

Partições Geradoras em Sistemas Dinâmicos de Duas Dimensões

João Henriques

Trabalho de projeto submetido como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Ciências da Complexidade

Orientador:
Professora Doutora Diana Mendes,
ISCTE - IUL

Setembro, 2016

À minha mulher, porque com ela, os desafios tornam-se mais fáceis.

Resumo

Apresentamos estimativas para a entropia topológica do mapa de Hénon, obtidas a partir de duas abordagens distintas, que fazem uso de partições geradoras. Estas abordagens são descritas com detalhe, por forma a identificar os pontos-chave que as identificam, assim como um foco sobre as dificuldades inerentes à aplicação das mesmas. Mantendo a identidade em torno das abordagens descritas, propomos a utilização de uma partição que, embora possa não ser geradora, assegura que cada um dos pontos fixos do mapa fica em cada uma das partes dessa partição. Além disso, esta partição pode ser estendida a mapas de dimensão superior a dois. Realizamos depois, sobre essa partição, um conjunto de experiências onde variamos a forma como se criam as sequências simbólicas necessárias para a estimativa da entropia topológica. Finalmente, resumimos os resultados obtidos, onde damos algumas explicações que consideramos plausíveis para os resultados obtidos. Em particular, mostramos que a informação que obtemos a partir de um ponto fixo hiperbólico é idêntica (aparentemente convergem para o mesmo resultado) à obtida quando se parte de um conjunto de pontos que estão sobre o próprio atrator.

Conteúdo

1	Introdução	5
1.1	Apresentação do Problema	6
1.2	Etapas da Tese	8
1.3	Motivação	9
1.4	Abordagem Técnica	10
2	Definições Preliminares	11
2.1	Generalidades sobre Sistemas Dinâmicos Discretos	11
2.2	Dinâmica Simbólica	20
2.3	Mapa de Hénon	26
3	Estado de Arte	34
3.1	Mapas de intervalo e Dinâmica Simbólica	34
3.2	Dinâmica Simbólica e Sistemas Dinâmicos em Duas Dimensões	37
4	Método de Grassberger	44
5	Método de Cvitanović	53
5.1	Plano simbólico em dimensão 1	56
5.2	Generalização para um plano simbólico em dimensão 2	59
5.2.1	Iterar pontos num Plano Simbólico	61
5.3	Exemplo de construção do plano simbólico	64
6	Partição que assegura a separação dos pontos fixos	67
6.1	Criação da partição e Resultados	69
7	Conclusões	78

1 Introdução

Nos últimos anos assistimos ao desenvolvimento de uma nova abordagem para o estudo de diversos problemas provenientes das áreas de ciências naturais, sociais e tecnológicas: as Ciências da Complexidade. O objetivo central das ciências da complexidade é compreender como grupos de agentes (pessoas, células, animais, organizações, economia) funcionam coletivamente, supondo que existe interação entre os agentes. Além disso, os sistemas complexos podem adaptar-se a novos ambientes, e têm capacidade de se auto-organizar espontaneamente, convergindo para padrões de tempo e espaço, que são conhecidos como atratores.

Embora a exploração teórica dos sistemas complexos seja geralmente bastante difícil, a criação de modelos computacionais plausíveis tem sido possível nos últimos anos, permitindo a combinação da teoria com a prática e conduzindo a novas descobertas sobre a forma como estes sistemas funcionam. De modo tradicional, os modelos das ciências da complexidade foram estudados utilizando técnicas, teorias e conceitos provenientes de *cellular automata* (em particular dinâmica simbólica), redes neuronais, dinâmica não-linear e teoria do caos, do controle, e *evolutionary programming*.

Embora a complexidade ocupe um lugar cada vez mais importante nas ciências modernas e na tecnologia, não existe nenhum meio estabelecido, prático e universal para medir a complexidade (e nem existe uma definição única e consensual de complexidade). A capacidade de quantificar o grau de complexidade e classificar vários tipos de complexidade é uma questão fundamental, algo que pode levar ao aumento da nossa compreensão sobre a complexidade e o comportamento dos sistemas complexos.

Esta breve introdução serve como justificção do tema escolhido. Os pontos fundamen-

tais que devem ser salientados são os seguintes:

- Trata-se de sistemas dinâmicos não-lineares (complexos) com aplicabilidade em várias áreas de conhecimento (em particular, economia e biologia: pois a maioria dos modelos de tipo predador-presa ou de teoria de jogos (otimização da dinâmica) podem ser reduzidos a dinâmicas semelhantes à do mapa de Hénon, apresentado mais adiante).
- Na teoria dos sistemas dinâmicos não-lineares (em particular na abordagem topológica que vai ser fundamentalmente utilizada nessa tese), grosso modo, existem duas dimensões: 1 (cuja dinâmica é bem conhecida) e n . Sem perda de generalidade vamos estudar mapas iterados (sistemas dinâmicos discretos) em dimensão 2, cujos resultados são generalizáveis para dimensão n (problemas de larga escala) e para redes.
- Pelo estudo da dinâmica dos mapas como o de Hénon, entenda-se o estudo da estabilidade das órbitas, a compreensão do processo de transição entre ordem e caos (*edge of chaos*, que de fato representa uma das definições da complexidade), atratores, dimensões fratal e auto-semelhança.
- O processo de transição entre ordem e caos pode ser quantificado pela entropia topológica, que por definição é uma medida da complexidade dos sistemas dinâmicos.
- A abordagem teórica que vamos utilizar é baseada em dinâmica simbólica (que é parte fundamental da *cellular automata*) confirmada pela parte computacional, que é bastante exigente, e que vai ser construída a partir de uma órbita (série temporal), sendo assim aplicável a dados empíricos ou modelos de qualquer dimensão.

1.1 Apresentação do Problema

O estudo dos sistemas dinâmicos contínuos e discretos tornou-se numa área de interesse no seio da comunidade científica, em especial para matemáticos e físicos. Além da elegância inerente aos conceitos e às descobertas que têm sido divulgadas, a sua aplicação a fenómenos naturais, económicos e físicos tem sido feita com um grau de sucesso bastante considerável.

Existe muito trabalho desenvolvido para os sistemas discretos com dimensão 1 e pode-se afirmar que, dado um sistema unidimensional, podemos obter um conhecimento consistente sobre a sua dinâmica. Conseguem-se identificar os seus pontos fixos, órbitas periódicas, estudar a sua estabilidade local e global, calcular entropias topológicas, métricas e também estimar os expoentes de Lyapunov. Todos estes conceitos e invariantes permitem ao investigador de um determinado sistema determinístico conhecer bem a sua dinâmica e eventualmente identificar comportamento caótico. No entanto, quando passamos para sistemas de dimensão superior, as dificuldades surgem e todos os métodos e técnicas conhecidos para a dimensão 1 tornam-se complicados ou mesmo intratáveis. As dificuldades vão desde a sua própria aplicação até à percepção da componente caótica que deixa de ser tão compreensível e universalmente definida.

Ao consultar a literatura sobre este assunto, verificamos que já foram propostas abordagens para conhecer a dinâmica de sistemas de duas dimensões. Contudo, dada a especificidade das diferentes abordagens, e a necessidade de proceder a cálculo numérico para as implementar, torna-se pertinente dominar de forma profunda estas abordagens. Podemos focar nas principais abordagens desenvolvidas, apresentando-as com um detalhe adequado. Assim, o problema em que se pretende trabalhar nesta Tese de Mestrado é a *descrição das diferentes abordagens para criação de uma partição geradora, que permitem o cálculo da entropia topológica de um mapa definido em dimensão 2 e apresentação de um caso prático (sobre o mapa de Hénon)*.

De notar que, não esquecendo as restantes invariantes que podem ser calculadas, será dada uma atenção especial ao cálculo da entropia topológica, pois é um invariante que caracteriza de forma global a dinâmica do sistema. É esperado que este trabalho contribua para novos desenvolvimentos orientados para as restantes invariantes em sistemas dinâmicos discretos de dimensões superiores a 1, por parte de outros investigadores.

1.2 Etapas da Tese

Considerando a literatura científica que existe sobre este tema, decidimos considerar duas abordagens de cálculo da entropia topológica, que fazem uso de partições (binárias) geradoras, para sistemas dinâmicos de duas dimensões. Estas abordagens são bem conhecidas para quem trabalha nesta área, e tornam-se interessantes porque inclusive chegam-se a fundir, alguns anos após as suas respetivas publicações em separado. Estas abordagens têm sempre um objectivo comum que é a aplicação da dinâmica simbólica ao sistema em causa. Em cada abordagem o trajeto até chegar ao cálculo da entropia topológica nem sempre segue os mesmos passos e fazem uso de conceitos diferentes.

Segue um resumo das abordagens referidas acima:

- Método de Grassberger: Construção de uma partição baseada nas tangências homoclínicas primárias de um sistema dinâmico discreto dissipativo [25, 1985], [31, 1990].
- Método de Cvitanović: Construção de uma *pruning front* descrita num plano simbólico [27, 1988].

Esta Tese de Mestrado contempla uma etapa inicial que consiste em descrever os conceitos necessários para entender as abordagens mencionadas acima. Segue-se uma etapa dedicada à descrição do Estado de Arte com referência à problemática da criação de partições geradoras em sistemas dinâmicos de dimensão dois, assim como o respectivo cálculo de invariantes como a entropia topológica que permitem caracterizar a dinâmica do sistema. Posteriormente, passaremos à descrição das duas abordagens propriamente ditas, para culminar com a implementação numérica de uma partição que, embora seja diferente das apresentadas anteriormente, segue uma linha mais intuitiva, permitindo comparar as entropias topológicas obtidas.

1.3 Motivação

A motivação para este trabalho de investigação é fornecer uma visão mais clara sobre as metodologias existentes que permitem quantificar o grau de complexidade de um sistema dinâmico com base na sua dinâmica simbólica. Em sistemas de dimensão 1 a dinâmica simbólica é uma ferramenta que possibilita esta quantificação, assim como o conhecimento da sua dinâmica. Contudo, em sistemas de dimensão dois, a dificuldade para a aplicação desta ferramenta aumenta. Embora existam algumas abordagens possíveis (como as referidas anteriormente), a quantificação do grau de complexidade de um sistema complexo é difícil e exige muitos recursos computacionais. Esta visão que se pretende fornecer, pode ajudar a:

- Uma mais rápida e eficiente familiarização com a problemática associada à construção de partições geradores em sistemas dinâmicos de dimensão dois;
- Uma revisão dos conceitos inerentes às abordagens propostas, acompanhados de exemplos, casos práticos, cálculo de estimativas para as entropias de primeira ordem, gráficos com mais detalhe;

- Criar inspiração para trabalhos futuros, pois sempre que possível enaltecem-se pontos de interesse, fragilidades, dificuldades, ou outros detalhes que se considerem importantes.

1.4 Abordagem Técnica

A implementação é concretizada em *SAS*. A escolha desta ferramenta não é ingénua, pois tem também como objetivo fornecer à comunidade científica um exemplo de implementação numérica de abordagens menos ligadas aos campos de *data mining* e *data analytics*. Embora estes últimos sejam os ambientes habituais de utilização da plataforma SAS, conseguimos aqui obter níveis de performance na execução dos programas desenvolvidos muito interessantes. Podemos imaginar utilizar esta ferramenta para cálculo numérico com elevada precisão, podendo aproveitar da sua elevada capacidade de processamento.

Para simplificação, e sempre que possível, os gráficos apresentados serão criados em Excel, a partir dos dados exportados dos programas em SAS que implementam a metodologia escolhida.

2 Definições Preliminares

2.1 Generalidades sobre Sistemas Dinâmicos Discretos

Nesta secção apresentamos definições que serão adiante utilizadas. Começamos por definir as noções de topologia, espaço topológico, coberturas e subcoberturas.

Definição 1 *Uma coleção τ de subconjuntos de um conjunto X diz-se ser uma topologia em X se τ tem as seguintes propriedades:*

- $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$.
- Se os subconjuntos $V_i \in \tau$ com $i = 1, 2, \dots, n$, então $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n \in \tau$.
- Se $\{V_\alpha\}$ for uma coleção arbitrária de membros de τ (finita, contável ou não contável), então $\bigcup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

Definição 2 *Se τ é uma topologia em X , então X é chamado de espaço topológico, e os membros de τ são chamados de conjuntos abertos de X .*

Definição 3 *Seja X um espaço topológico. Uma cobertura de X é uma família de conjuntos $\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$, onde $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$. Uma subcobertura de $\mathcal{C}$ é uma subfamília $\mathcal{C}'$, formado por alguns dos λ de L , onde ainda assim, temos $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C'_\lambda$, com $L' \subset L$.*

Em particular, uma cobertura de X é *aberta*, se todos os conjuntos da família que a formam são abertos. Consequentemente, uma subcobertura de uma cobertura aberta é

forçosamente uma subcobertura aberta. Com base nestas definições, podemos definir um espaço compacto.

Definição 4 *Um espaço X é compacto se toda a cobertura aberta de X contém uma subfamília finita que também cobre X , ou seja, se qualquer cobertura aberta de X admitir uma subcobertura finita.*

Por exemplo, um conjunto finito é compacto, pois qualquer que seja a cobertura aberta $\mathcal{C}$ de X podemos sempre associar cada ponto $x \in X$ a um C_λ com $\lambda \in L' \subset L$ e obter uma subcobertura $\mathcal{C}'$ que é obrigatoriamente finita. Também um conjunto fechado e limitado é sempre compacto. Qualquer que seja uma sua cobertura aberta, existe sempre uma subcobertura finita, que fica entre o próprio conjunto X e a sua cobertura, pois o primeiro é fechado e a cobertura é aberta.

Definição 5 *Uma aplicação $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ é chamada de métrica sobre um espaço X se, $\forall x, y, z \in X$, as seguintes condições são satisfeitas:*

- $d(x, y) \geq 0$
- $d(x, y) = 0$ se e só se $x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Se conseguirmos associar uma métrica d a um espaço compacto, então o espaço diz-se métrico.

Definição 6 *Seja X um espaço métrico compacto. Seja ϕ uma aplicação contínua, onde $\phi : X \mapsto X$, e que representa uma lei de evolução no tempo. Então o par (X, ϕ) diz-se um sistema dinâmico, em que X é também denominado de espaço de fase. Se, adicionalmente, ϕ utilizar o conjunto $\mathbb{N}$ para fazer evoluir o tempo, então temos um sistema dinâmico discreto.*

Doravante iremos representar um sistema dinâmico discreto a partir da aplicação (ou mapa) f que define as suas iteradas (dinâmica), onde $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow X$. A n -ésima iterada do mapa f em $\mathbf{x} \in X$ é denominada por $f^n(\mathbf{x})$, onde

$$f^n(\mathbf{x}) = \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{n \text{ vezes}} = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ vezes}}(x).$$

Definição 7 *A órbita ou itinerário $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de um ponto $x \in X$ é definida pela sequência infinita*

$$\{f^0(x), f^1(x), f^2(x), \dots\}, \text{ onde } f^0(x) = x \text{ e } f^1(x) = f(x).$$

Se f é invertível então a órbita ou itinerário de $x \in X$ é a sequência bilateral

$$\{\dots, f^{-2}(x), f^{-1}(x), x, f(x), f^2(x), \dots\} = \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Definição 8 *Se a órbita ou itinerário de um ponto $x \in X$ volta ao seu ponto inicial após T iterações, ou seja, se*

$$f^t(x) = f^{t+T}(x),$$

então essa órbita é denominada de periódica e o valor de T é chamado de período principal da órbita. Se uma órbita não for periódica então é denominada de aperiódica.

Um caso particular de uma órbita periódica é quando $T = 1$, ou seja, quando $f(x) = x$. Um ponto $x \in X$ que satisfaça esta condição é denominado de ponto fixo.

Para estudar a estabilidade de um ponto fixo, vamos introduzir o conceito de matriz jacobiana. Seja $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ uma aplicação vetorial, em $\mathbb{R}^n$, de classe C^{11} e seja um ponto p do seu domínio. A matriz jacobiana de f em p designa-se por $Df(p)$ e é definida por

$$Df(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(p) \end{bmatrix}, \text{ com } p = (p_1, \dots, p_n).$$

A estabilidade de um ponto fixo é dada pelos valores próprios da matriz jacobiana nesse ponto. Seja $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ o conjunto de valores próprios obtidos para um determinado ponto fixo. Assim,

- Se $|\lambda_i| < 1$, $\forall i$ então o ponto fixo é estável.
- Se $|\lambda_i| > 1$, $\forall i$ então o ponto fixo é instável ou repulsor.
- Se $\exists i, j : |\lambda_i| > 1$ e $|\lambda_j| < 1$, então o ponto fixo é de sela (que é também um ponto instável ou repulsor).

Os valores próprios da matriz jacobiana permitem identificar se um ponto fixo é hiperbólico:

- Se $|\lambda_i| \neq 1$, $\forall i$, então o ponto fixo é hiperbólico.

¹A classe C^1 representa o conjunto de todas as funções contínuas, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas.

- Se $\exists i : |\lambda_i| = 1$ então o ponto fixo é não hiperbólico.

Por exemplo, se um ponto fixo é estável ou instável (repulsor) então é hiperbólico. Seja $x \in X$ um ponto fixo hiperbólico de f . Então, numa vizinhança suficientemente pequena de x , as variedades estável e instável são definidas, localmente, por

$$W_{local}^s(x) = \{y \in X : d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$$

e

$$W_{local}^u(x) = \{y \in X : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty\},$$

onde $d(x, y)$ denota a distância entre dois pontos, x e y .

Se o ponto fixo $x \in X$ é um ponto fixo atrator, então a variedade estável designa-se por bacia de atração de x . Definem-se as variedades globais em x como sendo

$$W^s(x) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}^+} f^{(-m)}(W_{local}^s(x))$$

$$W^u(x) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}^+} f^{(m)}(W_{local}^u(x)).$$

Grosso modo, podemos entender a variedade estável como o conjunto de pontos que forma o atrator dado pelo sistema dinâmico discreto.

O determinante da matriz jacobiana, dado por $|Df(x)| = \left| \frac{\partial f_i}{\partial x^i} \right|$, traduz a taxa de proporcionalidade da expansão de uma área formada por várias condições iniciais. Se $|Df(x)| = \pm 1$, então a aplicação f é conservativa ou preservadora da área, no sentido em que a área formada pelas condições iniciais é preservada no espaço de fase. Se $|Df(x)| < 1$, então a aplicação f é não conservativa ou dissipativa, no sentido em que a área formada pelas condições iniciais se contrai no espaço de fase com uma taxa de proporcionalidade constante.

O comportamento assintótico local de f^n é quantificado pelos expoentes de Lyapunov. Os expoentes de Lyapunov medem a taxa de crescimento de pequenas perturbações em diferentes direções, nas órbitas descritas no espaço de fase, ou seja, exprimem a rapidez com que soluções muito próximas tendem uma para a outra ou divergem.

Consideremos duas órbitas descritas a partir de dois pontos iniciais muito próximos x e y e seja $\varepsilon(n)$ a distância entre essas órbitas na n -ésima iteração, dada por

$$\varepsilon(n) \approx \varepsilon e^{\lambda n},$$

onde λ é o expoente de Lyapunov. Se $\lambda > 0$, então a distância entre as duas órbitas aumenta e se $\lambda < 0$ então as duas órbitas aproximam-se.

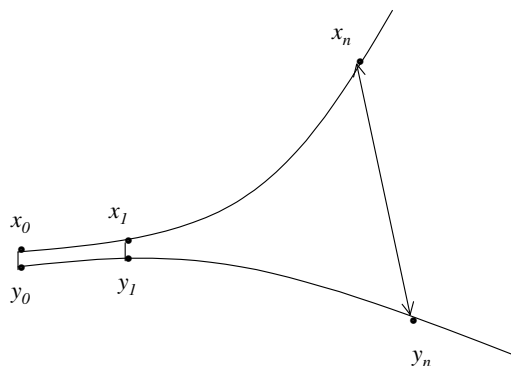


Figura 1: Expoentes de Lyapunov.

