Instituto Superior de Ciências do Trabalho e da Empresa

CONSISTÊNCIA ENTRE MODELOS DE EQUILÍBRIO DOS MERCADOS FINANCEIROS E MODELOS DE AVALIAÇÃO DE OPÇÕES

Teresa M. Lemos

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de

Mestre em Finanças

Orientador:

Prof. Doutor João Pedro Nunes

Setembro de 2006

Resumo

A presente dissertação incidiu sobre as taxas de rendibilidade semanais das opções sobre o Índice S&P 500, tendo-se verificado que as *calls* apresentaram rendibilidades superiores ao activo subjacente e crescentes com o preço de exercício, enquanto que as *puts* evidenciaram *performances* negativas, inferiores à taxa de juro sem risco, confirmando os teoremas apresentados, que pressuponham a presença do *leverage effect* no preço das opções e, consequentemente, na sua rendibilidade.

De forma a excluir da análise o *leverage effect*, foi constituída uma carteira de *straddles* com *beta* igual a zero – *zero-beta straddles* – que, ao contrário do que seria pressuposto pelo CAPM, apresentaram taxas de rendibilidade negativas, bastante inferiores à taxa de juro sem risco. Estes resultados apontam para a existência de outros factores de risco, além do risco de mercado do activo subjacente, único factor considerado no Modelo de Merton.

Assim, foi analisado o parâmetro *vega*, de forma a estudar a possibilidade da volatilidade ser um factor de risco com influência no preço das opções. Para o efeito, definiu-se um modelo de regressão linear, utilizando o critério dos "mínimos quadrados ordinários" (OLS), tendo em conta os ganhos/perdas obtidos (diferença entre a rentabilidade da carteira de *zero-beta straddles* e a taxa de juro sem risco). Os coeficientes de regressão obtidos assumem valores negativos e estatisticamente significativos, apontando para a presença de um prémio de risco negativo da volatilidade, facto que pode justificar a obtenção de taxas de rendibilidade negativas nos *zero-beta straddles*.

Palavras-Chave: Modelo de Merton, CAPM, *Straddles*, Volatilidade.

Classificação JEL: G12, G13.

Abstract

This paper examines the S&P 500 Index weekly option returns. It was confirmed that call option returns exceeded those of the underlying and were increasing with the strike price, while put options obtained negative performances, below the risk-free rate. These results are consistent with the presented theorems, which implied the presence of a leverage effect on option prices, and consequently in their returns.

In order to exclude this leverage effect from the analysis, a straddle position was formed with beta equal to zero – zero-beta straddles – which presented negative returns quite below the risk-free rate (contrary to what was implied by CAPM). These results suggest that some risk other than the market risk of the underlying, only factor considered in the Merton Model, is being priced in options returns.

Using option vega, the hypothesis that volatility might be a risk factor influencing option pricing was tested. For this purpose, a regression analysis using the "ordinary least squares" (OLS) criterion was performed, considering the gains/losses of the portfolio (difference between zero-beta straddle returns and risk-free rate). The regression coefficients were negative and statistically significant, which suggests a negative volatility risk premium, justifying the negative returns of zero-beta straddles.

Keywords: Merton Model, CAPM, Straddles, Volatility.

***JEL* Classification Numbers:** G12, G13.

ÍNDICE

1. Introdução

O investimento em derivados financeiros tem crescido de forma exponencial nos últimos anos, não só a nível das principais Bolsas, como a CBOE (Chicago Board Options Exchange), CME (Chicago Mercantile Exchange) ou LIFFE (The London International Financial Futures and Options Exchange), mas também no mercado *over-the-conter*. A corroborar esta observação refira-se, por exemplo, as opções sobre o S&P 500 *Index* (SPX) transaccionadas na CBOE que, num período de 20 anos - entre 1983 (data de início da transacção destas opções nesta Bolsa) e 2003 -, registaram, um aumento de, aproximadamente, 2600% no volume de contratos negociados.

Este sucesso do mercado de opções, nomeadamente das opções sobre índices, está relacionado com o facto destes instrumentos financeiros permitirem aos investidores anteciparem movimentos nos preços dos activos sem terem de efectuar investimentos avultados e, simultaneamente, limitar as perdas dos seus *portfolios*, possibilitando, assim, a assumpção de um nível de risco ajustado às suas preferências.

Nestas circunstâncias, a correcta avaliação das opções é um aspecto essencial neste mercado, que tem merecido uma atenção crescente nas mais diversas vertentes, mas em especial na procura de modelos que permitam obter estimativas fiáveis para os preços das opções.

Contudo, nos últimos anos, têm sido apresentados alguns estudos que apontam para o *mispricing* dos preços das *calls* e *puts*, considerando-se que as opções não são activos redundantes, como era assumido no Modelo de Black-Scholes, salientando-se os trabalhos de Jackwerth (2000), Bakshi, Cao e Chen (2000) e Buraschi e Jackwerth (2001).

Paralelamente, diversos autores como Coval e Shumway (2001), Driessen e Maenhout (2003) e Bakshi e Kapadia (2003) têm analisado a possibilidade de existirem outros factores de risco que contribuem para a formação do preço das opções, designadamente a existência de um prémio de risco da volatilidade.

Efectivamente, a volatilidade é um factor que condiciona a evolução do preço dos activos, sendo, por isso, um parâmetro presente em qualquer modelo de avaliação, embora nalguns casos seja considerado como uma variável constante e noutros como uma variável estocástica.

Tendo em conta estas questões e o facto de, nos últimos anos, se ter assistido a um aumento da volatilidade observada nos mercados, situação que não foi considerada nestes estudos, porque incidiram sobre anos anteriores a 2000 e, nalguns casos, por períodos de tempo relativamente curtos (2 a 5 anos), o trabalho apresentado pretende, assim, dar uma visão mais actualizada do comportamento das taxas de rendibilidade das *calls* e *puts*, tendo-se, para o efeito, analisado as opções sobre o Índice S&P 500 transaccionadas na CBOE, no período entre Janeiro de 1996 e Dezembro de 2004.

Saliente-se que, as taxas de rendibilidade das opções assumem características especiais, resultante do efeito de alavanca (*leverage effect*). Efectivamente, as opções permitem aos investidores assumirem o risco de uma posição no activo subjacente com um investimento relativamente reduzido. Este efeito deve ser considerado no preço das opções e, consequentemente, na sua rendibilidade, sendo reflectido nos seus *betas*. Black e Scholes (1973, p.645) apresentaram uma relação entre o *beta* da opção e o *beta* do activo subjacente que reflecte esse *leverage effect*.

Neste sentido, de acordo com os teoremas apresentados por Coval e Shumway (2001), se for considerada a existência de um factor de desconto estocástico, negativamente correlacionado com o preço de um activo, comprova-se que as *calls* apresentam taxas de rendibilidade superiores às do activo subjacente e crescentes com o *strike*, enquanto que as *puts* obtêm rendibilidades inferiores à taxa de juro sem risco e também crescentes com o *strike*.

Dos testes realizados concluiu-se que, para o período em análise, as taxas de rendibilidade das opções são consistentes com os pressupostos associados ao *leverage effect*. Assim, constatou-se que, a rendibilidade das *calls*, para o período analisado, foi bastante superior à rendibilidade do activo subjacente (a taxa de rendibilidade semanal do Índice S&P 500, em média, foi de 0,18%, enquanto que as *calls* obtiveram valores médios semanais de 4,71%). Em relação às *puts*, a taxa de rendibilidade semanal apurada foi negativa (em média -7,5%) e, por conseguinte, inferior à taxa de juro sem risco.

No que respeita à condição das taxas de rendibilidade das opções serem crescentes com o *strike*, esta teoria apenas foi, integralmente, confirmada nas *calls*, uma vez que nas *puts* não se verificou a existência de um comportamento linear, com a variação do preço de exercício.

Complementarmente a esta abordagem, analisou-se a *performance* obtida por um *portfolio* constituído por opções, com *market beta* igual a zero. Neste âmbito e dado que os *straddles* (correspondem a deter posições longas em *calls* e *puts* com o mesmo *strike* e data de maturidade) são instrumentos que permitem analisar os efeitos da volatilidade, construiu-se uma carteira de *zero-beta straddles*, com recurso aos *betas* calculados a partir do Modelo de Merton.

Teoricamente, de acordo com o CAPM (Capital Asset Pricing Modelo), um *zero-beta straddle* deverá obter uma rendibilidade igual à taxa de juro sem risco. Contudo, os resultados obtidos não são consistentes com esta proposição, tendo-se apurado taxas de rendibilidade negativas, com um mínimo de -5,84% e um máximo de -1,32%, por semana, qualquer das percentagens bastante inferior à taxa de juro sem risco.

Neste contexto, perante os resultados apurados e tendo presente as conclusões apresentadas por alguns autores sobre a existência de outros factores de risco com influência no preços das opções e, consequentemente, na sua rendibilidade, aplicou-se um modelo de regressão linear aos dados analisados, com o objectivo de testar a hipótese de existir um prémio de risco negativo para a volatilidade, que justificasse a obtenção de taxas de rendibilidade negativas nos *zero-beta straddles*.

Deste modo, foram determinados coeficientes de regressão negativos e estatisticamente significativos, indicando que o prémio de risco de volatilidade negativo pode ser uma variável explicativa dos ganhos (perdas) obtidos na carteira de *zero-beta straddles*.

Em termos de organização, o presente trabalho encontra-se subdividido em cinco partes: na primeira é apresentada uma revisão da literatura relacionada com a matéria em análise e na segunda a formulação de um conjunto de proposições sobre as taxas de rendibilidade teóricas das opções; estes teoremas foram a base de uma análise empírica, sendo apresentada, na terceira parte, a descrição dos dados analisados e a metodologia adoptada e na quarta parte uma análise aprofundada sobre os resultados obtidos e as suas implicações; na quinta e última parte são expostas as principais conclusões extraídas do trabalho realizado.

