ISCTE Business School
Instituto Universitário de Lisboa

Modelos de Avaliação de Risco de Crédito, com Aplicação à Regulamentação Bancária

Ruben José Vales Morais Sequeira

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Finanças

Orientador:

Prof. Pedro Prazeres, Prof. Assistente Convidado, ISCTE-IUL Business School, Departamento de Finanças

Outubro de 2016

Resumo

Este trabalho tem como principal objetivo demonstrar e replicar os resultados teóricos obtidos no artigo "Bank Capital Regulation in a Barrier Option Framework", de Episcopos (2008), que visa a aplicação da teoria de avaliação de opções europeias com barreira, à avaliação do capital próprio de uma instituição bancária, bem como do ativo contingente da entidade governamental responsável pela gestão da falência de bancos e pelo sistema de garantia de depósitos.

No trabalho em análise, o autor demonstra que a existência de um nível mínimo do valor dos ativos (superior ao nível de falência) que determina a liquidação da instituição, induz à partilha de valor entre os acionistas e o regulador, bem como à diminuição dos incentivos ao aumento do risco dos ativos, por parte dos acionistas.

Palavras-chave: opções com barreira, risco de crédito, regulamentação bancária, FDIC.

Abstract

The main purpose of this work is to demonstrate and replicate the theoretical results obtained in the article "Bank Capital Regulation in a Barrier Option Framework", of Episcopos (2008), which applies the theory of European barrier options valuation, to assess the equity value of a financial institution equity, as well as the contingent assets held by the government entity responsible for applying bank resolution measures and granting the value of bank deposits.

In this article, the author shows that the existence of a minimum level of assets (superior to the bankruptcy level) which determines the insolvency of the institution, induces value sharing between stockholders and the regulator, and reduces incentives for stockholders to increase risk of corporate assets.

Keywords: barrier options, credit risk, banking regulation, FDIC.

Índice

1. Introdução

O principal objetivo desta dissertação consiste na replicação dos resultados teóricos – incluindo a demonstração e implementação das fórmulas utilizadas – do trabalho desenvolvido por Episcopos (2008), aplicando a teoria da avaliação de opções com barreira à aferição do valor de mercado do capital próprio de uma instituição bancária, e do ativo contingente da entidade governamental responsável pela gestão da falência de bancos e pelo sistema de garantia de depósitos.

Este tipo de análise assume particular relevância aquando do início da crise financeira em 2007/2009, com a sucessão de eventos de crédito em instituições financeiras de dimensão sistémica. Desta forma, torna-se essencial aferir de forma precisa o risco de crédito associado a uma determinada entidade, bem como a sua sensibilidade a flutuações de variáveis como o valor de mercado (e correspondente volatilidade) dos seus ativos, o nível de taxas de juro, entre outras.

O restante trabalho encontra-se dividido da seguinte forma. O Capítulo 2 faz a revisão das principais referências bibliográficas consideradas. No Capítulo 3 é descrito o modelo considerado, bem como os principais pressupostos que lhe estão subjacentes. No Capítulo 4 são apresentados os resultados numéricos. Finalmente, no Capítulo 5 são sumariadas as principais conclusões da análise, bem como se apresentam algumas bases para investigação futura. Todos os resultados auxiliares, bem como os códigos de programação utilizados na implementação do modelo, constam no Anexo.

2. Revisão de literatura

A *abordagem estrutural* à modelização de risco de crédito, iniciada com os artigos de Black e Scholes (1973) e Merton (1974), baseia-se na teoria de avaliação de opções, e analisa o valor de mercado do capital próprio de uma empresa (com uma estrutura de capital simplificada, composta apenas por capital próprio e por uma obrigação de cupão zero com maturidade finita) como uma *long call* europeia (posição compradora de uma opção de compra), constituída sobre os ativos da empresa, com maturidade correspondente à maturidade da dívida e preço de exercício equivalente ao valor nominal da dívida. Reciprocamente, o valor de mercado do passivo é analisado como um *portfolio* composto por liquidez e uma *short put* europeia (posição vendedora numa opção de venda) sobre os ativos da empresa, com maturidade correspondente à maturidade da dívida e preço de exercício equivalente ao valor nominal da dívida.

Desta forma, na data de maturidade da dívida, se o valor de mercado dos ativos for superior ao valor a reembolsar, os acionistas da empresa receberão o valor remanescente. Caso contrário, a empresa será incapaz de satisfazer os seus compromissos, e os credores terão direito a receber os ativos (i.e., a massa falida da instituição), como contrapartida do reembolso não realizado. Neste cenário, o valor para os acionistas é nulo.