Considerando agora $y = x + \varepsilon$, podemos afirmar que $f^n(x + \varepsilon) - f^n(x) \approx \varepsilon e^{\lambda n}$. Aplicando o logaritmo a ambos os lados da expressão, obtemos

$$\log \left[\frac{f^n(x + \varepsilon) - f^n(x)}{\varepsilon} \right] \approx n\lambda.$$

Para pequenos valores de ε , a expressão dá-nos

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \log \left| \frac{df^n(x)}{dx} \right|.$$

Desenvolvendo a derivada $\frac{df^n(x)}{dx}$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{df^n(x)}{dx} &= f'(f^{n-1}(x)) \cdot f'(f^{n-2}(x)) \cdot f'(f^{n-3}(x)) \cdots = \\ &= f'(x_{n-1}) \cdot f'(x_{n-2}) \cdot f'(x_{n-3}) \cdots = \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i). \end{aligned}$$

Aplicando o logaritmo e considerando o limite quando n tende para ∞ , temos que o expoente de Lyapunov é dado por

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log |f'(x_i)|.$$

Outra definição importante que caracteriza um sistema dinâmico discreto é a dependência sensível às condições iniciais.

Definição 9 *Seja X um espaço métrico compacto. Uma aplicação $f : X \rightarrow X$ diz-se ter dependência sensível às condições iniciais se existe $r > 0$ tal que para qualquer $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ existe um $y \in X$ com $d(x, y) < \varepsilon$ e $k \geq 0$ tal que*

$$d(f^k(x), f^k(y)) \geq r.$$

Existe uma relação entre os expoentes de Lyapunov e a dependência sensível às condições iniciais. Para percebermos essa relação, consideremos dois pontos muito próximos um do outro:

- Se as suas órbitas convergem ($\lambda < 0$), então o sistema não é sensível às condições iniciais.
- Se a distância entre as suas órbitas se mantém constante ($\lambda = 0$), então o sistema está em equilíbrio.
- Se as duas órbitas divergem ($\lambda > 0$), então o sistema é sensível às condições iniciais.

Tal como no estudo da estabilidade de um ponto fixo, podemos usar a matriz jacobiana para calcular os expoentes de Lyapunov. É de notar que, para uma aplicação em $\mathbb{R}^n$, cada órbita tem n expoentes de Lyapunov. Consideremos a matriz $L(x)$, definida pelo seguinte limite, isto é,

$$L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(D^t f(x) \cdot D^{t^t} f(x) \right)^{1/2n},$$

onde $D^{t^t} f(x)$ é a transposta de $D^t f(x)$. Se denominarmos os valores próprios de $L(x)$ por $\Lambda_i(x)$, então os expoentes de Lyapunov de um ponto x_0 são dados por

$$\lambda_i(x_0) = \log \Lambda_i(x_0).$$

Antes de apresentarmos a definição de entropia métrica, temos de definir o que é um homeomorfismo e introduzir uma métrica dinâmica.

Definição 10 *Dois espaços $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ dizem-se homeomorfos se existe uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ que seja bijetiva, contínua, invertível e cuja inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ seja também contínua. A aplicação f é denominada de homeomorfismo.*

Definição 11 *Seja (X, d) um espaço métrico compacto e seja $f : X \rightarrow X$ um homeomorfismo. Define-se a métrica dinâmica por*

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i x, f^i y).$$

Uma medida μ diz-se invariante para a aplicação f se $\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$ para todo o conjunto mensurável $E \subset X$. De uma forma geral, podemos dizer que a probabilidade de um ponto estar num dado conjunto é igual à probabilidade de a sua imagem estar nesse mesmo conjunto.

Definição 12 *Seja $r(n, \varepsilon, \delta)$ o número mínimo de ε -bolas com a métrica d_n cuja união tem a μ -medida invariante maior ou igual que $(1 - \delta)$. Então, para qualquer $\delta > 0$ a entropia métrica é dada por*

$$h_\mu(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \log r(n, \varepsilon, \delta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \frac{1}{n} \log r(n, \varepsilon, \delta).$$

A entropia métrica é muito importante, porque contém informações ergódicas sobre o sistema dinâmico. Ela pode ser vista como um número que mede o quão desordenada pode ser a dinâmica de uma aplicação preservadora de uma medida.

Introduzimos agora o invariante mais importante para o estudo de sistemas dinâmicos, relacionado com o crescimento das órbitas, a entropia topológica. Esta é uma medida de complexidade de um sistema dinâmico que não requer nenhum conceito de medida sendo puramente uma quantidade topológica. A definição original de entropia topológica foi apresentada por Adler *et al*, em [7, 1965], que não requer uma métrica, mas sim a compacidade do espaço.

A definição que iremos utilizar é a de Bowen, apresentada em [9, 1971], que necessita de uma métrica mas já não requer compacidade do espaço.

Definição 13 *Um conjunto $E \subset X$ diz-se (n, ε) -separado para f se*

$$\forall x, y \in E \Rightarrow d\left(f^k(x), f^k(y)\right) > \varepsilon$$

para algum $k \in [0, n)$. O número de órbitas distintas é

$$s(n, \varepsilon) = \max \{ \#E : E \subset X \text{ é } (n, \varepsilon)\text{-separado para } f \}.$$

Quando n cresce o número $s(n, \varepsilon)$ cresce também. Define-se a taxa de crescimento por

$$h(f, \varepsilon) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log s(n, \varepsilon).$$

Finalmente, considera-se $\varepsilon \rightarrow 0$ e define-se a entropia topológica como sendo

$$h(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(f, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log s(n, \varepsilon).$$

Portanto, a entropia topológica corresponde à taxa de crescimento assintótico do número de seqüências de comprimento finito, quando o comprimento das diferentes trajetórias converge para infinito.

2.2 Dinâmica Simbólica

Os sistemas dinâmicos simbólicos são uma classe muito importante dos sistemas dinâmicos topológicos. A dinâmica simbólica sugere um modelo, para as órbitas de um sistema dinâmico através de um espaço de seqüências, que permitem que se navegue no espaço de fase. A associação entre uma seqüência simbólica e uma órbita é feita, de uma forma

natural, através do seu itinerário em função de uma partição do espaço de fase. Ou seja, na prática, o que se faz é:

- Particionar o espaço de fase a partir de uma determinada lei,
- Associar um símbolo a cada segmento (parte) da partição, e
- Representar pontos do espaço de fase pelas sequências bi-infinitas de símbolos, que correspondem aos itinerários das órbitas.

A Figura (2) representa um exemplo de uma partição do espaço de fase X , onde podemos visualizar uma órbita que se inicia no ponto $x \in X$, correspondendo à sequência

$$s = \dots R_n R_2 R_3 R_2 R_3 R_1 \dots$$

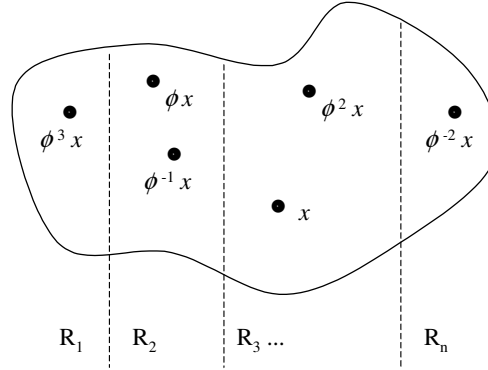


Figura 2: Partição do espaço de fase.

Para obter uma boa caracterização simbólica do sistema dinâmico é preciso construir uma partição com propriedades especiais, onde cada itinerário represente um único ponto. Começamos por definir uma partição no espaço de fase.

Definição 14 *Uma partição topológica de um espaço métrico X é uma coleção finita*

$$\mathcal{R} = \{R_0, R_1, \dots, R_{p-1}\}$$

de conjuntos abertos disjuntos tal que a união dos fechos dos subconjuntos $\overline{R}_j$, $j = 0, \dots, p-1$ forma uma cobertura do espaço no sentido em que

$$X = \overline{R}_0 \cup \overline{R}_1 \cup \dots \cup \overline{R}_{p-1}.$$

Uma partição diz-se *geradora* se cada sequência infinita de símbolos corresponde a um ponto distinto no espaço de fase. Se temos uma partição não geradora então podemos ter a mesma sequência simbólica associada a mais do que uma trajetória ou itinerário. Idealmente, uma boa partição deve conseguir fazer corresponder uma única sequência de símbolos a cada itinerário distinto.

Definição 15 *Designa-se por alfabeto o conjunto $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, N-1\}$ formado por N símbolos distintos. Desta forma, o domínio do sistema dinâmico (X, ϕ) é o espaço de todas as sequências bi-infinitas de elementos de $\mathcal{A}$, isto é,*

$$\Sigma_N = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{s = (s_n)_{n \in \mathbb{Z}} : s_n \in \mathcal{A}\}.$$

Podemos pensar num elemento de Σ_N como sendo um passeio bi-infinito no grafo direcionado completo de N vértices distintos.

Definição 16 *Designa-se por bloco ou palavra de dimensão ou comprimento n uma sequência simbólica finita que consiste em n símbolos. Se W é uma palavra de comprimento $j-i+1$, então o conjunto das sequências s tal que $s_i \dots s_j = W$ chama-se conjunto cilindro.*

Os conjuntos cilindro podem ser fechados ou abertos e formam uma base para a topologia produto em Σ_N .

Trabalhando com uma partição geradora, podemos afirmar que as propriedades das órbitas do sistema dinâmico original estão bem refletidas nas correspondentes propriedades das sequências simbólicas. A ideia geral é que, embora haja alguma perda de informação, é reconhecido que o essencial para compreender a dinâmica de um sistema fica retido nas sequências simbólicas.

Dada uma métrica, podemos medir a distância entre duas sequências simbólicas.

Definição 17 *Sejam $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ duas sequências de Σ_N . A distância entre as duas sequências é dada por*

$$d(s, t) = \sum_{k \geq 0} \frac{|s_k - t_k|}{2^k}.$$

Esta métrica permite-nos ter uma ideia sobre a proximidade de duas sequências. Para isso, temos o seguinte teorema conhecido como o teorema da proximidade.

Teorema 18 *Sejam $s, t \in \Sigma_N$.*

- *Se $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$ então $d(s, t) \leq 1/2^n$.*
- *Se $d(s, t) < 1/2^n$ então $s_i = t_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$.*

Este teorema diz-nos que duas sequências estão próximas uma da outra se os seus primeiros n termos forem iguais. Outra questão que surge é o que podemos fazer com estas

sequências simbólicas. Uma das coisas mais simples é podermos iterar ou avançar ao longo de uma sequência, o que introduz a definição do mapa *shift*.

Definição 19 *Seja Σ_N e seja $s = (s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. A transformação *shift*, designada por $\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ é definida por*

$$(\sigma s)_n = s_{n+1}.$$

Podemos agora definir um sistema dinâmico usando a aplicação *shift*. Também podemos olhar para os pontos fixos ou periódicos através do mapa *shift*. Um ponto fixo para σ representa uma sequência simbólica da forma a^∞ onde a é algum símbolo do alfabeto $\mathcal{A}$ e um ponto periódico de período n corresponde a uma sequência u^∞ ou $\bar{u}$, onde u é alguma palavra $u = s_1 s_2 \dots s_n$ de comprimento n do mesmo alfabeto. Cada ponto x_t de uma órbita periódica pode ser associado a uma das 2^n sequências simbólicas possíveis $\overline{s_1 s_2 \dots s_n}$.

Uma permutação cíclica da sequência simbólica $\overline{s_1 s_2 \dots s_n}$ para a nova sequência simbólica $\overline{s_k s_{k+1} \dots s_n s_1 \dots s_{k-1}}$ é a descrição do ponto x_{t+k-1} da mesma órbita periódica. Uma órbita estável muda a sua descrição simbólica algures na janela de estabilidade. Para as aplicações de dimensão 1 isto acontece sempre no valor do parâmetro para o qual a órbita é superestável, isto é, onde um dos pontos da órbita é idêntico ao ponto crítico. Nas funções unimodais (definidas mais adiante) existe um único ponto crítico e a descrição simbólica da órbita estável vai alterar-se num único símbolo, ou seja,

$$\overline{s_1 s_2 \dots s_{n-1} s_n} \rightarrow \overline{s_1 s_2 \dots s_{n-1} (1 - s_n)}.$$

De forma inversa, uma órbita periódica instável tem sempre uma representação simbólica única. Nas aplicações multi-modais, como existem vários pontos críticos, a descrição simbólica de uma órbita periódica estável pode alterar-se de maneiras diferentes.

Quando temos uma bifurcação do tipo *period-doubling*, então a descrição simbólica da nova órbita obtém-se escrevendo a antiga sequência simbólica duas vezes e mudando o último símbolo, isto é,

$$\overline{s_1 s_2 \dots s_n} \rightarrow \overline{s_1 s_2 \dots s_n s_1 s_2 \dots s_{n-1} (1 - s_n)}.$$

Em todas estas sequências simbólicas o número de símbolos 1 é sempre ímpar porque só as órbitas com um número ímpar de 1's podem ter estabilidade, tornando-se instáveis através de uma bifurcação de tipo *period-doubling*.

Se definirmos uma métrica diferente sobre o espaço simbólico como

$$d(s, t) = \begin{cases} 2^{-k} & \text{se } s \neq t \text{ e } k \text{ é maximal, isto é } s_{[-k, k]} = t_{[-k, k]} \\ 0 & \text{se } s = t \end{cases},$$

então (Σ_N, d) é um espaço métrico compacto e a aplicação *shift* é um homeomorfismo. Definido desta forma, o espaço (Σ_N, σ) designa-se por *N-shift* completo, para o qual podem existir sequências simbólicas que não são realizadas como trajetórias. Essas sequências são denominadas de inadmissíveis ou proibidas e a dinâmica simbólica diz-se *pruned*.

Restringindo a transformação *shift* de um *shift* completo (Σ_N, σ) a um subespaço fechado $\Sigma \subset \Sigma_N$ invariante em relação ao *shift*, obtemos um sistema dinâmico (Σ, σ) designado por *subshift*. É fundamental determinar Σ , o conjunto dos itinerários bi-infinitos que são realizados pelo sistema dinâmico dado. Se a dinâmica for *pruned* então o alfabeto deve ser complementado por uma gramática, ou seja, um conjunto de regras de *pruning*.

Se a gramática puder ser definida com um conjunto finito de regras de *pruning*, cada regra proibindo uma palavra de comprimento finito, então podemos construir uma partição

de Markov finita, substituindo as palavras de comprimento finito da partição original por letras de um novo alfabeto. Portanto, qualquer *subshift* pode ser definido excluindo uma coleção contável de palavras proibidas.

O sistema dinâmico topológico (Σ_A, σ) para o qual todos os itinerários admissíveis são gerados por uma matriz de transição finita A , ou seja, onde

$$\Sigma_A = \{(s_n)_{n \in \mathbb{Z}} : a_{s_n, s_{n+1}} = 1, s_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{Z}\},$$

designa-se por *subshift* de tipo finito ou *subshift* de Markov topológico e é representado por grafos de Markov finitos e orientados ou direcionados.

A matriz de transição A é de tipo $(N \times N)$, de elementos não negativos e codifica a dinâmica topológica como uma lei invariante de movimento. Geralmente, os elementos a_{ij} da matriz A são os símbolos 0 e 1 que surgem do grafo finito orientado de N vértices de acordo com o seguinte critério de admissibilidade: $a_{ij} = 1$ se e só se o vértice i está conectado com o vértice j . Se o grafo de Markov não é direcionado, então a matriz correspondente designa-se por matriz adjacente.

Um *shift* de tipo finito revela um nível muito elevado de complexidade, disponibilizando a mais completa descrição de um sistema dinâmico.

2.3 Mapa de Hénon

Num artigo publicado nos anos 70 ([12, 1976]) Hénon estudou este mapa, mostrando as suas principais características. A ideia parte da exploração do trabalho de Lorenz em torno do seu conhecido modelo de um sistema de três equações diferenciais de primeira ordem

que permitia representar fluxos em espaços tridimensionais. Este modelo apresentava, para alguns parâmetros escolhidos, uma região onde todas as trajetórias ficavam retidas. Essa zona, para algumas escolhas de parâmetros, parecia ser algo simples, como um ponto ou uma curva fechada, mas noutros casos obtinha-se algo aparentemente mais complexo, a que se apelidava de *atrator estranho*.

No seu trabalho inicial sobre este modelo, Hénon encontrou uma forma de reduzir a problemática do estudo do atrator estranho que o modelo de Lorenz definia, mas a partir de um modelo mais simples, em dimensão 2, mas que preservasse as mesmas propriedades fundamentais, tornando as explorações numéricas mais rápidas. Para isso, Hénon começa por reduzir as trajetórias do modelo de Lorenz para uma superfície de Poincaré, reduzindo assim a dimensão do problema.

Aproveitando posteriormente os trabalhos de Ruelle e Pomeau ([10, 1975] e [11, 1976]), Hénon conseguiu chegar a uma expressão que fornece diretamente os pontos que as várias trajetórias do modelo de Lorenz transcreviam na secção de Poincaré, chegando ao conhecido como o Mapa de Hénon, dado por $H_{a,b}(x, y) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, onde

$$H_{a,b}(x, y) = \begin{cases} x_{i+1} = 1 - ax_i^2 + y_i \\ y_{i+1} = bx_i \end{cases}, \text{ com } a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0.$$

Este é um dos mapas mais simples com duas dimensões e que exhibe um comportamento caótico para algumas opções de parâmetros (a, b) . Estes parâmetros têm uma função muito clara, na dinâmica deste sistema, imprimindo-lhe uma função de “esticar” e de posterior “reflexão”. Note-se que podemos decompor cada iteração do mapa, começando por uma dobragem preservadora de áreas, dada por

$$(x_1, y_1) = (x, 1 - ax^2 + y),$$

seguida de uma contração na direção do eixo XX , dada por

$$(x_2, y_2) = (bx_1, y_2),$$

e, finalmente, uma reflexão sobre a linha $y = x$, dada por

$$(x_3, y_3) = (y_2, x_2).$$

Nesta decomposição podemos perceber que o parâmetro a controla o quanto se estica, a órbita, em cada iteração. Por outro lado, o parâmetro b controla a espessura da contração nessa mesma iteração. Esta combinação de operações, de esticar e dobrar, faz com que este mapa seja de elevado interesse, pois podemos trabalhar facilmente sobre ele, para depois aplicar-se as descobertas que se venham a realizar a modelos com dinâmicas mais complexas ou de dimensão mais elevada.

De forma a apresentar algumas das propriedades interessantes deste mapa, começamos por calcular os seus pontos fixos. Para tal, tomamos $H_{a,b}(x, y) = (x, y)$, obtendo

$$\begin{cases} x &= 1 - ax^2 + y \\ y &= bx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{-(b-1) \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2a} \\ y &= b \frac{-(b-1) \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2a}. \end{cases}$$

Por exemplo, se tomarmos $(a, b) = (1, 1)$, a solução acima dá-nos que os pontos $(x, y) = (1, 1)$ e $(x, y) = (-1, -1)$ são os pontos fixos que obtemos para os valores de a e b fixados inicialmente. Agora que temos os pontos fixos de $H_{a,b}(x, y)$, podemos estudar a sua estabilidade a partir da matriz Jacobiana, dada por

$$DH(x, y) = \begin{bmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}.$$

Uma das propriedades interessantes deste mapa é que o determinante da matriz Jacobiana é constante, representado por $-b$. Esta propriedade indica que $H_{a,b}(x, y)$ preserva as áreas, mas contrai as mesmas, como consequência natural do modelo de Lorenz que é conhecido por ter uma divergência constante e negativa, o que faz com que os volumes encolham exponencialmente com o tempo.