2. Revisão da Literatura

A partir do Modelo de Black-Scholes foram desenvolvidas diversas teorias, com o objectivo de colmatar algumas das lacunas apontadas a este modelo, nomeadamente o facto da volatilidade ser considerada uma variável constante.

Na realidade esta hipótese não se verifica nos mercados, dado que a volatilidade implícita (*implied volatility*) das opções, em geral, apresenta uma tendência decrescente com o *strike*, fenómeno designado como *volatility skew*. Esta matéria tem sido abordada em diferentes estudos, nomeadamente por Canina e Figlewski (1993), Jackwerth e Rubinstein (1996) e Christensen e Prabhala (1998).

Neste sentido, diversos autores têm apresentado modelos alternativos ao Modelo de Black-Scholes, com o tratamento de anomalias como o *volatility smile* ou outro tipo de violações empíricas, seguindo duas abordagens distintas: os modelos determinísticos da volatilidade e os modelos estocásticos.

A nível dos modelos determinísticos referem-se: ***i)*** o *Constant Elasticity Variance Model* de Cox e Ross (1976), que considera um decréscimo na volatilidade quando o preço do activo subjacente aumenta[1]; ***ii)*** o *Implied Binomial Tree Model* de Rubinstein (1994), o qual permite derivar as funções relativas ao *drift* e à volatilidade de forma consistente com os preços das opções; e ***iii)*** o *Nonparametric Estimator for the State-Price Density* (SPD) de Ait-Shalia e Lo (1998).

No que respeita aos modelos estocásticos, importa salientar o modelo de Hull e White (1987), cujos pressupostos assentam na hipótese de existir uma correlação nula entre a volatilidade e o preço do activo, e o modelo de Heston (1993) que, contrariamente ao anterior, estipula uma correlação diferente de zero entre estas duas variáveis. Este tipo de modelos, ao considerar que a volatilidade segue também um processo estocástico, assume a variabilidade da volatilidade (*volatility of volatility*).

Refira-se, ainda, Corrado e Su (1996) que apresentaram uma extensão ao Modelo de Black-Scholes, considerando a inclusão de ajustamentos, ao preço obtido por este modelo, relativos à *skewness* e *kurtosis* presente nas distribuições das rendibilidades das acções/índices. Por outro lado, Câmara (2003) desenvolveu um modelo bastante mais genérico, que permite calcular o preço das opções quando o activo subjacente apresenta uma distribuição lognormal com uma *skew* negativa.

---

[1] Esta condição é válida desde que $\beta<2$.

Paralelamente a estas abordagens, que se focalizam em modelos de *pricing* das opções, diversos autores têm analisado séries históricas dos preços das *calls* e *puts*, apurando taxas de rendibilidade esperadas para diferentes mercados e estratégias, com o objectivo de validar se os valores obtidos são consistentes com os modelos de avaliação das opções.

Jackwerth (2000), de forma empírica, derivou funções de aversão ao risco implícitas nos preços das opções sobre o S&P 500 *Index*, para o período de Abril de 1986 até Dezembro de 1995, tendo concluído que antes do *crash* de 1987, as funções obtidas eram positivas e consistentes com as assumpções da teoria económica, situação que já não se verificava após o *crash* de 1987. Como explicação para este facto, Jackwerth aponta para o *mispricing* das opções, considerando que não seria lógico um investidor ter uma função de aversão ao risco negativa.

Buraschi e Jackwerth (2001) também analisaram o *crash* de 1987, embora noutra perspectiva, tendo concluído que o *volatility smile* se alterou bastante após este período, deixando de ser constante, como era pressuposto no Modelo de Black-Scholes. Neste sentido, apresentaram um conjunto de testes estatísticos para modelos determinísticos da volatilidade, nos quais as opções são consideradas como *redundant assets*, e para modelos estocásticos, tendo em conta a possibilidade de existirem factores de risco adicionais incluídos no preço das opções, como a volatilidade estocástica, a taxa de juro ou a existência de *jumps*.

Os resultados obtidos, para a fase *pós-crash*, rejeitam a hipótese das rendibilidades das opções *out-of-the-money* serem redundantes para qualquer nível de confiança, concluindo-se que existem outros factores de risco adicionais que são incluídos no preço das opções. Contudo, esta situação não se verificava antes do *crash*, uma vez que, com um nível de confiança de 34%, as opções *out-of-the-money* eram activos redundantes.

Efectivamente, diversos estudos empíricos têm vindo a demonstrar que as opções não são activos redundantes. Bakshi, Cao e Chen (2000) referem que as três propriedades comuns aos modelos que consideram as opções como activos redundantes, ou seja: ***i)*** os preços das *calls* aumentam e os das *puts* diminuem, de forma monótona, com a variação do preço do activo subjacente; ***ii)*** existe uma correlação perfeita entre os preços das opções e o do *underlying*; e ***iii)*** as opções podem ser replicadas usando o *underlying* e um activo sem risco, não se verificam na realidade.

Através da análise das opções sobre o S&P 500 *Index*, os autores concluíram que os preços das *calls* (*puts*), muitas vezes, descem (sobem) enquanto o preço do activo subjacente sobe. Por outro lado, verificaram que, em determinadas situações, os preços das *calls* e *puts* têm o mesmo comportamento, em vez de seguirem em sentidos opostos. Deste modo, estes autores referem que este tipo de modelos não podem ser consistentes com os preços observados, pelo que as opções não são activos redundantes nem instrumentos de cobertura ideais – os preços das *puts* e do *underlying* podem descer conjuntamente.

Por outro lado, Buraschi e Jiltsov (2002) desenvolveram um modelo que explica, em parte, a frequência das violações apresentadas no estudo anterior. Este modelo assume que as opções não são activos redundantes, sendo os parâmetros estimados a partir dos preços das opções e do volume de transacções, de forma a gerar *Option-Implied Difference in Beliefs* (OIDB). Em termos de conclusões, os autores identificaram que as OIDB têm um forte impacto no nível do *volatility smile* e no volume das opções.

Vanden (2004) examinou as implicações de *nonnegative wealth constraints* em modelos de *asset pricing*, demonstrando que, em equilíbrio, as opções no *portfolio* de mercado são activos não redundantes e o *pricing kernel* depende tanto da rendibilidade do mercado como da rendibilidade das opções. Através da aplicação do modelo, o autor concluiu que as opções são relevantes para explicar as rendibilidades dos *portfolios* constituídos por activos com risco.

Paralelamente a este tipo de estudos que colocam em causa os modelos teóricos que se baseiam na hipótese de as opções serem activos redundantes, existem autores que têm centrado a sua análise na procura de factores de risco adicionais, além do risco de preço do activo subjacente, que sejam valorizados no mercado de opções, nomeadamente o risco de volatilidade.

A este nível, refira-se Coval e Shumway (2001), que analisaram as taxas de rendibilidade das *calls* e *puts* do S&P 500 *Index*, tendo concluído que os valores obtidos não eram consistentes com o Modelo Black-Scholes/CAPM, facto que poderia indicar a existência de outro tipo de factor de risco, como a volatilidade.

Neste âmbito, os autores construíram um *portfolio* de *zero-beta straddles*, para avaliarem os efeitos da volatilidade estocástica, tendo obtido taxas de rendibilidade negativas (em média, as posições em *at-the-money straddles* apresentavam perdas superiores a 3%, por semana), quando, em termos teóricos, deveriam ter chegado a rendibilidades positivas, próximas da taxa de juro sem risco. Perante estes resultados, Coval e Shumway consideraram que a volatilidade seria um factor de risco importante no *pricing* das opções.

Também Driessen e Maenhout (2003) obtiveram taxas de rendibilidade médias negativas para os ATM *straddles* (rendibilidade mensal de -13%) e para as OTM *puts* (rendibilidade mensal de -40% para *puts* com um *strike-to-spot ratio* de 96%), assim como para outras estratégias, designadamente a "*crash* neutral" OTM *put* (definida como uma posição longa numa OTM *put* com *strike-to-spot ratio* de 96% e uma posição curta numa OTM *put* com *strike-to-spot ratio* de 92%) e a "*crash* neutral" ATM *straddle* (definida como uma posição longa numa ATM *straddle* e uma posição curta numa OTM *put* com *strike-to-spot ratio* de 92%), as quais permitem a cobertura das carteiras em situações de grandes *crashes*.

Partindo destas estratégias e tendo em conta as preferências dos investidores, através das funções de *Constant Relative Risk Aversion* (CRRA), estes autores concluíram que os investidores acham sempre vantajoso tomar posições curtas em OTM *puts* e ATM *straddles,* independentemente do nível de aversão ao risco. Estes resultados apontam para a existência de um prémio de risco negativo da volatilidade.

Esta questão foi abordada por Bakshi e Kapadia (2003), que testaram, para o mercado de opções sobre o S&P 500 *Index*, a hipótese de existir um prémio de risco da volatilidade negativo, através da análise das propriedades estatísticas de um *portfolio delta-hedged* de opções, assumindo uma posição longa numa *call* e uma posição curta no activo subjacente, de forma a que o rendimento obtido fosse igual à taxa de juro sem risco.

Neste sentido, se o preço das opções incorporar um prémio de risco de volatilidade, esse facto poderá ser evidenciado pelos resultados obtidos numa carteira constituída de forma a permitir a cobertura dinâmica de todos os riscos, com excepção do risco de volatilidade. Assim, se o risco de volatilidade for valorizado, o resultado médio da estratégia de *delta-hedging* será positivo ou negativo, determinado pelo prémio de risco de volatilidade.

As principais conclusões deste estudo apontam para uma rendibilidade negativa da estratégia de *delta-hedged*, com maior incidência nas opções *out-of-the-money* e em momentos de maior volatilidade. Efectivamente, segundo estes autores, o prémio de risco da volatilidade afecta de forma significativa os resultados da estratégia de cobertura.

