum, mas com preços de exercício diferentes, apresentarem níveis de volatilidade diferentes, tais que apresentam uma curva em forma de sorriso, esgar ou uma outra forma assimétrica

---

<sup>5</sup> Brusca desvalorização generalizada dos preços de vários ativos financeiros de referência.

<sup>6</sup> *Smirk* – esgar na tradução directa. Sorriso assimétrico.

<sup>7</sup> Receio de um potencial *crash*.

poder-se-á dever ao facto de que o pressuposto assumido no modelo *BSM* não se verifica na realidade, com os ativos financeiros a apresentarem por vezes pontos de descontinuidade e quando estes pontos correspondem a quedas têm, tendencialmente, amplitudes maiores do que quando correspondem a movimentos de subidas de preços (Haugh, 2009).

De realçar aqui que a existência desta assimetria veio impactar profundamente as estratégias de cobertura de risco que até então não contavam com este fenómeno.

A comunidade académica começou assim a procurar métodos que permitissem modelizar não só este efeito de sorriso, bem como a estrutura temporal da volatilidade, no fundo uma estrutura que permitisse montar estratégias de cobertura de risco em conformidade com o comportamento que a volatilidade apresenta.

### 2.2.1. Métodos com base em dados históricos

Uma das formas mais simples para se estimar o parâmetro de volatilidade,  $\sigma$  ou a variância,  $\sigma^2$ , passa pela utilização de dados históricos. Para isso basta definir a variável  $u_i$  como retorno continuamente composto no dia  $i$ , tal que:

$$U_i = Ln \left[ \frac{S_i}{S_{i-1}} \right] \text{ Para todo o } i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

Um estimador centrado para a variância diária, considerando as últimas  $m$  observações de  $U_i$  será então:

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (u_{n-i} - \bar{u})^2 \quad (10)$$

com

$$\bar{u} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_{n-i} \quad (11)$$

Através de algumas alterações, esta fórmula poderá ser transformada na seguinte (Hull, 2015):

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_{n-i}^2 \quad (12)$$

O problema com esta abordagem prende-se com o facto de atribuir a mesma relevância a todas as observações, independentemente de serem mais ou menos recentes. Para ultrapassar esta limitação, considerando que as observações mais recentes têm uma preponderância maior do que as mais antigas, poder-se-á optar pela seguinte forma (Hull, 2015):

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{n-i}^2 \quad (13)$$

Acrescenta-se assim um ponderador  $\alpha_i$  a cada observação passada, que será sempre positivo e progressivamente maior quanto mais recente for a observação. Será então imperioso que a soma de todos os  $\alpha_i$  seja igual à unidade (Hull, 2015).

Para complementar a fórmula anterior poder-se-á assumir que existe uma média de longo-prazo para a variância que permitirá alterar o modelo para:

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{n-i}^2 \quad (14)$$

Atribuindo-se assim um ponderador  $\gamma$  à média de longo-prazo da variância,  $V_L$ . Este modelo é conhecido como ARCH(m)<sup>8</sup>(Engle, 1982). Considerando  $w$  como o produto entre  $\gamma$  e  $V_L$  o modelo assumirá a seguinte fórmula:

$$\sigma_n^2 = w + \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{n-i}^2 \quad (15)$$

Igualmente, o parâmetro de volatilidade poderá ser estimado através da média móvel exponencialmente ponderada (ou EWMA<sup>9</sup>). Este modelo atribui mais preponderância às observações mais recentes e uma progressivamente menor preponderância às observações mais antigas. A estimativa de volatilidade será assim dada por:

$$\sigma_n^2 = \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1 - \lambda) u_{n-1}^2, \quad (16)$$

---

<sup>8</sup> *AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity* – Heteroscedasticidade Condicional Autoregressiva

<sup>9</sup> *Exponentially Weighted Moving Average*

onde  $\lambda$  é uma constante entre 0 e 1. Em 1994, a base de dados *Riskmetrics*, criada pelo *JPMorgan & Chase*, utilizou este modelo atribuindo o valor  $\lambda=0,94$  (Hull, 2015).

A principal vantagem deste método passa pela reduzida quantidade de dados necessários para o seu cálculo apresentando, contudo, a limitação de não tender para a média de longo-prazo, algo que é uma característica para a variável volatilidade (Gatheral, 2006).

Outro método a considerar para estimar o parâmetro de volatilidade é o Modelo heteroscedasticidade condicional auto-regressiva generalizada (GARCH<sup>10</sup>) (Bollerslev, 1986), que o faz através do seguinte sistema de equações:

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \alpha \mu_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \quad (17)$$

$$\gamma + \alpha + \beta = 1 \quad (18)$$

Para estimar o parâmetro de volatilidade para uma data futura o modelo assumirá a seguinte fórmula:

$$E\{\sigma_{n+t}^2\} = V_L + (\alpha + \beta)^t (\sigma_n^2 - V_L) \quad (19)$$

sendo  $V_L$  a média de longo-prazo da variância e  $\gamma$  o respectivo ponderador.

Este modelo define a volatilidade como uma variável com tendência de retorno à média de longo-prazo.

Contudo, uma das limitações deste modelo passa pelo facto de não incorporar o eventual fenómeno de assimetria nos mercados financeiros, por apenas considerar os retornos quadrados, não diferenciando assim entre subidas e descidas. É comum encontrar ao longo de diferente literatura evidência que mostre que depois de um movimento brusco de descida do mercado a volatilidade aumenta mais do que depois de um movimento da mesma magnitude, mas em sentido ascendente. Este fenómeno pode, mais uma vez, ser justificado pelo receio evidenciado pelos investidores em relação aos movimentos de descida do preço dos ativos, aumentando assim o volume de negociação, ou devido ao incremento no risco da empresa devido ao aumento da alavancagem da empresa, causado pela redução do valor do seu capital próprio.

---

<sup>10</sup> *Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity model*

### 2.2.2. Modelos de Volatilidade local (determinísticos)

Os modelos de volatilidade local consideram este parâmetro determinístico, como uma função do preço do ativo subjacente e tempo, tendo sido criados com o intuito de permitir aos agentes de mercado cotarem os seus instrumentos de cobertura e opções exóticas coerentemente com os preços de mercado de opções do tipo europeu.

Estes modelos têm como base teórica o processo sugerido por Breeden e Litzenberg (1978) que permitia calcular a função densidade probabilidade de equilíbrio do preço de mercado do ativo subjacente na maturidade  $t$ , consistente com os preços de mercado das opções simples (*plain vanilla*<sup>11</sup>) do tipo europeu.

Derman e Kani (1994) por seu turno, através da construção de uma versão (em tempo discreto) de uma árvore binomial, conseguiram demonstrar que existe, em equilíbrio, um único processo de difusão consistente com os preços de mercado das opções de tipo europeu cotadas em mercado.

Emanuel Dupire (1994) chegou precisamente à mesma conclusão, mas considerando o tempo como uma variável contínua.

Estes autores consideraram assim que existiria um coeficiente de difusão,  $\sigma(S, T)$ , consistente com os preços de mercado das opções europeias, atingindo assim a Função de Volatilidade Local. Desta forma, o parâmetro de volatilidade não seria estocástico, mas sim determinístico, dependendo apenas do preço à vista do ativo subjacente e do tempo.

Dupire (1994) demonstrou que para uma determinada data de maturidade e para um determinado preço actual do ativo subjacente, o conjunto dos preços  $C(S_0, K, T)$  das opções implicavam uma determinada função densidade probabilidade do preço spot ( $S_T$ ) do ativo subjacente, na maturidade da opção, através da seguinte relação:

$$C(S_0, K, T) = \int_K^{\infty} dS_t \varphi(S_T, T; S_0) (S_T - K), \quad (20)$$

onde  $\varphi(S_T, T; S_0)$  representaria assim a função densidade probabilidade do preço do ativo subjacente  $S$ , na maturidade  $T$ , sabendo o valor presente desse mesmo ativo.

---

<sup>11</sup> Termo usado para descrever o derivado financeiro na sua forma mais simples (Hull, 2015)

Partindo desta relação o autor atingiu a seguinte equação que permite relacionar o Preço  $C$  da *Call* com o seu respectivo preço de exercício,  $k$ :

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{\sigma^2 K^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} + (r_t - D_t) \left( C - K \frac{\partial C}{\partial K} \right) \quad (21)$$

Conforme demonstrado por Gatheral (2006), a função de volatilidade local é assim dada por:

$$\sigma^2(K, T, S_0) = \frac{\frac{\partial C}{\partial T}}{\frac{1}{2} K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}} \quad (22)$$

Todos os parâmetros desta função podem ser obtidos com base nos preços de mercado das opções europeias sobre o mesmo ativo subjacente.

Contudo, segundo Gatheral (2006) a volatilidade local não consegue capturar as dinâmicas de evolução da superfície de volatilidade representando apenas uma média das volatilidades instantâneas.

### 2.2.3. Modelos de Volatilidade Estocástica

Heston (1993) construiu um modelo matemático, considerando o tempo contínuo e a volatilidade como uma variável estocástica, que permitia calcular o preço de uma opção do tipo Europeu. Considera-se então neste tipo de modelo que a volatilidade possui em si própria alguma aleatoriedade, não podendo, portanto, ser considerada determinística. O modelo assume ainda que o preço do ativo subjacente está correlacionado com a volatilidade e que a variância dos retornos do ativo subjacente segue um processo de raiz quadrada. É ainda assumida a inexistência de qualquer oportunidade de arbitragem. O preço do ativo subjacente  $S_t$  e a variância  $v_t$  seguem então o seguinte processo estocástico:

$$dS_t = r dt + \sqrt{v_t} dW_{1,t} \quad (23)$$

$$dv_t = k(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t} dW_{2,t}, \quad (24)$$

sendo um dos principais avanços deste modelo a consideração da existência de dois movimentos *Brownianos* geométricos, correlacionados entre si com o coeficiente  $\rho$ , um



deles a influenciar o processo do ativo subjacente  $W_{1,t}$  e o outro a influenciar o processo seguido pela volatilidade  $W_{2,t}$ . Os parâmetros  $\theta, k, \sigma$  são constantes e correspondem respectivamente à média de longo-prazo da variância<sup>12</sup>, à taxa de retorno de  $v_t$  à sua média  $\theta$  e, finalmente,  $\sigma$  é a volatilidade da volatilidade. Por seu turno,  $r$  corresponde à taxa de juro do ativo sem risco

Neste modelo, o preço de uma opção de compra do tipo europeu com maturidade  $T$  e com o preço de exercício  $X$  é dado pela seguinte fórmula:

$$c(S, v, t) = SP_1 - Xe^{-r\tau}P_2, \quad (25)$$

com as probabilidades  $P_{1,2}$  serem dadas por:

$$P_j(\ln S, v, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\phi \ln(X)} f_j(\ln S, v, t, \phi)}{i\phi} \right] d\phi \quad (26)$$

$$f_j(\ln S, v, t, \phi) = \exp(A(\tau; \phi) + \beta(\tau; \phi) + i\phi S) \quad (27)$$

Algumas das características mais interessantes deste modelo passam pelo facto deste apresentar correlação entre o ativo financeiro subjacente e a sua volatilidade, algo que se observa empiricamente, bem como o facto de definir esta variável como um processo de raiz quadrada com tendência de retorno à média tal como havia sido defendido por Cox et al. (1979).

Nos seus estudos, Heston (1993) concluiu ainda que o modelo *BSM* sobreavalia opções *out-of-the-money*<sup>13</sup> e subvaloriza opções *in-the-money*<sup>14</sup>, quando a correlação entre a volatilidade e a rendibilidade do ativo subjacente é negativa. O oposto acontece no caso contrário. Apesar da sua atraente forma fechada, o elevado número de parâmetros deste modelo dificulta a sua aplicação prática, sendo ainda necessário estimar um parâmetro adicional conhecido como o prémio de risco da volatilidade. Segundo o autor (Heston, 1993), este parâmetro poderá ser derivado de outros ativos cujos lucros estejam directamente dependentes da volatilidade, algo que poderá não ser fácil de empregar na

<sup>12</sup> Quando  $t$  tende para infinito o valor esperado de  $v_t$  tende para  $\theta$

<sup>13</sup> Opções de Compra (Venda) cujo Preço de Exercício é mais alto (Baixo) do que o preço à vista do Ativo Subjacente

<sup>14</sup> Opções de Compra (Venda) cujo Preço de Exercício é mais baixo (Alto) do que o preço à vista do Ativo Subjacente

prática. Gatheral (2006) considerou que as dinâmicas capturadas pelo modelo de Heston (1993) não são próximas da realidade. Segundo outro autor (Hull, 2015), o impacto no preço das opções por se considerar a volatilidade como uma variável estocástica, desde que a maturidade destas seja inferior a um ano, é razoavelmente desprezável.

#### 2.2.4. Modelos baseados em representações paramétricas

##### 2.2.4.1 Parametrização Polinomial (PP)

Conforme visto anteriormente, cada conjunto de opções sobre um mesmo ativo e com diferentes preços de exercício, mas com a mesma maturidade, tende a apresentar uma função de volatilidade com a forma de um *sorriso* mais ou menos simétrico, caso o ativo subjacente se trate de um par de moedas ou de um *smirk* caso o ativo subjacente seja uma acção ou um índice de acções. É assim fácil começar por tentar adaptar uma função quadrática que permita capturar tal forma funcional e que calibre de forma eficaz com os dados empíricos. Aumentar o grau da função não melhorará os resultados obtidos (Homescu, 2011).

Contudo, devido às diferentes formas que a função de volatilidade apresenta para diferentes maturidades, é virtualmente impossível encontrar uma função que apresente resultados satisfatórios para toda a superfície. Ou seja, a *função de volatilidade* muda consoante o ativo subjacente, o tempo até à maturidade, etc., pelo que não é fácil encontrar uma fórmula quadrática, ou mesmo de grau superior, que consiga apresentar uma soma de resíduos desprezível. É assim usual que se procure estimar a função e respectivos parâmetros para cada *sorriso* de forma independente, procurando posteriormente interpolar os pontos entre cada um.

Assim, Dumas, Fleming e Whaley (1998) estudaram algumas formas funcionais para a função de volatilidade e procuraram testar a estabilidade da função de volatilidade implícita, analisando se a função implícita dos dados empíricos no momento  $t$  (na amostra) é a mesma implícita nos dados correspondentes no momento  $t+1$  (fora da amostra).

Os autores consideraram que os modelos de volatilidade estocástica, como o modelo de Heston (1993), ou os modelos de *saltos* como o de Bates (1996) eram computacionalmente muito mais complexos e poderiam não garantir as condições de não arbitragem que servem de base a toda a teoria financeira. Estes modelos necessitariam ainda de pressupostos adicionais como a sensibilidade do investidor face ao risco ou

ativos adicionais que permitissem fazer a cobertura da volatilidade ou do *risco de salto*. Desta forma, o modelo da Função Determinística de Volatilidade alia a sua simplicidade à garantia do respeito pelas condições de não arbitragem nas quais assenta o modelo *BSM*, uma vez que os únicos parâmetros a serem estimados são apenas aqueles que governam o processo seguido pelo parâmetro de volatilidade.