Para conhecer a estabilidade dos pontos fixos, temos de caracterizar os valores próprios da matriz Jacobiana acima, dados pelo determinante $|J - \lambda I|$, que resulta em

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2ax \pm \sqrt{4a^2x^2 + 4b}}{2}.$$

Com este resultado, podemos numa primeira instância perceber que para valores de $4(a^2x^2 + b) \geq 0$ temos que os valores próprios de $H_{a,b}(x, y)$ são reais, caso contrário obtemos soluções complexas. Mais ainda, em termos de estabilidade, temos:

- Se $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| < 1 \Rightarrow$ os pontos fixos são atratores e estáveis.
- Se $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| > 1$ ou $|\lambda_1| > 1$ e $|\lambda_2| < 1 \Rightarrow$ os pontos fixos são pontos de sela instáveis.
- Se $|\lambda_1| > 1$ e $|\lambda_2| > 1 \Rightarrow$ os pontos fixos são repulsores e instáveis.

Portanto, também à semelhança do modelo de Lorenz, para algumas escolhas dos parâmetros a e b , obtemos um atrator estranho, onde todos os pontos de uma trajetória nunca mais saem uma vez que lá tenham entrado (ver Figura (3)). Hénon, no seu trabalho apresentado em [12, 1976] caracteriza muito bem estes parâmetros, começando por fixar o valor de $b = -0.3$ com base na necessidade de assegurar que existe uma dobragem das áreas que são iteradas pelo mapa $H_{a,b}(x, y)$. Depois faz uma caracterização muito completa

sobre a forma como o mapa se comporta à medida que fazemos variar a , desde o limiar das suas soluções reais, dadas por $a_0 = (1 - b)^2/4$ até um valor na ordem dos 1.55 (para $b = 0.3$) a partir do qual as soluções do mapa parecem tender para infinito. Na Figura (3) podemos observar a forma do atrator, quando fixamos os parâmetros a e b em valores que permitem observar o referido comportamento aparentemente errático das trajetórias que são geradas.

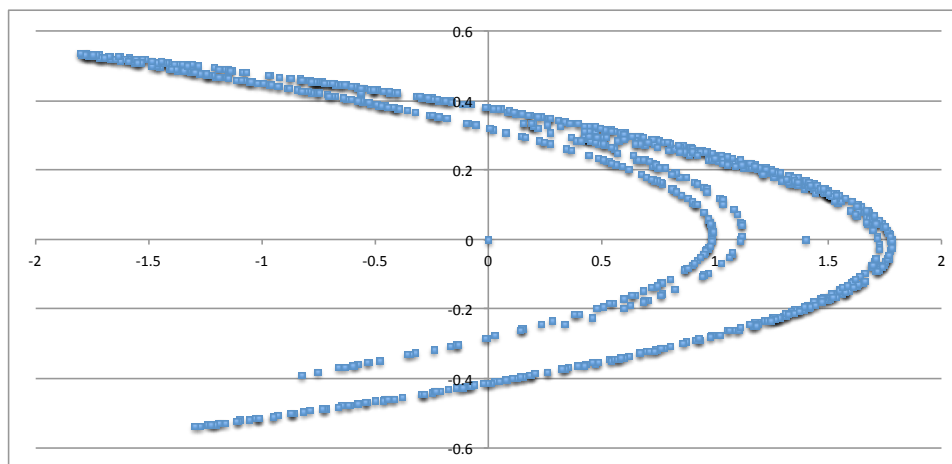


Figura 3: Atrator estranho para o mapa de Hénon com parâmetros $a = 1.4$ e $b = 0.3$, com pontos iniciais $(x, y) = (0, 0)$.

Uma forma mais detalhada de obter esta caracterização de um sistema dinâmico corresponde a estudar as bifurcações que o mapa gera, em função de um parâmetro (por exemplo, o parâmetro a) quando fixamos o outro parâmetro (por exemplo, com $b = 0.3$). Isto corresponde à construção de um Diagrama de Bifurcação, que pode ser visualizado na Figura (4). Neste diagrama podemos ver quais as zonas do parâmetro a que geram o referido comportamento caótico, por oposição a zonas em que as trajetórias geradas deambulam por entre um conjunto mais restrito e pequeno de pontos.

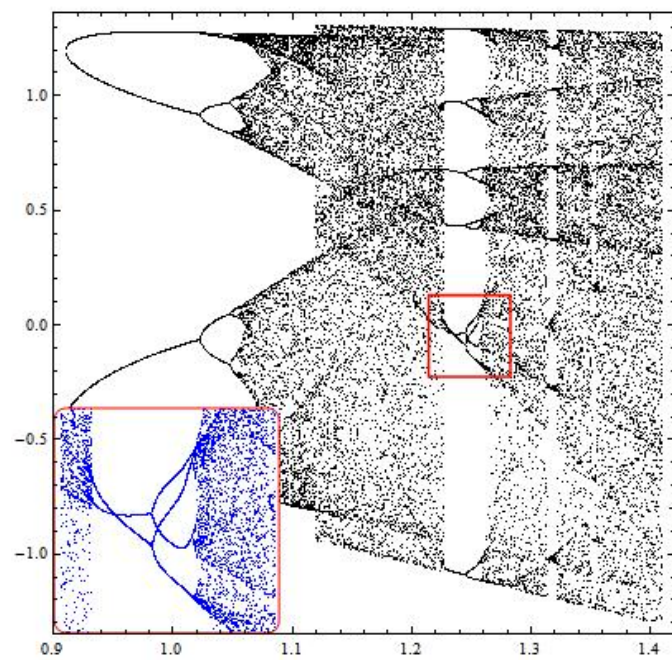


Figura 4: Diagrama de Bifurcação para o mapa de Hénon.

Voltando ao atrator estranho que é apresentado na Figura (3), uma das características que Hénon foca no seu trabalho é a propriedade de auto-semelhança que ele exhibe. Mais concretamente, Hénon pegou numa pequena zona deste atrator e, através de *zoom's* sucessivos, mostra que o que inicialmente parecia ser um traçado duplo de duas curvas, acaba por se dividir em mais pequenas curvas, à medida que aumentamos a quantidade de iterações por forma a ter uma maior resolução deste objeto. Esta propriedade é característica dos objetos conhecidos como fractais e que foram amplamente estudados pelo Benôit Mandelbrot ([23, 1983]).

Na figura (5) podemos verificar que, quando seleccionamos uma secção do mapa de Hénon e fazemos *zoom's* sucessivos sobre ela mesma, continuamos a visualizar um conjunto de traçados evidentes. Nesta figura, temos um primeiro *zoom* (gráfico em cima à direita) que é obtido com uma execução de 10^5 pontos. O gráfico seguinte (em baixo à esquerda) é obtido com 10^6 pontos, enquanto que o último dos quatro gráficos é obtido com 5×10^6 pontos. Mesmo no último gráfico, embora o traçado possa ter uma menor resolução, ele ainda é claramente visível.

Este mapa é chamado por alguns autores, de um *toy model* exatamente porque pode ser utilizado para sustentar alguns trabalhos realizados nesta área. É um modelo que, apesar da sua aparente estrutura simples, é ideal para também nós o utilizarmos ao longo deste trabalho.

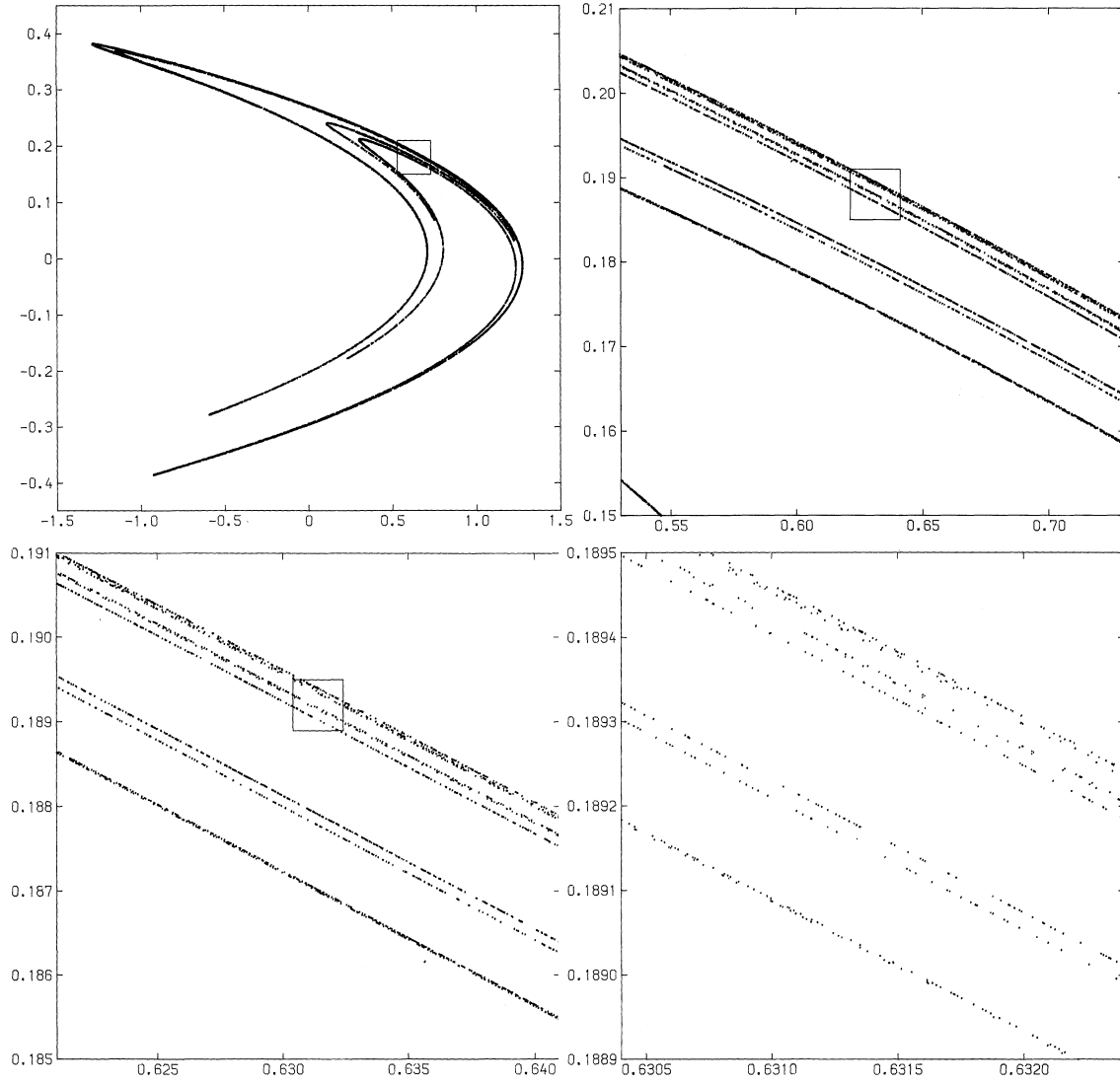


Figura 5: Exemplo da autosemelhança identificada por Hénon, onde mostramos três *zoom*'s sucessivos de uma secção escolhida do mapa de Hénon.

3 Estado de Arte

3.1 Mapas de intervalo e Dinâmica Simbólica

Um mapa unimodal sobre o intervalo unitário pode ser definido por

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1],$$

$$x_{t+1} = f(x_t),$$

onde t representa o tempo. Estes mapas foram estudados por autores como Collet e Eckmann [19, 1980] e abriram o caminho para um entendimento dos sistemas dinâmicos de dimensão 1.

Alguns exemplos de mapas unimodais são dados na figura (6).

a) O primeiro exemplo é o Mapa de Tenda, com a estrutura

$$x_{t+1} = \begin{cases} \mu x_t & \text{se } x_t < 0.5 \\ \mu(1 - x_t) & \text{se } x_t \geq 0.5 \end{cases}, \text{ com } \mu \in \mathbb{R}.$$

Neste exemplo, temos $\mu = 1.99$.

b) O segundo exemplo é o Mapa Logístico, onde

$$x_{t+1} = \mu x_t(1 - x_t), \text{ com } \mu = 4.$$

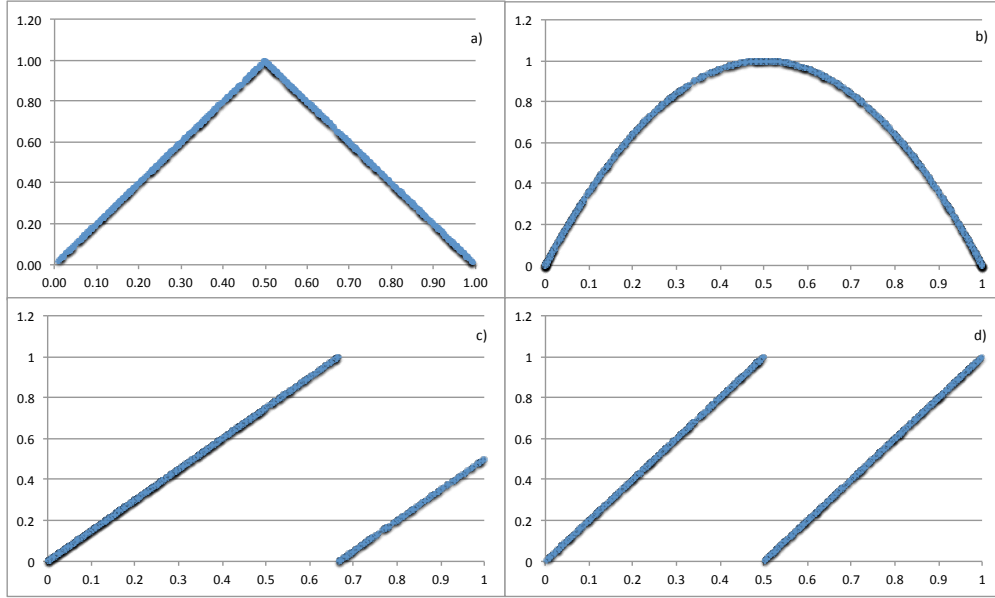


Figura 6: Exemplos de Mapas Unimodais.

c) O terceiro exemplo é menos conhecido, tendo a estrutura

$$x_{t+1} = \mu x_t - \mu \{x_t\}$$

com $\mu = 1.5$ e onde $\{a\}$ representa a parte inteira de a .

d) O quarto e último exemplo corresponde ao mapa apresentado na alínea anterior, mas com $\mu = 1.999$.

Com base nestes mapas unimodais, podemos construir uma partição geradora dividindo o intervalo unitário em dois subconjuntos, através do ponto crítico que corresponde ao máximo da curva formada por $f(x_t)$. Nos exemplos dados, estes pontos críticos corresponderiam a 0.5 para a) e b), e $1/\mu$ para c) e d).

Assim, para cada condição inicial, iremos obter uma sequência binária de 0's e 1's onde o i -ésimo símbolo é 0 se a i -ésima iterada *forward* da condição inicial está à esquerda do ponto crítico e 1 caso contrário. O estudo dos sistemas dinâmicos através do conjunto de sequências de símbolos, i.e., da gramática induzida pela partição geradora aplicada a um sistema dinâmico, é intitulada de *Dinâmica Simbólica*.

A dinâmica simbólica é uma forma rigorosa de estudar a dinâmica de um sistema não linear determinístico com uma precisão finita. Os pioneiros desta área são Hadamard [1, 1898] e Morse [2, 1938]. O primeiro lançou, ainda no século XIX um artigo onde considerava classes homotópicas de curvas e mostrava que existe um conjunto finito de curvas fechadas $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ descrito por uma sequência duplamente infinita $A = \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots$, e prova que cada classe contém exactamente uma geodésica². Isto estabelece uma correspondência biunívoca entre todas as geodésicas limitadas e todas as sequências duplamente infinitas ao longo do alfabeto G .

Esta técnica tem sido alvo de vários esforços de investigação, onde destacamos os trabalhos de Milnor e Thurston [26, 1988] e Lind e Marcus [39, 1995], entre outros. Mais recentemente, Xie [40, 1996] apresenta um conjunto de aplicações deste tipo de gramáticas em diversos casos de sistemas dinâmicos, assim como as suas diferentes abordagens.

As ideias de Hadamard foram continuadas por Morse já no início do século XX, culminando na construção do famoso exemplo de uma sequência minimal não periódica conhecida hoje como a *sequência Thue-Morse*. Esta sequência é obtida por indução começando com um zero e depois, através de passos consecutivos, adicionando a imagem negativa do que foi construído até cada passo (0-1-10-1001-10010110-...). É importante salientar que Morse

²Uma geodésica, no campo da Geometria Diferencial, representa uma generalização da noção de reta, para espaços curvos. Por exemplo, na superfície de uma esfera, uma geodésica representa a distância mais curta entre dois pontos dados, e acaba por coincidir com uma parte de um arco de circunferência.

introduziu uma abordagem completamente nova e abstrata para este assunto.

A dinâmica simbólica desenvolveu-se bastante, ganhando uma posição poderosa na investigação da análise não linear, tanto do ponto de vista teórico como empírico. Inclui novas áreas como autómatos celulares, teoria da informação, teoria de códigos de correção de erros, entre outros tópicos de aplicação. Um dos trabalhos bastante referenciado por entre vários artigos é o de Hopcroft e Ullman [43, 2001], onde é utilizada a teoria formal das linguagens para analisar problemas em dinâmica simbólica.

3.2 Dinâmica Simbólica e Sistemas Dinâmicos em Duas Dimensões

A dinâmica simbólica tem servido os seus propósitos de uma forma muito satisfatória em sistemas dinâmicos de dimensão 1. A sua aplicação é facilitada pela propriedade da ordenação dos números reais na recta real (lexicográfica) e pela possibilidade de particionar o espaço de fase, em concordância com a geometria ou topologia da dinâmica.

No entanto, quando tentamos utilizar esta mesma técnica em sistemas dinâmicos de dimensões mais elevadas, surgem dificuldades. Uma dessas dificuldades é encontrar uma boa partição para o espaço de fase que mantenha a sua concordância topológica quando iteramos o sistema dinâmico. Por outras palavras, é extremamente difícil encontrar uma partição que seja topologicamente invariante para um sistema dinâmico com dimensão superior a um.

Tomando o exemplo bidimensional, encontramos na literatura alguns trabalhos com o intuito de estabelecer uma partição adequada para caracterizar a dinâmica de um sistema discretos não linear. Nestes trabalhos, o objectivo acaba sempre por ser o cálculo de

estimativas para algum tipo de entropia, perceber a estabilidade do sistema em torno dos seus pontos fixos, ou identificar as dimensões fractais para se poder caracterizar o comportamento complexo associado à dinâmica de um dado sistema discreto não linear.

Por outro lado, os investigadores debruçam-se tendencialmente sobre alguns mapas mais conhecidos que servem de *toy models* para o estudo destas características a partir da criação de uma boa partição geradora e da aplicação das técnicas disponibilizadas pela dinâmica simbólica. O mapa de Hénon e a sua versão linearizada, o mapa de Lozi, talvez sejam os modelos de referência mais utilizados neste sentido, pelos investigadores um pouco por todo o mundo.

A meio da década de 80, Grassberger e Kantz, em [25, 1985], apresentam uma proposta de criação de uma partição que seja geradora para os mapas de tipo Hénon. Esta proposta considera que a extensão natural da partição utilizada nos mapas unimodais é a linha divisora formada pelas tangências homoclínicas primárias. No entanto, estas tangências primárias apresentavam-se muito difíceis de definir e, consequentemente, de identificar.