Branger e Schlag (2004) analisaram, com profundidade, as propriedades deste tipo de testes, utilizados na determinação do prémio de risco de volatilidade, salientando que o sinal do prémio será igual ao sinal do *expected hedging error* (EHE), para o conjunto de modelos de avaliação de opções que consideram a volatilidade como uma variável estocástica, quando a estratégia de cobertura é efectuada num cenário de *continuous trading* e com uma especificação correcta do modelo. Se essas condições ideias não se verificarem, como acontece num estudo empírico, podem ser obtidos resultados incorrectos. Sublinhe-se, contudo, que os autores não desenvolveram qualquer estudo empírico para comprovar as hipóteses formuladas.

Driessen e Maenhout (2004), assim como Jones (2005), também concluíram que a volatilidade era um factor de risco com influência no preço das opções, embora insuficiente para justificar as taxas de rendibilidade obtidas, apontando para a existência de outros factores, como por exemplo, o *jump risk*.

Outros autores têm focalizado a sua análise nas *puts*, utilizadas principalmente na cobertura de riscos, dado apresentarem uma correlação negativa com o mercado, sendo expectável que apresentem um prémio de risco negativo, que deverá atingir um valor elevado com o efeito de alavanca (*leverage effect*) presente nas opções.

É representativo deste tipo de análise, o estudo de Bondarenko (2003) que, para o período de Agosto de 1987 até Dezembro de 2000, apurou taxas de rendibilidade médias mensais de -39% e -95%, respectivamente, para as *puts at-the-money* (ATM) e *puts deeply out-of-the-money*. Deste modo, com uma estratégia de venda de *puts* ATM e OTM qualquer investidor poderia obter lucros extraordinários.

Tendo presente este *overpriced puts puzzle*, ou seja, os preços históricos das *puts* serem demasiado elevados e incompatíveis com os modelos de *asset pricing*, tal como o CAPM e o Modelo de Rubinstein, este autor desenvolveu uma nova metodologia, que não requer assumpções sobre as preferências dos investidores e pode ser aplicada mesmo no caso da amostra seleccionada estar influenciada por factores como o *Peso Problem*[2]. Dos testes efectuados, concluiu-se que não existe outro tipo de modelo que justifique as elevadas taxas de rendibilidade evidenciadas pelas *puts*.

Contudo, Branger e Schlag (2005) argumentam que os resultados obtidos neste estudo empírico podem ser explicados, em parte, pelo *Peso Problem*, tipificando-o em dois tipos: o *peso problem for terminal states* – os eventos são categorizados como raros ou normais dependendo apenas do preço do activo subjacente na data final (S_T); e o *path peso problem* – é considerado o tempo desde *t* (data de avaliação) até *T*, para categorizar os eventos.

[2] O *Peso Problem* descreve a situação em que eventos raros, como por exemplo *crashes*, são antecipados no preço dos activos, mas não ocorrem vezes suficientes na amostra para justificar os preços observados.

Deste modo, para estes autores, o estudo de Bondarenko apenas é válido para o *peso problem for terminal states*, sendo que em presença do *path peso problem* na amostra seleccionada, as *puts* aparentemente estão sobreavaliadas, mas esse facto não invalida que os seus preços possam ser explicados por modelos de avaliação *standard*.

Conforme se pode constatar, existem diversas teorias sobre a aplicabilidade dos modelos de avaliação das opções, em especial do Modelo de Black-Scholes, existindo autores que consideram válidos esses modelos, argumentando que as opções são activos redundantes, enquanto que outros concluíram que os preços observados no mercado diferem substancialmente dos valores obtidos através destes modelos, questionando se não existem outros factores de risco que não são incluídos nestes modelos.

3. Taxas de Rendibilidade Teóricas

3.1. Modelo de Black-Scholes/Merton e CAPM

O Modelo de Black-Scholes deriva o valor de uma opção de forma consistente com o preço do activo subjacente e assumindo um conjunto de restrições, nomeadamente: a taxa de rendibilidade do *underlying* seguir uma distribuição normal; a volatilidade e a taxa de juro serem constantes; e não existirem custos de transacção nem dividendos.

Com base nestes pressupostos, é possível construir uma estratégia de arbitragem dinâmica e sem risco, que consiste na detenção de uma posição longa no activo subjacente e uma posição curta numa *call*, sendo o valor da opção obtido como uma componente desse *hedge portfolio*, dependendo apenas do preço do *spot* (S_t), do tempo em falta para a maturidade (τ) e de variáveis cujo valor é conhecido e constante [taxa de juro sem risco (r); strike (K); e volatilidade (σ)].

Paralelamente, Merton (1973) considerou o efeito dos dividendos no preço das opções, introduzindo a *dividend yield* do activo subjacente (δ) no modelo de avaliação, de acordo com as seguintes fórmulas para as *calls* (c_t) e *puts* (p_t):

$$c_t = S_t e^{-\delta\tau}\Phi(d_1) - Ke^{-r\tau}\Phi(d_2) \tag{1}$$

$$p_t = -S_t e^{-\delta\tau}\Phi(-d_1) + Ke^{-r\tau}\Phi(-d_2) \tag{2}$$

com $$d_1 = \frac{\ln(S_t / K) + (r - \delta + \sigma^2 / 2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad \text{e} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}\,, \tag{3}$$

onde $\Phi(\cdot)$ representa a função distribuição da normal reduzida.

O Modelo de Black-Scholes considera que o valor da opção é uma função determinística do preço do *underlying*, pelo que variações no seu valor estão perfeitamente correlacionadas com alterações no preço da opção. Assim, quando o preço do activo subjacente se altera, o número de opções em carteira também é alterado, de modo a manter o *hedging* da posição.

Neste contexto, se for efectuado o rebalanceamento da carteira de forma contínua, a taxa de rendibilidade do *hedge portfolio* deverá ser igual à taxa de juro sem risco, para que não se verifiquem oportunidades de arbitragem.

Refira-se que, Black e Scholes (1973) além de terem construído este modelo para avaliar as opções, testaram se o modelo era consistente com o CAPM, o qual tem em conta a relação entre o risco (medido através do *beta*) e a rendibilidade esperada de determinado activo, segundo a seguinte fórmula[3]:

$$\mathrm{E}[r_S] = r + \mathrm{E}[r_m - r]\beta_S \tag{4}$$

Assim, a taxa de rendibilidade de determinado activo (r_S) depende da taxa de juro sem risco (r), da taxa de rendibilidade do mercado (r_m) e do *beta* desse activo (β_S). Este último parâmetro corresponde à derivada da taxa de rendibilidade do activo em ordem à taxa de rendibilidade do mercado, ou seja:

$$\beta_S = \frac{\partial r_S}{\partial r_m} = \frac{\partial S / S_t}{\partial r_m} \tag{5}$$

Aplicando esta fórmula a uma *call*, têm-se a seguinte expressão para o seu *beta* (β_c):

$$\beta_c = \frac{\partial r_c}{\partial r_m} = \frac{\partial c / c_t}{\partial r_m} = \frac{\partial c / c_t}{\partial S / S_t}\beta_S = \frac{\partial c}{\partial S} \times \frac{S_t}{c_t} \times \beta_S \tag{6}$$

Tendo em conta que a derivada da *call* em relação ao *spot* (∂c / ∂S) equivale ao *delta* da *call* (ϕ_c), parâmetro que traduz a variação do valor da opção provocada por uma variação instantânea unitária do preço do *underlying*, obtêm-se que:

$$\beta_c = \phi_c \times \frac{S_t}{c_t} \times \beta_S \tag{7}$$

Finalmente, dado que o *delta* da *call* é equivalente, no Modelo de Merton, a $\phi_c = \Phi(d_1)e^{-\delta\tau}$, a fórmula para o cálculo do *beta* será igual a:

[3] Doravante os valores esperados são calculados na *physical probability measure* e não na *risk-neutral probability measure*.

$$\beta_c = \Phi(d_1)e^{-\delta\tau} \times \frac{S_t}{c_t} \times \beta_S \tag{8}$$

Em relação às *puts*, a partir da equação (5), também é possível calcular o seu *beta* (β_p):

$$\beta_p = \frac{\partial r_p}{\partial r_m} = \frac{\partial p / p_t}{\partial r_m} = \frac{\partial p / p_t}{\partial S / S_t}\beta_S = \frac{\partial p}{\partial S} \times \frac{S_t}{p_t} \times \beta_S \tag{9}$$

Dado que, a derivada da *put* em relação ao *spot* (∂p / ∂S) equivale ao *delta* da *put* (ϕ_p), a equação (9) pode ser expressa da seguinte forma:

$$\beta_p = \phi_p \times \frac{S_t}{p_t} \times \beta_S \tag{10}$$

Aplicando a fórmula do *delta* da *put*, que corresponde a $\phi_p = [-\Phi(-d_1)]e^{-\delta\tau}$, à expressão anterior, resulta que:

$$\beta_p = [-\Phi(-d_1)]e^{-\delta\tau} \times \frac{S_t}{p_t} \times \beta_S \tag{11}$$

Na realidade, as opções, como qualquer outro tipo de activo, devem apresentar taxas de rendibilidade concordantes com o risco a que o investidor se encontra sujeito. Neste contexto, Black e Scholes (1973) estabeleceram uma relação entre o *beta* do activo subjacente e o *beta* da opção, concluindo que as opções apresentam valores superiores, dado o efeito de alavanca (*leverage effect*) entre o preço da opção e o do *spot*.

Assim, é expectável que as *calls* apresentem taxas de rendibilidade superiores ao activo subjacente. Por outro lado, em relação às *puts* (geralmente utilizadas na cobertura de riscos sistemáticos), as taxas de rendibilidade esperadas deverão ser inferiores à taxa de juro sem risco.