Os autores encontraram alguns comportamentos interessantes no parâmetro de volatilidade, nomeadamente na correlação negativa entre movimentos do ativo subjacente e movimentos no parâmetro de volatilidade. Procuraram assim calibrar as seguintes funções de volatilidade (as quais tratam a volatilidade de uma forma local, uma vez que a tomam como uma função determinística do tempo até à maturidade e do preço do ativo subjacente) aos dados empíricos retirados do mercado, utilizando para isso opções da *CBOE*<sup>15</sup>, do tipo europeu, sobre o índice *S&P500* durante o período Junho de 1988 a Setembro de 1993:

Modelo 0:  $\sigma = \max(0,01, \alpha_0)$ ;

Modelo 1:  $\sigma = \max(0,01, \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2)$ ;

Modelo 2:  $\sigma = \max(0,01, \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 T + \alpha_5 XT)$ ;

Modelo 3:

$$\sigma = \max(0,01, \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 T + \alpha_4 T^2 + \alpha_5 XT) \quad (28)$$

Aplicaram, posteriormente, o método dos mínimos quadrados ordinários, fazendo variar os coeficientes  $\alpha$ . De seguida, os autores estudaram as seguintes medidas para atestar a qualidade das diferentes funções de volatilidade:

- Raíz quadrada do erro de avaliação ao quadrado (*RMSVE – Root mean squared valuation error*) – é a raiz quadrada da diferença quadrada entre o preço de mercado das opções e o preço teórico calculado através do modelo
- Error exterior médio (*MOE – Mean Outside Error*) – é o erro de avaliação médio dos valores que caem fora do spread entre as cotações de compra (*bid*) e as cotações de venda (*ask*). Caso o valor se encontre dentro do referido spread, o valor a considerar será de zero.

---

<sup>15</sup> *Chicago Board Options Exchange*

- Erro absoluto médio (*MAE – Mean Absolute Error*) - é o erro de avaliação médio absoluto dos valores que caem fora do spread entre as cotações de compra (*bid*) e as cotações de venda (*ask*).
- Frequência (*FREQ – Frequency*) – indica a proporção de observações em que o modelo apresenta uma raiz quadrada do erro de avaliação ao quadrado inferior ao apresentando por um modelo que utiliza a função de volatilidade do modelo 1, 2 ou 3.
- (*AIC – Akaike Information Criterion*) – indica a qualidade relativa da calibração do modelo.

No cômputo geral, os autores concluíram que a forma que mais se adequaria como estimador para o parâmetro de volatilidade seria dado pela equação (28), apesar de considerarem que os seus parâmetros não são estáveis ao longo do tempo.

Os resultados encontrados não apresentaram um modelo propriamente eficaz, no sentido em que a fraca estabilidade dos parâmetros ao longo do tempo não permite uma aplicação prática útil desta forma funcional.

#### 2.2.4.2 Parametrização paramétrica inspirada em volatilidade estocástica

Gatheral (2006) apresentou um conjunto de formas funcionais para parametrizar a superfície de volatilidade inspirando-se em modelos de volatilidade estocástica, mantendo sempre a consistência com condições de não arbitragem estática.

O autor baseou-se na *fórmula do momento* preconizada por Lee (2003) que obriga a que cada *sorriso* seja linear em relação ao logaritmo do preço de exercício  $K$  e que o declive máximo da variância implícita total seja 2. Estas condições permitiram-lhe chegar a uma parametrização da superfície de volatilidade implícita que a torna linear nas abas e curvilínea a meio, capturando assim o *efeito sorriso*, permitindo concomitantemente a extrapolação para preços de exercício extremos.

Definiram-se assim as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned} \sigma_{BS}(k, t) &\equiv \text{Volatilidade Implícita de Black e Scholes} \\ w(k, t) &= \sigma_{BS}^2(k, t) t \equiv \text{Variância Implícita total} \end{aligned} \quad (29)$$

$$v(k, t) = \frac{\sigma_{BS}^2(k, t)}{t} \equiv \text{Variância Implícita} \quad (30)$$

A parametrização baseada em volatilidade estocástica defende assim que, dado o conjunto de parâmetros  $\chi_R = \{a, b, \rho, m, \sigma\}$  a variância implícita total é sempre positiva e aumenta linearmente com o *log-strike*<sup>16</sup>  $k$  através da seguinte forma:

$$w(K; \chi_R) = a + b \left\{ \rho(k - m) + \sqrt{(k - m)^2 + \sigma^2} \right\} \quad (31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k = \log\left(\frac{K}{F_T}\right) \\ a \in \mathbb{R} \\ b \geq 0 \\ \sigma > 0 \\ |\rho| < 1 \\ m \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (32)$$

Para garantir que a função é sempre não negativa, pois a volatilidade nunca o poderá ser, é necessário que a seguinte condição seja verificada (Gatheral e Jacquier, 2014)

$$a + b \sigma \sqrt{1 - \rho^2} \geq 0 \quad (33)$$

As assíntotas esquerda e direita desta função são respectivamente (De Marco e Martini, 2009):

$$v_L(x) = a - b(1 - \rho)(x - m) \quad (34)$$

$$v_R(x) = a + b(1 - \rho)(x - m) \quad (35)$$

sendo  $a$  o nível absoluto de variância,  $b$  o ângulo entre a assíntota esquerda e direita,  $\rho$  determina a suavidade do vértice,  $m$  determina a orientação da curva e, por fim,  $\sigma$  translada o gráfico.

Com esta parametrização o autor conseguiu calibrar os resultados obtidos de forma bastante eficaz não só com os dados de mercado bem como com outros modelos teóricos como o modelo de Heston (1993) e o modelo de saltos de Bates (1996).

Mais tarde, (Gatheral e Jacquier, 2014) novas parametrizações equivalentes foram apresentadas que permitiram melhor modelizar a variância total implícita. Partiram assim

<sup>16</sup> Logaritmo do preço de exercício

da parametrização já descrita, classificando-a como Parametrização Original Inspirada em Volatilidade Estocástica (*Raw SVI*), e teorizaram o que seria a Parametrização Natural Inspirada em Volatilidade Estocástica (*Natural SVI*).

Fizeram corresponder ao anterior conjunto de parâmetros  $\chi_R = \{a, b, \rho, m, \sigma\}$  novos parâmetros:

$$(a, b, \rho, m, \sigma) = \left( \Delta + \frac{\omega}{2}(1 - \rho^2), \frac{\omega\zeta}{2}, \rho, \mu - \frac{\rho}{\zeta}, \frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{\zeta} \right), \quad (36)$$

modelizando assim a Variância implícita total através da seguinte fórmula com o conjunto de parâmetros  $\chi_N = \{\Delta, \mu, \rho, \omega, \zeta\}$ :

$$w(k; \chi_N) = \Delta + \frac{\omega}{2} \left\{ 1 + \zeta\rho(k - u) + \sqrt{(\zeta(k - u) + \rho)^2 + (1 - \rho^2)} \right\}, \quad (37)$$

Com

$$\left\{ \begin{array}{l} k = \log\left(\frac{K}{F_T}\right) \\ \Delta \in \mathbb{R} \\ \omega \geq 0 \\ \zeta > 0 \\ |\rho| < 1 \\ u \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (38)$$

Ambas as parametrizações conseguiram calibrar de forma bastante eficiente com o *sorriso* de mercado de uma maturidade, especialmente no que concerne a opções sobre índices de ações (De Marco & Martini, 2009). Por outro lado, estas parametrizações não são intuitivas para os agentes de mercado e empiricamente, os valores dos dois conjuntos de parâmetros,  $\chi_R$  e  $\chi_N$ , não são particularmente estáveis ao longo do tempo (Gatheral & Jacquier, 2014).

Os autores partiram assim desta parametrização para um novo método, procurando então parametrizar a Variância Implícita, o qual apelidaram de Parametrização Inspirada em Volatilidade Estocástica com Saltos e Asas (*SVI Jump-Wings*) através da criação de um novo conjunto de parâmetros  $\chi_J = \{v_t, \psi_t, p_t, c_t, \tilde{u}_t\}$  que se relaciona com o conjunto  $\chi_R$  através das seguintes formas:

$$v_t = \frac{a+b \{-\rho m + \sqrt{m^2 + \sigma^2 g}\}}{t} \quad (39)$$

$$\psi_t = \frac{1}{\sqrt{w_t}} \frac{b}{2} \left( -\frac{m}{\sqrt{m^2 + \sigma^2}} + \rho \right) \quad (40)$$

$$p_t = \frac{1}{\sqrt{w_t}} b (1 - p) \quad (41)$$

$$c_t = \frac{1}{\sqrt{w_t}} b (1 + p) \quad (42)$$

$$\tilde{v}_t = \frac{1}{t} \left( a + b \sigma \sqrt{1 - p^2} \right) \quad (43)$$

Cada um destes parâmetros tem uma interpretação geométrica,  $v_t$  corresponde à variância do nível *ATM*,  $\psi_t$  ao enviesamento nesse mesmo também *ATM*,  $p_t$  e  $c_t$  correspondem respectivamente à aba esquerda e direita e por fim  $\tilde{v}$  corresponde à variância implícita mínima.

No caso desta parametrização, se for um facto que os *sorrisos* são escaláveis através da razão  $\frac{1}{\sqrt{w_t}}$ , algo consistente com as dinâmicas observadas empiricamente, os parâmetros, pelo menos assintoticamente, manter-se-iam constantes independentemente do plano da superfície que considerarmos.

O mesmo autor aprofundou ainda mais o seu trabalho, tendo criado uma extensão à parametrização natural já aqui apresentada, apresentando então a seguinte fórmula para a parametrização da variância total:

$$w(k_t, \theta_t) = \frac{\theta_t}{2} \left\{ 1 + \rho \varphi(\theta_t) k + \sqrt{(\varphi(\theta_t) k + p)^2 + (1 - p^2)} \right\} \quad (44)$$

Esta parametrização tem como particularidade considerar o tempo não como dias de calendário normais, mas sim como *tempo de variância ATM*<sup>17</sup>. A variância total *ATM* é definida por:

$$\theta_t = \sigma_{Black\&Scholes}^2(0, t) t \quad (45)$$

<sup>17</sup> ATM = At-The-Money → Opções cujo preço de exercício é igual ao preço à vista do ativo subjacente

Para garantir que esta parametrização apresenta uma superfície de volatilidade implícita livre de qualquer tipo de arbitragem estática, é estritamente necessário que as seguintes condições se verifiquem.

$$\partial_t \theta_t \geq 0 \quad \forall t \geq 0; \quad (46)$$

$$\partial_\theta (\theta_\varphi(\theta)) \geq 0 \quad \forall \theta > 0; \quad (47)$$

$$\partial_\theta \varphi(\theta) < 0 \quad \forall \theta > 0; \quad (48)$$

$$\theta \varphi(\theta)(1 + |\rho|) < 4; \quad (49)$$

$$\theta \varphi(\theta)^2(1 + |\rho|) < 4; \quad (50)$$

Caso se verifiquem as condições enunciadas, a respectivas superfícies serão livres de arbitragem de calendário, devido às três primeiras condições, e de *butterfly* devido às duas restantes condições.



### 2.3. Modelos de Calibração/Otimização

A forma mais comumente utilizada para calibrar os dados obtidos via modelo com os dados empíricos é através do método dos mínimos quadrados ordinários.

Contudo, os modelos utilizados neste trabalho apresentam formas funcionais complexas e um conjunto nunca inferior a cinco parâmetros. Desta forma, calibrar todos os parâmetros de uma vez, mesmo que sujeitos a várias restrições para que não se criem condições de arbitragem, pode não ser muito eficaz uma vez que as formas funcionais podem apresentar vários mínimos locais, tornando difícil o cálculo do mínimo global da função objectivo.

A empresa *Zeliade Systems* já provou então haver uma forma não menos eficaz de fazer tal calibração, especialmente no que concerne a opções sobre índices de acções (De Marco & Martini, 2009). O processo passará então por, através de uma alteração de variáveis, otimizar a função em dois passos diferentes. Passando a considerar a variância implícita total e a incluir a variável  $y$ , tal que

$$y = \frac{x - m}{\sigma}, \quad (51)$$

a nova parametrização passará a ter a seguinte forma funcional, mantendo assim fixos os valores das variáveis  $m$  e  $\sigma$ :

$$\tilde{v}(y) = a + b\sigma T \left( \rho y + \sqrt{y^2 + 1} \right) \quad (52)$$

Definindo então novos parâmetros com base nos antigos, tais que

$$c = b\sigma T \quad (53)$$

$$d = \rho b\sigma T \quad (54)$$

$$\tilde{a} = aT \quad (55)$$

passamos à correspondente forma funcional:

$$\tilde{v}(y) = \tilde{a} + dy + c\sqrt{y^2 + 1} \quad (56)$$

E o problema de optimização passará a ser então:

$$\text{Min. } f_{\{y_i, v_i\}}(c, d, \tilde{a}) = f(c, d, \tilde{a}) = \sum_{i=1}^n \left( \tilde{a} + dy_i + c\sqrt{y_i^2 + 1} - \tilde{v}_i \right)^2 \quad (57)$$

$$\tilde{v}_i = Tv_i, \quad (58)$$

sujeito ao seguinte domínio:

$$D = \begin{cases} 0 \leq c \leq 4\sigma \\ |d| \leq c \text{ e } |d| \leq 4\sigma - c \\ 0 \leq \tilde{a} \leq \max\{\tilde{v}_i\} \end{cases} \quad (59)$$

Tendo então otimizado os referidos parâmetros resta agora otimizar os dois restantes,  $m$  e  $\sigma$  que foram mantidos fixos durante a fase inicial através da seguinte equação:

$$\text{Min}_{m, \sigma} \sum_{i=1}^n \left( v_{m, \sigma, a^*, b^*, \rho^*}(x_i) - v_i \right)^2 \quad (60)$$

## 2.4. Características da Superfície de Volatilidade Implícita e do comportamento dos ativos subjacentes

Desde que se começou a verificar a existência de uma superfície de volatilidade não plana que vários autores têm procurado encontrar algumas características comuns às diferentes superfícies.