Contudo, apesar de esta analogia servir de base à implementação de alguns dos modelos comerciais mais importantes para aferição do risco de crédito de uma entidade *corporate* (entre os quais se destacam o CreditMetrics e o KMV), pode ser considerada excessivamente simplificadora por duas razões fundamentais: por um lado, a construção do modelo implica que a falência da empresa só poderá ocorrer na data de maturidade da dívida, uma vez que os contratos de opções considerados são de estilo europeu. Desta forma, se na maturidade da opção o valor dos ativos for superior ao valor nominal da dívida, não há lugar a evento de crédito, independentemente da evolução do valor dos ativos durante a vigência da opção. Por outro lado, é assumido que o nível de falência (valor de mercado dos ativos, abaixo do qual a empresa está em situação de falência) é equivalente ao valor nominal da dívida, quando em termos efetivos, a empresa pode entrar em incumprimento antes desse momento.

Para contornar estas limitações, foi iniciado em Black e Cox (1976) (e continuado em outros artigos como Leland (1994)), o desenvolvimento de um novo modelo de avaliação, que equipara o valor de mercado do capital próprio ao valor de uma opção de barreira europeia (mais concretamente uma *long down-and-out call*) sobre os ativos da empresa, com uma barreira a um nível pré-especificado (que pode ou não corresponder ao valor nominal da dívida), maturidade correspondente à maturidade da dívida e preço de exercício similar ao valor nominal da dívida. Desta forma, assume-se que se o valor de mercado dos ativos descer abaixo da barreira em algum momento até à maturidade da opção, então a empresa entra imediatamente em falência, cessando imediatamente o direito dos acionistas que está inerente à opção.

Nesta estrutura de modelo, o trabalho de Episcopos (2008) procura analisar a questão da regulação bancária, desenvolvendo uma ferramenta para estimar o ativo contingente da Federal Deposit Insurance Corporation (FDIC), a organização estatal Norte-Americana responsável pela liquidação de instituições e garantia dos depósitos bancários.

Pressupondo o modelo de Black-Scholes-Merton (1973) e uma estrutura de capital simplificada para a instituição bancária (composta por apenas um tipo de ativos, e sem quaisquer outros credores para além dos depositantes), o autor afere o valor de mercado do capital próprio como uma *long down-and-out call* europeia (com a barreira e tempo para a maturidade pré-especificados pelo regulador, e preço de exercício similar ao valor nominal da responsabilidade para com os depositantes), e o valor dos ativos contingentes da FDIC como uma *long down-and-in call*, também de estilo europeu, e com as mesmas características da *down-and-in call*. Assim, caso o valor de mercado dos ativos da instituição desça abaixo do valor (pré-determinado) da barreira, cessa imediatamente o direito de opção dos acionistas, e inicia-se um processo de liquidação da instituição, ficando a FDIC pela garantia do reembolso dos passivos (neste caso, os depósitos bancários).

Para além da estimativa do valor de mercado do capital próprio e dos ativos contingentes da FDIC, o autor calcula também a sensibilidade de ambos os *outputs* a variações dos *inputs* da avaliação (a saber, o valor dos ativos, o valor da barreira, a volatilidade do valor dos ativos, a maturidade da opção e o nível da taxa de juro sem risco) através da computação das Gregas da opção, e conclui que a existência de uma barreira induz à partilha de valor entre a FDIC e os acionistas, bem como diminui a propensão destes ao aumento do risco dos ativos. Na parte empírica do estudo, que não será alvo de análise neste trabalho, o autor analisa um conjunto de 152 instituições bancárias Norte-Americanas, onde conclui que o valor da barreira é estatisticamente diferente de zero, indicando um melhor *fit* deste modelo aos valores de mercado, em comparação com o modelo original proposto pela *abordagem estrutural*.

3. Descrição do modelo

O objetivo deste capítulo consiste na apresentação do modelo considerado por Episcopos (2008), bem como dos pressupostos que lhe estão subjacentes.