Passados alguns anos, Grassberger *et al.*, em [29, 1989] utilizaram um método desenvolvido por Biham e Wenzel ([28, 1989]) para encontrar órbitas periódicas instáveis para definir em concreto a linha divisora que tinham sugerido anteriormente. Na prática, definiram as tangências primárias como sendo as tangências homoclínicas para as quais a soma das curvaturas das variedades estável e instável era mínima.

Neste desenvolvimento, foram apresentadas situações com base no mapa de Hénon, onde o método de Biham e Wenzel não convergia. Estes apresentaram, em [30, 1990] uma modificação ao método original para eliminar alguns dos problemas detetados, mas ainda não era suficiente. Mais tarde, foi revelado que seria sempre possível encontrar condições

iniciais, para as quais o método, mesmo com a modificação introduzida, não iria funcionar.

Entretanto, Cvitanović *et al.*, em [27, 1988], introduziram uma nova teoria onde apresentam uma representação bidimensional para ordenar os pontos de uma órbita de um mapa de tipo Hénon num plano, ao qual chamaram de plano simbólico. Com base nesta ordenação eram criadas árvores binárias que ordenavam os números racionais binários gerados pela dinâmica simbólica e, a partir daí, eram definidas as regras para caracterizar as sequências proibidas. Estas sequências proibidas eram retiradas dos planos simbólicos através da denominada *pruning front*, que é uma função descontínua, mas que para mapas dissipativos podia ser bem aproximada através de uma gramática finita.

Posteriormente à apresentação desta nova teoria, em [33, 1991], D'Alessandro *et al.* estudam as propriedades geométricas da *pruning front*. Inclusive, apresentam uma prova da monotonicidade da *pruning front* para o mapa de Lozi e deduzem uma expressão geral para a dimensão de Hausdorff, tendo em consideração as flutuações multifractais.

Continuando os esforços para encontrar uma definição para as tangências homoclínicas primárias, D'Alessandro *et al.*, em [31, 1990], apresentaram uma versão diferente da de Grassberger *et al.* [25, 1985] e Cvitanović *et al.* [29, 1989], onde conjecturaram que a partição era formada pelas tangências homoclínicas para as quais a linha divisora resultante teria o comprimento mínimo. Esta observação surge de um trabalho onde desenvolveram o método apresentado em [29, 1989], juntamente com uma proposta onde identificavam as tangências homoclínicas que exibiam uma contração ao longo da variedade instável.

Ao compararem os resultados obtidos, verificaram que o comprimento do polígono que conectava todas as tangências primárias era finito, mostrando não se tratar de uma curva fractal. Mais ainda, repararam que esse comprimento era o mínimo de entre os vários

comprimentos admissíveis. Assim, foi conjecturada uma nova definição para as tangências primárias, sendo um subconjunto de todas as tangências homoclínicas tais que qualquer outra tangência era uma imagem ou pré-imagem de uma tangência primária e o comprimento do polígono que as une é mínimo.

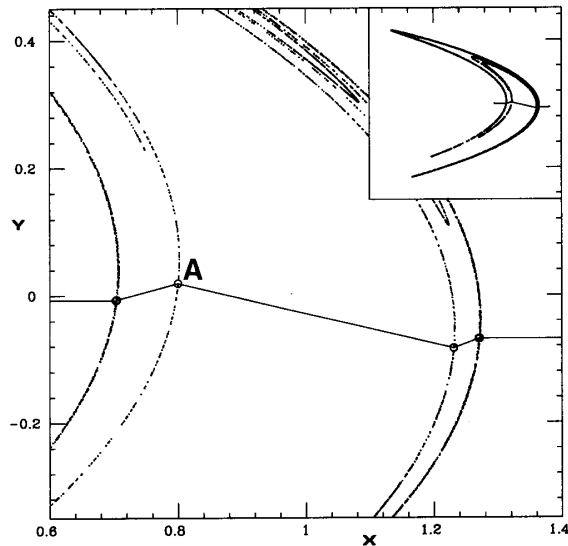


Figura 7: Utilizando as tangências primárias, representadas pelos círculos, Grassberger *et al* construíram uma partição do mapa de Hénon.

No entanto, ambas as definições eram dependentes das coordenadas, sendo sempre possível encontrar uma combinação onde nenhuma das propriedades referidas se mantêm. Giovannini e Politi, em [34, 1991] mostraram mais tarde que eram necessários argumentos adicionais para identificar as tangências primárias. Conseguiram aplicar então esta nova versão ao mapa de Hénon e igualmente ao atrator de Duffing.

Mais tarde, Giovannini e Politi, em [36, 1991], voltaram a estudar a forma como estas tangências primárias se movem quando variamos um parâmetro. Embora proponham uma heurística para identificar estas tangências, não conseguem encontrar uma definição não

ambígua para elas. Uma vantagem deste trabalho é que, embora todo o artigo seja dedicado ao mapa de Hénon, é generalizável para qualquer sistema dinâmico em duas dimensões. Assim, temos que a utilização destas tangências homoclínicas primárias constituem uma partição aceitável para a aplicação da dinâmica simbólica em sistemas dinâmicos de duas dimensões.

Historicamente, as tangências homoclínicas primárias chegam-nos também a partir do estudo de Smale sobre o conhecido *horseshoe*. Em [8, 1967], Smale apresenta um trabalho consistente sobre difeomorfismos, em particular uma função que mapeia um quadrado num objecto semelhante a uma ferradura, originando, assim, o termo *horseshoe*. Esta função começa por contrair o quadrado na direcção vertical, depois estica-o na direcção horizontal e finalmente dobra-o até atingir a forma de uma ferradura, cruzando o quadrado original em duas secções (cf. Figura (8)). Embora muitos dos pontos originais possam acabar por sair do quadrado inicial, podemos repetir este processo várias vezes, identificando aqui um comportamento caótico (cf. Figura (9)). Neste sistema dinâmico, as variedades estável e instável interseam-se num ponto que Poincaré denominava como sendo um ponto homoclínico. Este ponto é transversal no sentido em que as variedades estável e instável não são tangentes nesse ponto.

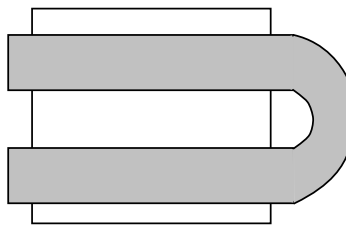


Figura 8: O *horseshoe* obtido a partir de um quadrado, na sua primeira iteração.

Smale apresenta, em [8, 1967], uma relação clara entre o *horseshoe* e as tangências



Figura 9: O *horseshoe* obtido após uma segunda iteração, a cinzento mais escuro.

primárias. Um trabalho recente e muito interessante de Branson, em [44, 2002], explica esta relação, onde são apresentados vários exemplos acompanhados com um detalhe mais intuitiva.

Outra forma de aplicar a dinâmica simbólica a um sistema dinâmico é através da anti-integrabilidade. Este conceito foi introduzido por Aubry e Abramovici, num trabalho conjunto em [32, 1990]. O artigo em causa lida com outro exemplo muito estudado na literatura, o mapa *standard*. Este mapa, também conhecido como mapa de Chirikov, descreve um comportamento universal e genérico dos mapas preservadores da área num espaço de fase dividido, no qual as ilhas integráveis de estabilidade estão rodeadas por regiões caóticas.

Para este mapa, os autores mostram a existência de trajetórias caóticas com momento ilimitado, para uma constante k suficientemente elevada. São também apresentados alguns teoremas sobre as trajetórias caóticas obtidas e que fazem emergir o conceito de anti-integrabilidade. A ideia é que, no limite da anti-integrabilidade, as coordenadas da trajetória no momento t não dependem das coordenadas no momento $(t - 1)$. Assim, neste limite singular, a existência de trajetórias caóticas é trivial e o sistema dinâmico reduz-se a um *shift* de Bernoulli.

Outro trabalho recente onde se faz uso do limite anti-integrável é o de Sterling *et al* [48, 2008]. Estes autores mostram que o mapa de Hénon exibe um *horseshoe* e tiram partido de um método numérico para seguir as órbitas homoclínicas que destroem este *horseshoe*. Constroem posteriormente uma dinâmica simbólica para representar essas órbitas e definem um *subshift* de tipo finito. Posteriormente, os autores classificam as bifurcações homoclínicas do mapa de Hénon, com especial detalhe para as do caso de preservação da área.

As abordagens escolhidas remontam aos primeiros desenvolvimentos realizados nesta área científica, durante a década de 80. Embora sejam os mais antigos, têm a vantagem de “recordar os básicos” relativamente a esta problemática da construção de partições geradoras. Estas serão apresentadas nas secções que se seguem.

4 Método de Grassberger

Peter Grassberger é um autor incontornável no que se refere ao estudo dos sistemas dinâmicos de dimensão > 1 . Publicou vários artigos com diferentes investigadores, que mostram uma clara evolução no seu trabalho, até chegar a um método que permite calcular a entropia de um sistema dinâmico com dimensão 2, como o mapa de Hénon.

Num dos seus primeiros trabalhos nesta área de investigação, em [20, 1982], Grassberger publica um artigo com Procaccia, onde apresenta uma medida para estimar a estranheza de um atrator presente num sistema dinâmico. Habitualmente, para medir essa estranheza, recorria-se à dimensão fractal de Hausdorff, D . Contudo, para $D > 2$ era reconhecida uma dificuldade em calcular esse valor, mesmo recorrendo a métodos como os algoritmos *box-counting*³, utilizados para o efeito, mas para $D < 2$. Posto isto, Grassberger sugere uma medida diferente, também relacionada com a dimensão fractal, mas obtida considerando as correlações entre os pontos de uma série temporal longa sobre o atrator. Ele define uma função que é um integral de correlação, dado por

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \theta(r - |\vec{X}_i - \vec{X}_j|) = \int_0^r d^d r' c(\vec{r}'),$$

onde $\theta(x)$ é a função de Heaviside⁴ e $c(\vec{r})$ é a função de correlação habitual. Tendo definido este integral, conseguimos ter uma medida com base na correlação entre os pontos de uma sequência que representa um atrator. Grassberger e Procaccia mostram, como principal

³Os algoritmos *box-counting* eram baseados na análise de padrões complexos quando se faziam sucessivos *zoom*'s sobre um pedaço do atrator. Nestes métodos, o ponto chave é que para além do *zoom*, também se aumentava a quantidade de pontos sobre o atrator para conseguir obter uma melhor análise. Em [12, 1976] podemos consultar sucessivos *zoom*'s com aumento da quantidade de iterações para formar o atrator do mapa de Hénon, que é claramente um exemplo desta técnica.

⁴A função de Heaviside é dada por $\theta(x) = \frac{1 + \operatorname{sgn} x}{2}$, ou seja, esta função devolve 0 para valores $x < 0$, 1/2 para $x = 0$ e 1 para $x > 0$.

resultado deste artigo, que este integral comporta-se com uma lei de potência de r , para um r pequeno, ou seja, mostram que

$$C(r) \propto r^v.$$

Com base nesta conclusão, podemos intuir sobre a existência de uma relação estreita entre a potência v e a dimensão fractal D . Para mostrar essa mesma relação, os autores recorrem a uma cobertura do atrator formada por M hipercubos, de lado l . Com essa cobertura, e utilizando a desigualdade de Schwartz, mostram que

$$C(l) \geq \frac{M(l)}{N^2} \langle \mu \rangle^2 = \frac{1}{N^2 M(l)} \left[\sum_{i=1}^{M(l)} \mu_i \right]^2 = 1/M(l) \sim l^D.$$

Ou seja, temos então que

$$v \leq D,$$

o que reforça a intuição ganha a partir da conclusão sobre o comportamento da lei de potência que o integral de correlação apresenta para com valores pequenos de r .

São então apresentados alguns resultados numéricos, recorrendo a mapas conhecidos, como o de Hénon [12, 1976], o de Kaplan-Yorke [18, 1979], o mapa logístico [13, 1976], o modelo de Lorenz [5, 1963], o mapa de Rabinovich-Fabrikant [17, 1979], onde essa lei de potência se verifica, e onde se pode confirmar que de fato v é inferior a D , mas ainda assim muito próximo. Também foi testado o mapa de Zaslavskii [15, 1978], mas tal relação não se verifica, sendo que também a lei de potência é pouco clara. Os autores não referem as possíveis razões para que este mapa não corresponda com o desejado, à semelhança dos seus congêneres.

Chegado a este ponto, Grassberger e Proccacia introduzem a noção de entropia de informação, explicando-a como sendo a quantidade de informação necessária para isolar um ponto sobre o atrator com precisão l , ou seja,

$$S(l) = - \sum_{i=1}^{M(l)} p_i \ln p_i.$$

Esta definição de entropia foi muito estudada por Renyi e Farmer, em [3, 1956] e [21, 1982], respetivamente, onde p_i é a probabilidade de um ponto estar no i -ésimo cubo. No caso de uma cobertura uniforme, onde $p_i = 1/M(l)$, esta entropia resume-se a

$$S^0(l) = \ln M(l) = \text{const} - D \ln L.$$

Este resultado permite-nos deduzir, para o caso geral, i.e., o caso em que a cobertura não é uniforme, que $S(l) < S^0(l)$, e se aplicarmos o *ansatz*⁵, temos que $S(l) = S_0 - \sigma \ln l$, de onde se obtém a desigualdade

$$\sigma \leq D,$$

onde σ é denominada de dimensão de informação, nos trabalhos de Renyi [3, 1956] e Farmer [21, 1982].

Temos assim introduzido o conceito de entropia nos trabalhos de caracterização de atratores estranhos em sistemas dinâmicos. Com estes resultados, temos que, quer v , quer σ são inferiores a D , sendo que podem servir, em linha com a motivação destes autores, para descrever estes sistemas. Estes foram ainda mais longe, estabelecendo uma relação de ordem entre estas três medidas, onde demonstram que

$$v \leq \sigma \leq D,$$

⁵Um *ansatz* é o estabelecimento das equações iniciais, do teorema ou dos valores que descrevem um problema ou solução. Depois de um *ansatz* ser estabelecido (constituindo nada mais que uma assunção), as equações são resolvidas para a sua função de interesse geral, constituindo uma confirmação da assunção.

ou seja, que v e D fornecem uma excelente forma de estimar o conteúdo informativo de um atrator estranho.

Em [22, 1983], Grassberger e Procaccia voltam a juntar-se e publicam um novo artigo, onde estudam de forma mais aprofundada o expoente v . Argumentam que esta medida da estranheza de um atrator é mais simples de calcular, e apresentam uma relação adicional entre a mesma e o expoente de Lyapunov.

A exploração da utilidade deste expoente representava um contributo adicional na caracterização dos atratores estranhos. Contudo, havia ainda um caminho penoso a percorrer no sentido de melhorar essa compreensão. Uma das pistas que este trabalho fez surgir, envolvia a relação entre este expoente e a entropia de informação. Em particular, o fato de se recorrer a uma cobertura de hipercubos para se demonstrar as desigualdades entre v , σ e D , representa um paralelismo com o uso da dinâmica simbólica para aumentar a capacidade descritiva sobre sistemas dinâmicos simples, como o mapa de Hénon.

Seguindo esse paralelismo sugerido nesse trabalho preliminar, o autor junta-se a Kantz em [25, 1985], onde apresentam um importante passo no sentido de se conseguir obter um cálculo para as entropias topológica, métrica ou de informação, reforçando o papel destas medidas na caracterização dos atratores estranhos. Nesse trabalho, começa-se por apontar para uma fragilidades muito interessante, no que respeita ao domínio sobre estes atratores, em que mesmo a sua própria existência era, na verdade, um problema em aberto. Chegam mesmo a dizer, com uma boa dose de pragmatismo, que todo o trabalho de investigação (pelo menos até à época a que reporta esse artigo) que implique a existência de um atrator estranho de um sistema dinâmico, representava necessariamente uma heurística.

Para além da problemática sobre a demonstração da existência dos atratores estranhos,

os autores apontam para a dificuldade em se conseguir calcular / estimar as entropias referidas acima, recorrendo diretamente às suas respectivas fórmulas. Esta dificuldade existe porque é necessário construir uma partição geradora para se poder realizar esses cálculos. Partição essa que, juntamente com todas as suas imagens e pré-imagens, dividem o espaço de estados de forma arbitrariamente fina, e não existia nenhum método genérico conhecido para esse efeito.

Recordamos que uma partição geradora é, de uma forma muito breve, uma partição em que para cada possível trajetória descrita sobre um sistema dinâmico, corresponde uma única sequência de símbolos (associados aos diferentes elementos da partição). Posto isso, eles propõem a remediação de parte desse problema, através de um método que permite a construção de uma partição geradora para mapas dissipativos, como é o caso do mapa de Hénon.

Muito embora na secção com as Definições Preliminares tenhamos dado uma definição da entropia topológica apresentada por Bowen ([9, 1971]), Grassberger e Kantz [20, 1985] apresentam uma forma mais simples de olhar para esta medida. Isto é, se o número de sequências diferentes de comprimento N , correspondendo a todas as possíveis trajetórias $(x_1, \dots, x_N)$, crescer como uma exponencial, i.e.,

$$\exp [Nh^{(0)}(\beta)] \text{ para } N \rightarrow \infty,$$

então denominamos $h^{(0)}(\beta)$ a entropia topológica do sistema com respeito à partição β . Portanto, tal como referido mais atrás, esta medida corresponde à taxa de crescimento assintótico do número de sequências simbólicas possíveis de comprimento finito, quando o comprimento das diferentes sequências converge para infinito. Aqui, salientamos a palavra “possíveis” pois é esta exigência que eleva a dificuldade no cálculo desta medida.

Para exemplificar o cálculo desta medida, consideremos uma partição binária do espaço

de estados, onde os seus dois elementos (subconjuntos) podem ser denominados de 1 e 2. Para esta partição, todas as sequências simbólicas possíveis de comprimento $N = 2$ serão representadas pelas seguintes sequências de símbolos: $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ e $(2, 2)$. Ou seja, teremos quatro possíveis sequências para $N = 2$. Neste caso, embora estejamos no caso finito, utilizando a terminologia introduzida no parágrafo anterior a entropia topológica seria o valor $h^{(0)}(\beta)$ que permitia obter $\exp[2 \times h^{(0)}(\beta)] = 4$, ou seja, $1/2 \ln 4 = 0.693147180559945 \dots$. De notar, existe a necessidade de identificar quais são as sequências simbólicas possíveis, pois neste cálculo extremamente simplificado estamos a considerar que as quatro sequências são possíveis, dada a assumida partição binária geradora inicial. Podemos imaginar que alguma destas quatro sequências simbólicas possa nunca vir a verificar-se, para uma determinada combinação entre parâmetros e pontos iniciais escolhidos para a execução do sistema dinâmico.

Quanto à entropia métrica, tal como Grassberger propôs em [20, 1982], os autores dão-nos uma definição similar à entropia topológica, mas onde recorremos ao crescimento da informação de Shannon, à medida que N aumenta, dada por

$$S_N^{(1)}(\beta) = - \sum_{\{s\}} p_N(\{s\}) \log p_N(\{s\}) \sim_{N \rightarrow \infty} N h^{(1)}(\beta).$$

Neste cálculo, $p_N(s_1, \dots, s_N)$ é a probabilidade de ocorrência da sequência $(s_1, \dots, s_N)$ se x_1 (o ponto inicial da trajetória) é distribuído de acordo com alguma medida invariante, que se pode assumir existir. Recorrendo ao exemplo dado acima, para $N = 2$, e assumindo que todas as quatro sequências simbólicas são possíveis e que a probabilidade de qualquer uma delas se verificar é uniforme, teremos uma entropia métrica de $-4 \times 0.25 \log 0.25 = 0.60205999 \dots$. O cálculo desta entropia adiciona outra dificuldade, para além da necessidade de se verificar a possibilidade de as quatro sequências, pois é adicionalmente necessário perceber qual a probabilidade de ocorrência de cada uma dessas sequências possíveis. Por outro lado, temos que podemos sempre recorrer ao cálculo assu-

minindo a distribuição uniforme das sequências possíveis, tal como foi exemplificado acima, pois dá-nos um extremo superior para o verdadeiro valor desta entropia métrica, tal como feito em [20, 1982].