Algumas das características já estudadas para o comportamento da superfície de volatilidade são as seguintes:

1. A assimetria da curva de volatilidade para uma determinada data de maturidade fixa é mais pronunciada nas opções com maturidades mais curtas e torna-se progressivamente mais suave à medida que o prazo de vencimento da opção aumenta (Fengler, 2012).
2. No caso de opções sobre acções ou índices de acções o *sorriso de volatilidade* é negativamente assimétrico e configura-se mais como um *smirk*. Esta assimetria torna-se mais pronunciada em períodos de maior volatilidade nos mercados (Fengler, 2012).
3. As flutuações na volatilidade implícita de opções de curto-prazo são mais violentas do que as ocorridas nas opções de prazos mais alargados (Fengler, 2012).
4. Tipicamente a superfície de volatilidade implícita tem uma inclinação positiva ao longo da variável tempo até à maturidade mas não em demasia, em tempos de baixa volatilidade de mercado e apresenta uma inclinação negativa em tempos de alta volatilidade, com as opções de curto prazo a apresentarem volatilidades mais altas que as opções de longo prazo (Fengler, 2012).
5. Movimentos do preço do ativo subjacente são negativamente correlacionados com movimentos da volatilidade implícita (Fengler, 2012).
6. As volatilidades dos ativos financeiros apresentam uma tendência de retorno à média de longo-prazo apesar de não ser fácil provar tal tendência estatisticamente (Fengler, 2012).

Contudo, existe um argumento económico que poderá justificar tal comportamento uma vez que se tal não se verificasse, e a volatilidade de um ativo financeiro não apresentasse um comportamento de retorno à média, a probabilidade desta volatilidade ser inferior a 100% seria manifestamente reduzida, podendo assim tal ativo apresentar uma volatilidade com um valor muito

elevado ou mesmo a tender para infinito. Porém é sabido empiricamente, através de dados de volatilidade histórica ou implícita, que as volatilidades dos ativos financeiros encontram-se, tipicamente entre os 10% e os 60% o que nos leva a concluir que esta variável apresenta, de facto, uma tendência de retorno à média de longo-prazo (Gatheral, 2006).

7. Choques ao longo da superfície são altamente correlacionados (Fengler, 2012).

Existem igualmente algumas características relevantes do comportamento do ativo subjacente, ativos financeiros de uma forma geral, que importam também ressaltar no âmbito deste trabalho, no sentido em que impactam o comportamento do parâmetro de volatilidade, dos quais destaco os seguintes:

1. Existe uma tendência nos ativos financeiros para que movimentos expressivos nos retornos tendem a preceder movimentos expressivos e movimentos pouco significativos tendem a preceder a movimentos pouco significativos, algo definido como *Volatility Clustering*<sup>18</sup>(Gatheral, 2006).
2. A distribuição do logaritmo dos retornos de um ativo financeiro tende a apresentar excesso de Curtose e *fat-tails*<sup>19</sup> face à distribuição normal. (Gatheral, 2006). A não normalidade de tal distribuição, a assimetria destes retornos e as abas pesadas, são alguns dos fenómenos que justificam o aparecimento de um *sorriso de volatilidade* ou apenas de assimetria na função de volatilidade Implícita. (Homescu, 2011)
3. Os ativos financeiros nem sempre se comportam como previsto pelo movimento Browniano geométrico, apresentando por vezes pontos de descontinuidade. (Haugh, 2009)

---

<sup>18</sup> Agrupamento de volatilidade na tradução directa.

<sup>19</sup> Mais observações nas abas da distribuição

### 3. Dados

Para o estudo de alguns dos modelos paramétricos anteriormente citados foi construída uma base de dados com um conjunto de opções de compra do tipo europeu transaccionadas na EUREX, dividido em oito subconjuntos correspondentes a opções com uma data de maturidade comum. Foram consideradas as séries históricas das volatilidades implícitas correspondentes à cotação média de cada opção, desde a data de criação de cada conjunto de opções até ao dia 03 de Agosto de 2018.

No Anexo 1 encontra-se a listagem da totalidade dos contratos de opção, bem como das suas características.

Para efeitos de actualização e capitalização de fluxos financeiros, foram consideradas as taxas à vista inerentes à dívida pública alemã, tendo sido interpoladas de forma linear para cada uma das datas de maturidade, conforme o Anexo 2.

Foi ainda considerada a série de preços de fecho do índice DAX para o período em apreço para o cálculo dos respectivos preços a prazo para cada uma das maturidades dos subconjuntos de opções.

Uma vez que todos os contratos são cotados em euros, nenhum ajustamento cambial foi feito.

Todos os dados foram retirados do sistema *Bloomberg*.

## 4. Metodologia

Depois de apresentados os principais modelos de avaliação de opções bem como de cálculo do parâmetro de volatilidade, concluída a revisão de literatura e apresentação dos dados, o presente capítulo pretende detalhar o método que será seguido para o estudo da eficiência e eficácia de alguns dos modelos paramétricos apresentados.

A escolha por modelos paramétricos para a representação da superfície de volatilidade prende-se com o facto destes poderem ser implementados sem uma grande exigência computacional, bem como pelo facto de devido ao seu número de parâmetros, conseguirem tipicamente calibrar de forma bastante eficaz com os dados de mercado (Hull, 2015).

O conjunto de dados apresentado referente aos ativos financeiros apresentados no anexo 1 foi então tratado e normalizado, de forma a permitir a implementação dos modelos.

Foram seleccionados o modelo polinomial (Dumas et al., 1998), a parametrização original inspirada em volatilidade estocástica e a parametrização natural inspirada em volatilidade estocástica (Gatheral e Jacquier, 2014).

Para a implementação e estudo destes modelos será necessário calcular as taxas de juro à vista que serão utilizadas na actualização de fluxos monetários. Uma vez que trabalharemos com opções sobre o principal índice de acções alemão, o *DAX*<sup>20</sup>, consideramos adequado utilizar a estrutura de taxas de juro associada à dívida pública alemã. Desta forma, através do sistema *Bloomberg*, retirámos as taxas de juro à vista, e interpolaremos de forma linear para cada uma das datas de maturidade de cada subconjunto de opções em estudo a respectiva taxa de juro, conforme Anexo 2. Consideramos importante ressaltar aqui que à data considerada como fim do período em análise a curva de taxas de juro alemã encontrava-se em território negativo até sensivelmente aos seis anos e uma vez que as opções que iremos considerar na nossa análise são do tipo europeu e transaccionadas em mercado organizado, têm datas de maturidade relativamente curtas e certamente inferiores a seis anos, pelo que as taxas de juros consideradas são sempre negativas. Optámos por não acrescentar nenhum diferencial a este conjunto de taxas com o intuito de as tornar positivas, ou no mínimo

---

<sup>20</sup> *Deutscher Aktienindex*

não negativas, pois quisemos que a nossa análise fosse o mais próxima possível da realidade. No Anexo 2 poder-se-ão encontrar as taxas de juros calculadas.

Depois de conhecida a estrutura temporal de taxas de juro e interpolados os pontos necessários, serão calculadas duas medidas equivalentes, com base nos dados empíricos já descritos retirados do sistema *Bloomberg* que correspondem a séries históricas do parâmetro de volatilidade implícita correspondente ao preço de fecho diário do conjunto de opções.

O parâmetro de volatilidade aqui mencionado corresponde ao desvio-padrão  $\sigma_{BS}(K, t)$ , pelo que se tornou necessário o cálculo da variância total implícita e da variância implícita, conforme as equações (29) e (30), respectivamente

Tais cálculos devem-se ao facto dos modelos inspirados em volatilidade estocástica calibrarem de forma mais eficaz, em teoria, considerando a variância total implícita.

Posteriormente, com base na estrutura de taxas de juro já calculada e nas cotações de fecho do índice DAX, serão calculados os preços a prazo deste índice para cada uma das datas de vencimento dos diferentes conjuntos de opções. Tais cálculos terão por base a seguinte fórmula, onde  $F_t$  corresponde ao preço a prazo,  $S_0$  ao preço à vista do ativo subjacente e  $r$  à taxa de juro entre 0 e a maturidade  $t$ :

$$F_t = S_0 e^{(r-\delta)t} \quad (61)$$

Os modelos paramétricos em análise utilizam para o cálculo da volatilidade implícita estimada, a *moneyness* da opção ou o logaritmo do preço de exercício que serão calculados respectivamente através das seguintes fórmulas

$$m = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right)}{\sqrt{t}} \quad (62)$$

$$\text{Log - strike} = \text{Ln} \left( \frac{K}{F} \right) \quad (63)$$

A escolha por este tipo de *moneyness* e não por um tipo mais simples, deve-se ao facto de a dispersão ser proporcional à raiz quadrada do tempo, algo que se configura como um dos pressupostos de um movimento browniano geométrico. Como tal, faz sentido

incorporar esta dinâmica no cálculo uma vez que iremos tratar de opções com diferentes maturidades. Os valores aqui calculados serão então computados nas fórmulas de volatilidade dos modelos.

Passaremos então à implementação do primeiro modelo, no caso o polinomial. Para isso será necessário criar o conjunto de cinco parâmetros aleatórios,  $\chi_p = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ , e serão parametrizadas oito rectas independentes, uma correspondente a cada uma das curvas de volatilidade implícitas que obteremos através dos dados empíricos, ou seja será ajustada uma curva através do modelo para cada curva empírica correspondente a uma data de maturidade de um subconjunto das opções em análise.

Assim, a cada subconjunto de opções a maturarem numa mesma data, que ao apresentarem níveis de volatilidade implícita diferentes em função do seu preço de exercício criam uma curva de volatilidade implícita empírica sob forma de um *sorriso* ou *smirk*, será adicionada uma curva através da fórmula (28) que será alimentada por um conjunto de parâmetros  $\chi_p = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ .

Com o intuito de calibrar estas duas curvas, serão calculadas as raízes dos quadrados das diferenças entre a volatilidade implícita de cada ponto correspondente a uma opção transaccionada em mercado e o ponto correspondente estimado via curva (28). De seguida, através da ferramenta *solver* do *Microsoft Excel*, para uma maturidade de cada vez, considerando cinco pontos de partida diferentes para cada um dos parâmetros, pois é sabido que as formas paramétricas aqui em análise podem apresentar vários mínimos locais pelo que o ponto de partida é de fulcral importância (De Marco e Martini, 2009), minimizaremos uma função que calculará a raiz quadrada da diferença quadrada entre o valor estimado via curva (28) e o valor empírico. Este problema colocar-se-á da seguinte forma:

$$Min. f(k) = \sqrt{(v(k, t, \chi_p) - \sigma_{BS}(K, t))^2} \quad (64)$$

Por fim, consideraremos o conjunto de parâmetros que apresente o menor somatório de erros quadrados para cada subconjunto correspondente a uma maturidade, para proceder à construção do *sorriso* ou *smirk*.

Utilizaremos um procedimento semelhante, mas não igual, para o cálculo dos restantes modelos, seguindo-se então o modelo inspirado em volatilidade estocástica original



(RSVI). Será assim criado um conjunto de parâmetros  $\chi_R = \{a, b, \rho, m, \sigma\}$  para cada *sorriso/smirk* individualmente correspondente a uma maturidade independentemente das restantes. Este conjunto de parâmetros será criado com o intuito de alimentar a forma paramétrica número (31), sendo assim criada uma curva de volatilidade implícita teórica, que será ajustada à de mercado através do método dos mínimos quadrados ordinários, impondo contudo algumas restrições no conjunto de parâmetros para prevenir situações de arbitragem estática ao longo do *sorriso/smirk* (Gatheral e Jacquier, 2014). Assim, o problema de optimização será o seguinte:

$$\text{Min. } f(k) = \sqrt{(w(k, t, \chi_R) - \sigma_{BS}(K, t))^2}, \quad (65)$$

sujeito a

$$\left\{ \begin{array}{l} b \leq \frac{4}{(1 + |\rho|)t} \\ a + b \sigma \sqrt{(1 - \rho^2)} \geq 0 \\ |\rho| \leq 1 \\ \sigma \geq 0 \\ b \geq 0 \end{array} \right. \quad (66)$$

Utilizaremos a ferramenta *solver* do *Microsoft Excel*, considerando cinco pontos de partida diferentes para cada um dos cinco parâmetros, com o intuito de tentar minimizar a probabilidade de estarmos perante um mínimo local mas não global da função objectivo. Serão então calculados os valores de cada um dos parâmetros  $\chi_R = \{a, b, \rho, m, \sigma\}$  de forma a minimizar a soma do quadrado das diferenças entre os pontos estimados e os pontos empíricos.

Será depois estimada uma curva para cada maturidade, correspondente ao conjunto de parâmetros que minimiza a soma dos quadrados das diferenças.

Com o intuito de procurar uma melhor calibração destes cinco parâmetros, de seguida será corrido o optimizador (De Marco e Martini, 2009) já apresentado, sendo computadas todas as fórmulas entre as equações (51) e (60).

Contudo, para uma análise mais detalhada, serão apresentados ambos os resultados, tanto o do modelo original como o resultado fruto da referida rotina.

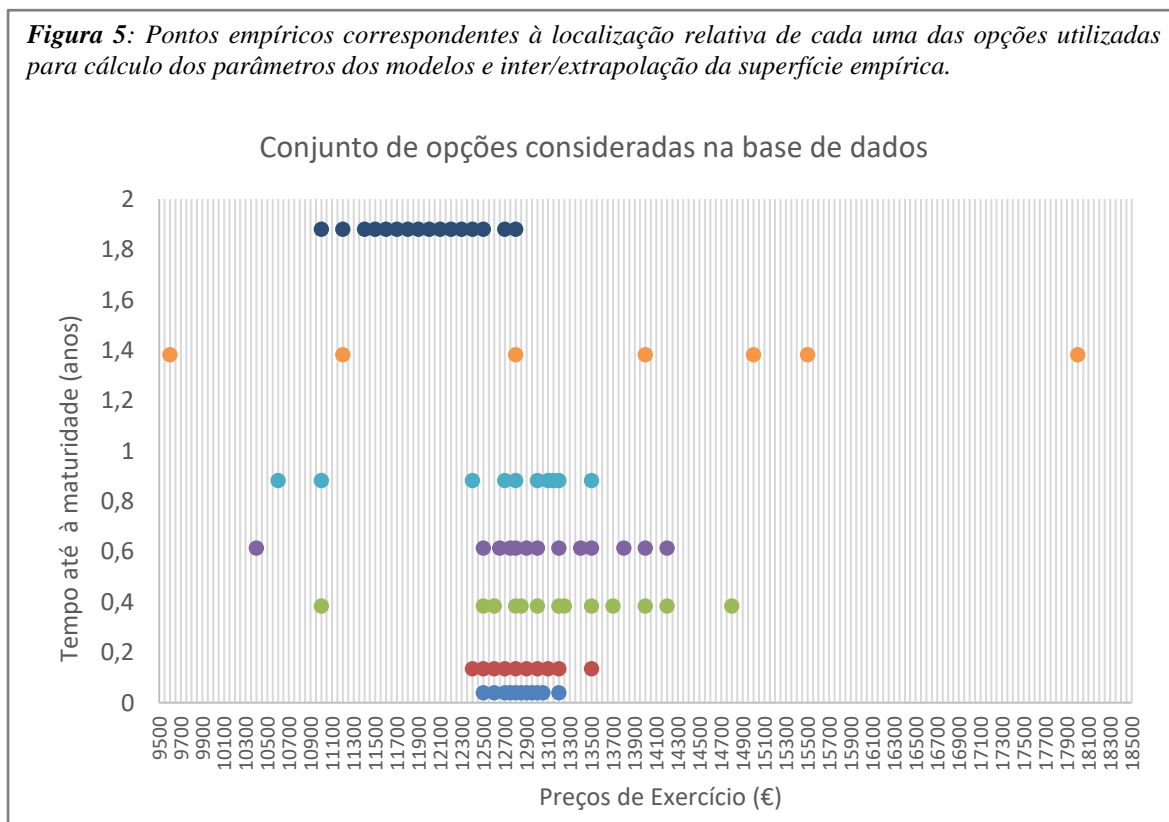
Por fim, utilizando um método semelhante ao dos dois primeiros modelos referidos, será calculada a forma paramétrica (37), com o conjunto de parâmetros  $\chi_N = \{\Delta, \omega, \mu, p, \zeta\}$ ,

sujeita às restrições em (38). Será utilizada igualmente a ferramenta *Solver* do *Microsoft Excel*, considerando cinco pontos de partida diferentes para cada um dos parâmetros, para minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre os valores estimados e os valores empíricos.