3.2. Stochastic Discount Factor

As expectativas quanto às taxas de rendibilidade esperadas das *calls* e *puts*, apresentadas no ponto anterior, serviram de base à formulação de dois teoremas, apresentados por Coval e Shumway (2001), que assentam na existência de um factor de desconto estocástico (*stochastic discount factor*), que avalia todos os activos segundo a seguinte relação:

$$\mathrm{E}\left[R_i m\right] = 1 \tag{12}$$

em que, o valor esperado do rendimento bruto de qualquer activo (R_i) multiplicado pelo *stochastic discount factor* (m) é igual a 1.

Assim, partindo da hipótese de que o *stochastic discount factor* é negativamente correlacionado com o preço de determinado activo (não sendo plausível a existência no mercado de um factor de desconto estocástico com uma correlação positiva), comprova-se que as *calls* sobre esse activo terão taxas de rendibilidade esperadas acima do seu preço e crescentes com o *strike*, de acordo com o seguinte teorema:

TEOREMA 1: Se o stochastic discount factor for negativamente correlacionado com o preço de um activo, as calls sobre esse activo apresentam rendibilidades esperadas positivas e crescentes com o strike.

Neste contexto, o valor esperado do rendimento bruto de uma *call* (R_c) com determinado strike (K), desde o momento zero até à sua maturidade, pode ser expresso da seguinte forma:

$$\mathrm{E}\left[R_c(K)\right] = \frac{\int_{K}^{+\infty} (S-K)\, f(S)\, \partial S}{\int_{0}^{+\infty}\int_{K}^{+\infty} q(S-K)\, f(S,q)\, \partial S \partial q} \tag{13}$$

com *f(y)* a representar a função densidade do preço do *underlying* e *f(y,m)* a função densidade conjunta do preço do *underlying* e do *stochastic discount factor* (m).

Considerando que o valor esperado do rendimento líquido da *call* será equivalente a:

$$\mathrm{E}\left[r_c(K)\right] = \mathrm{E}\left[R_c(K)\right] - 1 \tag{14}$$

e conjugando esta fórmula com a equação (13), obtém-se que o valor esperado do rendimento líquido da *call* será igual a:

$$\mathrm{E}\left[r_c(K)\right] = \frac{\int_K^{+\infty}(S-K)\left[1-\mathrm{E}\left(m|S\right)\right]f(S)\partial S}{\int_K^{+\infty}(S-K)\mathrm{E}\left(m|S\right)f(S)\partial S} \tag{15}$$

A derivada desta equação em ordem ao *strike* corresponderá a:

$$\partial \mathrm{E}\left[r_c(K)\right]/\partial K =$$

$$\frac{\int_K^{+\infty}(S-K)f(S)\partial S \times \int_K^{+\infty}\mathrm{E}\left(m|S\right)f(S)\partial S - \int_K^{+\infty}(S-K)\mathrm{E}\left(m|S\right)f(S)\partial S \times \int_K^{+\infty}f(S)\partial S}{\left[\int_K^{+\infty}(S-K)\mathrm{E}\left(m|S\right)f(S)\partial S\right]^2}. \tag{16}$$

Por último, considerando a função densidade cumulativa F(S) correspondente a $f(S)$, a equação anterior poderá ser representada por:

$$\frac{\int_K^{+\infty}(S-K)\frac{f(S)}{1-F(K)}\partial S \times \int_K^{+\infty}\mathrm{E}\left(m|S\right)\frac{f(S)}{1-F(K)}\partial S - \int_K^{+\infty}(S-K)\mathrm{E}\left(m|S\right)\frac{f(S)}{1-F(K)}\partial S}{\left[\int_K^{+\infty}(S-K)\mathrm{E}\left(m|S\right)\frac{f(S)}{1-F(K)}\partial S\right]^2}. \tag{17}$$

Tendo em conta que a covariância entre dois activos corresponde a:

$$Cov(x,y) = \mathrm{E}(xy) - \mathrm{E}(x)\mathrm{E}(y) \tag{18}$$

conclui-se que o numerador da equação (17) representa o valor negativo da covariância entre (S - K) e m, condicionado ao facto da *call* estar *in-the-money* ($S > K$):

$$-Cov\left[\mathrm{E}\left(m|S\right), S-K|S>K\right] = \mathrm{E}\left[m|S>K\right] \times \mathrm{E}\left[S-K|S>K\right] - \mathrm{E}\left[\mathrm{E}(m|S)(S-K)|S>K\right] \tag{19}$$

Deste modo, para qualquer m negativamente correlacionado com o preço do activo, a equação anterior assumirá um valor positivo, pelo que a derivada do valor esperado do rendimento líquido da opção em ordem ao *strike* ($\partial \mathrm{E}\left[r_c(K)\right]/\partial K$) será superior a zero.

Neste sentido, pode-se concluir que para qualquer *call* cujo activo subjacente seja negativamente correlacionado com o *stochastic discount factor*, a sua taxa de rendibilidade será positiva e crescente com o *strike*. Dada esta tendência crescente com o *strike*, a taxa de rendibilidade da *call* será superior à do activo subjacente se o *strike* for maior que zero ($K > 0$), sendo iguais apenas no caso do *strike* assumir um valor nulo ($K = 0$).

Relativamente às *puts*, mantendo a hipótese da existência de um *stochastic discount factor* negativamente correlacionado com o preço de determinado activo, Coval e Shumway (2001) definiram o seguinte teorema:

TEOREMA 2: Se o stochastic discount factor for negativamente correlacionado com o preço de um activo, as puts sobre esse activo apresentam rendibilidades esperadas inferiores à taxa de juro sem risco e crescentes com o strike.

O valor esperado do rendimento líquido de uma *put* (r_p) com determinado *strike* (K), sendo *f(y)* a função densidade do preço do *underlying* e *f(y,m)* a função densidade conjunta do preço do *underlying* e do *stochastic discount factor* (m), será igual a:

$$\mathrm{E}\left[r_p(K)\right] = \frac{\int_0^K (K-S)\left[1-\mathrm{E}\left(m \middle| S\right)\right] f(S)\partial S}{\int_0^K (K-S)\mathrm{E}\left(m \middle| S\right) f(S)\partial S}. \tag{20}$$

Considerando a derivada desta equação em ordem ao *strike*, obtém-se a seguinte expressão:

$$\partial \mathrm{E}\left[r_p(K)\right] / \partial K =$$

$$\frac{\int_0^K (K-S)\mathrm{E}\left(m \middle| S\right) f(S)\partial S \times \int_0^K f(S)\partial S - \int_0^K (K-S) f(S)\partial S \times \int_0^K \mathrm{E}\left(m \middle| S\right) f(S)\partial S}{\left[\int_0^K (K-S)\mathrm{E}\left(m \middle| S\right) f(S)\partial S\right]^2} \tag{21}$$

cujo numerador é proporcional à covariância entre ($K - S$) e m, condicionado ao facto da *put* estar *in-the-money* ($S < K$).

A covariância será assim representada pela seguinte expressão:

$$Cov\left[\mathrm{E}(m|S), K-S \middle| S<K\right] = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}(m|S)(K-S) \middle| S<K\right] - \mathrm{E}\left[m \middle| S<K\right] \times \mathrm{E}\left[K-S \middle| S<K\right] \tag{22}$$

que assumirá um valor positivo para qualquer *m* negativamente correlacionado com o preço do activo.

Assim, tendo em conta que: ***i)*** uma *put* com um valor do *strike* infinito apresenta uma taxa de rendibilidade esperada igual à taxa de juro sem risco; e ***ii)*** a taxa de rendibilidade é uma função crescente do *strike* (a derivada do valor esperado do rendimento líquido da *put* em ordem ao *strike* é maior do que zero), conclui-se que a taxa de rendibilidade esperada para uma *put* será inferior à taxa de juro sem risco.

Em termos teóricos, ao contrário das *calls* em que se pode afirmar que a taxa de rendibilidade será sempre positiva, no caso das *puts* a sua taxa de rendibilidade pode ser positiva ou negativa, dependendo do valor do *strike*.

3.3. Zero-Beta Straddle

A questão das taxas de rendibilidade das opções pode ser abordada numa outra vertente, ou seja, excluindo da análise o *leverage effect*, presente nos *betas* das *calls* e das *puts*, tendo-se para o efeito considerado uma carteira de *straddles* com um *market beta* igual a zero (*zero-beta straddles*).

Refira-se que, um *straddle* consiste na conjugação de uma *call* e uma *put* com iguais *strike* e data de maturidade, sendo uma estratégia que aposta em variações na volatilidade do *underlying*. Assim, para o investidor não é relevante se o preço do activo subjacente vai aumentar ou diminuir, mas sim a amplitude da sua variação e a volatilidade associada, uma vez que a rendibilidade de um *straddle* depende da volatilidade do mercado e não das taxas de rendibilidade do mercado.

Neste contexto, quando a volatilidade é suficientemente elevada, o *straddle* obterá taxas de rendibilidade positivas; caso contrário a taxa de rendibilidade será negativa.

Esta estratégia permite ao investidor efectuar a cobertura de risco de volatilidade (*volatility risk*), dado que num cenário em que a volatilidade aumenta o investidor obtém um *payoff* positivo. Neste sentido, um *straddle* pode ser considerado um activo de baixo risco, devendo apresentar *betas* positivos.

Efectivamente, o estudo das taxas de rendibilidade dos *straddles* e, especificamente, dos *zero-beta straddles* tem sido abordado por vários autores, nomeadamente para testar a hipótese de as opções serem *redundant securities*, assim como na análise da consistência dos preços observados no mercado com os preços obtidos por modelos de avaliação, com especial atenção para o Modelo de Black-Scholes.

Neste contexto, formulou-se a seguinte proposição sobre a taxa de rendibilidade teórica de um *zero-beta straddle*:

PROPOSIÇÃO 1: Uma carteira de straddles com beta igual a zero (zero-beta straddles) deve apresentar uma taxa de rendibilidade esperada igual à taxa de juro sem risco.