Os autores apresentam ainda a generalização do cálculo desta entropia para se obter qualquer entropia de ordem superior, mas para o efeito do que se pretende nesta tese, as entropias topológica e métrica são suficientes. Posto isto, passamos a descrever o método proposto por Grassberger e Kantz, em [25, 1985], para criar partições geradoras em mapas como o de Hénon.

Começa-se por considerar a existência de uma interseção homoclínica, i.e., uma interseção entre as variedades estável e instável, em dois pontos diferentes, P_1 e P_2 . Adicionalmente, deve-se assegurar que ambos os pontos ficam em regiões diferentes do espaço de estados, em pelo menos alguma das suas imagens ou pré-imagens. Esta exigência permite assegurar que os dois pontos P_1 e P_2 terão sequências simbólicas diferentes, pois se eles ficassem sempre na mesma região da partição, qualquer que fosse a iteração, então as suas sequências seriam idênticas e logo a partição não pode ser considerada geradora. Mais ainda, vamos fazer isto sobre os pontos fixos P_1^* e P_2^* , de forma a resolver a problemática de como lidar com estes pontos, pois em todas as iterações estes pontos pertencerão sempre à mesma região da partição. Desta forma, com os pontos fixos a fazerem parte da linha que divide o espaço de estados formando a partição geradora, fica resolvida esta problemática.

Os autores argumentam depois esta escolha e apresentam os resultados obtidos a partir da implementação. Aqui a dificuldade está na determinação dos pontos homoclínicos primários, ou seja, os pontos em que as variedades estável e instável formadas a partir do ponto fixo se intersejam. Em sistemas dinâmicos de uma dimensão, um ponto fixo pode ser estável ou instável. Ou seja, os pontos que estão na vizinhança desse ponto fixo apre-

sentam trajetórias *forward* que se movimentam para ele, ou *backward* que se movimentam para longe dele. Em duas dimensões, podemos ter um caso misto, ou seja, um ponto fixo que atrai os seus pontos vizinhos segundo algumas direções e que repele segundo outras direções. Este tipo de ponto fixo é chamado de hiperbólico ou de sela e está devidamente definido na seção preliminar deste documento, em função da determinação dos valores próprios do sistema dinâmico.

Neste artigo de Grassberger e Kantz [25, 1985], os autores publicam uma figura que mostra o ponto fixo hiperbólico de interesse quando fixamos $(a, b) = (1.4, 0.3)$, e as respectivas variedades estável e instável, ver Figura (10). O ponto fixo é representado na figura por uma bola aberta, e as suas coordenadas são $(0.631354\dots, 0.189406\dots)$. A variedade instável é representada pela curva mais escura, que coincidirá com o próprio atrator. A variedade estável é representada pelas curvas mais claras e pontilhadas. Os pontos de tangência entre as duas variedades são evidenciados pelos pontos fechados, e que permitem definir uma linha, a tracejado, que representa a divisão do espaço de estados em duas áreas, ou seja, define a partição que se espera ser geradora.

Para obter os pontos homoclínicos primários, temos de perceber quais são os pontos em que as variedades estável e instável se intersectam. Para isso, temos de formar uma vizinhança em torno do ponto fixo hiperbólico e criar as respetivas trajetórias *forward* e *backward*. Estas trajetórias permitem visualizar as variedades instável e estável, respetivamente. É fácil imaginar que, os pontos que formam uma vizinhança em torno de um ponto fixo, tenham trajetórias *forward* que tendam para o atrator. Por outro lado, as trajetórias *backward* tenderão a divergir, mas isso não coloca dificuldades do ponto de vista numérico, o que é confirmado pelos próprios autores.

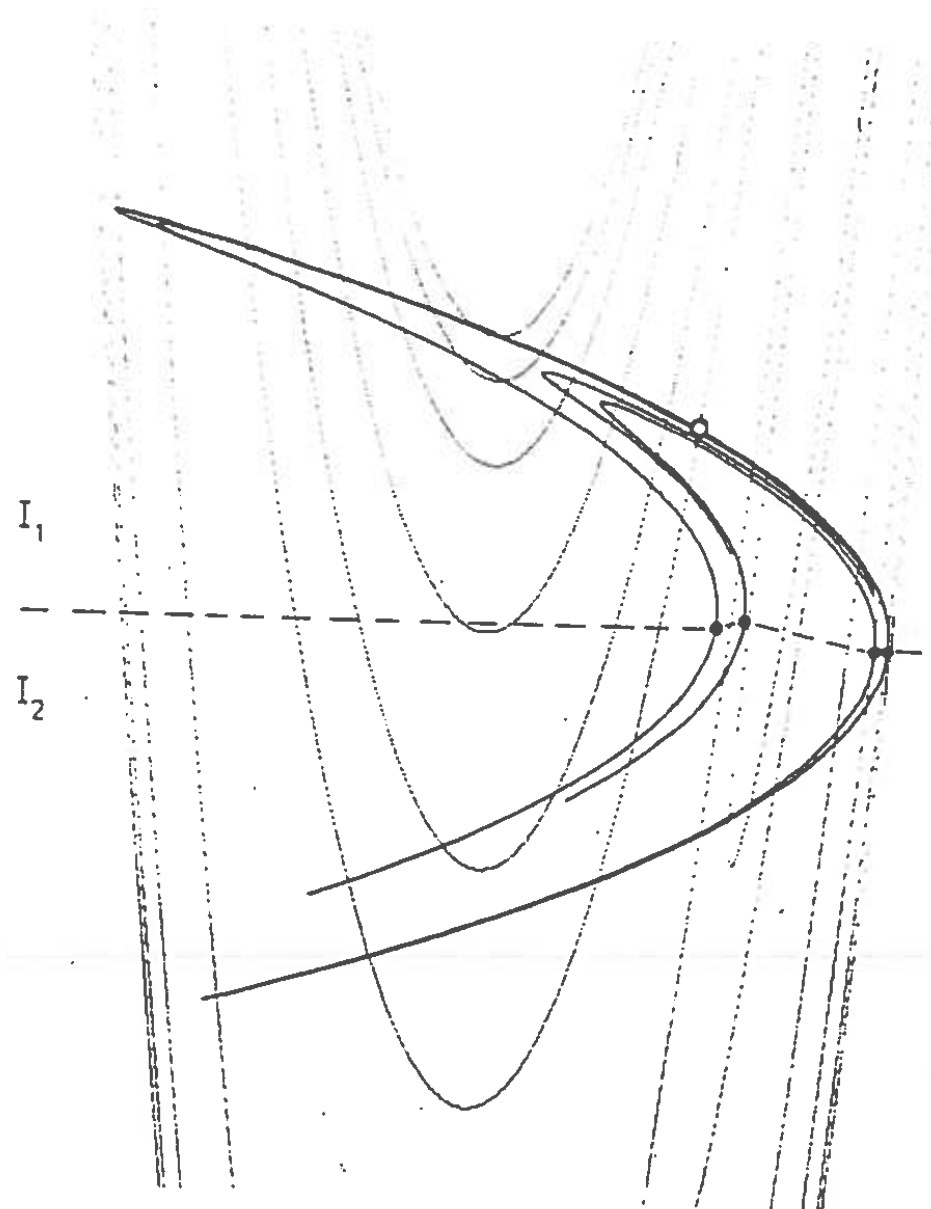


Figura 10: Variedades estável e instável formadas a partir do ponto fixo hiperbólico para $(a, b) = (1.4, 0.3)$ no mapa de Hénon.

Depois de termos estes pontos, trata-se de criar uma linha que os una, e que tenda depois para infinito, dividindo assim o espaço de estados e formando a partição. A partir daí, podemos criar várias trajetórias, de preferência em torno de uma área onde saibamos que se verifique a convergência para o atrator, formar as sequências simbólicas e calcular a probabilidade de ocorrência de cada uma, para cada comprimento finito N . Depois, o cálculo das entropias topológica e métrica é trivial. Com base neste método, Grassberger e Kantz [25, 1985] mostram que a estimativa obtida para a entropia métrica, $h_N^{(1)}(\beta)$, corresponde ao valor esperado, o expoente de Lyapunov, que indicam ser dado por $\lambda = 0.2632 \pm 0.0001$. Para a entropia topológica, dada por $h_N^{(0)}(\beta)$, os autores referem que as estimativas obtidas estão em linha com o obtido em [22, 1984], onde se obteve $h_N^{(0)}(\beta) = 0.45 \pm 0.02$.

Finalmente, este método revela-se simples, sendo que a principal dificuldade está na detecção dos pontos homoclínicos primários, embora isso seja possível numericamente.

5 Método de Cvitanović

Os primeiros trabalhos de Cvitanović nesta área surgem no início da década de 80 com a publicação de um conjunto de apontamentos (*lecture notes*), denominado de *Universality in Chaos (or, Feigenbaum for cyclist)*, em [24, 1984]. Nesse trabalho, mostra ligações interessantes com referência à transição para o caso evidenciado pelos sistemas dinâmicos, como por exemplo, o mapa logístico. Poucos anos depois, surge um novo trabalho, em [27, 1988], apresentado juntamente com I. Procaccia entre outros autores, investigador que colaborou anteriormente com Peter Grassberger na elaboração do método de construção de uma partição geradora para o mapa de Hénon, apresentado na secção anterior. Neste trabalho é apresentada uma ferramenta que os autores denominam de *prunning front* e que

permite obter uma enumeração de todos os movimentos possíveis do atrator.

A estratégia de Cvitanović *et al* [27, 1988] passa pela construção de um referencial de duas dimensões, chamado de *plano simbólico* onde é representada a dinâmica simbólica do mapa. Este referencial é muito interessante, pois permite representar as várias realizações das variedades estável e instável através de secções retilíneas, mas preservando a topologia do sistema. Aqui os pontos periódicos do sistema têm um papel importante, que será detalhado mais adiante. Esta representação da dinâmica simbólica através deste referencial permite separar as órbitas permitidas das que são “proibidas”, dada uma gramática finita, ou seja, de comprimento N , devido à própria dinâmica do sistema. É esta separação a que os autores chamam de *prunning front* e que permite o cálculo da entropia topológica, pois ficaremos com as órbitas admissíveis evidenciadas para cada comprimento N . Munidos dessas órbitas permitidas pela dinâmica do sistema e dos seus valores próprios, os autores criaram um método que, em função do comprimento N escolhido, sistematicamente criava uma cobertura uniforme do atrator com uma precisão sem precedentes, para depois calcular as desejadas entropias.

Como referido acima, para Cvitanović *et al* [27, 1988], os pontos periódicos têm aqui um papel particularmente importante. É necessário começar por entender que um atrator estranho é denso em ponto periódicos. Ou seja, se escolhermos um qualquer ponto (x_0, y_0) que esteja “suficientemente” próximo do atrator, então é de esperar que haja um outro ponto (x_n, y_n) que passe tão próximo de (x_0, y_0) quanto queiramos. Desde que escolhamos pontos de partida que estejam satisfatoriamente próximos do atrator, podemos assumir uma precisão de 0.0001 para a execução numérica, o que permitirá encontrar a periodicidade n de praticamente qualquer ponto no atrator.

Outro aspeto a ter em consideração, é a necessidade de criar uma relação de ordem

por entre as diferentes sequências que correspondem a pontos periódicos. Por exemplo, no n -ésimo nível dessa relação de ordem, teremos todos os ciclos com comprimento n , cuja ordem é superior aos ciclos de comprimento $(n - 1)$ e que estarão no correspondente $(n - 1)$ -ésimo nível. Vamos agora fazer um pequeno parêntesis, e pensar nos pontos que integram a bacia de atração do atrator estranho. Se os iterarmos com o mapa de Hénon, vamos ver o atrator a formar-se progressivamente, sendo que as suas tiras vão-se tornando cada vez mais finas à medida que ele se torna mais nítido. Ou seja, o espaço que contém a bacia de atração vai-se dobrando sobre ele próprio até formar o atrator. Nessa altura, após n iterações, o atrator deverá conter todos os pontos periódicos com comprimento n , que podem ser utilizados para conhecer a estrutura local do atrator, através do cálculo dos valores próprios de $DH(x, y)$. É neste sentido que ficaremos com uma hierarquia de escalas, onde as escalas mais finas corresponderão a ciclos mais longos, e isso permite obter uma descrição da métrica do atrator estranho.

Por fim, é integrada uma inevitável estrutura binária, particular deste tipo de mapas. Como este atrator dobra o plano nele próprio em cada iteração, podemos utilizar esse feito para descrever as órbitas à custa de sequências binárias de 0's e 1's. Cada uma destas sequências deverá representar de forma unívoca todas as órbitas permitidas, mas a união de todas estas sequências não permitem, ainda assim, obter a árvore binária completa pois existem sequências, para diferentes comprimentos n que são proibidas dando contexto ao termo *prunning* que os autores utilizam para apelidar esta técnica. Ou seja, é como se a árvore binária completa fosse “podada” de todos seus ramos que não são permitidos de obter, considerando a dinâmica do sistema. Esta analogia fornece uma visão simples para a compreensão da entropia topológica, pois esta acaba por ser a taxa de crescimento dos ramos que permanecem na árvore, ou por outras palavras, que são permitidos.

De uma forma geral, podemos dizer que temos aqui os três ingredientes que os autores

referem serem necessários para entender a abordagem que propõem:

- A consideração em como os pontos periódicos são densos por entre o atrator;
- A relação de ordem que será criada entre eles, de forma a obter escalas tão finas quanto queiramos; e
- Uma estrutura binária que permite construir uma árvore que descreve as órbitas possíveis, de onde retiraremos as regras que permitem podar essa mesma árvore das órbitas ou sequências simbólicas que são proibidas em função da dinâmica do sistema que está a ser estudado.

Após esta introdução, Cvitanović *et al* [27, 1988] começam por construir uma representação em grelha da dinâmica simbólica do mapa de Hénon, que preserva a sua topologia. Esta representação é o denominado plano simbólico, referido anteriormente, que permite simplificar a união de todos os pontos simbólicos. Nós vamos aqui seguir as mesmas etapas que os autores seguem em [27, 1988], começando por entender a construção do plano simbólico no caso unidimensional, para depois passar para o caso bidimensional, mais interessante, que culmina com a respetiva aplicação ao mapa de Hénon.

5.1 Plano simbólico em dimensão 1

Começamos por considerar uma sequência $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, associada a um ponto $x \in D$, onde D é o domínio onde o mapa unimodal atua, como

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{se } f^{(k-1)}(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f^{(k-1)}(x) < 0 \end{cases}, f^{(0)}(x) = x.$$

A função $f^{(k-1)}(x)$ denota a iteração $(k-1)$ do mapa unimodal, em que se considera, sem perda de generalidade, que 0 é o ponto que divide o espaço de estados em dois segmentos. Ao começarmos num $x \in D$ arbitrário, obtemos uma sequência $a_0, a_1, a_2, \dots$, que permite conhecer o futuro simbólico de x . Contudo, não permite ainda determinar uma relação de ordem entre esta sequência e uma outra dada por outro ponto $y \in D$ com o mesmo comprimento.

Para o conseguir, foi criado o conceito de número binário, dado por

$$\gamma = 0.c_1c_2\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 2^{-k}, \text{ onde } c_k = \sum_{i=1}^k a_i \pmod{2},$$

onde os sucessivos dígitos deste número refletem uma ordenação por entre a árvore binária. Nesta árvore, para cada nível ou iteração, ordenamos da esquerda para a direita os diferentes ramos por onde a órbita de x passa. Para entender melhor a forma como esta árvore funciona, começamos por ter em conta que os estados de partida são 0 ou 1, conforme x esteja à esquerda ou à direita de 0. Aqui consideramos que $0 < 1$. Na iteração seguinte, x volta a assumir um destes dois símbolos, e aqui vamos dizer que $00 < 01 < 11 < 10$. Da mesma forma, na iteração seguinte, teremos $000 < 001 < 011 < 010 < 111 < 110 < 100 < 101$.

Se repararmos, esta árvore é curiosa, no sentido em que, por exemplo, $11 < 10$, o que de certa forma vai contra a lógica binária conhecida. Aqui a regra de construção desta árvore é que a bifurcação feita a partir de um determinado ramo repete à esquerda o dígito com que o ramo “pai” termina, enquanto que à direita consideramos o complementar.

Para entendermos bem a forma como transformamos uma sequência $\{a_k\}$ num número binário, vamos considerar dois números x e y , de comprimento idêntico, dados por

$$x, y \in D : \{a_5^x\} = 11010 \text{ e } \{a_5^y\} = 01011.$$

A ideia é pegar em cada símbolo da sequência e transformá-lo no respectivo binário, dado pela fórmula acima. Começando por x , calculemos os valores auxiliares de c_k ,

$$\begin{aligned} c_1 &= \sum_{i=1}^1 a_i \pmod{2} = a_1 \pmod{2} = 1 \pmod{2} = 1, \\ c_2 &= \sum_{i=1}^2 a_i \pmod{2} = (a_1 + a_2) \pmod{2} = 2 \pmod{2} = 0, \\ c_3 &= (1 + 1 + 0) \pmod{2} = 0, \\ c_4 &= (1 + 1 + 0 + 1) \pmod{2} = 3 \pmod{2} = 1, \\ c_5 &= (1 + 1 + 0 + 1 + 0) \pmod{2} = 3 \pmod{2} = 1. \end{aligned}$$

para depois obtermos o número binário propriamente dito, ou seja,

$$\begin{aligned} \gamma_x = \sum_{k=1}^5 c_k 2^{-k} &= c_1 2^{-1} + c_2 2^{-2} + c_3 2^{-3} + c_4 2^{-4} + c_5 2^{-5} = \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{1}{32} = 0.59375. \end{aligned}$$

Vamos agora fazer os mesmos cálculos para y , onde obtemos

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \pmod{2} = 0, \\ c_2 &= (0 + 1) \pmod{2} = 1 \pmod{2} = 1, \\ c_3 &= (0 + 1 + 0) \pmod{2} = 1 \pmod{2} = 1, \\ c_4 &= (0 + 1 + 0 + 1) \pmod{2} = 2 \pmod{2} = 0, \\ c_5 &= (0 + 1 + 0 + 1 + 1) \pmod{2} = 3 \pmod{2} = 1, \end{aligned}$$

e logo,

$$\begin{aligned} \gamma_y = \sum_{k=1}^5 c_k 2^{-k} &= c_1 2^{-1} + c_2 2^{-2} + c_3 2^{-3} + c_4 2^{-4} + c_5 2^{-5} = \\ &= 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{1}{32} = 0.40625. \end{aligned}$$

Desta forma, temos que $x > y$.

Por curiosidade, se compararmos 00010 vs. 00011, obtemos:

$$\gamma_{00010} = 2^{-4} + 2^{-5},$$

e

$$\gamma_{00011} = 2^{-4}.$$

Logo, 00010 é maior que 00011, o que reforça o que contrariamente se passa no sistema binário usual, conforme já apontado anteriormente.

5.2 Generalização para um plano simbólico em dimensão 2

Como vimos na secção anterior, o número binário γ é uma ferramenta que permite ordenar as sequências *forward* dado um ponto $x \in D$, onde D corresponde ao domínio de um atrator. Nesta secção iremos alargar este conceito de binário também às sequências *backward* do mesmo ponto, permitindo criar um plano simbólico, desta vez em duas dimensões. Note-se que aqui, ficaremos com o número binário γ associado ao eixo dos XX , enquanto que o segundo número binário a criar, que apelidemos de δ ficará associado ao eixo dos YY .