Assim, com este conjunto de *sorrisos/smirk* estimados para cada modelo construir-se-ão as correspondentes superfícies.

Tomando como ponto de partida os pontos de volatilidade implícita conhecidos pelos dados de mercado, serão construídas as curvas totais correspondentes aos *sorrisos/smirk* empíricos, e respectiva superfície. Construir-se-á assim a superfície de volatilidade implícita empírica. Este processo poderá ser mais complexo do que parece à partida, pois os dados empíricos disponíveis correspondem apenas a um pequeno conjunto de pontos de uma vasta superfície. Com o intuito de dar uma noção espacial a Figura 5 apresenta a localização relativa de cada opção em análise em termos do seu tempo até à maturidade e preço de exercício. Dentro dos subconjuntos estudados, o preço de exercício mais baixo é de EUR 9.600 e o preço de exercício mais alto é de EUR 18.000.

**Figura 5:** Pontos empíricos correspondentes à localização relativa de cada uma das opções utilizadas para cálculo dos parâmetros dos modelos e inter/extrapolação da superfície empírica.



Definimos que a intenção será estimar o segmento da superfície *near-at-the-money* uma vez que é neste segmento que existem mais dados empíricos que permitirão a obtenção de resultados mais consistentes.

Desta forma, o primeiro passo será a construção do segmento de curva correspondente a cada *sorriso/smirk*, algo que será feito para os pontos localizados entre as observações empíricas pelo método de *cubic splines*. Contudo, em algumas maturidades será necessário estimar um segmento de recta para além da última observação empírica à esquerda ou à direita. Isto exigirá a aplicação de uma técnica de extrapolação, tendo a minha escolha recaído pelo método de *oneway spline*, pois permitirá produzir um segmento da superfície mais monótono o que a tornará mais estável à medida que se afasta da região *at-the-money*. Por seu turno, por considerar que não melhora ou piora a qualidade do modelo, a interpolação entre os diferentes *sorrisos/smirks*, ao longo do variável tempo até à maturidade, será feita de forma linear. A construção da curva empírica de mercado encontra-se no anexo 3.

Proceder-se-á então à construção da superfície de volatilidade implícita estimada por cada um dos modelos já descritos. Cada modelo produzirá um conjunto de oito *sorrisos/smirks* de volatilidade. Cada um destes sorrisos é calculado com base nos parâmetros estimados através dos métodos já descritos. Aplicando estes parâmetros às respectivas fórmulas e computando o *log-strike/Moneyness*, criar-se-ão os *sorrisos*. Por fim, interpolando linearmente os pontos entre cada sorriso obter-se-á a superfície estimada. Recorde-se que no caso da superfície empírica será necessário interpolar, não só os pontos entre cada *sorriso*, como também, pontos ao longo do *sorriso*.

## 5. Resultados

Foram então calculadas cinco superfícies de volatilidade diferentes, uma empírica e quatro estimadas.

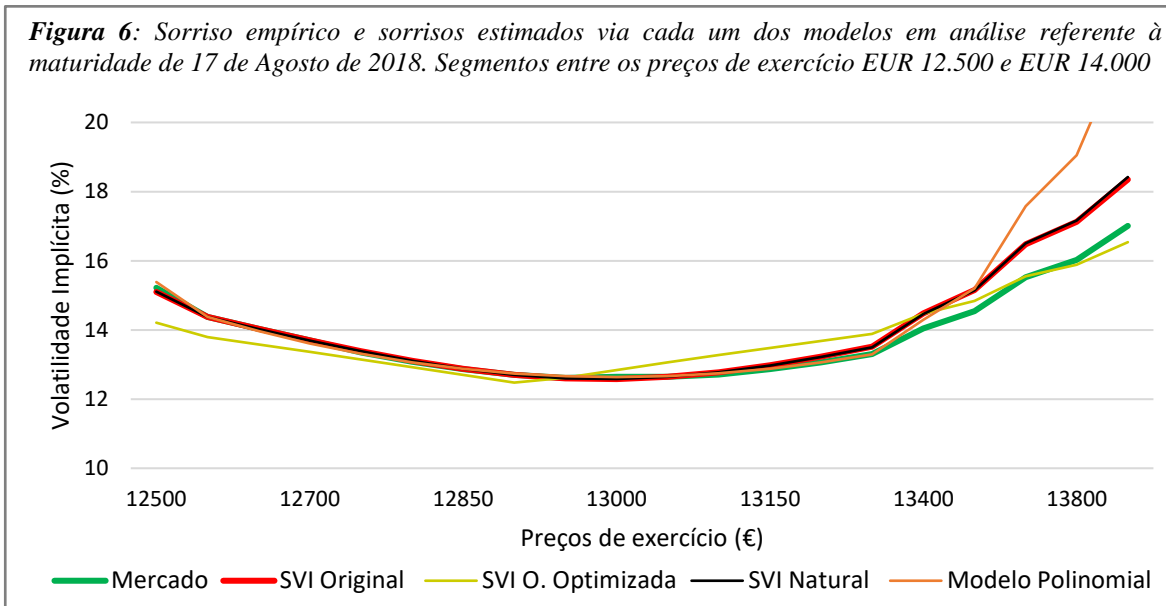
As quatro superfícies estimadas correspondem à parametrização polinomial, à parametrização inspirada em volatilidade estocástica natural e original e ao modelo inspirado em volatilidade estocástica original otimizado.

Assim, antes do cálculo da superfície como um todo, foram calculados todos os sorrisos individualmente, através das diferentes parametrizações. Apresentaremos de seguida os *sorrisos/smirks* estimados mapeados com a curva de mercado.

## 5.1. Resultados por sorriso/*smirk*

### 5.1.1. Sorriso da Maturidade 17.08.2018 $\cong$ 0,04 anos

**Figura 6:** Sorriso empírico e sorrisos estimados via cada um dos modelos em análise referente à maturidade de 17 de Agosto de 2018. Segmentos entre os preços de exercício EUR 12.500 e EUR 14.000



A maturidade em estudo aqui apresentada tem a particularidade de ser excepcionalmente curta, cerca de quinze dias. Tal facto faz com que a própria curva empírica surja sob a forma de *sorriso* e não de uma *smirk* como seria de esperar, uma vez que estamos a tratar de opções cujo ativo subjacente é um índice de acções. Como podemos observar na Figura 6, na zona central do sorriso os modelos calibram de forma bastante eficaz, algo que se vai perdendo progressivamente à medida que avançamos para zonas mais *out-of-the-money*.

Pelos motivos explicados na metodologia, foi seleccionado o segmento das curvas de volatilidade entre os preços de exercício EUR 12.500 a EUR 14.000, pelo que o estudo e os dados apresentados se referem às observações compreendidas entre estes limites.

**Figura 7:** Erros médios gerados por cada um dos modelos quando calibrados com o sorriso de mercado para a maturidade 17.08.2018 através do método dos mínimos quadrados ordinários

Modelo	Erro médio
Parametrização Polinomial	0,6028
SVI Original	0,2639
SVI O. Optimizada	0,3745
SVI Natural	0,2660

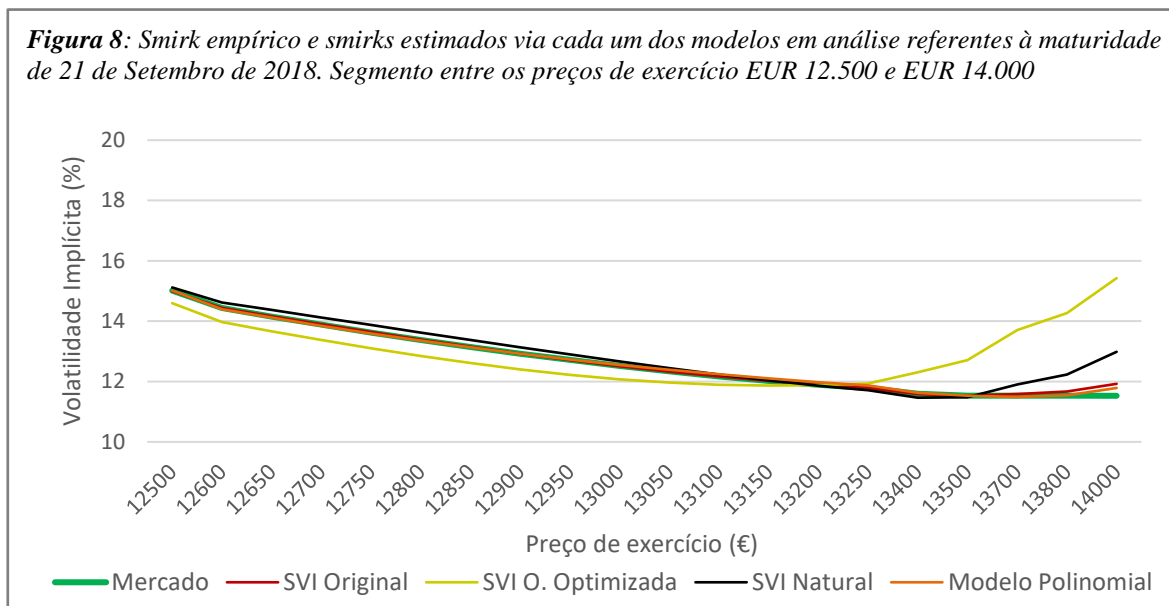
Conforme apresentado nas Figuras 6 e 7, podemos verificar que a parametrização que melhor resultado apresenta, em termos da média da raiz quadrada do quadrado da diferença entre o resultado obtido via modelo e os dados empíricos, para a maturidade

mais curta, é a parametrização original inspirada em volatilidade estocástica. De realçar nestes resultados, que o otimizador corrido sobre esta parametrização, efectivamente consegue capturar melhor a forma do *sorriso* empírica para preços de exercício mais afastados da região *at-the-money*, mas fá-lo penalizando uma melhor calibração na região central, onde há mais observações, o que penaliza o desempenho global do otimizador. Este comportamento faz-nos crer que se considerássemos um segmento mais longo da curva de volatilidade, o modelo *otimizado* poderia ser mais eficaz que o modelo original. O modelo polinomial por seu turno, à medida que se afasta da região onde existem mais observações assume valores extremamente elevados, o que acaba por penalizar o seu desempenho.

De realçar, contudo, que a relativa fraca performance dos modelos nesta maturidade específica se deve ao facto de esta ser muito curta e apresentar volatilidades implícitas relativamente altas para as *calls OTM*, o que exigiria um modelo que acomodasse a possibilidade de haver pontos de descontinuidade (i.e. *jumps*) no comportamento do ativo subjacente, algo que não é o caso dos modelos estudados (Gatheral, 2006).

### 5.1.2. Smirk da maturidade 21.09.2018 $\cong$ 0,13 anos

**Figura 8:** Smirk empírico e smirks estimados via cada um dos modelos em análise referentes à maturidade de 21 de Setembro de 2018. Segmento entre os preços de exercício EUR 12.500 e EUR 14.000



À medida que avançamos na escala de maturidades do *sorriso/smirk* começamos a ver uma *normalização* daquilo que seria o comportamento esperado da curva de mercado. Desta forma, na Figura 8 podemos ver que para a maturidade em apreço, de 0,13 anos, a curva de volatilidade implícita de mercado surge sob a forma de um *smirk* com as *calls* com os preços de exercício mais altos a apresentarem níveis de volatilidade implícita mais

baixos relativamente aos apresentados pelas *calls* com as mesmas características, mas com preços de exercícios mais baixos. Recordamos que este é o comportamento esperado para as opções cujo ativo subjacente é uma acção ou um índice de acções, como é o caso.

Curiosamente, dois dos modelos estudados apresentam uma tendência de sorriso fora da amostra pelo seu limite superior. Esta tendência vai, mais uma vez, contra as dinâmicas apresentadas empiricamente e pelos *smirks* de instrumentos relacionados com acções ou índices de acções.

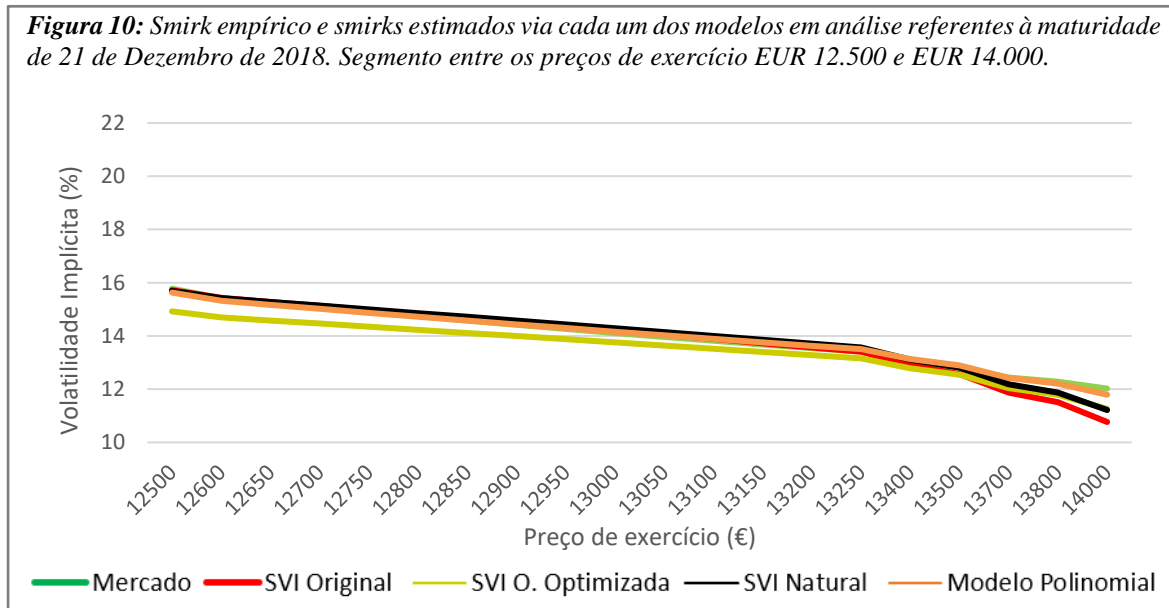
Nesta maturidade especificamente como podemos observar pela Figura 9, existem duas parametrizações com performances destacadamente superiores, nomeadamente e em primeiro lugar a parametrização original inspirada em volatilidade estocástica e em segundo lugar, o modelo polinomial que aqui já apresenta um comportamento mais contido para os preços de exercício mais altos. Ambos os modelos conseguem capturar eficazmente a forma funcional dos dados empíricos na região *near-ATM* e nas regiões contíguas, mas ainda não muito afastadas. A parametrização original apresenta assim um erro médio de 0,036 para esta maturidade.