Tendo em consideração o modelo CAPM, a taxa de rendibilidade de um *zero-beta straddle* (r_{cp}) será determinada através da resolução das seguintes equações ($\omega \in \Re$):

$$\omega\beta_c + (1-\omega)\beta_p = 0 \tag{23}$$

$$r_{cp} = \omega r_c + (1-\omega) r_p \tag{24}$$

Deste modo, a taxa de rendibilidade do *zero-beta straddle* (r_{cp}) irá depender das taxas de rendibilidade da *call* (r_c) e da *put* (r_p), na proporção (ω) dos seus *betas*, de forma a que se verifique a condição de que o *beta* da carteira seja igual a zero.

Resolvendo a equação (23) em ordem a ω, obtém-se que:

$$\omega = \frac{-\beta_p}{\beta_c - \beta_p} \tag{25}$$

Refira-se que, o *beta* da *call* (β_c) e o *beta* da *put* (β_p) utilizados na determinação do parâmetro ω, foram calculados de acordo com as equações (8) e (11), respectivamente.

Dadas as características de um *zero-beta straddle*, para que a sua rendibilidade seja diferente da taxa de juro sem risco, é necessário existirem, teoricamente, outros factores, além do risco de mercado do activo subjacente, que influenciem o preço das opções, no qual se inclui o risco de volatilidade. Efectivamente, no caso de existir um prémio de risco da volatilidade, a taxa de rendibilidade esperada do *zero-beta straddle* será inferior à taxa de juro sem risco.

4. Descrição dos Dados e Metodologia Adoptada

Com o objectivo testar as hipóteses formuladas sobre as taxas de rendibilidade das opções, seleccionou-se os contratos sobre o Índice S&P 500 (SPX) transaccionados na CBOE, dado apresentarem maior liquidez comparativamente com opções sobre outros índices.

Em termos das principais características das opções sobre o Índice S&P 500, refiram-se os seguintes aspectos:

- Neste tipo de contrato, o exercício da opção ocorre na data de maturidade (opções europeias), o que permite a aplicação do Modelo de Black-Scholes/Merton na sua avaliação;
- A *expiration date* ocorre no Sábado seguinte à terceira Sexta-feira de cada mês, existindo opções com maturidade em todos os meses do ano;
- Os *strikes* são definidos em intervalos de 5 pontos, embora para as opções com vencimento mais distante, os intervalos sejam de 25 pontos.

O trabalho realizado teve como suporte uma base de dados fornecida pela CRB (Commodity Research Bureau), para um período de 9 anos, de Janeiro de 1996 a Dezembro de 2004. No cálculo das taxas de rendibilidade semanais para as *calls* e *puts* considerou-se o *settlement price*, uma vez que é menor a probabilidade de ocorrerem erros no seu registo e raramente violam as restrições de não-arbitragem, contrariamente aos preços de fecho que, em geral, são menos fiáveis, conforme é citado por Bondarenko (2003)[4].

A metodologia adoptada consistiu na selecção das opções com data de exercício no mês seguinte à data de cálculo da taxa de rendibilidade, ou seja, com vencimento entre 30 a 60 dias, uma vez que apresentam maior liquidez, conclusão também referenciada por Buraschi e Jackwerth (2001). Esta solução tem sido seguida por vários autores, nomeadamente por Bakshi e Kapadia (2003) que eliminaram da análise as opções com maturidade inferior a 14 dias e superior a 60 dias, por Driessen e Maenhout (2003) que focalizaram a sua análise nas opções com data de vencimento entre 3 a 8 semanas, e por Vaden (2004) que para o cálculo da rentabilidade no mês n identificou as opções com vencimento em $n+1$.

[4] Bondarenko (2003, p. 24) salienta que "Settlement prices (as opposed to closing prices) do not suffer from nonsynchronous/stale trading of options and the bid-ask spreads".

A rendibilidade foi calculada com as cotações registadas em cada Terça-feira, tendo sido excluídos os dias em que não se registaram transacções (feriados ocorridos nesse dia da semana). Saliente-se que, a fórmula de cálculo utilizada corresponde à taxa de rendibilidade aritmética $(S_n / S_{n-1} - 1)$, em vez da taxa de rendibilidade geométrica $(\ln[S_n / S_{n-1}])$, habitualmente considerada para activos financeiros (acções, índices). Esta escolha deveu-se ao facto de a aplicação de logaritmos nas opções resultar, nalgumas situações, em valores infinitos (*puts*) ou bastante inferiores aos que seriam obtidos caso fossem calculadas as taxas de rendibilidade aritméticas.

Refira-se a título de exemplo, uma *call* com vencimento em Março de 2004 e *strike* de 1100, cuja taxa de rendibilidade aritmética é de 3,91% (semanal), comparativamente a uma taxa de rendibilidade geométrica de 0,85%. No caso da *put* com o mesmo *strike* e data de vencimento, as taxas aritmética e geométrica seriam, respectivamente, -7,4% e -12,6%.

Esta abordagem já tinha sido seguida por Coval e Shumway (2001), embora, estes autores, para além de apresentarem as taxas de rendibilidade semanais também extrapolaram os resultados para obter taxas anuais, multiplicando os valores por 52 (número de semanas num ano). Este procedimento resulta em estimativas, para a taxa de rendibilidade anual, extremamente enviesadas em activos com volatilidade significativa. Por exemplo, um crescimento de 30% seguido duma descida de igual percentagem, resulta numa rendibilidade média de 0%, embora, efectivamente, tenha ocorrido uma perda de 9% entre os dois períodos. Se tivermos em consideração que a volatilidade apresentada pelas opções é bastante superior a outro tipo de activos, concluímos que a extrapolação das taxas de rendibilidade semanais para anuais não se traduz em estimativas adequadas.

Para a apresentação dos resultados agregaram-se as rendibilidades em seis grupos, de acordo com a diferença entre o *strike* e o *spot*. Sublinhe-se que, a definição dos intervalos teve em consideração o objectivo de obter apenas uma cotação para cada intervalo, pelo que se manteve a variação de 5 pontos existente nos *strikes*.

Neste sentido, comparou-se o *strike* das opções com o preço de fecho do Índice S&P 500 (*underlying* das opções analisadas), de forma a identificar, em cada semana, os contratos que respeitavam os intervalos. Nos casos em que não existia um valor para a opção com vencimento mais próximo, procurou-se se na maturidade seguinte existia um preço, de forma a obter uma série histórica mais completa. Contudo, mesmo com esta solução de recurso, para algumas semanas não foi possível obter cotações para as opções que respeitavam os intervalos definidos, pelo que se decidiu considerar uma taxa de rendibilidade de -100%, à semelhança do que foi utilizado por Coval e Shumway (2001, p. 991). Esta situação ocorreu, nomeadamente quando se registaram grandes variações no Índice S&P 500, originando a selecção de opções que se encontravam na semana anterior *deeply out-of-the-money* e com reduzida liquidez.

Para complementar a análise, apurou-se o *beta* para as *calls* e *puts*, com recurso às fórmulas apresentadas nas equações (8) e (11), para cada um dos intervalos definidos. Neste âmbito, foi necessário obter/estimar alguns parâmetros, nomeadamente a volatilidade, a *dividend yield*, a taxa de juro sem risco e o tempo em falta para a maturidade de cada opção.

Relativamente à *dividend yield* (δ), recorreu-se à cotação dos futuros sobre o Índice S&P 500, através do modelo *cash-and-carry*, sendo F_t a cotação diária do contrato de futuro e S_t a do Índice S&P 500:

$$F_t = S_t e^{(r-\delta)\tau} \tag{26}$$

O parâmetro "*r*" corresponde à *Libor* a 3 meses, observada diariamente no mercado, não tendo sido utilizada uma taxa correspondente ao tempo (τ) para a maturidade do contrato do futuro, dadas as dificuldades acrescidas nos cálculos a efectuar, cujo benefício na estimação da *dividend yield* poderia não ser significativo.

Deste modo, para o período em análise, obteve-se uma *dividend yield* média de 2,2% (taxa anual).

No que respeita à volatilidade, optou-se por utilizar a *implied volatility*, que consiste na obtenção da volatilidade através do preço das opções observado no mercado. Neste contexto, para o período em análise, apurou-se a volatilidade para as *calls* e *puts*, através do Modelo de Merton, com base nas cotações observadas em cada semana, na *dividend yield* apurada e na taxa de juro sem risco (utilizada no cálculo da *dividend yield*), ambas em regime de capitalização contínua.

Dado que *a implied volatility* é uma função decrescente do *strike*, a volatilidade obtida para as *calls in-the-money* (ITM) e para as *puts out-of-the-money* (OTM) é superior à calculada para as *calls* OTM e para as ITM, variando entre 21,87% e 20,39% nas *calls* e entre 20,40% e 19,17% nas *puts*.

5. Resultados Empíricos

Para o período em análise, apresentam-se, seguidamente, as taxas de rendibilidade semanais apuradas para as *calls* e *puts*, assim como para o Índice S&P 500. Em complemento, evidenciam-se os *betas* apurados, a *implied volatility*, a *skew* e a *kurtosis* para cada um dos intervalos definidos, permitindo, deste modo, analisar as diferentes variáveis para as opções ATM, ITM e OTM.