Este segundo número binário, para que possa traduzir o que se passa na sequência *backward* de um certo $x \in D$, será calculado de forma semelhante ao seu congénere γ , mas onde são introduzidas alguns ajustes. Começamos por definir

$$d_k = \sum_{i=1}^k (1 - a_i) (\mod 2),$$

onde $a_{-1}, a_{-2}, \dots$ representam os símbolos que integram a sequência *backward*.

Assim, ficamos com

$$\delta = 1 - 0, d_1 d_2 \cdots = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} d_k 2^{-k}.$$

Vejamos o exemplo do ponto x , cuja sequência limitada é dada por $a_{-3}a_{-2}a_{-1}a_1a_2a_3a_4 = 1100101$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} d_1 &= \sum_{i=1}^1 (1 - a_i) \pmod{2} = (1 - a_{-1}) \pmod{2} = (1 - 0) \pmod{2} = 1, \\ d_2 &= (1 - 0 + 1 - 1) \pmod{2} = 1 \pmod{2} = 1, \\ d_3 &= (1 - 0 + 1 - 1 + 1 - 1) \pmod{2} = 1 \pmod{2} = 1 \\ \delta &= 1 - (1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}) = 0.125. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \pmod{2} = 0, \\ c_2 &= (0 + 1) \pmod{2} = 1 \pmod{2} = 1, \\ c_3 &= (0 + 1 + 0) \pmod{2} = 1 \pmod{2} = 1, \\ c_4 &= (0 + 1 + 0 + 1) \pmod{2} = 2 \pmod{2} = 0, \\ \gamma &= 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} = 0.375. \end{aligned}$$

Logo, $(\gamma, \delta) = (0, 375; 0, 125)$.

Desta forma, qualquer ponto x no atrator pode ser representado por um par de números $\gamma(x)$ e $\delta(x)$ definidos, respectivamente, pelas suas sequências *forward* e *backward*. No caso particular de um ponto periódico, temos que este é representado no plano simbólico por uma quantidade de pares (γ, δ) igual ao seu comprimento. Por exemplo, consideremos o ponto periódico representado pela sequência $(110)^\infty$, que é representado pelos três pares obtidos para as três sequências possíveis abaixo:

$$\begin{aligned} &\dots 110110110110, 110110110110 \dots \\ &\dots 101101101101, 101101101101 \dots \\ &\dots 011011011011, 011011011011 \dots \end{aligned}$$

Perfazendo os cálculos, chegamos aos seguintes pares

$$\begin{aligned} &(0.571428571428\dots; 0.111111111111\dots) \\ &(0.857142857142\dots; 0.555555555555\dots) \\ &(0.285714285714\dots; 0.777777777777\dots). \end{aligned}$$

Generalizando, podemos afirmar que um ponto periódico $x = (a_1, a_2, \dots, a_N)^\infty$ é representado no plano simbólico por N pares (γ, δ) . Isto torna os pontos periódicos muito importantes para a descrição do atrator, pois enquanto que os restantes pontos irão vagar pelo plano, estes terão sempre as mesmas representações, dadas pelos N pontos correspondentes à periodicidade do ponto periódico. A ideia dos autores é aproveitarmos do fato de conseguirmos descrever a estrutura local em torno desses pontos periódicos à custa dos seus valores e vetores próprios, em vez de estar a descrever o plano como um todo.

5.2.1 Iterar pontos num Plano Simbólico

Agora que conseguimos construir um plano simbólico em duas dimensões, temos de conseguir iterar um ponto nesse plano de forma a simular a ação de um atrator, por exemplo, como o mapa de Hénon. Essa iteração de um mapa é conseguida através da aplicação de uma transformação que preserva a área no plano simbólico, que os autores apelidaram de Transformação D , dada por

$$D : [0, 1[\times [0, 1[\rightarrow [0, 1[\times [0, 1[$$

$$D(x, y) = \begin{cases} \left(2x, \frac{1}{2}(1 - y) \right) & \text{se } x < \frac{1}{2} \\ \left(2 - 2x, \frac{1}{2}(1 + y) \right) & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vamos demonstrar que a aplicação de um mapa de tipo Hénon é equivalente à acção de D no plano simbólico. Para isso, consideremos um ponto x com as sequências *backward* e *forward* dadas por

$$(\dots, a_{-n}, \dots, a_{-2}, a_{-1}) \text{ e } (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots).$$

Ao aplicamos o mapa de Hénon o que esperamos que aconteça é que o ponto que separa as duas sequências se desloque para a frente, ou seja, que fiquemos com

$$(\dots, a_{-n}, \dots, a_{-2}, a_{-1}, a_1) \text{ e } (a_2, a_3, \dots, a_n, \dots).$$

A abcissa deste último ponto, no plano simbólico, será dada por

$$\bar{\gamma} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k 2^{-k}, \text{ com } \bar{c}_k = \sum_{i=1}^k a_{i+1} \pmod{2} = \begin{cases} c_{k+1} & \text{se } a_1 = 0 \\ 1 - c_{k+1} & \text{se } a_1 = 1 \end{cases}.$$

Logo,

$$\bar{\gamma} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k 2^{-k} = \begin{cases} 2\gamma & \text{se } a_1 = 0 \\ 2 - 2\gamma & \text{se } a_1 = 1 \end{cases}.$$

Por sua vez, a ordenada deste último ponto, será dada por

$$\bar{\delta} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \bar{d}_k 2^{-k},$$

com

$$\bar{d}_k = \sum_{i=1}^k (1 - a_{i+1}) \pmod{2} = \begin{cases} 1 - d_{k+1} & \text{se } a_1 = 0 \\ d_{k+1} & \text{se } a_1 = 1 \end{cases}.$$

Logo,

$$\bar{\delta} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \bar{d}_k 2^{-k} = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \delta) & \text{se } a_1 = 0 \\ \frac{1}{2}(1 + \delta) & \text{se } a_1 = 1 \end{cases}.$$

Vamos exemplificar com um caso concreto, onde por exemplo temos um ponto cuja sequência *forward* é dada por

$$(a_2, a_3, \dots, a_n, \dots) = 10101101011 \dots$$

Sabendo que esta é a sequência *forward*, podemos imaginar que o último símbolo da sequência *backward* tenha de ser $a_1 = 0$ ou $a_1 = 1$. Se $a_1 = 0$, então ficaremos com uma sequência $010101101011 \dots$. Consequentemente, temos

$$\gamma = 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-6} + 2^{-9} + 2^{-10} + 2^{-12} + \dots,$$

e

$$\bar{\gamma} = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-5} + 2^{-8} + 2^{-9} + 2^{-11} + \dots$$

Ou seja, quando $a_1 = 0$, o valor do γ seguinte obtém-se diminuindo todos os expoentes em uma unidade, o que é equivalente a $2\gamma = \bar{\gamma}$.

Se $a_1 = 1$, ficaremos com uma sequência $110101101011 \dots$, logo

$$\gamma = 2^{-1} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-7} + 2^{-8} + 2^{-11} \dots$$

Aplicando a transformação, obtemos

$$\begin{aligned} 2 - 2\gamma &= 2 - 1 - 2^{-3} - 2^{-4} - 2^{-6} - 2^{-7} - 2^{-10} - \dots \\ &= 1 - 2^{-3} - 2^{-4} - 2^{-6} - 2^{-7} - 2^{-10} - \dots \\ &= 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-5} + 2^{-8} + 2^{-9} + 2^{-11} + \dots = \bar{\gamma}. \end{aligned}$$

Sendo que demonstrámos a ação da aplicação da Transformação D à sequência *forward* de um ponto x dado, vamos agora seguir o mesmo raciocínio, mas aplicando-o a uma sequência *backward*. Assim, suponhamos que temos a seguinte sequência *backward*

$$(\dots, a_{-n}, \dots, a_{-2}, a_{-1}) = \dots 0111001011,$$

com $\delta = 1 - 2^{-3} - 2^{-4} - 2^{-6} - 2^{-7} - 2^{-8} - 2^{-9} - \dots$.

Se $a_1 = 0$, na próxima iteração teríamos $\dots 01110010110$, que corresponde a

$$\bar{\delta} = 1 - 2^{-1} - 2^{-2} - 2^{-3} - 2^{-6} - 2^{-11} - \dots$$

Aplicando a transformação, obtemos

$$\begin{aligned} 1 - \delta &= 1 - 1 + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-6} + 2^{-7} + 2^{-8} + 2^{-9} + \dots = \\ &= 1 - 2^{-1} - 2^{-2} - 2^{-5} - 2^{-10} - \dots \\ \frac{1}{2}(1 - \delta) &= 2^{-1} + 2^{-1} - 2^{-4} - 2^{-5} - 2^{-7} - 2^{-8} - 2^{-9} - 2^{-10} - \dots \\ &= 1 - 2^{-4} - 2^{-5} - 2^{-7} - 2^{-8} - 2^{-9} - 2^{-10} - \dots = \bar{\delta}. \end{aligned}$$

Portanto, agora que conseguimos iterar pontos em planos simbólicos de duas dimensões, podemos concretizar um exemplo, que é o que faremos na secção seguinte.

5.3 Exemplo de construção do plano simbólico

Como exemplo, vamos considerar o mapa unimodal de Kumpka-Smale completo, definido por

$$f(x) = a - x^2, \text{ com } a = 1.9 \text{ e ponto inicial } x_0 = 0.$$

Para a implementação do plano simbólico, consideramos as primeiras 14 999 iteradas para este mapa. Começamos por determinar os valores de γ , onde consideramos uma precisão de 15 iterações. Ou seja, para cada valor de γ , consideramos um futuro simbólico de 15 iteradas, o que obriga a que não consigamos aplicar o seu cálculo nas últimas 15 iterações do mapa (cf. Figura (11)).

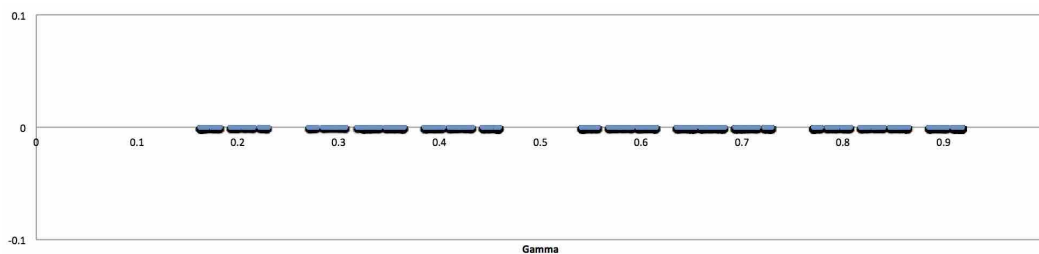


Figura 11: Plano simbólico em 1D obtido para o mapa $f(x) = a - x^2$, com $a = 1.9$ e ponto inicial $x_0 = 0$.

Com esta primeira figura, podemos perceber que existem cortes na reta real entre 0 e 1, correspondentes a sequências proibidas. Vamos agora estender a representação dada pelo plano simbólico a duas dimensões, integrando o cálculo de δ . Os valores calculados apresentam igualmente uma precisão de 15 iterações, o que não permite o seu cálculo para as primeiras iteradas do mapa (cf. Figura (12)).

Chamando S a todas as regiões permitidas, então S é a união de todos os pontos periódicos permitidos e seus *shifts*. Isto significa que os pontos periódicos permitidos não contém certas subsequências no seu itinerário que não são permitidas.

Munidos desta ferramenta, os autores aplicaram-na ao mapa de Hénon, obtendo a Figura (13). As zonas proibidas são maiores, quando comparamos com o plano anterior, referente ao mapa de Kumpka-Smale completo, o que estará em linha com o fato de o mapa de Hénon ter um comportamento caótico mais rico. Chegados a este ponto, Cvitanović *et*

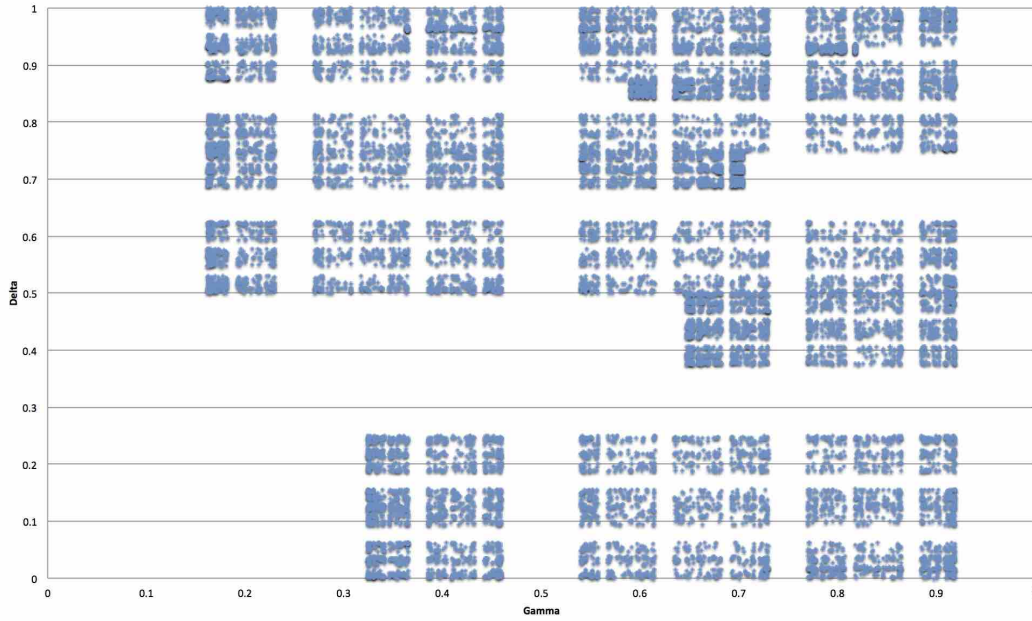


Figura 12: Plano simbólico em 2D obtido para o mapa $f(x) = a - x^2$, com $a = 1.9$ e ponto inicial $x_0 = 0$.

al [27, 1988] passaram para a construção da árvore “podada”, ou seja, a árvore binária que obtemos quando consideramos todos os caminhos que não contenham nenhuma sequência proibida.

Tendo ao dispor apenas os caminhos que são possíveis, para cada comprimento n finito, então podemos passar ao cálculo da entropia topológica, dada por

$$K_0^{(n)} = \frac{\ln N_n}{n},$$

onde $N_n \sim e^{K_0 n}$ com $n \rightarrow \infty$. Seguindo este raciocínio, os autores chegam a um resultado de $K_0 = 0.52273764 \dots$

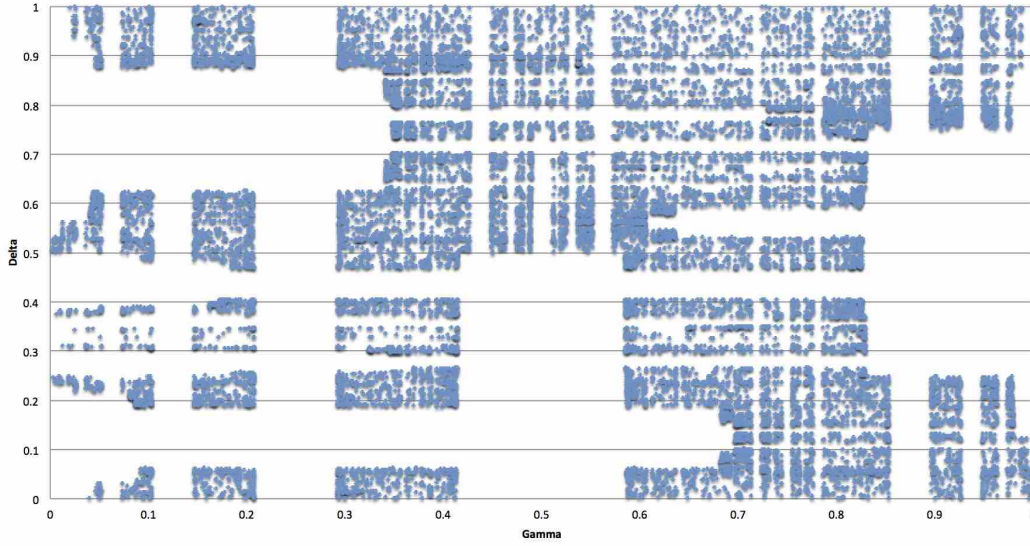


Figura 13: Plano simbólico obtido para o atrator estranho de Hénon com parâmetros $a = 1.803241$ e $b = 0.1$, com pontos iniciais $(x, y) = (0, 0)$.

6 Partição que assegura a separação dos pontos fixos

Na secção onde apresentamos o método de Grassberger e Kantz ([25, 1985]) para criar uma partição geradora para o mapa de Hénon, salientamos que a sua principal dificuldade está na definição dos pontos de tangência homoclínicos, ou sejam, os pontos em que as variedades estável e instável, definidos por uma vizinhança em torno do ponto fixo, se interseitam. Este aspeto do método, não só representa um desafio maior do ponto de vista da implementação, mas também é o principal ponto de rutura com a intuição, que nos sugere criar uma partição em que os dois pontos fixos do mapa de Hénon se situem em regiões diferentes. Isto tem todo o sentido, pois como por definição estes pontos são sempre iguais a eles próprios em qualquer iteração, então teríamos forçosamente uma partição que não poderia ser geradora.

Posta esta introdução, o que propomos é que implementemos uma partição binária do espaço de estados definida em função da reta formada por todos os pontos equidistantes aos dois pontos fixos (ver Figura (14)). Com base nessa partição, chegamos a uma estimativa da entropia métrica, que podemos utilizar para comparar com os resultados apresentados nos trabalhos de Grassberger *et al.*, em [25, 1985]. Deixamos o convite para estender estes cálculos à entropia topológica, por forma a podermos também comparar com os resultados publicados por Cvitanović *et al.*, em [27, 1988].

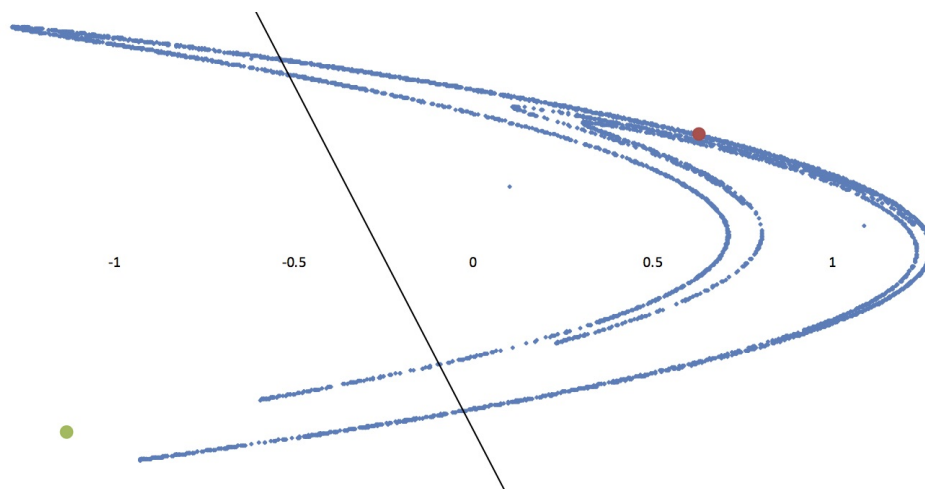


Figura 14: Partição que propomos implementar, definida em função da reta formada por todos os pontos equidistantes aos dois pontos fixos do mapa de Hénon, por oposição à proposta por Grassberger e Kantz.