**Figura 9:** Erros médios gerados por cada um dos modelos quando calibrados com o *smirk* de mercado para a maturidade 21.09.2018 através do método dos mínimos quadrados ordinários.

Modelo	Erro médio
Parametrização Polinomial	0,0476
SVI Original	0,0360
SVI O. Optimizada	0,7834
SVI Natural	0,2472

5.1.3. Smirk da Maturidade 21.12.2018  $\cong$  0,38 anos

**Figura 10:** Smirk empírico e smirks estimados via cada um dos modelos em análise referentes à maturidade de 21 de Dezembro de 2018. Segmento entre os preços de exercício EUR 12.500 e EUR 14.000.



Nesta maturidade a curva de volatilidade empírica já perdeu na totalidade o efeito *sorriso*, configurando-se agora como uma curva decrescente, conforme apresentado na Figura 10. É interessante reparar, contudo, que a partir do ponto correspondente ao preço de exercício de EUR 13.400 o declive da recta acentua-se, com as opções aqui localizadas a apresentarem níveis de volatilidade implícita progressivamente menores.

Todos os modelos em apreço, conseguem sem dificuldade capturar quase na perfeição a curva empírica. Contudo devo recordar que estamos a trabalhar apenas num segmento relativamente curto da curva, e que quando mais nos afastarmos deste segmento pior é o comportamento de todos os modelos.

Contudo, é notável o baixo erro apresentado pelo modelo polinomial neste segmento com um erro médio de apenas 0,0668 seguido por ambos os modelos baseados em volatilidade estocástica, tal como apresentado na Figura 11.

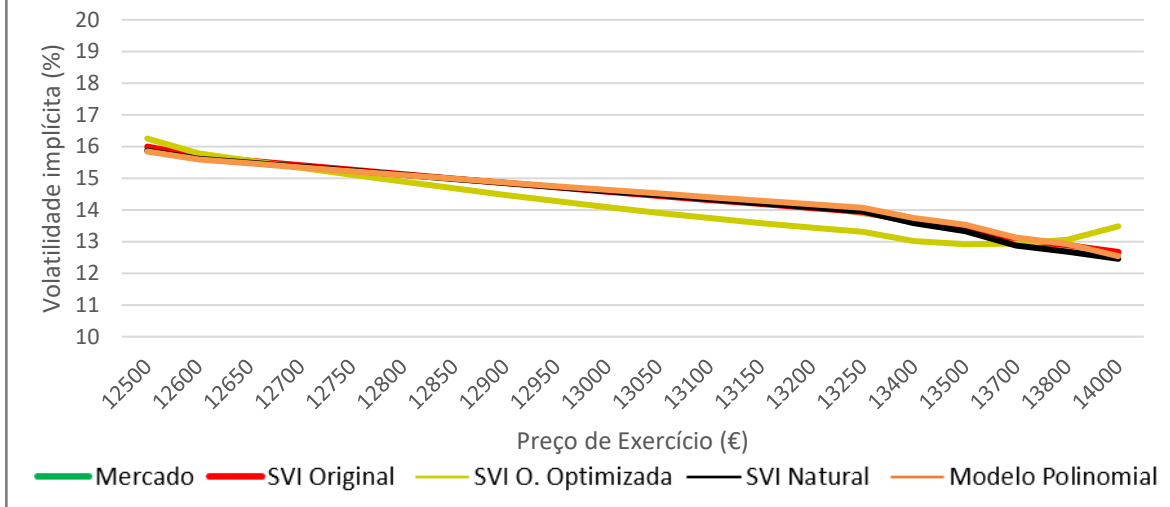
**Figura 11:** Erros médios gerados por cada um dos modelos quando calibrados com o smirk de mercado para a maturidade 21.12.2018 através do método dos mínimos quadrados ordinários.

Modelo	Erro médio
Parametrização Polinomial	0,0668
SVI Original	0,1957
SVI O. Optimizada	0,4590
SVI Natural	0,1695



5.1.4. *Smirk* da Maturidade 15.03.2019  $\cong$  0,61 anos

**Figura 12:** *Smirk* empírico e *smirk* estimados via cada um dos modelos em análise referentes à maturidade de 15 de Março de 2019. Segmento entre os preços de exercício EUR 12.500 e EUR 14.000.



No caso do subconjunto de opções cuja maturidade corresponde a 0,61 anos, podemos verificar a existência de um cada vez mais claro *smirk*. Neste caso, à excepção do modelo com o *otimizador*, todas as parametrizações conseguem calibrar de forma quase perfeita com os dados de mercado, tal como demonstrado pela Figura 12.

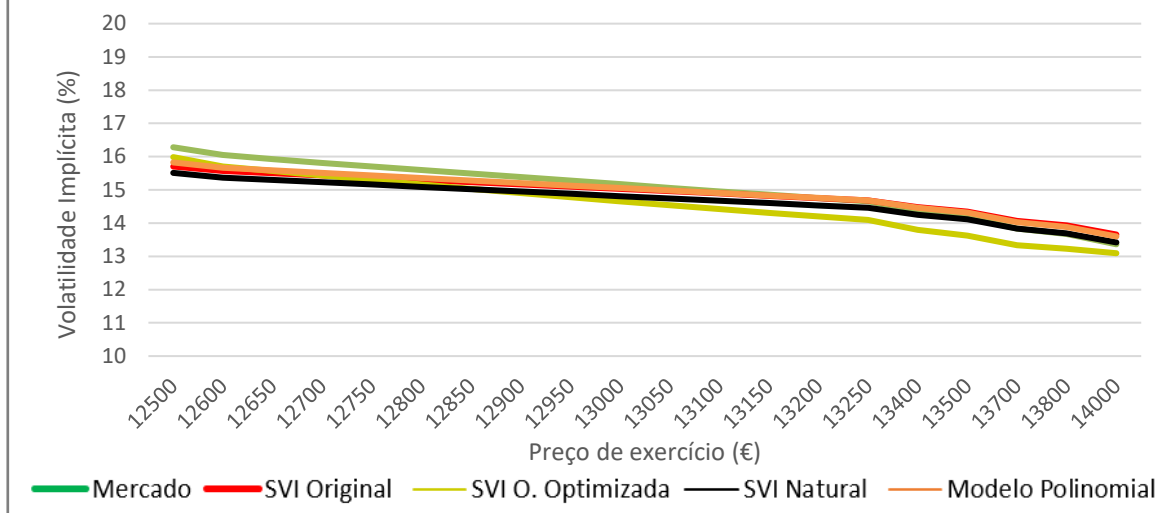
Este comportamento deve-se ao facto dos modelos em estudo apresentarem um número relativamente elevado de parâmetros para calibrar com uma forma relativamente simples como a apresentada pela curva empírica. Neste subconjunto o modelo original inspirado em volatilidade estocástica e o modelo polinomial apresentam as duas melhores calibrações, conforme Figura 13.

**Figura 13:** Erros médios gerados por cada um dos modelos quando calibrados com o *smirk* de mercado para a maturidade 15 de Março de 2019 através do método dos mínimos quadrados ordinários.

Modelo	Erro médio
Parametrisação Polinomial	0,0476
SVI Original	0,0417
SVI O. Optimizada	0,3986
SVI Natural	0,0542

5.1.5. *Smirk* da Maturidade 21.06.2019  $\cong$  0,88 anos

**Figura 14:** *Smirk* empírico e *smirks* estimados via cada um dos modelos em análise referentes à maturidade de 21 de Junho de 2019. Segmento entre os preços de exercício EUR 12.500 e EUR 14.000.



À medida que o estudo foi progredindo para maturidades mais distantes, a curva de mercado, apresentada na Figura 14, foi-se tornando progressivamente mais simples, sob a forma de um *smirk*, tornando-se este progressivamente mais suave.

Assim os modelos conseguem capturar o *smirk* empírico de forma mais eficaz do que nas maturidades muito curtas ou muito longas onde, por vezes, surgem fenómenos mais difíceis de capturar, como comprovado pela Figura 20.

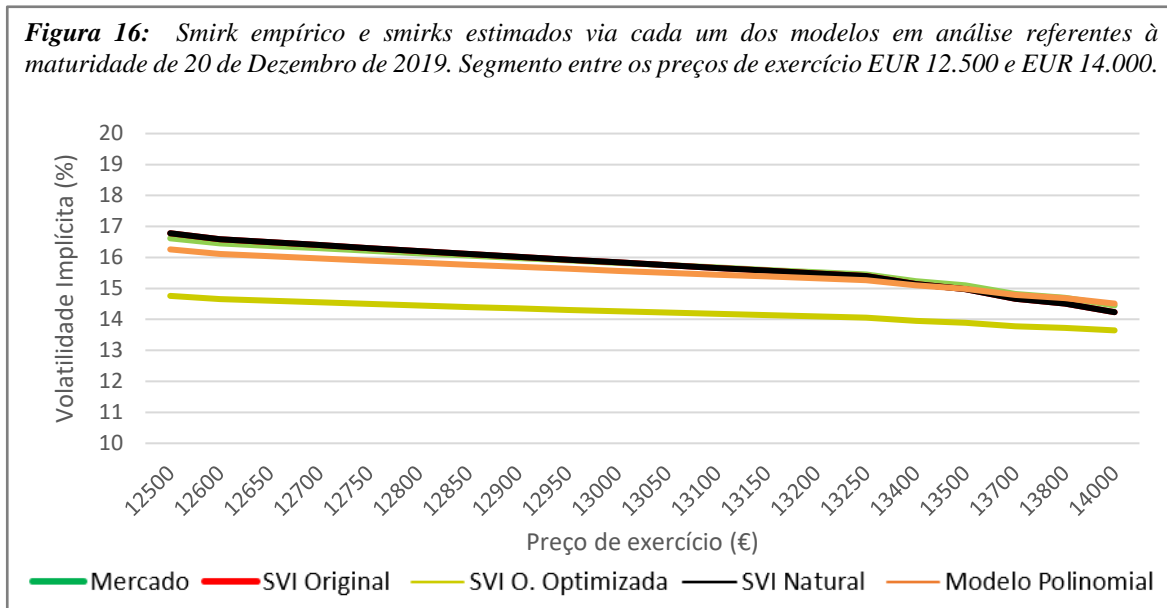
Nesta maturidade o modelo que apresentou melhor calibração para o segmento de curva de volatilidade em apreço foi o modelo polinomial, seguido do modelo inspirado em volatilidade estocástica original.

**Figura 15:** Erros médios gerados por cada um dos modelos quando calibrados com o *smirk* de mercado para a maturidade 21.06.2019 através do método dos mínimos quadrados ordinários.

Modelo	Erro médio
Parametrização Polinomial	0,1829
SVI Original	0,2304
SVI O. Optimizada	0,4603
SVI Natural	0,3446

5.1.6. *Smirk* da Maturidade 20.12.2019  $\cong$  1,38 anos

**Figura 16:** *Smirk* empírico e *smirks* estimados via cada um dos modelos em análise referentes à maturidade de 20 de Dezembro de 2019. Segmento entre os preços de exercício EUR 12.500 e EUR 14.000.



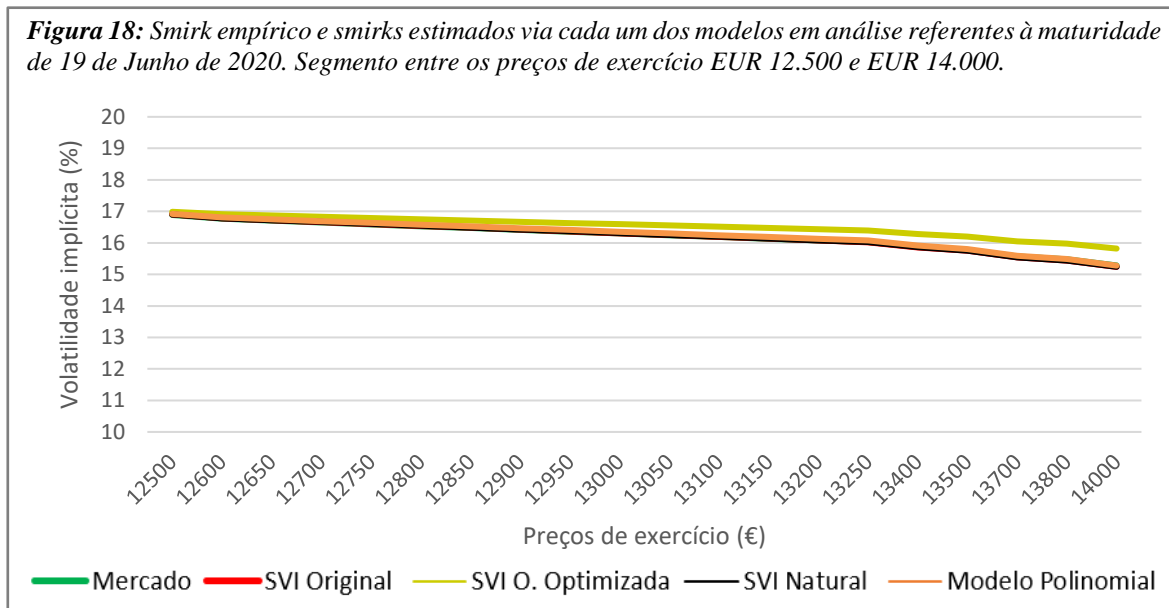
Tal como nos anteriores casos, também na maturidade referente a 1,38 anos, a curva empírica surge sob a forma de um *smirk* como expectável. Nesta maturidade ambos os modelos inspirados em volatilidade estocástica apresentam curvas equivalentes e são os que melhor calibram com os dados de mercado. Por seu turno, o modelo *otimizado* inspirado em volatilidade estocástica apresenta uma relativa má calibração. Acreditamos que tal possa ter acontecido devido aos pontos de partida considerados para os parâmetros. É possível que com mais tentativas no *solver* este modelo poderia apresentar resultados mais interessantes.