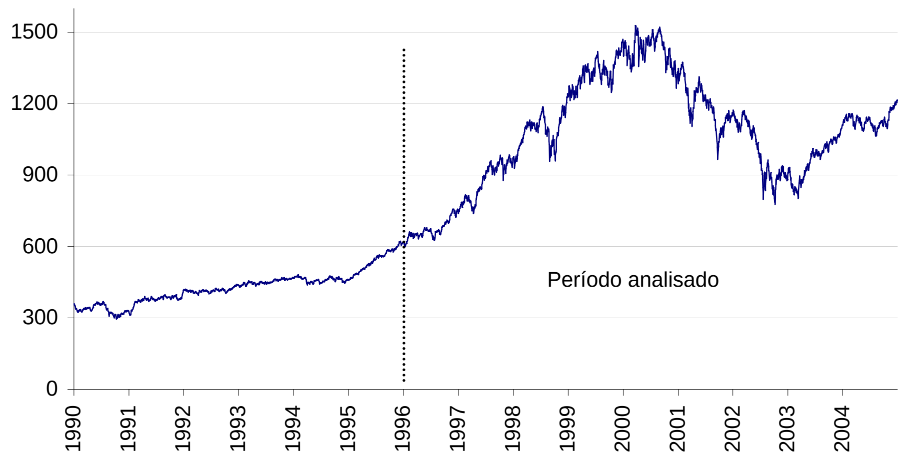
Sublinhe-se que, o presente estudo incidiu sobre um período mais longo, de 1996 a 2004 (9 anos), do que o apresentado por Coval e Shumway (2001), que apenas abrangeu as cotações de Janeiro de 1990 a Outubro de 1995 (6 anos).

Por outro lado, conforme se evidencia no gráfico infra, a volatilidade registada pelo Índice S&P 500 até 1995 foi bastante inferior à verificada nos anos seguintes, o que torna ainda mais relevante a análise efectuada, de forma a comprovar se as afirmações efectuadas por estes autores se mantêm válidas num período de maior volatilidade.

Gráfico 1

Cotações do Índice S&P 500

Este gráfico apresenta as cotações diárias do Índice S&P 500 entre Janeiro de 1990 a Dezembro de 2004, tendo sido objecto de análise o período de Janeiro de 1996 a Dezembro de 2004.



O Índice S&P 500 registou, no período analisado (de 1996 a 2004), em média, uma taxa de rendibilidade semanal de 0,18%, percentagem inferior à verificada entre 1990 e

1995 (0,19%), embora o desvio-padrão semanal se tenha situado em valores bastante superiores de, respectivamente, 2,63% e 1,63%, representando um crescimento de 61%.

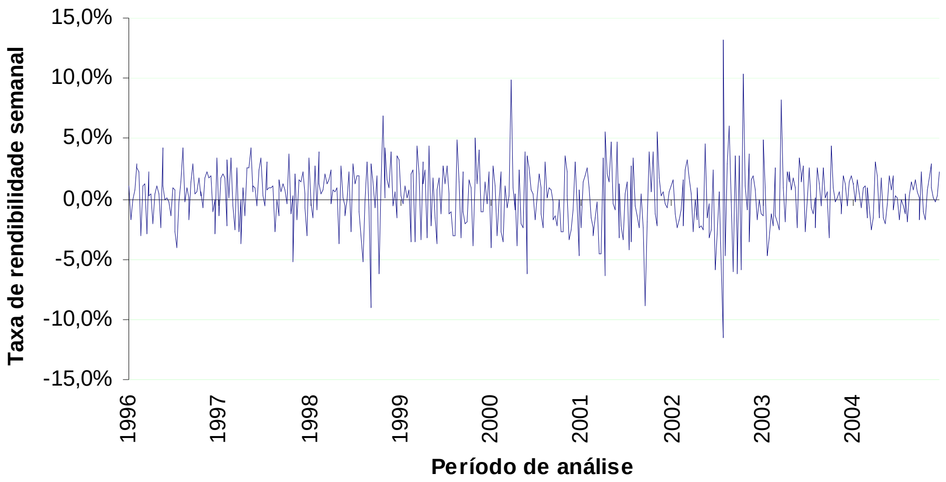
A mediana da amostra seleccionada ascendeu a 0,39%, com uma taxa de rendibilidade semanal mínima de -11,47% e uma máxima de 13,17%, enquanto no estudo de Coval e Shumway (2001) o intervalo de variação se fixou entre -5,39% e 6,05%.

Estes movimentos extremos ocorreram nas duas últimas semanas de Julho de 2002, conforme se pode verificar pela análise do gráfico seguinte, no qual se apresentam as taxas de rendibilidade semanais observadas pelo Índice S&P 500.

Gráfico 2

Taxas de Rendibilidade do Índice S&P 500

O gráfico infra apresenta as taxas de rendibilidade semanais do Índice S&P 500 entre Janeiro de 1996 a Dezembro de 2004, considerando as cotações observadas em cada Terça-Feira.



Na realidade, no segundo semestre de 2002 atingiu-se um desvio-padrão semanal de 5,22%, com uma taxa de rendibilidade semanal negativa de -0,25%, não tendo sido possível obter neste período cotações para todos os *strikes* que respeitavam os intervalos definidos.

5.1. Taxas de Rendibilidade das Calls

Relativamente à taxa de rendibilidade das *calls*, na tabela seguinte apresentam-se os valores médios semanais, apurados entre Janeiro de 1996 e Dezembro de 2004, para um total de 460 semanas. As taxas de rendibilidade foram agrupadas em intervalos de 5 em 5 pontos, com um mínimo de -15 e um máximo de 15 pontos, tendo em conta a diferença entre o *strike* (K) e o *spot* (S).

Tabela 1

Taxas de Rendibilidade Semanais das SPX *Calls*

A tabela seguinte apresenta as taxas de rendibilidade semanais das *calls* sobre o Índice S&P 500, entre Janeiro de 1996 a Dezembro de 2004, considerando os preços observados em cada Terça-Feira, num total de 460 semanas. São reportados os valores relativos ao desvio-padrão, à mediana, à taxa máxima e mínima observada, à *skew* e à *kustosis*. Os intervalos (K-S) foram definidos tendo em conta a diferença entre o *strike* (K) da opção e o preço do activo subjacente (S). O *beta* foi calculado com base na equação (8) e a *implied volatility* a partir do Modelo de Merton.

(K-S)	-15 a -10	-10 a -5	-5 a 0	0 a 5	5 a 10	10 a 15
Rentabilidade média	-0,150%	3,50%	3,51%	5,62%	6,29%	9,48%
Desvio-padrão médio	60,47%	67,25%	62,55%	78,68%	73,38%	100,84%
Mediana	-1,72%	-2,17%	-1,40%	-2,65%	-3,15%	-4,59%
Mínimo	-66,51%	-67,30%	-76,54%	-81,67%	-87,28%	-86,64%
Máximo	399,21%	655,56%	458,00%	1108,82%	584,38%	1261,54%
Skew	1,698	3,304	1,939	6,758	3,199	6,690
Kurtosis	8,970	25,725	9,802	86,454	18,128	67,753
Beta (β) médio	16,61	17,53	18,41	19,36	20,22	21,55
Implied Volatility	21,87%	21,41%	21,22%	20,90%	20,79%	20,39%

Com excepção das *calls deeply in-the-money* que registaram, em média, uma rendibilidade negativa de 0,15%, para os restantes casos as taxas de rentabilidade semanais foram positivas, variando entre 3,50% e 9,48%, superando a *performance* alcançada pelo Índice S&P 500 (0,18%). Paralelamente, verificou-se a existência de uma tendência crescente das taxas apuradas em cada intervalo, à medida que o *strike* aumentava, comprovando, assim, as hipóteses formuladas no **Teorema 1**.

Sublinhe-se que, estes valores são superiores aos reportados por Coval e Shumway (2001), que tinham apurado taxas semanais entre 1,48% e 4,13%.

Em relação às opções *deeply out-of-the-money*, a rendibilidade calculada é bastante elevada (9,48%), situação que pode estar associada a uma menor liquidez deste tipo de *calls*, sendo neste intervalo que se atinge um desvio-padrão médio mais elevado (superior a 100%).

No caso das *calls at-the-money*, constatou-se que as opções com um *strike* até 5 pontos acima do *spot* apresentavam um diferencial positivo de 2,11% face às *calls* com um *strike* até 5 pontos abaixo do *spot*, percentagem que se pode considerar significativa, sendo que o desvio-padrão no intervalo de 0 a 5 pontos é também bastante superior (78,68% face 62,55%).

Em termos de medidas estatísticas, a mediana (corresponde ao valor que divide a distribuição em duas partes iguais), para qualquer dos intervalos, é negativa, variando entre -1,72% e -4,59%, sendo inferior à média. Assim, as distribuições são enviesadas à esquerda, ou seja, pelo menos 50% das observações situam-se abaixo da média, conforme é comprovado pelos valores da *skew*, que são sempre positivos, atingindo um máximo de 6,758. Paralelamente, a *kurtosis* indica que as séries de taxas de rendibilidade das opções se afastam de forma significativa de uma distribuição normal (*kurtosis* igual a 3), uma vez que o valor mais baixo observado é de 8,97.

No que respeita, aos valores máximo e mínimo das distribuições, verificou-se que o mínimo de cada intervalo seguia uma tendência decrescente com o *strike* (de -66,51%, para as opções *deeply in-the-money*, até -86,64%, para as *deeply out-of-the-money*), situação que não se aplicava ao máximo observado, dado não demonstrar qualquer tendência face ao preço de exercício.

Relativamente ao *beta*, apuraram-se valores médios entre 16,61 a 21,55, sendo, tal como seria expectável, uma função crescente do *strike*, embora sem evidenciar um grande diferencial, contrariamente ao referido por Coval e Shumway (2001), que apontavam para *betas* entre 21,14 e 55,72.

A *implied volatility* (IV), tal como foi referido anteriormente, estimou-se a partir das cotações observadas no mercado, existindo um diferencial de 1,48% entre as opções *deeply out-of-the-money* e as *deeply in-the-money*.

5.2. Taxas de Rendibilidade das Puts

Em relação às *puts*, foi aplicada a mesma metodologia no cálculo das taxas de rendibilidade, apresentando-se na Tabela 2 os resultados obtidos.