Esta partição, com base na reta equidistante aos pontos fixos, permite também assegurar que ambos os pontos fixos ficarão em regiões diferentes. De notar que não afirmamos que esta partição é geradora, pelo contrário, o objetivo da sua utilização é confrontar a proposta de Grassberger e Kantz, em [25, 1985], com uma outra partição que pode ser entendida como mais intuitiva. Ainda assim, nada nos impede de adicionar condições a essa partição mais intuitiva por forma tentar torná-la geradora. Tal como referido na secção introdutória deste documento, um outro objetivo que se pretende igualmente alcançar é a

utilização da plataforma SAS para este tipo de estudos, podendo-se aproveitar da sua elevada capacidade de processamento, simplicidade da sintaxe e da existência de dois níveis de programação (*base* e *macro*) que torna possível o desenvolvimento e aplicação desta ferramenta a áreas tão variadas quanto a dinâmica simbólica.

6.1 Criação da partição e Resultados

A ideia é fixar uma região formada por pontos aleatórios suficientemente próximos do atrator estranho, de forma a que depois os façamos iterar, permitindo assim formar as respectivas sequências simbólicas. Em cada iteração, verificamos de que lado da partição está cada um dos pontos, atribuímos o respetivo símbolo à sequência que cada ponto formará e, finalmente, calculamos as frequências de cada uma das sequências possíveis para depois obter a entropia métrica. Como ponto de partida, começemos por considerar um conjunto de 1000 pontos, escolhidos aleatoriamente em torno da origem. A Figura (15) mostra as primeiras nove iterações, onde podemos ver o quadrado formado pelos pontos aleatórios, em torno da origem, assim como a tendência para que se forme o atrator estranho do mapa de Hénon.

A convergência é rápida. Na terceira iteração já se começa a delinear a forma conhecida do atrator, sendo que na quinta iteração ele fica praticamente formado. Desta forma, à medida que os 1000 pontos vão vagueando no espaço de estados, em torno do atrator, as sequências simbólicas de cada um deles vão-se formando. Nem todas as possíveis sequências simbólicas se irão formar. Por exemplo, na primeira iteração temos apenas duas sequências possíveis. Ou seja, os pontos ou estão de um lado da partição, ou estão do lado oposto. Na iteração seguinte, já podemos ter quatro sequências possíveis, e por aí em diante. É provável que nas primeiras três ou quatro iterações todas as sequências ocorram, mas

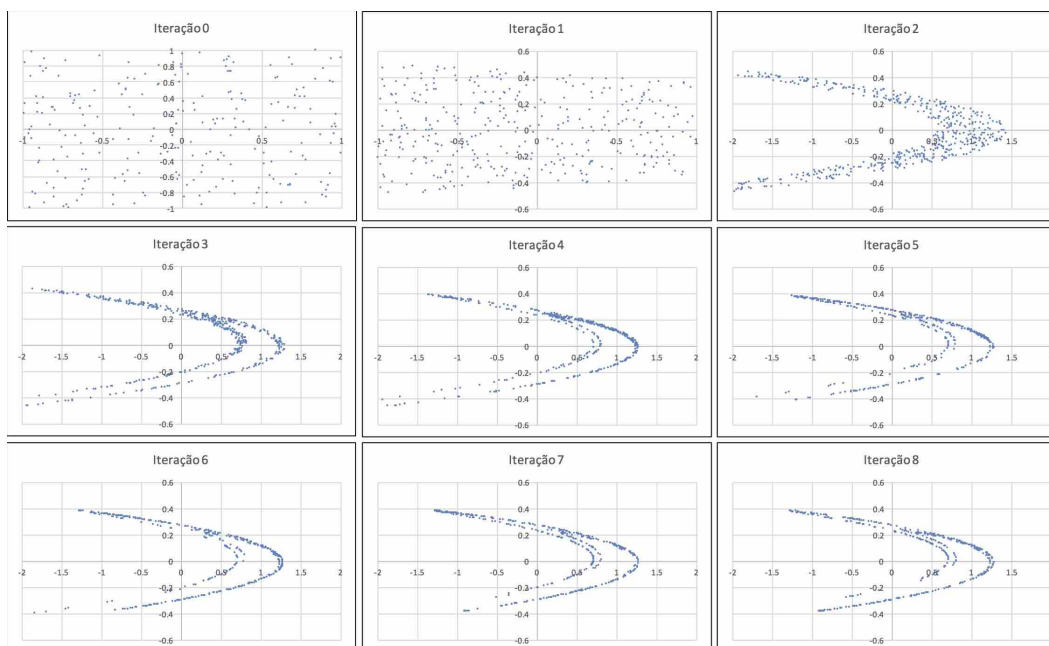


Figura 15: Primeiras nove iterações de 1000 pontos escolhidos aleatoriamente em torno da origem.

vemos que algumas delas começam a nunca se formar à medida que as iterações avançam. Na execução que apresentamos aqui podemos ver que, para iterações mais adiantadas, por exemplo na 15a, obtemos 278 sequências, quando poderíamos ter 2^{15} , que é uma quantidade substancialmente mais elevada.

Na Figura (16) podemos ver a formação das diferentes sequências que se obtém com esta execução. À medida que as iterações avançam, vemos que as sequências formam-se a um ritmo que cresce, mas depois abrande e mesmo cai abruptamente, como se toda a informação tivesse sido esgotada. Da mesma forma, vemos que as entropia parciais, calculadas em cada iteração, crescem, mas depressa começam a estagnar, fixando-se num valor ligeiramente acima dos 1.7. Apresentamos estas informações num gráfico, na Figura (17), onde podemos ver estes dois efeitos no mesmo referencial. Ao utilizar um maior número de iterações para esta execução, podemos chegar a um valor de 1.74673 para a

Iteração	# Sequências	Entropia Métrica (Dir.)	Acréscimo Sequências
1	2	0,296759896	
2	2	0,296759896	0
3	4	0,581580702	2
4	8	0,821075102	4
5	15	0,980303211	7
6	24	1,085955619	9
7	37	1,190251053	13
8	55	1,274314746	18
9	83	1,356830337	28
10	112	1,417048366	29
11	150	1,472617141	38
12	191	1,52038718	41
13	231	1,567377402	40
14	259	1,600198771	28
15	289	1,627530485	30
16	318	1,651212826	29
17	336	1,667048015	18
18	358	1,684242673	22
19	376	1,695988728	18
20	393	1,707852292	17
21	403	1,71432738	10

Figura 16: Cálculo das sucessivas Entropias Métricas, para cada uma das iterações dos 1000 pontos escolhidos aleatoriamente em torno da origem.

entropia, que corresponde à formação de cerca de 435 sequências simbólicas possíveis, ou seja, menos de metade dos pontos utilizados.

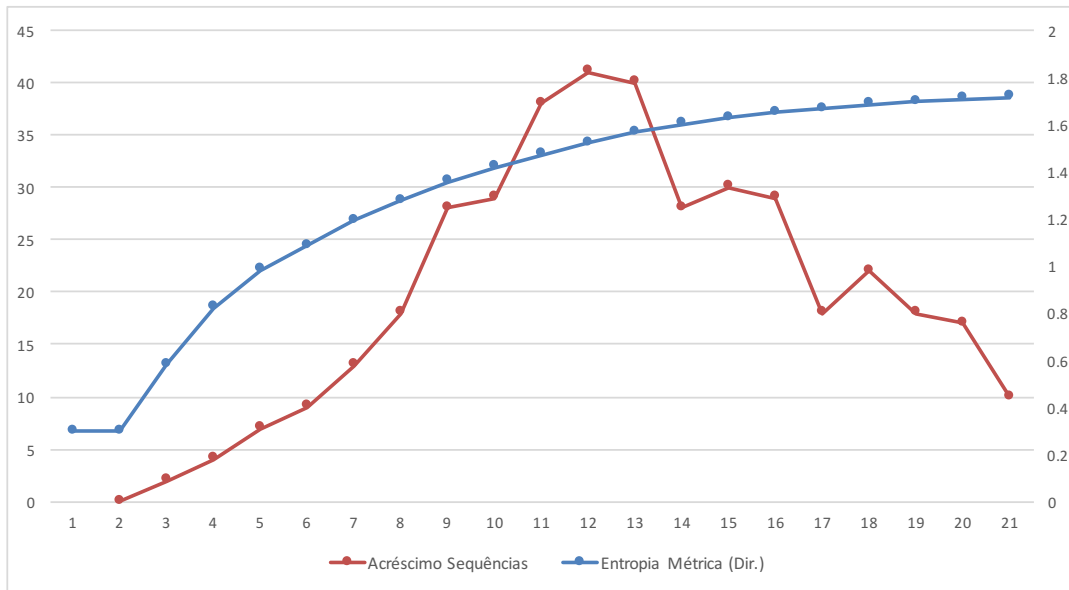


Figura 17: Evolução da Entropia Métrica e dos respectivos acréscimos, para as iterações dos 1000 pontos escolhidos aleatoriamente em torno da origem.

Embora não seja propriamente visível na Figura (15), verificamos que existe uma quantidade de pontos ainda considerável que conseguem escapar do atrator estranho. De fato, logo após duas ou três iterações vemos que alguns pontos começam a distanciar-se da zona do atrator. No total das 21 iterações, temos 575 pontos que se afastaram, emagrecendo cada vez mais o atrator, o que é muito interessante, tendo em conta que a região de pontos aleatórios cobre toda a forma habitual do atrator. Perante este cenário, vamos alterar a região escolhida, de forma a conseguirmos ter menos pontos que escapam ao atrator. Desta forma, podemos também perceber como variam a formação de novas sequências simbólicas, assim como o crescimento da entropia.

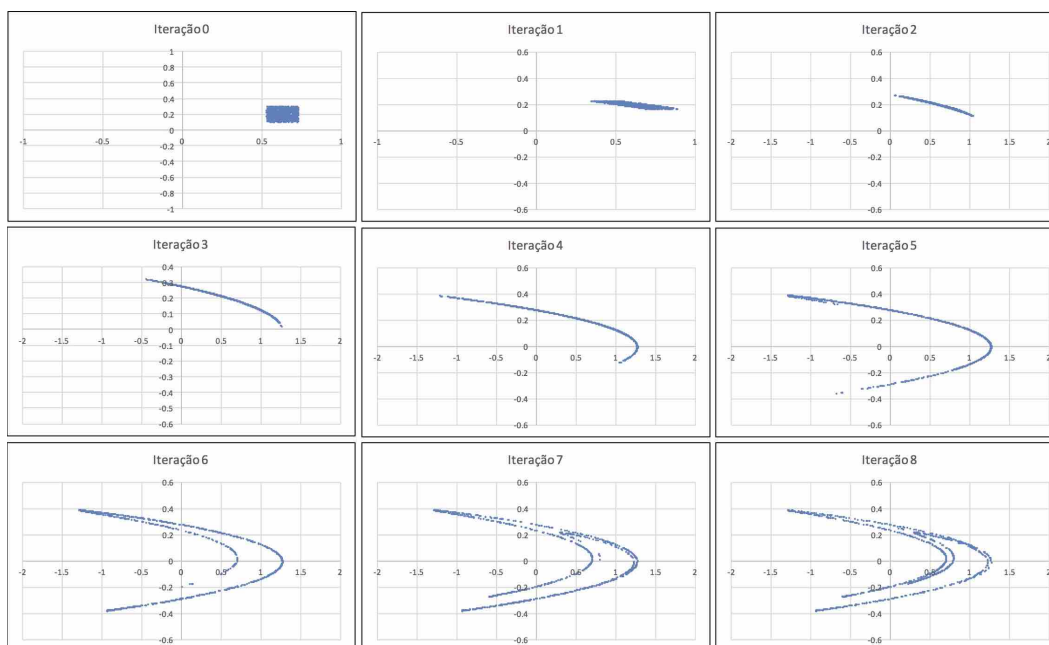


Figura 18: Primeiras nove iterações de 1000 pontos escolhidos aleatoriamente, mas desta vez em torno do ponto fixo hiperbólico.

É muito interessante vermos como o atrator se começa a formar, mas desta vez a partir de uma região mais pequena que a anterior. Para além de mais pequena, a escolha de ser em torno do ponto fixo faz com que a formação do atrator seja mais lenta, sendo que mesmo na nona iteração ainda não podemos dizer que esteja totalmente formado. Por outro lado, o nosso contador de pontos que divergem da zona de atração, indicam que todos os pontos foram “agarrados” pelo atrator. Ou seja, nenhum ponto conseguiu escapar à sua atração, pois a zona escolhida assim o permite. Ao contrário do caso inicial, em que os pontos escolhidos estavam em torno da origem, quando escolhemos os pontos em torno do ponto fixo vemos que a formação de novas sequências simbólicas é lenta, parecendo estar correlacionada com a velocidade da convergência para o atrator. Este desempenho

é algo intuitivo, tendo em conta que inicializamos esta execução com um conjunto de pontos, mais próximos uns dos outros, e adicionalmente em torno de um ponto que tem a particularidade de ser fixo. Por outro lado, algo que é um tanto ou quanto peculiar, vemos que a entropia métrica é maior e apresenta saltos maiores, que os da execução anterior. Quando aumentamos o número de iterações, podemos verificar que a entropia estagna num valor em torno dos 3. Mas, mais impressionante é que conseguimos ter 1000 seqüências simbólicas diferentes. Em quase todas as execuções que fizemos, com 50 iterações, conseguíamos sempre chegar a esta situação, o que evidencia o contributo do ponto fixo para que consigamos obter partições que sejam geradoras. Portanto, podemos concluir que devemos preservar esta característica que nos é fornecida pelos pontos fixos, pois realmente é algo único.

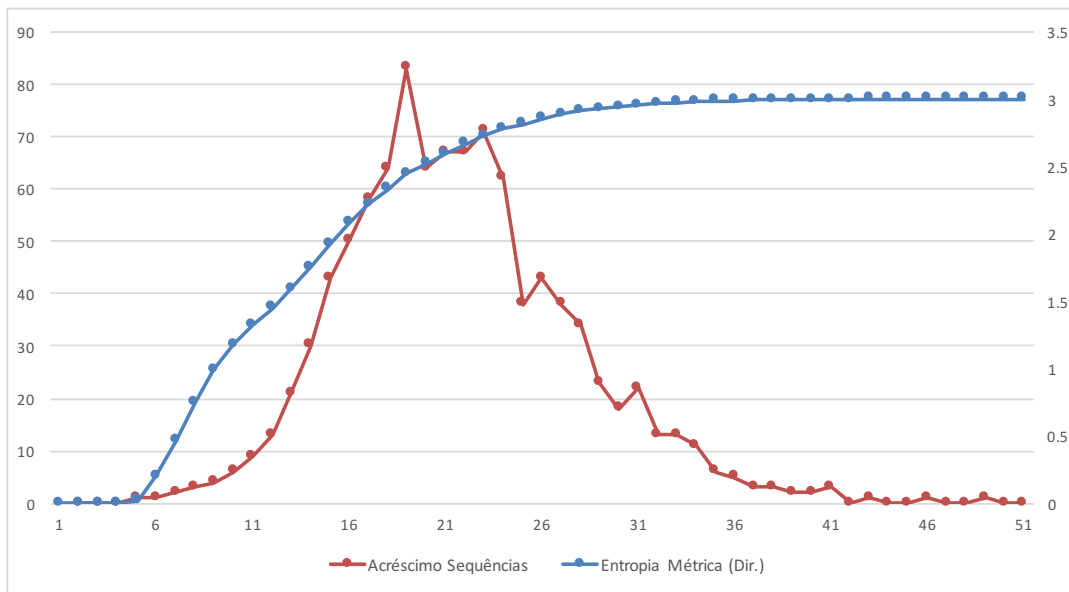


Figura 19: Cálculo da Entropia Métrica para 50 iterações de 1000 pontos escolhidos aleatoriamente em torno do ponto fixo hiperbólico.

Este resultado é evidenciado na Figura (19), onde podemos ver que a formação de

novas sequências simbólicas atinge o seu pico em torno da vigésima iteração, para depois voltar a descer até chegar a um momento em que cada ponto escolhido inicialmente tem a sua própria sequência simbólica. Vamos agora fazer o mesmo, mas utilizando o outro ponto fixo do mapa de Hénon como ponto de partida para formar a vizinhança de 1000 pontos aleatórios. Os resultados são apresentados na Figura (20), onde podemos ver que a convergência para o atrator, apesar de ser um pouco mais lenta que o caso do ponto fixo anterior, ainda assim ocorre a um ritmo interessante. Por outro lado, voltamos à situação da primeira execução realizada, quando os pontos de partida estavam em torno da origem, em que muitos dos pontos escolhidos divergem do atrator, algo que não é fácil de se ver nestes gráficos apresentados. De fato, na execução aqui ilustrada, temos 521 pontos que divergem, o que mostra que de fato é muito importante que se parta de uma região inicial mais próxima possível do atrator, para que a convergência de todos os pontos ocorra facilmente.

Quanto ao cálculo da entropia, podemos ver que a mesma estagna em torno dos 1.583925486, com a formação de novas sequências a atingir o seu pico em torno da iteração 18, para depois diminuir até ser nula. Fazendo aqui uma primeira etapa de conclusões a tirar, percebemos que a escolha da região inicial para a execução é muito importante, sendo que quanto mais próxima estiver do atrator, menor será a quantidade de pontos divergentes, permitindo obter uma sequência simbólica para cada ponto inicial. Por outro lado, temos também a escolha do ponto fixo, pelo que podemos fazer aqui uma última execução com esta partição, que será escolher como região inicial de 1000 pontos que estejam aleatoriamente espalhados pelo atrator. Ou seja, vamos escolher um ponto sobre o atrator, iterá-lo 1000 vezes, e utilizar esses mesmos pontos como região de partida para a execução que temos vindo aqui a concretizar. Desta forma, vamos poder comparar os resultados com os da segunda execução, em que utilizámos uma vizinhança em torno do ponto fixo hiperbólico, que se situa no atrator.

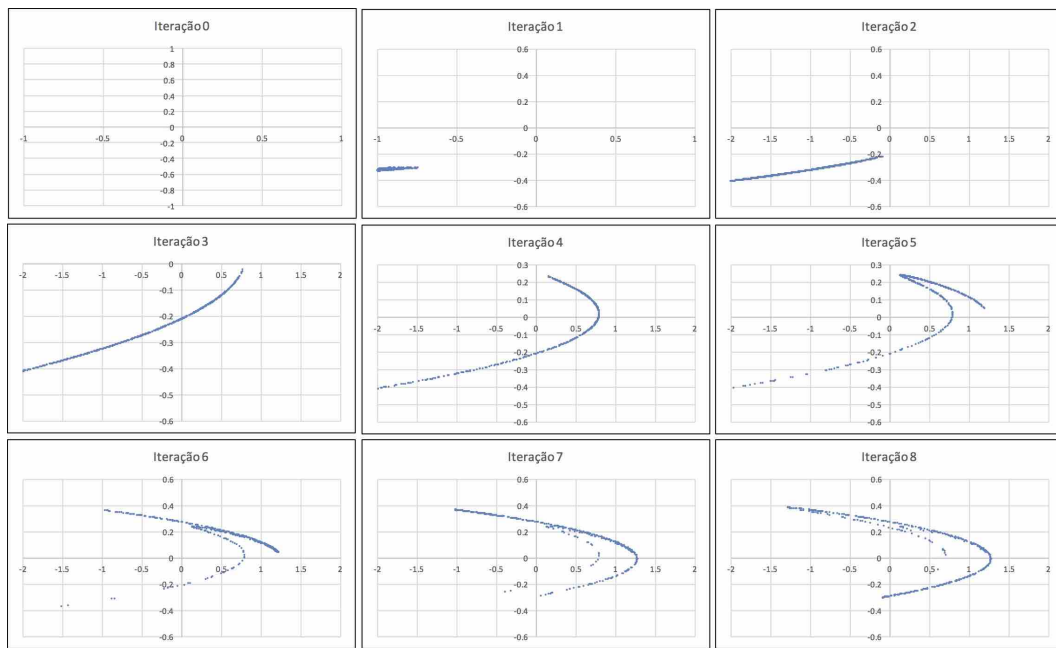


Figura 20: Iterações dos pontos escolhidos aleatoriamente em torno do segundo ponto fixo do mapa de Hénon.