**Figura 17:** Erros médios gerados por cada um dos modelos quando calibrados com o *smirk* de mercado para a maturidade 20.12.2019 através do método dos mínimos quadrados ordinários

Modelo	Erro médio
Parametrização Polinomial	0,2249
SVI Original	0,0863
SVI O. Optimizada	1,4824
SVI Natural	0,0863

5.1.7. Smirk da Maturidade 19.06.2020  $\cong$  1,88 anos

**Figura 18:** Smirk empírico e smirks estimados via cada um dos modelos em análise referentes à maturidade de 19 de Junho de 2020. Segmento entre os preços de exercício EUR 12.500 e EUR 14.000.



Na maturidade correspondente a 1,88 anos, a curva de volatilidade de mercado aparece sob a forma de uma linha quase recta com uma inclinação menor do que nas anteriores maturidades, algo que costuma ser empiricamente observado para opções com estas características (Figura 18).

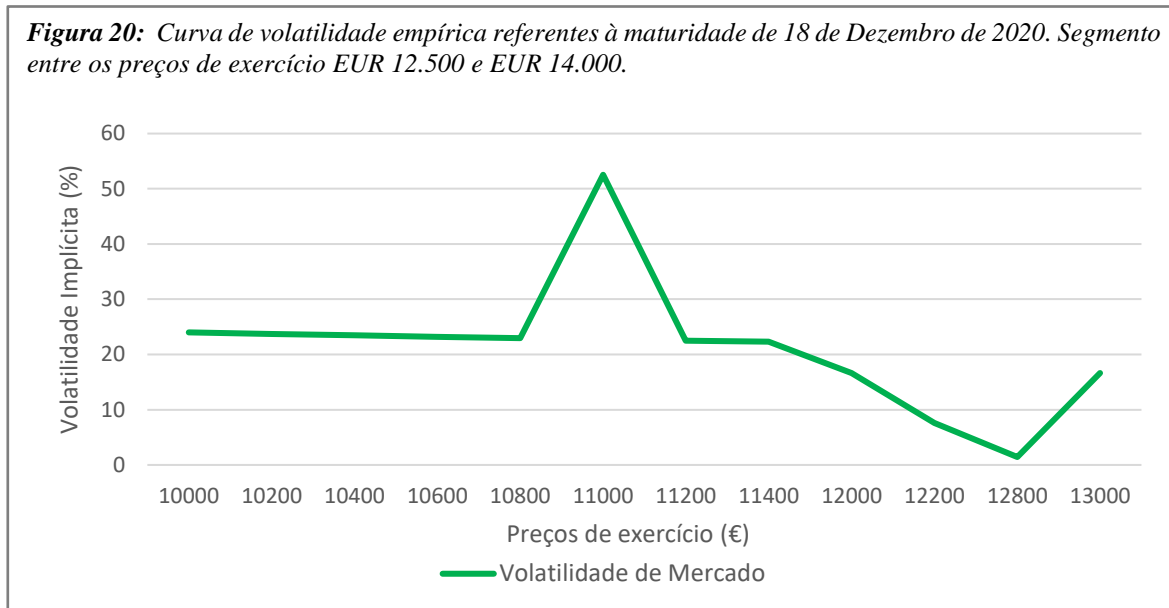
Mais uma vez, conforme exposto na Figura 19, todos os modelos conseguem gerar curvas que ajustam quase na perfeição com a curva empírica e os modelos inspirados em volatilidade estocástica a são aqueles melhores resultados apresentam.

**Figura 19:** Erros médios gerados por cada um dos modelos quando calibrados com o smirk de mercado para a maturidade 20.12.2019 através do método dos mínimos quadrados ordinários

Modelo	Erro médio
Parametrização Polinomial	0,0421
SVI Original	0,0141
SVI O. Optimizada	0,3069
SVI Natural	0,0159

5.1.8. Curva de volatilidade da Maturidade 18.12.2020  $\cong$  2,38 anos

**Figura 20:** Curva de volatilidade empírica referentes à maturidade de 18 de Dezembro de 2020. Segmento entre os preços de exercício EUR 12.500 e EUR 14.000.



Na última maturidade em análise, que apresenta um prazo superior a dois anos, a curva de volatilidade empírica surge na forma pouco convencional da Figura 20. Esta forma pouco funcional dever-se-á ao facto de se tratar de uma maturidade bastante longa para uma opção transaccionada em mercado organizado, o que levará a uma baixa liquidez deste ativo, o que em última instância provocará uma curva de volatilidade pouco ortodoxa. Com o passar do tempo é expectável que este subconjunto de opções se venha a tornar mais líquido e que a sua curva de volatilidade se venha a transformar num *smirk*.

Perante estas limitações, e por considerar que o valor acrescentado de incluir este subconjunto de opções na nossa análise é limitado face aos danos que poderá trazer aos resultados globais obtidos, optámos por deixar este subconjunto de fora.

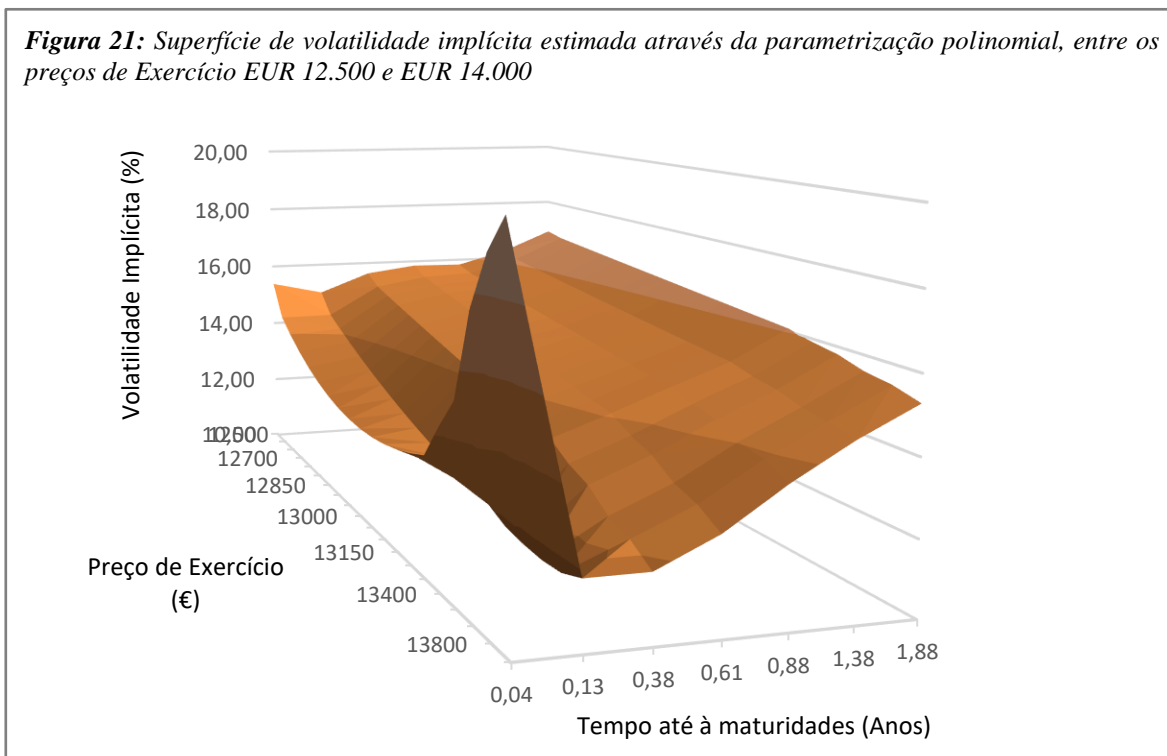
## 5.2. Superfícies de volatilidade geradas pelas diferentes parametrizações

Estando já analisadas as curvas de volatilidade estimadas e empírica para cada uma das maturidades, irei agora apresentar os resultados globais referentes ao comportamento de cada uma das parametrizações.

Para termo de comparação, a superfície de volatilidade empírica pode ser consultada no anexo 3. Todos os gráficos utilizados para termos comparativos na próxima secção têm a mesma escala.

### 5.2.1. Superfície de volatilidade gerada pela parametrização polinomial (PP)

A parametrização polinomial apresenta uma superfície de volatilidade conforme a apresentada na Figura 21.

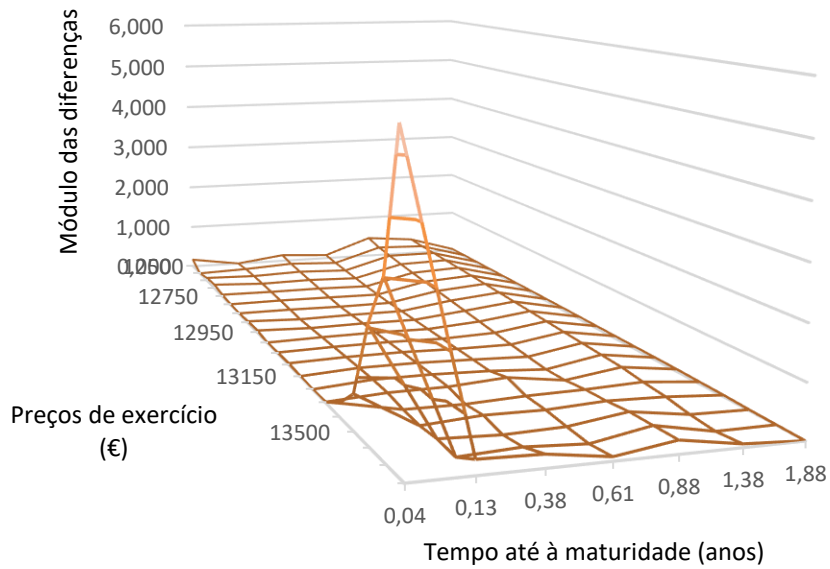


O comportamento desta parametrização ao longo da maioria da área em apreço é bastante satisfatório uma vez que passa manifestamente perto de quase todos os pontos correspondentes aos níveis de volatilidade implícita das opções em análise.

Contudo como é possível observar na Figura 22, que corresponde ao módulo das diferenças entre a superfície estimada via este modelo e a superfície empírica, a performance global do modelo é altamente penalizada pela sua fraca calibração no sorriso da maturidade mais curta. De facto, mais de 50% do erro total deste modelo, no total dos

sete *sorrisos/smirks* em análise, advém do erro gerado no *sorriso* correspondente à maturidade mais curta, algo facilmente constatável através da Figura 22 e do Anexo 4.

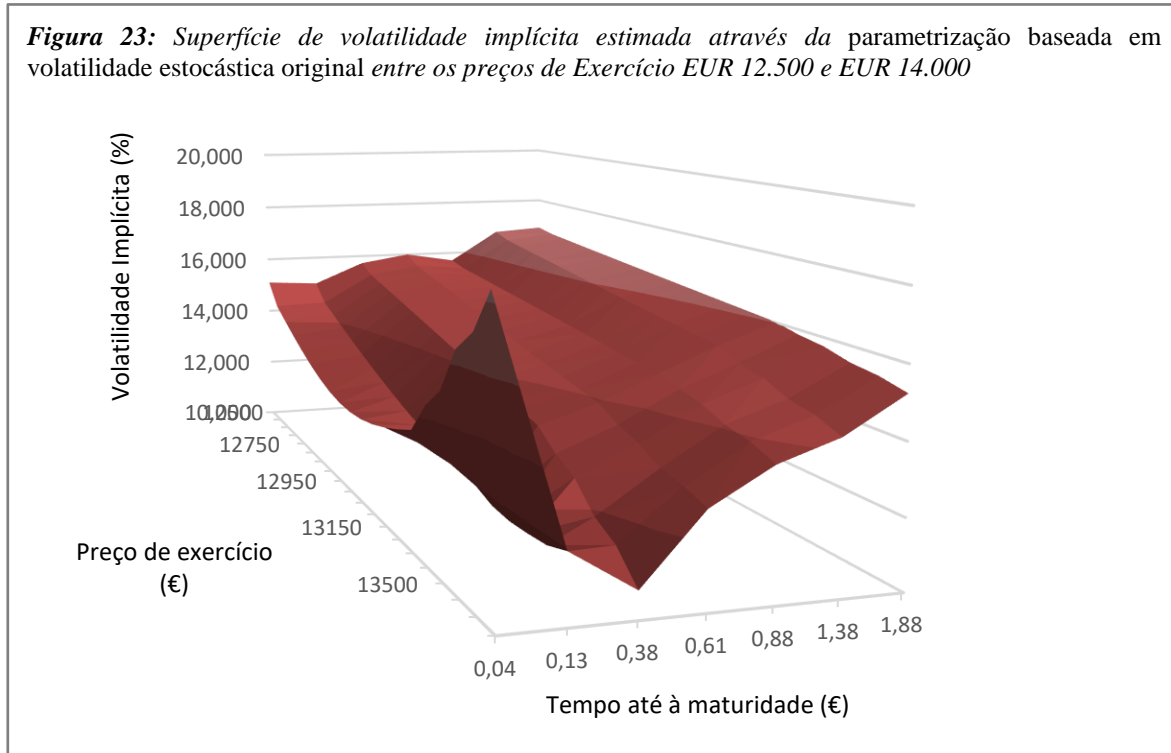
**Figura 22:** Mapa dos módulos da diferença entre a superfície estimada via parametrização polinomial e a superfície empírica. Cada ponto desta área corresponde ao módulo do ponto com as mesmas coordenadas estimado via modelo polinomial subtraído do mesmo ponto da superfície empírica.



5.2.2. Superfície de volatilidade gerada pela parametrização baseada em volatilidade estocástica original (RSVI)

A superfície gerada pela parametrização original baseada em volatilidade estocástica resulta na forma apresentada na Figura 23.

**Figura 23:** Superfície de volatilidade implícita estimada através da parametrização baseada em volatilidade estocástica original entre os preços de Exercício EUR 12.500 e EUR 14.000



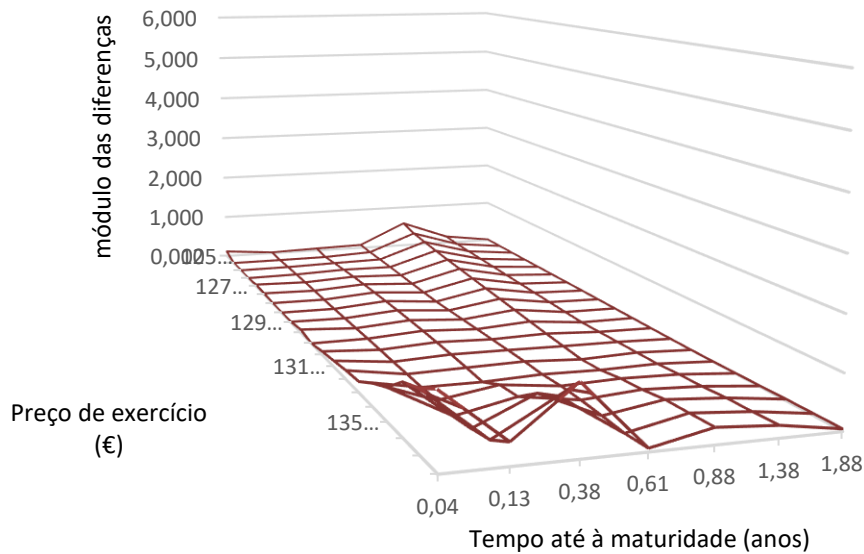
A parametrização estimada por esta via apresenta uma superfície globalmente mais próxima da superfície empírica (Anexo 3) do que a gerada por qualquer outro modelo.