Tabela 2

Taxas de Rendibilidade Semanais das SPX Puts

A tabela seguinte apresenta as taxas de rendibilidade semanais das *puts* sobre o Índice S&P 500, entre Janeiro de 1996 a Dezembro de 2004, considerando os preços observados em cada Terça-Feira, num total de 460 semanas. São reportados os valores relativos ao desvio-padrão, à mediana, à taxa máxima e mínima observada, à *skew* e à *kustosis*. Os intervalos (K-S) foram definidos tendo em conta a diferença entre o *strike* (K) da opção e o preço do activo subjacente (S). O *beta* foi calculado com base na equação (11) e a *implied volatility* a partir do Modelo de Merton.

(K-S)	-15 a -10	-10 a -5	-5 a 0	0 a 5	5 a 10	10 a 15
Rentabilidade média	-8,78%	-9,02%	-7,93%	-5,38%	-6,97%	-6,94%
Desvio-padrão médio	50,82%	47,38%	54,47%	53,76%	53,37%	53,91%
Mediana	-16,75%	-16,53%	-14,04%	-12,95%	-12,50%	-11,21%
Mínimo	-82,80%	-81,60%	-88,98%	-86,40%	-77,01%	-82,20%
Máximo	271,13%	215,79%	414,70%	328,33%	328,57%	401,71%
Skew	1,261	0,834	1,968	1,392	1,332	1,373
Kurtosis	4,046	2,050	10,909	4,883	5,743	7,732
Beta (β) médio	-20,70	-20,41	-20,15	-19,59	-19,03	-18,51
Implied Volatility	20,42%	20,04%	19,56%	19,42%	19,31%	19,17%

Deste modo, conforme se pode constatar, as taxas de rendibilidade semanais das *puts* são negativas para qualquer dos intervalos, variando entre -9,02% e -5,38%. Sublinhe-se, no entanto, que as taxas de rendibilidade apuradas não têm um comportamento linear com a variação do *strike*, dado que as *puts* ITM (com perdas entre -6,97% a -6,94%) apresentam valores superiores às opções ATM no intervalo de 0 a 5 pontos (-5,38%). Por outro lado, as *puts deeply out-of-the-money* registaram uma perda semanal inferior à das *puts* OTM, respectivamente -8,78% e -9,02%.

Neste sentido, contrariamente às *calls*, os resultados obtidos divergem da proposição apresentada inicialmente, na qual se assumia que a taxa de rendibilidade das *puts* deveria aumentar à medida que o *strike* fosse maior. Contudo, em relação à hipótese das *puts* apresentarem rendibilidades inferiores à taxa de juro sem risco, esta é integralmente comprovada, dado se terem apurado rendibilidades negativas em qualquer dos intervalos definidos.

O desvio-padrão médio semanal obtido rondou, em média, os 50%, sendo inferior ao reportado para as *calls*, indicando uma menor volatilidade nas taxas de rendibilidade das *puts*.

Relativamente à mediana, as percentagens apuradas em cada intervalo seguiam uma tendência crescente com o *strike*, facto que não se verificou nas *calls*. Esta medida estatística, complementada com os valores mínimos e máximos obtidos em cada distribuição, indica uma *skew* positiva (em média de 1,3). Realce-se, no entanto, que tanto a *skew* como a *kurtosis* são inferiores e menos oscilantes do que as das *calls*.

O *beta*, calculado através da equação (11), assume valores negativos, variando entre -20,7 e -18,51 à medida que o preço de exercício das *puts* aumenta. Também neste caso, se apuraram *betas* inferiores aos reportados por Coval e Shumway (2001), que apontavam para valores entre -37,53 a -26,53.

No que respeita à *implied volatility*, as opções *deeply out-of-the-money* evidenciaram uma percentagem de 20,42%, superior em 1,25% à IV das *puts deeply in-the-money*, demonstrando a tendência crescente que, normalmente, esta medida apresenta.

5.3. Taxas de Rendibilidade dos Zero-Beta Straddles

Tendo em consideração os resultados reportados nos pontos anteriores, verifica-se que o *leverage effect* está presente nas taxas de rendibilidade obtidas, dado que as *calls* apresentavam rendibilidades bastante superiores às do activo subjacente, enquanto que as *puts* obtinham *performances* negativas e, por conseguinte, inferiores à taxa de juro sem risco.

Neste sentido, de forma a eliminar da análise o *leverage effect*, implícito nos *betas* das opções, foram calculadas as taxas de rendibilidade de um *portfolio*, constituído por *zero-betas straddles*, aplicando-se a equação (24).

Tendo em conta as características de um *zero-beta straddle*, de acordo com o Modelo Merton/CAPM, esta estratégia deveria obter taxas de rendibilidade médias iguais à taxa de juro sem risco.

Assim, com o objectivo de testar esta hipótese, em cada semana, foi calculado o parâmetro ω (que corresponde à proporção da *call* no *straddle*), através da equação (25), ou seja, efectuou-se o rebalanceamento do *straddle* semanalmente, mantendo a linha de orientação seguida no cálculo das taxas de rendibilidade das *calls* e *puts*. Neste âmbito, foi também necessário determinar os *betas* das opções em cada semana, tendo em conta os preços observados no mercado, tendo-se recorrido às equações (8) e (11).

Na Tabela 3, apresentam-se as taxas de rendibilidade para o período em análise, tendo em conta os intervalos definidos para a apresentação das rendibilidades das *calls* e *puts*, assim como as diversas medidas estatísticas (mediana, mínimo e máximo).

Tabela 3

Taxas de Rendibilidade Semanais dos *Zero-Beta Straddles*

A tabela infra apresenta as taxas de rendibilidade semanais de uma carteira constituída por *zero-beta straddles*, entre Janeiro de 1996 a Dezembro de 2004, considerando o rebalanceamento semanal das posições. São reportados os valores relativos ao desvio-padrão, à mediana, à taxa máxima e mínima observada. Os intervalos (K-S) foram definidos tendo em conta a diferença entre o *strike* (K) da opção e o preço do activo subjacente (S).

(K-S)	-15 a -10	-10 a -5	-5 a 0	0 a 5	5 a 10	10 a 15
Rentabilidade média	-3,44%	-1,32%	-2,69%	-2,12%	-2,81%	-5,84%
Desvio-padrão médio	32,01%	36,02%	28,33%	30,33%	34,80%	37,01%
Mediana	-0,94%	-1,81%	-2,22%	-2,11%	-1,63%	-2,29%
Mínimo	-88,28%	-80,55%	-85,69%	-81,79%	-64,58%	-86,64%
Máximo	191,50%	321,25%	196,47%	200,00%	246,02%	319,55%

Tal como se pode observar, em qualquer dos intervalos, a taxa de rendibilidade média semanal dos *zero-beta straddles* é negativa, variando entre -5,84% e -1,32%. Estes resultados não são díspares dos obtidos por Coval e Shumway (2001), que apontavam para perdas semanais entre -4,49% e -2,89%, mesmo tendo em conta a utilização de diferentes parâmetros, nomeadamente a volatilidade (estes autores recorreram ao Índice VIX divulgado pela CBOE, enquanto no presente estudo se optou por calcular a *implied volatility* através do Modelo de Merton).

Relativamente às medidas estatísticas, a mediana também é negativa em todos os intervalos, com valores próximos aos reportados para as *calls*. Quanto aos valores mínimos e máximos, estes são bastantes elevados, à semelhança dos apresentados para as *calls* e *puts*.

Perante os resultados obtidos, conclui-se que se um investidor tivesse investido numa carteira de *zero-beta straddles*, a taxa de rendibilidade obtida seria negativa, contrariamente à expectativa de obter uma rendibilidade próxima da taxa de juro sem risco.

Neste contexto, para além do risco de mercado (medido através do *beta*), concluiu-se que existe outro tipo de riscos que influencia o preço das opções e se traduzem num prémio de risco sobre o valor da *call* ou da *put*.

Tendo presente a possibilidade de existir um prémio de risco associado à volatilidade que justifique as taxas de rendibilidade negativas obtidas na carteira de *zero-beta straddles*, centrou-se a análise no parâmetro *vega* do Modelo de Merton.

O *vega* (Λ) traduz a variação do valor da opção induzida por um aumento de 1% da volatilidade do preço do activo subjacente, atingindo nas opções *at-the-money* um valor positivo e relativamente grande, enquanto nas opções *out-of-the-money* e *in-the-money* tende para zero.

Assim, tendo por base o Modelo de Merton, foram calculados os *vegas* das *calls* (Λ_c) e das *puts* (Λ_p), através da seguinte fórmula:

$$\Lambda = S_t e^{-\delta\tau} \Phi'(d_1)\sqrt{\tau} \, , \qquad (27)$$

sendo

$$\Phi'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(d_1)^2/2} \qquad (28)$$

Em seguida, considerando como referência a carteira de *zero-beta straddles* utilizada anteriormente, calculou-se o ganho obtido em cada semana para o período em análise, correspondendo à diferença entre a taxa de rendibilidade semanal da carteira de opções (r_t) e a taxa de juro sem risco (r), assim como o *vega* do *zero-beta straddle* (Λ_t).

Com estes elementos, foi definido o seguinte modelo de regressão linear, utilizando o critério dos "mínimos quadrados ordinários" (OLS), de forma a testar se efectivamente o risco de volatilidade é uma variável explicativa dos ganhos (perdas) obtidos na carteira de *zero-beta straddles*:

$$r_t - r = \Psi_0 + \Psi_1 \Lambda_t + e_t \qquad (29)$$

Dado que a expressão $e^{-(d_1)^2/2}$ atinge o valor máximo quando o *strike* é igual ao *spot* (*at-the-money*), o prémio de risco de volatilidade será negativo ou positivo quando, respectivamente, $\Psi_1 < 0$ ou $\Psi_1 > 0$. Por outro lado, quando $\Psi_1 = 0$ (hipótese nula), o risco de volatilidade não é um factor explicativo da taxa de rendibilidade das opções.