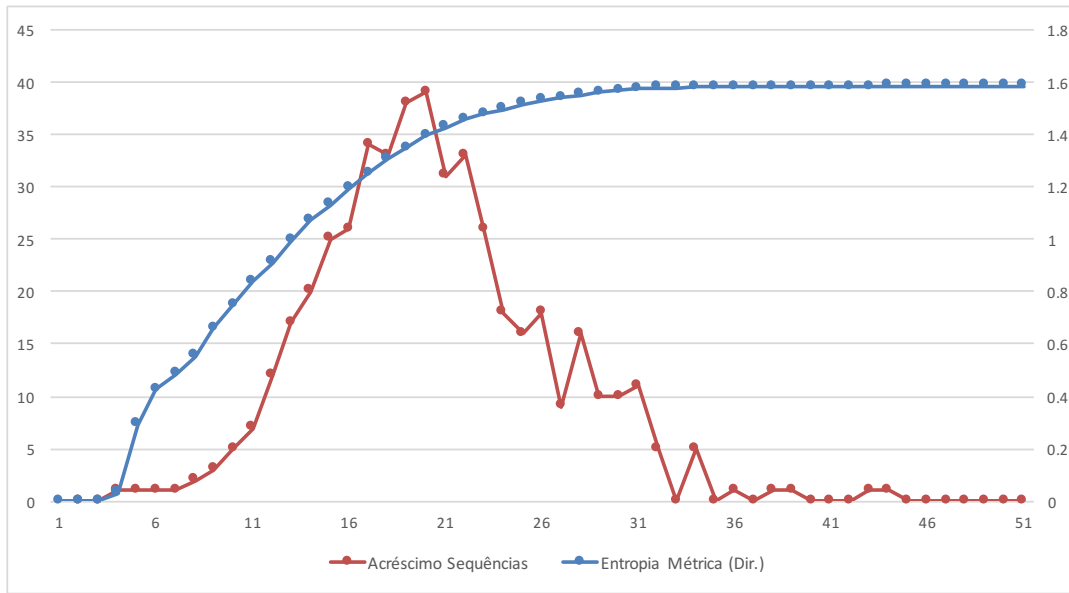


Figura 21: Evolução da entropia, para o caso da vizinhança de partida escolhida em torno do segundo ponto fixo.

Com esta última execução, podemos verificar que a convergência é a mais rápida, pois partimos logo de uma situação em que a região escolhida é o próprio atrator. Desta forma, temos que todos os pontos convergem, tal como quando escolhemos o ponto fixo, e a entropia estagna no valor 3, onde todos os pontos escolhidos têm a sua própria sequência de símbolos.

Os resultados são apresentados, nas Figuras (22), (23) e (24). De salientar que a curva que evidencia a formação de novas sequências é a mais suave de todas as curvas vistas até então. Aparentemente, esta deverá ser a melhor escolha, para se definir a partição geradora do mapa de Hénon, quando trabalhamos com esta partição.

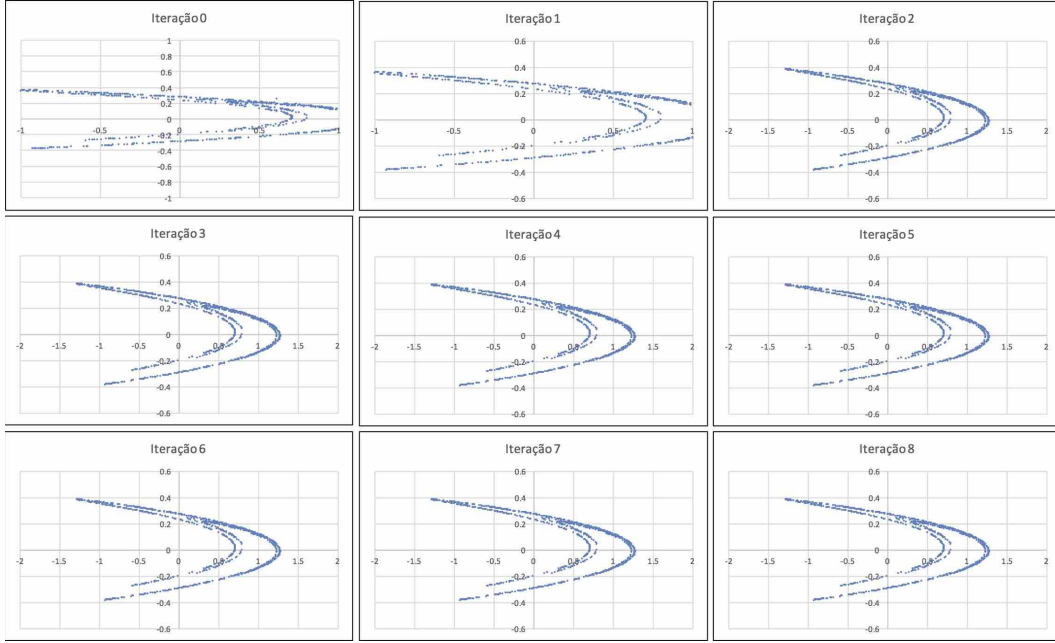


Figura 22: Iterações dos pontos escolhidos aleatoriamente no próprio atrator do mapa de Hénon.

7 Conclusões

Após uma apresentação com um detalhe considerável sobre as abordagens seguidas por Grassberger *et al.* e Cvitanović *et al.*, propomos uma partição muito simples, para mapas de dimensão 2. Esta é baseada na reta formada pelos pontos equidistantes aos pontos fixos do atrator. Intuitivamente, esta partição tem todo o sentido, pois é a única forma de assegurar que cada um dos pontos fixos fica representado numa das partes da partição, em total separação do outro ponto fixo.

Uma vantagem que esta partição apresenta, é que ela pode ser estudada de forma a ser

Iteração	# Sequências	Entropia Métrica (Dir.)	Acréscimo Sequências
1	2	0,247502499	
2	2	0,247502499	0
3	4	0,494799532	2
4	8	0,74218691	4
5	12	0,950232358	4
6	18	1,155362352	6
7	27	1,35374391	9
8	42	1,533237932	15
9	64	1,703830583	22
10	98	1,864983115	34
11	144	2,01762165	46
12	206	2,159142525	62
13	275	2,289910076	69
14	349	2,41078805	74
15	429	2,518353327	80
16	511	2,615143729	82
17	593	2,698061052	82
18	674	2,769392966	81
19	743	2,82564015	69
20	803	2,8705714	60
21	852	2,904850981	49
22	888	2,929547211	36
23	921	2,951528286	33
24	943	2,965682581	22
25	959	2,97531554	16
26	974	2,98434644	15
27	984	2,99036704	10
28	992	2,99518352	8
29	995	2,9969897	3
30	997	2,99819382	2
31	999	2,99939794	2
32	1000	3	1
33	1000	3	0
34	1000	3	0
35	1000	3	0

Figura 23: Evolução da formação de novas sequências simbólicas e da entropia para a escolha de pontos no próprio atrator.

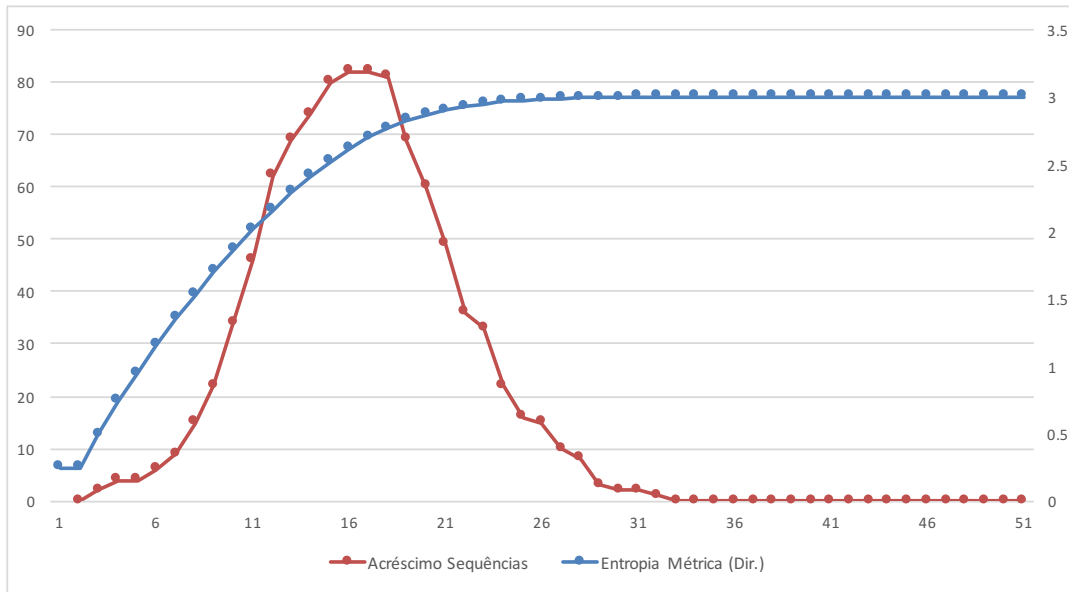


Figura 24: Gráfico com a evolução da entropia e da formação de novas sequências.

generalizada para dimensões superiores a 2, combinando os diferentes pontos equidistantes aos pontos fixos com algumas condições adicionais para assegurar a sua identidade original.

De seguida sintetizamos os resultados obtidos a partir das diferentes experiências realizadas, por forma a explorar a forma como as estimativas obtidas da entropia métrica se comportam.

Experiência	Entropia Métrica
Escolha aleatória de 1000 pontos em torno da origem	1.74673
Escolha aleatória de 1000 pontos em torno do ponto fixo hiperbólico	3.00000
Escolha aleatória de 1000 pontos em torno do ponto fixo não hiperbólico	1.5839
Escolha de 1000 pontos sobre o próprio atrator	3.00000

Figura 25: Valores obtidos das diferentes experiências realizadas, trabalhando com a partição proposta, sobre o mapa de Hénon.

Mostramos de seguida os valores de referência que Grassberger *et al.* e Cvitanović *et al.* obtiveram.

Entropia	Grassberger et al.	Cvitanović et al.
Topológica	0.45 ± 0.02	0.52274
Métrica	0.2632 ± 0.0001	-

Figura 26: Valores de referência que Grassberger *et al.* e Cvitanović *et al.* alcançaram para as entropias de primeira ordem, sobre o mapa de Hénon.

Os valores são muito diferentes, e tal deverá justificar-se com o fato de a partição utilizada não ser necessariamente geradora. Contudo, existem dois resultados interessantes, que correspondem às segunda e quarta experiências realizadas, onde obtivemos a mesma estimativa para a entropia métrica, ou seja, 3. O resultado parece curioso, mas pode ser evidência intuitiva de como um ponto fixo hiperbólico pode contribuir para tanto para o conhecimento da dinâmica de um sistema, quanto o próprio atrator.

As duas restantes experiências realizadas, têm valores de entropia mais baixos, mas ainda assim muito distantes dos obtidos pelos autores referenciados. O fato de estarmos a obter entropia tão elevadas com esta partição parece indicar que as sequências simbólicas estão mais próximas de uma distribuição uniforme por entre os diferentes estados ou partes da partição, o que se traduz numa menor quantidade de informação que se pode extrair da mesma.

Claramente, achamos que esta abordagem pode ser mais explorada. Não só no entendimento dos resultados obtidos com esta partição através de outras experiências que se possam realizar, como também na sua aplicação ou extensão a mapas de dimensões superiores.

Uma nota final para a utilização do SAS para a realização desta Tese. A ideia de que este tipo de *software*, normalmente aplicado em exploração de dados, *data mining* e *data analytics*, pode ser utilizado para este tipo de utilizações, é claramente uma realidade. Não realizámos um trabalho de análise sobre os erros que possamos obter com a utilização desta plataforma, mas não deverá haver razão para achar que os mesmos sejam substancialmente diferentes dos obtidos quando se utilizam os *softwares* usuais. Os programas construídos estão disponíveis e podem ser requisitados.

Agradecimentos

Gostaria de deixar uma nota de agradecimento, desde logo à Professora Doutora Diana Mendes pela disponibilidade que sempre demonstrou para dar o seu apoio e contributo para a realização deste trabalho, ao Rogério Ferreira do Ó, a Jacques Trohel, ao Professor Doutor João Lopes Dias, ao Rui Ligeiro, e por fim à minha esposa que sempre me apoiou.

Referências

- [1] J. Hadamard, *Les surfaces à courbures opposées et leur lignes geodesiques*, Journal de Mathématiques Pures et Appliqués 4, 27-73 (1898).
- [2] M. Morse, G. A. Hedlund, *Symbolic Dynamics*, American Journal of Mathematics, 60, 815-866 (1938).
- [3] J. Balatoni, A. Renyi, *On the notion of information entropy*, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci 1, 9 (1956).
- [4] J. I. Neimark, *On some cases of periodic motions depending on parameters*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 129, 736-739 (1959).
- [5] Lorenz, E. N., *Deterministic nonperiodic flow*, Journal of the Atmospheric Sciences, 20 (2): 130-141, Bibcode:1963JAtS...20..130L. doi:10.1175/1520-0469 020;0130:DNF;2.0.CO (1963).
- [6] R. Sacker, *On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations*, Report IMM-NYU 333, New York University (1964).
- [7] R. L. Adler, A. G. Konheim, M. H. McAndrew, *Topological Entropy*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 114, No. 2, pp. 309-319 (1965).
- [8] S. Smale, *Differentiable Dynamical Systems*, Bull. of the Amer. Math. Soc., vol 73, 747-817 (1967).
- [9] R. Bowen, *Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 153, 401-414 (1971).
- [10] TRABALHO COMENTADO NO PAPER DE HENON.
- [11] TRABALHO COMENTADO NO PAPER DE HENON.

- [12] M. Henon, *A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor*, Commun. math. Phys. 50, 69-77 (1976).
- [13] May, R. M., *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature 261(5560):459-467 (1976).
- [14] R. Lozi, *Un attracteur étrange (?) du type attracteur de hénou*, Journal de Physique, Colloque C5, supplément au n° 8, tome 39, page C5-9 (1978).
- [15] Zaslavskii, G. M., *The Simplest case of a strange attractor* Phys. Lett. A 69 (3): 145-147. Bibcode:1978PhLA...69..145Z. doi:10.1016/0375-9601(78)90195-0. (LINK) (1978).
- [16] R. L. Devaney, Z. Nitecki, *Shift Automorphisms in the Hénon mapping*, Commun. Math. Phys., 67, 137-146 (1979).
- [17] Rabinovich, M. I., Fabrikant, A. L., *Stochastic Self-Modulation of Waves in Nonequilibrium Media*. Sov. Phys. JETP 50: 311. Bibcode:1979JETP...50..311R. (1979).
- [18] J.L. Kaplan, J.A. Yorke, H.O. Peitgen and H.O. Walther, ed. *Functional Differential Equations and Approximations of Fixed Points*, Lecture notes in Mathematics 730, Springer-Verlag, ISBN 0-387-09518-7 (1979).
- [19] P. Collet, J. Eckmann, *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, Birkhäuser (1980).
- [20] P. Grassberger, I. Procaccia, *Characterisation of Strange Attractors*, Phys. Lett. 50-5, 346-349 (1982).
- [21] J. D. Farmer, *Physica (Utrecht)* 4D, 366 (1982).
- [22] P. Grassberger, I. Procaccia, *Measuring the Strangeness of Strange Attractors*, *Physica* 9D, 189-208 (1983).

- [23] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, New York: W. H. Freeman, pp. 188-189 (1983).
- [24] P. Cvitanović, *Universality in Chaos (or, Feigenbaum for cyclists)*, Hilger, Bristol, 1984
- [25] P. Grassberger, H. Kantz, *Generating Partitions for the Dissipative Hénon Map*, Phys. Lett. 113A, 235-238 (1985).
- [26] J. Milnor, W. Thurston, *On Iterated Maps of the Interval*, Lecture Notes in Math., 1342, 465-563, Springer, Berlin (1988).
- [27] P. Cvitanović, G. Gunaratne, I. Proccacia, *Topological and metric properties of the Hénon-type attractors*, Phys. Rev. A, Vol. 38, No 3, 1503-1520 (1988).
- [28] O. Biham, W. Wenzel, *Characterization of unstable periodic orbits in chaotic attractors and repellers*, Phys. Rev. Lett. 63, 819-822 (1989).
- [29] P. Grassberger, H. Kantz, U. Moening, *On the Symbolic Dynamics of the Hénon Map*, Phys. Lett. 22A, 5217-5230 (1989).
- [30] O. Biham, W. Wenzel, *Unstable periodic orbits and the symbolic dynamics of the complex Hénon map*, Phys. Rev. A 42, 4639-4646 (1990).
- [31] G. d'Alessandro, P. Grassberger, S. Isola, A. Politi, *On the topology of the Hénon map*, J. Phys. A: Math. Gen. 23, 5285-5294 (1990).
- [32] S. Aubry, G. Abramovici, *Chaotic Trajectories in the Standard Map: The Concept of Anti-Integrability*, Physica D 43, 199-219 (1990).
- [33] G. d'Alessandro, S. Isola, A. Politi, *Geometric Properties of the Pruning Front*, Progress of Theoretical Physics, Vol. 86, No. 6 (1991).

- [34] F. Giovannini, A. Politi, *Homoclinic tangencies, generating partitions and curvature of invariant manifolds*, J. Phys. A: Math. Gen. 24 (1991) 1837-1887 (1991).
- [35] M. Benedicks, L. Carleson, *The dynamics of the Hénon map*, Annals of Mathematics 133, 73-169 (1991).
- [36] F. Giovannini, A. Politi, *Generating partitions in Hénon-type maps*, Physics Letters A 161 332-336 (1992).
- [37] S. Newhouse, T. Pignataro, *On the Estimation of Topological Entropy*, Journal of Statistical Physics, Vol. 72, Nos. 5/6 (1993).
- [38] K. Hansen, *Symbolic dynamics in chaotic systems*, Tese apresentada na Universidade de Oslo (1993).
- [39] D. Lind, B. Marcus, *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*, Cambridge University Press (1995).
- [40] H. Xie, *Grammatical Complexity and One-Dimensional Dynamical Systems*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (1996).
- [41] D. Sterling, J. D. Meiss, *Computing periodic orbits using the anti-integrable limit* arXiv.org > chaos-dyn > arXiv:chaos-dyn/9802014v1 (1998).
- [42] G. Świątek, *The Collet-Eckmann Condition in One-Dimensional Dynamics: a Survey* (2000).
- [43] J. E. Hopcroft, R. Motwani, J. D. Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*, 2nd Edition, Addison-Wesley (2001).
- [44] M. Branson, *The Smale Horseshoe as a Fractal Structure in Dynamical Systems*, MASS program, Pennsylvania State University (2002).

- [45] Y. Chen, *Smale Horseshoe via the Anti-integrability*, Chaos, Solutions and Fractals 28, 377-385 (2006).
- [46] J. Crofts, *Efficient method for detection of periodic orbits in chaotic maps and flows*, Tese apresentada na Universidade de Leicester (2007).
- [47] D. A. Mendes, V. M. Mendes, *Topological entropy for Hénon and Lozi map* (2007).
- [48] D. Sterling, H. R. Dullin, J. D. Meiss, *Homoclinic Bifurcations for the Hénon Map* (2008).
- [49] V. Botella-Soler, J. M. Castelo, J. A. Oteo, J. Ros, *Bifurcations in the Lozi map* arXiv.org > nlin > arXiv:1102.0034 (2011).