Contudo, tal como já havia acontecido com a parametrização polinomial, o *sorriso* que mais contribui para o erro global da superfície corresponde à maturidade mais curta. Cerca de 30% do erro total dos sete *sorrisos/smirks* por esta via estimados é explicado pela curva da maturidade mais curta, e dentro desta, a esmagadora maioria do erro advém da excessiva inclinação positiva que a curva assume para os preços de exercício mais altos que lhe confere a forma de *sorriso*, conforme pode ser consultado no Anexo 4.

Interessante igualmente é constatar que na maturidade correspondente a 0,88 anos, que gera cerca de 27% do erro total desta parametrização, a maior fatia do erro de ajustamento advém da aba correspondente aos preços de exercício mais baixos



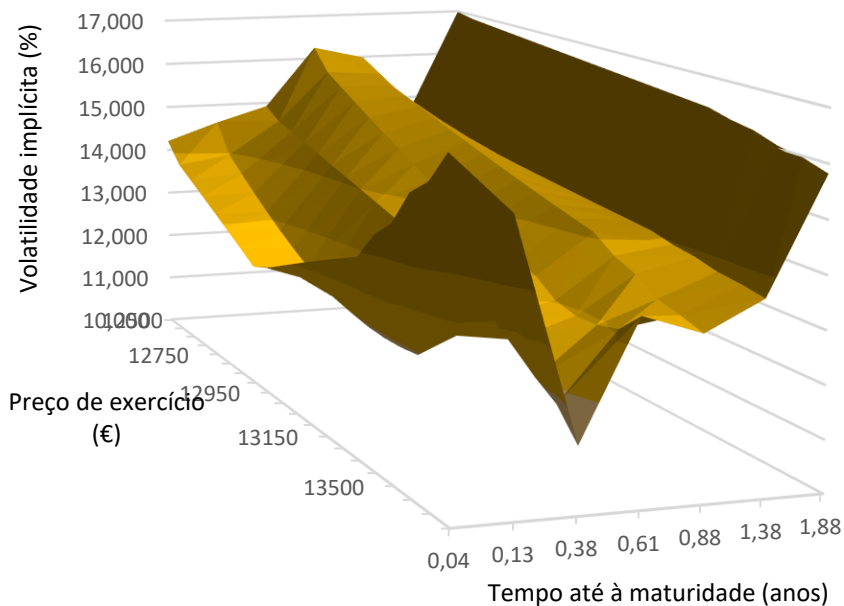
**Figura 24:** Mapa dos módulos da diferença entre a superfície estimada via parametrização baseada em volatilidade estocástica original e a superfície empírica. Cada ponto desta área corresponde ao módulo do ponto com as mesmas coordenadas estimado via RSVI subtraído do mesmo ponto da superfície empírica.



*5.2.3. Superfície de volatilidade gerada pela parametrização original baseada em volatilidade estocástica otimizada*

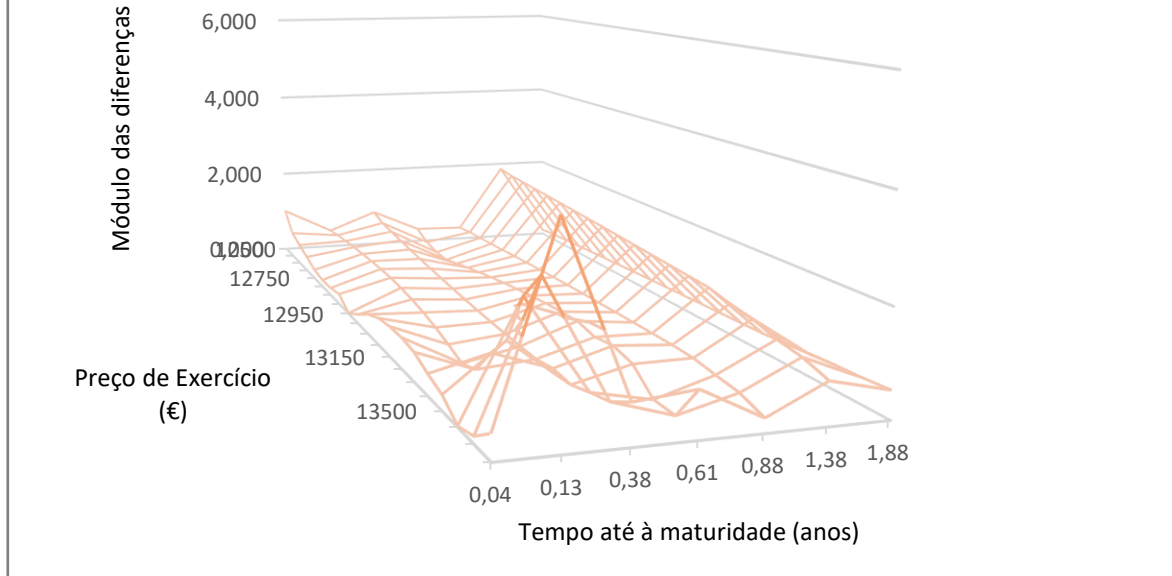
A superfície gerada pela parametrização original baseada em volatilidade estocástica original resulta na forma apresentada na Figura 25.

**Figura 25:** Superfície de volatilidade implícita estimada através da parametrização baseada em volatilidade estocástica original otimizada entre os preços de Exercício EUR 12.500 e EUR 14.000



Esta parametrização não calibrou de forma eficiente com a superfície empírica. O erro médio gerado por esta parametrização foi várias vezes superior ao gerado pela parametrização original.

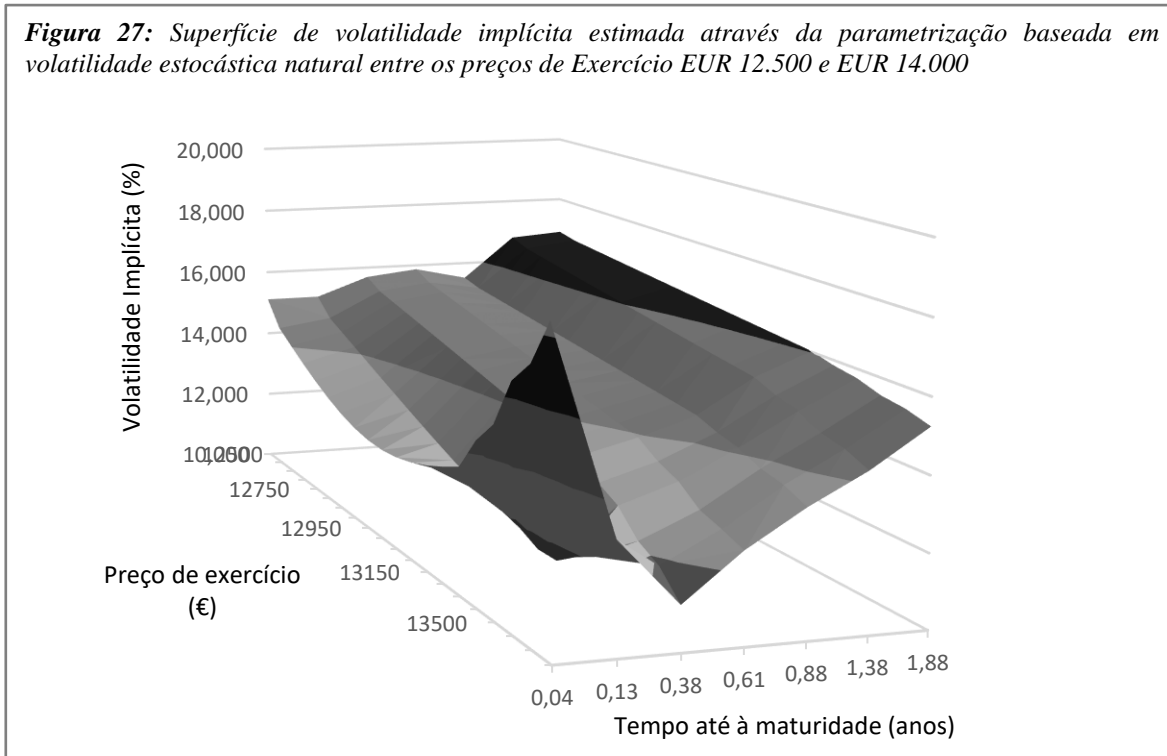
**Figura 26:** Mapa dos módulos da diferença entre a superfície estimada via parametrização baseada em volatilidade estocástica original otimizada e a superfície empírica. Cada ponto desta área corresponde ao módulo do ponto com as mesmas coordenadas estimado via OPT SVI subtraído do mesmo ponto da superfície empírica.



5.2.4. Superfície de volatilidade gerada pela parametrização natural baseada em volatilidade estocástica

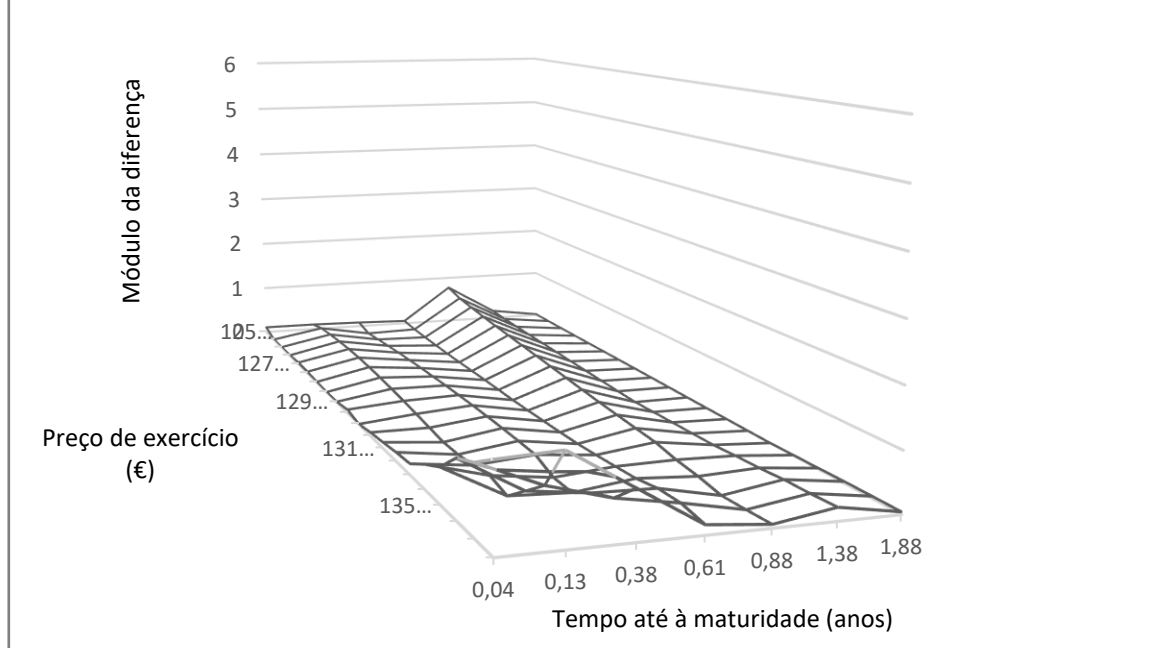
A superfície gerada pela parametrização natural baseada em volatilidade estocástica resulta na forma apresentada na Figura 27.

**Figura 27:** Superfície de volatilidade implícita estimada através da parametrização baseada em volatilidade estocástica natural entre os preços de Exercício EUR 12.500 e EUR 14.000



Esta parametrização, por seu turno, apresenta um comportamento muito semelhante à parametrização semelhante original, mas com as amplitudes dos erros ligeiramente superiores. Também aqui o *sorriso* da maturidade mais curta apresenta uma calibração relativamente fraca, quando comparado com o de outras maturidades, mas, ao contrário do que acontece com os outros modelos, não é a mais fraca. Aqui, a maturidade que mais contribui para o erro total do modelo, cerca de 29%, é a de 0,88 anos. O *sorriso* correspondente à maturidade mais curta, e os dois *smirks* das maturidades 0,13 e 0,88 anos são responsáveis por 73% do erro total do modelo.

**Figura 28:** Mapa dos módulos da diferença entre a superfície estimada via parametrização baseada em volatilidade estocástica natural e a superfície empírica. Cada ponto desta área corresponde ao módulo do ponto com as mesmas coordenadas estimado via NSVI subtraído do mesmo ponto da superfície empírica.



## 6. Conclusões

Todos os modelos em análise, devido ao seu elevado número de parâmetros conseguem apresentar superfícies de volatilidade com formas muito próximas da apresentada pela curva de mercado ao longo das diferentes maturidades.

Dos quatro modelos paramétricos analisados, conforme constatável via mapa do Anexo 4, o modelo que melhor performance apresentou nesta análise relativa a estes 6 *smirks* e um *sorriso* foi a parametrização paramétrica inspirada em volatilidade estocástica original (Gatheral e Jacquier, 2014).

Este modelo apresentou uma performance eficaz quando calibrado com as curvas de mercado, estando os seus parâmetros sujeitos a cinco restrições para garantir que não é possível existir arbitragem *butterfly* ao longo dos diferentes preços de exercício.

Seria interessante no futuro, replicar este mesmo estudo, mas procurando calibrar os parâmetros dos modelos não para um momento do tempo específico, mas sim para series de preços com o intuito de capturar dinâmicas na própria superfície. Tal já foi estudado por alguma literatura, e a hipótese de criar parâmetros para estes modelos com uma componente dependente do tempo até à maturidade poderia gerar resultados muito interessantes.