Neste contexto, considerando para a regressão linear a totalidade das taxas de rendibilidade apuradas na carteira de *zero-beta straddles*, o coeficiente da regressão Ψ_1

obtido é negativo (-0,077) e estatisticamente significativo (*t-statistic* de -4,605), confirmando, assim, que o risco de volatilidade é uma variável explicativa dos ganhos (perdas) verificados na carteira de opções, sendo confirmada a hipótese de, efectivamente, o prémio de risco da volatilidade ser negativo.

Para além desta análise em termos globais, foi aplicado o mesmo modelo de regressão linear a cada um dos intervalos definidos anteriormente na apresentação das taxas de rendibilidade das opções, tendo em consideração a diferença entre o *strike* (K) e o *spot* (S). Na tabela seguinte apresentam-se os parâmetros estimados.

Tabela 3

Modelo de Regressão Linear

A tabela seguinte apresenta os coeficientes da regressão (Ψ_0 e Ψ_1) considerando um total de 460 semanas, para os diferentes intervalos (K-S), que foram definidos tendo em conta a diferença entre o *strike* (K) da opção e o preço do activo subjacente (S). Reportam-se também os valores *t-statistic* para Ψ_0 e Ψ_1.

(K-S)	-15 a -10	-10 a -5	-5 a 0	0 a 5	5 a 10	10 a 15
Ψ_0	**0,1134**	**0,1682**	**0,0165**	**0,1373**	**0,0745**	**0,0873**
t-Stat	1,83	2,39	0,29	2,28	1,06	1,24
Ψ_1	**-0,1035**	**-0,1242**	**-0,0303**	**-0,1079**	**-0,0704**	**-0,0998**
t-Stat	-2,47	-2,67	-0,78	-2,72	-1,51	-2,15

Conforme se pode constatar, para qualquer dos intervalos, o valor do coeficiente da regressão Ψ_1 é negativo, variando entre -0,0303 e -0,1242, apontando, deste modo, para um prémio de risco da volatilidade negativo e comprovando as hipóteses formuladas.

Saliente-se que, apenas em dois intervalos o coeficiente não é estatisticamente significativo, com o *t-statistic* de -1,51 e -0,78, sendo este último valor referente às opções *at-the-money*.

Assim, um prémio de risco da volatilidade negativo pode ser interpretado como um valor que os investidores estão dispostos a pagar para deter opções no seu *portfolio*, com impacto no resultado final da sua estratégia.

6. Conclusões

As opções são instrumentos derivados que permitem aos investidores deter uma posição, de forma indirecta, no activo subjacente, com um investimento mais reduzido, e assumir um nível de risco ajustado às suas preferências.

Neste âmbito, tendo em conta o Modelo de Merton e o CAPM, a taxa de rendibilidade das opções, tal como para qualquer outro tipo de activo, deve ser uma função dos seus *betas*, que assumirão valores bastantes elevados, dado o *leverage effect* presente nas opções.

Tendo por bases estas referências, foram apresentados dois teoremas sobre as taxas de rendibilidade esperadas para as opções, os quais assumem a existência de um *leverage effect* incluído no preço das *calls* e das *puts*.

Com base nos preços das opções sobre o Índice S&P 500 transaccionadas na CBOE, para o período entre Janeiro de 1996 e Dezembro de 2004, conclui-se que, efectivamente, as *calls* obtêm taxas de rendibilidade superiores ao activo subjacente, uma vez que o Índice S&P 500 apresentou uma rendibilidade semanal média de 0,18%, enquanto que as *calls* obtiveram valores bastante superiores (máximo de 9,48% semanal), com excepção das opções *deeply in-the-money*, que registaram uma *performance* negativa (-0,15% semanal). Paralelamente, verificou-se que as taxas de rendibilidade são crescentes à medida que o *strike* aumenta, conclusões que estão de acordo com as premissas (**Teorema 1**) apresentadas sobre as taxas de rendibilidade das *calls*.

No que respeita às *puts*, foram apuradas rendibilidades negativas em qualquer dos intervalos definidos (tendo em conta o diferencial entre o *strike* e o *spot*), com percentagens entre -5,38% (opções *in-the-money*) e -9,02% (opções *out-of-the-money*). Deste modo, também se obtiveram valores que comprovam o **Teorema 2**, pese embora na amostra analisada não se tenha verificado a existência de uma tendência definida, relativamente à proposição das taxas de rendibilidade serem crescentes com o *strike*.

Contudo, quando se eliminou da análise o *leverage effect*, ao considerar uma carteira de *zero-beta straddles*, ou seja, com um *market beta* igual a zero, verificou-se que a taxa de rendibilidade obtida não era consistente com a **Proposição 1**, no qual se definiu que a rendibilidade esperada de um *portfolio* constituído por *zero-beta straddles* seria, em média, igual à taxa de juro sem risco.

Neste sentido, constatou-se que a *performance* alcançada por uma carteira de *zero-beta straddles* era negativa, tendo-se apurado valores entre -5,84% e -1,32%, divergindo significativamente da taxa de juro sem risco.

Estas conclusões apontam para a existência de outros factores de risco, além do *market risk*, que influenciam o preço das opções e não são considerados no Modelo de Merton. Um dos factores será a volatilidade, considerada como uma variável constante neste modelo, quando na realidade se verifica que é uma variável estocástica, com um impacto na evolução dos preços dos activos.

Tendo presente a hipótese de existir um prémio de risco negativo associado à volatilidade, centrou-se a análise no parâmetro *vega*, o qual foi utilizado num modelo de regressão linear. Este modelo foi definido de forma a testar se o prémio de risco de volatilidade era uma variável explicativa das perdas obtidas na carteira de *zero-beta straddles*.

Os resultados alcançados comprovam esta hipótese, tendo-se obtido coeficientes de regressão negativos e estatisticamente significativos. Assim, é possível concluir que o prémio de risco da volatilidade assume valores negativos, justificando as taxas de rendibilidade também negativas, obtidas na carteira de *zero-beta straddles*.

Terminado este estudo, fica em aberto a aplicabilidade destas conclusões a outro tipo de opções ou mercados, por exemplo, no mercado europeu, assim como a possibilidade da existência de outros factores de risco, para além da volatilidade, com influência no preço das opções, o que se deixa como proposta para um futuro trabalho.

Bibliografia

- Ait-Sahalia, Y. e A.W. Lo, 1998, Nonparametric Estimation of State-Price Densities Implicit in Financial Asset Prices, *Journal of Finance* 53, 499-547.

- Bakshi, G., C. Cao e Z. Chen, 2000, Do Call Prices and the Underlying Stock Always Move in the Same Direction?, *Review of Financial Studies* 13, 549-584.

- Bakshi, G., e N. Kapadia, 2003, Delta-Hedged Gains and the Negative Market Volatility Risk Premium, *Review of Financial Studies* 16, 527-566.

- Black, F., e M. Scholes, 1973, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy* 81, 637-654.

- Bondarenko, O., 2003, Why are Put Options So Expensive?, Working paper, University of Illinois, Chicago.

- Branger, N., e C. Schlag, 2004, Can Tests Based on Option Hedging Errors Correctly Identify Volatility Risk Premia?, Working paper, University of Frankfurt.

- Branger, N., e C. Schlag, 2005, Put Options Are Not Too Expensive – An Analysis of Path Peso Problems, Working paper, University of Frankfurt.

- Buraschi, A., e A. Jiltsov, 2002, Uncertainty, Volatility and Option Markets, Working paper, London Business School.

- Buraschi, A., e J. Jackwerth, 2001, The Price of a Smile: Hedging and Spanning in Option Markets, *Review of Financial Studies* 14, 495-527.

- Câmara, A., 2003, A Generalization of the Brennan-Rubinstein Approach for the Pricing of Derivatives, *Journal of Finance* 2, 805-819.

- Canina, L., e S. Figlewski, 1993, The Informational Content of Implied Volatility, *Review of Financial Studies* 6, 659-681.

- Christensen, B.J., e N.R. Prabhala, 1998, The Relation Between Implied and Realized Volatility, *Journal of Financial Economics* 50, 125-150.

- Corrado, C.J., e T. Su, 1996, Skewness and Kurtosis in S&P 500 Index Returns Implied by Option Prices, *Journal of Financial Research* 2, 175-192.

- Coval, J.D., e T. Shumway, 2001, Expected Option Returns, *Journal of Finance* 3, 983-1009.

- Cox, J.C., e S. Ross, 1976, The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes, *Journal of Financial Economics* 3, 145-166.

- Driessen, J., e P. Maenhout, 2003, A Portfolio Perspective on Option Pricing Anomalies, Working paper, University of Amsterdam.

- Driessen, J., e P. Maenhout, 2004, The World Price of Jump and Volatility Risk, Working paper, University of Amsterdam.

- Heston, S.L., 1993, A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bonds and Currency Options, *Review of Financial Studies* 6, 327-343.

- Hull, J.C., e A. White, 1987, The Pricing of Options with Stochastic Volatilities, *Journal of Finance* 42, 281-300.

- Jackwerth, J.C., 2000, Recovering Risk Aversion from Option Prices and Realized Returns, *Review of Financial Studies* 13, 433-451.

- Jackwerth, J.C., e M. Rubinstein, 1996, Recovering Probability Distributions from Option Prices, *Journal of Finance* 51, 1611-1631.

- Jones, C.S., 2005, A Nonlinear Factor Analysis of S&P 500 Index Option Returns, Working paper, University of Southern California.

- Merton, R., 1973, Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 141-183.

- Rubinstein, M., 1994, Implied Binomial Trees, *Journal of Finance* 3, 771-818.

- Vaden, J.M., 2004, Options Trading and the CAPM, *Review of Financial Studies* 17, 207-238.