## Referências

- Bates, D. S. 1996. **Jumps and Stochastic Volatility**. *The Review of Financial Studies*, 9(1), 69-107.
- Black, F., & Scholes, M. 1973. **The pricing of options and corporate liabilities**. *The Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654. <https://doi.org/10.1086/260062>
- Bollerslev, T. 1986. **Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity**. *Journal of Econometrics*. [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(86\)90063-1](https://doi.org/10.1016/0304-4076(86)90063-1)
- Breedeen, D. T., & Litzenberger, R. H. 1978. **Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices**. *The Journal of Business*. <https://doi.org/10.1086/296025>
- Cox, J. C., Ross, S., & Rubinstein, M. 1979. **Option pricing: A simplified approach**. *Journal of Financial Economics*, 7, 229–263. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(79\)90015-1](https://doi.org/10.1016/0304-405X(79)90015-1)
- De Marco, S., & Martini, C. 2009. **Quasi-Explicit Calibration of Gatheral 's SVI model**. *Zeliade White Paper*.
- Derman, E., & Kani, I. 1994. Riding on a smile. *Risk*, (February), 32–39. <http://www.math.ku.dk/kurser/2005-1/finmathtowork/DermanKaniRISK.PDF>
- Dumas, B., Fleming, J., & Whaley, R. E. 1998. Implied volatility functions: Empirical tests. *Journal of Finance*, 53(6), 2059–2106. <https://doi.org/10.1111/0022-1082.00083>
- Dupire, B. 1994. Pricing with a Smile. *Risk*, 7, 1–10. <http://www.cmap.polytechnique.fr/~rama/dea/dupire.pdf>
- Engle, R. F. 1982. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*. <https://doi.org/10.2307/1912773>
- Fengler, M. R. 2012. Option data and modeling bsm implied volatility. In *Handbook of Computational Finance* (pp. 117–142). [https://doi.org/10.1007/978-3-642-17254-0\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-17254-0_6)
- Gatheral, J. 2006. *The volatility surface: A Practitioner's guide*. John Wiley & Sons,

Inc., Hoboken, New Jersey.

Gatheral, J., & Jacquier, A. 2014. **Arbitrage-free SVI volatility surfaces**. *Quantitative Finance*, 14(1), 59–71. <https://doi.org/10.1080/14697688.2013.819986>

Haugh, M. 2009. **Black-Scholes and the Volatility Surface**, (4), 17. <http://www.columbia.edu/~mh2078/BlackScholesCtsTime.pdf>

Heston, S. L. 1993. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *Review of Financial Studies*, 6(2), 327–343. <https://doi.org/10.1093/rfs/6.2.327>

Homescu, C. 2011. **Implied Volatility Surface: Construction Methodologies and Characteristics**, 1–38. <https://doi.org/10.2139/ssrn.1882567>

Hull, J. C. 2015. **Options, Futures and Other Derivatives**. New Jersey: *Pearson*. <https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004>

Lee, R. W. 2003. **The Moment Formula for Implied Volatility at Extreme Strikes**, 1–15.

Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics*, 4(1), 141–183. <https://doi.org/10.2307/3003143>

Rubinstein, M. (1994). Implied Binomial Trees. *The Journal of Finance*, 49(3), 771–818. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1994.tb00079.x>

## Anexos

Anexo 1 – Conjunto de opções cuja volatilidade implícita foi analisada neste trabalho

("Ativo Sujacente"; "Data de maturidade"; "C = Opção de Compra; "Preço de Exercício")	Data de início dos dados
DAX 08/17/18 C12500 DAX 08/17/18 C12600 DAX 08/17/18 C12700 DAX 08/17/18 C12750 DAX 08/17/18 C12800 DAX 08/17/18 C12850 DAX 08/17/18 C12900 DAX 08/17/18 C12950 DAX 08/17/18 C13000 DAX 08/17/18 C13050 DAX 08/17/18 C13200	22/05/2018
DAX 09/21/18 C12400 DAX 09/21/18 C12500 DAX 09/21/18 C12600 DAX 09/21/18 C12700 DAX 09/21/18 C12800 DAX 09/21/18 C12900 DAX 09/21/18 C13000 DAX 09/21/18 C13100 DAX 09/21/18 C13200 DAX 09/21/18 C13500	20/09/2017
DAX 12/21/18 C11000 DAX 12/21/18 C12500 DAX 12/21/18 C12600 DAX 12/21/18 C12800 DAX 12/21/18 C12850 DAX 12/21/18 C13000 DAX 12/21/18 C13200 DAX 12/21/18 C13250 DAX 12/21/18 C13500 DAX 12/21/18 C13700 DAX 12/21/18 C14000	02/03/2015

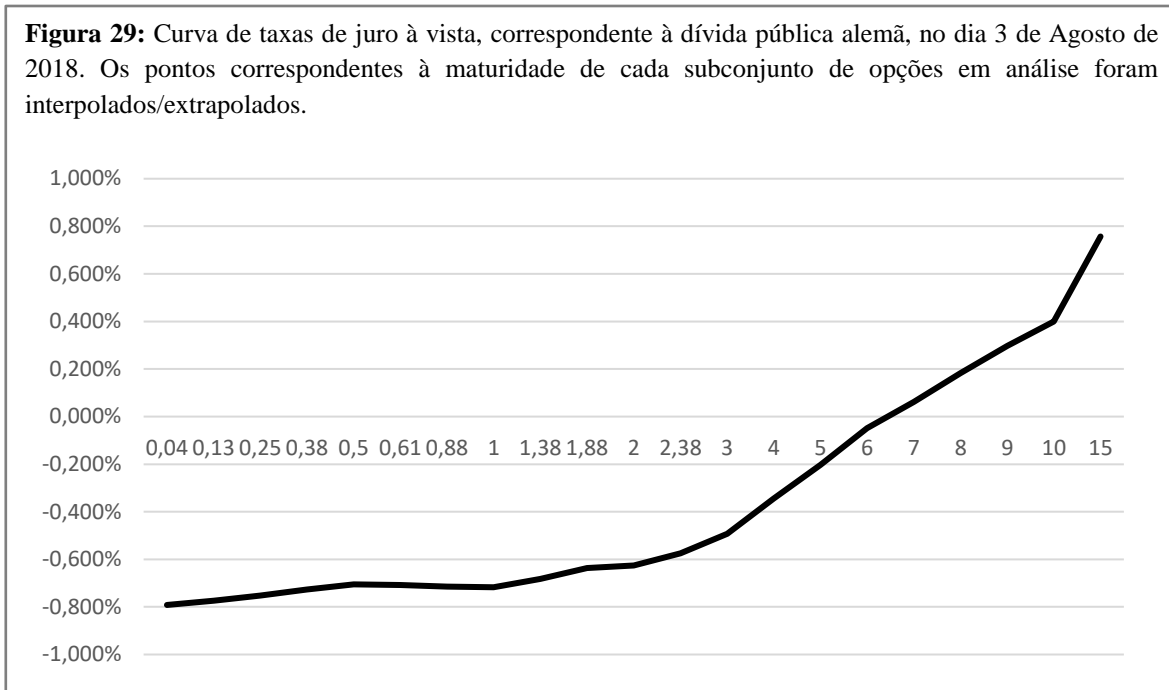


("Ativo Sujacente";"Data de maturidade";"C = Opção de Compra; "Preço de Exercício")	Data de início dos dados
DAX 03/15/19 C10400 DAX 03/15/19 C12500 DAX 03/15/19 C12650 DAX 03/15/19 C12750 DAX 03/15/19 C12800 DAX 03/15/19 C12900 DAX 03/15/19 C13000 DAX 03/15/19 C13200 DAX 03/15/19 C13400 DAX 03/15/19 C13500 DAX 03/15/19 C13800 DAX 03/15/19 C14000 DAX 03/15/19 C14200	20/03/2018
DAX 06/21/19 C10600 DAX 06/21/19 C11000 DAX 06/21/19 C12400 DAX 06/21/19 C12700 DAX 06/21/19 C12800 DAX 06/21/19 C13000 DAX 06/21/19 C13100 DAX 06/21/19 C13150 DAX 06/21/19 C13200 DAX 06/21/19 C13500 DAX 06/21/19 C14000 DAX 06/21/19 C14200 DAX 06/21/19 C14800	09/02/2018
DAX 12/20/19 C9600 DAX 12/20/19 C11200 DAX 12/20/19 C12800 DAX 12/20/19 C14000 DAX 12/20/19 C15000 DAX 12/20/19 C15500 DAX 12/20/19 C18000	19/12/2017

("Ativo Sujacente";"Data de maturidade";"C = Opção de Compra; "Preço de Exercício")	Data de início dos dados
DAX 06/19/20 C11000 DAX 06/19/20 C11200 DAX 06/19/20 C11400 DAX 06/19/20 C11500 DAX 06/19/20 C11600 DAX 06/19/20 C11700 DAX 06/19/20 C11800 DAX 06/19/20 C11900 DAX 06/19/20 C12000 DAX 06/19/20 C12100 DAX 06/19/20 C12200 DAX 06/19/20 C12300 DAX 06/19/20 C12400 DAX 06/19/20 C12500 DAX 06/19/20 C12700 DAX 06/19/20 C12800 DAX 06/19/20 C14000	27/06/2018
DAX 12/18/20 C10000 DAX 12/18/20 C10200 DAX 12/18/20 C10400 DAX 12/18/20 C10600 DAX 12/18/20 C10800 DAX 12/18/20 C11000 DAX 12/18/20 C11200 DAX 12/18/20 C11400 DAX 12/18/20 C12000 DAX 12/18/20 C12200 DAX 12/18/20 C12800 DAX 12/18/20 C13000	05/02/2018

Anexo 2 – Curva de taxas de Juro utilizada no cálculo dos modelos

**Figura 29:** Curva de taxas de juro à vista, correspondente à dívida pública alemã, no dia 3 de Agosto de 2018. Os pontos correspondentes à maturidade de cada subconjunto de opções em análise foram interpolados/extrapolados.



Exemplo do cálculo da taxa de juro à vista para o prazo de 0,38 anos:

Taxa a 0,25 anos = -0,752%

Taxa a 0,61 anos = -0,708%

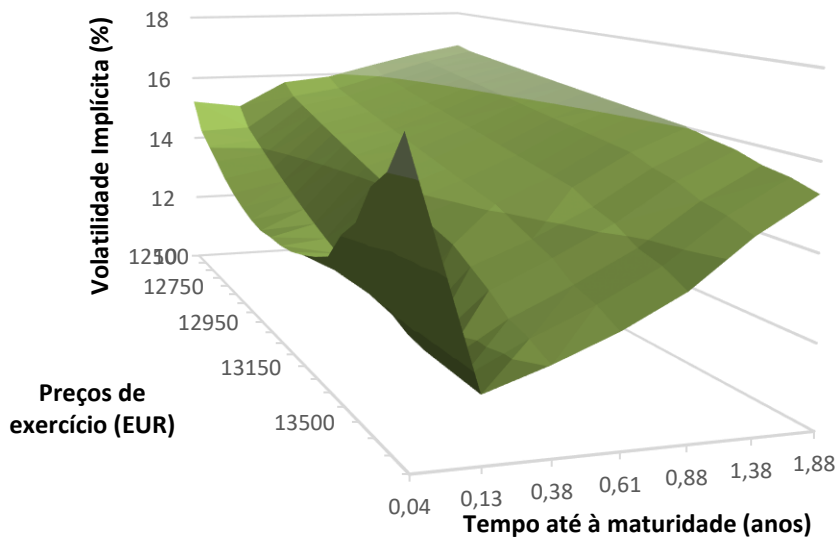
$$Taxa a 0,38 anos = -0,752\% + (-0,705\% - (-0,752\%)) \times \frac{(0,38 - 0,25)}{(0,5 - 0,25)} = -0,727\%$$

Anexo 3 – Superfície de volatilidade implícita empírica

**Figura 30:** Tabela base de construção da superfície de volatilidade implícita. Cada linha corresponde a um sorriso/smirk de uma determinada maturidade e cada coluna a uma estrutura temporal de volatilidade implícita de um dado preço de exercício do conjunto de opções em análise, descrito no anexo 1. Cada ponto correspondente a um preço de exercício e tempo até à maturidade corresponde à volatilidade implícita de uma opção com essas características. A verde surgem os pontos correspondentes a opções efectivamente transaccionadas em mercado, constantes no anexo 1, a amarelo são pontos interpolados via *cubic splines* e a azul são pontos extrapolados via *oneway splines*.

	12500	12600	12650	12700	12750	12800	12850	12900	12950	13000	13050	13100	13150	13200	13250	13400	13500	13700	13800	14000
0,04	15,22	14,38	14,03	13,70	13,35	13,08	12,87	12,70	12,61	12,65	12,64	12,71	12,86	13,06	13,31	14,05	14,54	15,53	16,02	17,01
0,13	15,02	14,44	14,16	13,89	13,63	13,38	13,15	12,93	12,72	12,52	12,34	12,17	12,02	11,89	11,79	11,60	11,53	11,53	11,53	11,53
0,38	15,77	15,42	15,24	15,07	14,90	14,74	14,58	14,42	14,27	14,11	13,96	13,82	13,68	13,54	13,41	13,11	12,81	12,43	12,28	12,02
0,61	15,92	15,64	15,51	15,37	15,24	15,11	14,98	14,85	14,72	14,60	14,47	14,35	14,23	14,12	13,90	13,68	13,47	13,09	12,92	12,62
0,88	16,28	16,05	15,93	15,81	15,70	15,59	15,49	15,38	15,28	15,17	15,06	14,96	14,86	14,75	14,65	14,37	14,18	13,83	13,67	13,36
1,38	16,62	16,46	16,37	16,30	16,22	16,14	16,06	15,98	15,90	15,83	15,75	15,67	15,60	15,53	15,45	15,24	15,10	14,82	14,70	14,45
1,88	16,89	16,77	16,71	16,65	16,59	16,53	16,47	16,41	16,35	16,30	16,24	16,19	16,13	16,08	16,03	15,87	15,77	15,57	15,48	15,28

**Figura 31:** Superfície de volatilidade implícita construída com base nos dados da Figura 30. Esta é a superfície de volatilidade empírica correspondente ao dia 3 de Agosto de 2018 das opções transaccionadas na EUREX, sobre o índice Alemão DAX, para os preços de exercício compreendidos entre EUR 12.500 e os EUR 14.000.



Anexo 4 – Erros dos modelos

**Figura 32:** Quadro resumo da performance total dos modelos. Na primeira coluna encontram-se os modelos, na segunda coluna o erro total por cada um deles gerado. Podemos considerar que quanto menor este número mais a superfície gerada pelo modelo se aproxima da superfície empírica. Por fim, na terceira coluna podemos observar como cada *smirk* contribui percentualmente para o erro total do modelo. Interessante verificar que uma fatia muito significativa do erro advém do *sorriso* com a maturidade mais curta.

	Erro total do modelo	Contributo por <i>Smirk</i> para o erro total do modelo						
		0,04 anos	0,13 anos	0,38 anos	0,61 anos	0,88 anos	1,38 anos	1,88 anos
P. Polinomial	24,30	50%	4%	5%	4%	15%	19%	3%
SVI Original	17,36	30%	4%	23%	5%	27%	10%	2%
SVI O. Optimizada	86,22	9%	19%	11%	9%	11%	34%	7%
SVI Natural	23,72	22%	21%	14%	5%	29%	7%	1%