Na *abordagem estrutural*, originalmente proposta por Black e Scholes (1973) e Merton (1974) com base nos fundamentos do modelo de Black-Scholes-Merton (1973), o valor de mercado do capital próprio de uma empresa é equiparado a uma *long call* sobre o valor de mercado dos ativos da empresa V, com preço de exercício X, igual ao valor nominal da dívida, e maturidade τ equivalente ao tempo para a maturidade da dívida. O valor desta opção, $C(X)$, é calculado através da seguinte expressão:

$$C(X) = VN(a) - Xe^{-r\tau}N\left(a - \sigma\sqrt{\tau}\right), \tag{1}$$

onde r representa a taxa de juro sem risco, σ a volatilidade do valor de mercado dos ativos da empresa, e a é dado por:

$$a = \frac{\ln\left(\frac{V}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}. \tag{2}$$

Desta forma, a construção subjacente ao modelo implica que os parâmetros considerados tenham o seguinte efeito sobre o valor de mercado do capital próprio da empresa:

- Aumentos do valor de mercado dos ativos da empresa têm um impacto positivo no valor de mercado para os acionistas;
- Variações positivas do valor nominal da dívida, isto é, do preço de exercício da *long call*, conduzem a reduções no valor do capital próprio da empresa. Este aspeto constitui uma limitação do modelo, uma vez que pressupõe que um possível evento de crédito da empresa só pode ocorrer na data de maturidade da dívida (isto é, da *call* europeia em análise). Por exemplo, se na maturidade da opção o valor dos ativos for superior ao valor nominal da dívida, não há lugar a evento de crédito, independentemente da evolução do valor dos ativos durante a vigência da opção;

- Quanto maior o tempo para a maturidade da dívida, isto é, a maturidade da *long call*, maior será o valor do capital próprio, dado que nestes caso a empresa dispõe de mais tempo para proceder ao reembolso da dívida;
- Aumentos da volatilidade do valor de mercado dos ativos conduzem também a um aumento do valor para os acionistas. Este aspeto assume particular relevância e constitui também uma limitação do modelo, uma vez que considera implicitamente que compensa sempre aos acionistas aumentarem o risco associado aos ativos da empresa, independentemente dos efeitos que tal ação possa trazer para os restantes agentes (por exemplo credores ou reguladores), configurando a possibilidade de existência de situações de *moral hazard*;
- Aumentos do nível da taxa de juro sem risco têm igualmente um impacto positivo no valor do capital próprio.

Por forma a ultrapassar as limitações acima elencadas e construir um enquadramento financeiro com melhor adequação prática, Episcopos (2008) analisa no seu trabalho a questão da regulação bancária, partindo do modelo de Brockman e Turtle (2003), e interpreta o valor de mercado do capital próprio de uma instituição financeira como uma opção de barreira, mais concretamente uma *long down-and-out call* europeia sobre os ativos da instituição (com barreira e tempo para a maturidade pré-especificados pelo regulador, e preço de exercício similar ao valor nominal da responsabilidade para com os depositantes). Reciprocamente, o ativo contingente da FDIC é interpretado como uma *long down-and-in call* europeia sobre os ativos da empresa, com as mesmas características da *down-and-out call* em análise.

Neste modelo, se o valor de mercado dos ativos da instituição descer abaixo de um nível predeterminado (equivalente ao valor da barreira nas duas opções considerados), a FDIC tem poderes para tomar o controlo dos ativos da instituição e representar os interesses dos depositantes. Desta forma, a FDIC pode forçar a empresa a entrar em *default* antes do valor dos ativos se esgotar. O nível assumido para a barreira pode ser considerado com uma ferramenta de gestão de risco, uma vez que pode ser aumentado ou diminuído tornando a entrada da FDIC na gestão da empresa mais ou menos provável. Caso o valor de mercado dos ativos da instituição permaneça acima do nível da barreira durante a vigência da opção, na maturidade a *down-and-out call* detida pelos acionistas é equivalente a uma *call standard*, e a *down-and-in call* detida pela FDIC nunca é acionada, expirando sem qualquer valor subjacente.

Para além do referido, o modelo assume ainda um conjunto de pressupostos adicionais, descritos abaixo:

- A evolução do valor de mercado dos ativos da instituição é descrita por um movimento Browniano geométrico, conduzindo a uma distribuição lognormal desta variável. Este é um dos pressupostos fundamentais subjacentes ao modelo de Black-Scholes-Merton (1973);
- É considerada a existência de apenas uma instituição bancária na economia, com apenas um tipo de ativos e um tipo de passivos (equivalentes à responsabilidade que a instituição tem junto dos seus depositantes);
- É assumido que a monitorização da instituição por parte do regulador ocorre durante um período de regulação constante e único, durante o qual a volatilidade do valor dos ativos daquela permanece constante. Este pressuposto considera-se plausível, uma vez que a análise se cinge apenas a um período;
- Por simplificação, é assumido que a FDIC faz uma monitorização constante das instituições, sem erros nem custos associados. Em caso de um evento de crédito da instituição, a FDIC será responsável pela gestão dos seus ativos até ao final do período de regulação;
- Não são considerados dividendos aos acionistas nem impostos, por representarem um valor marginal, pouco expressivo no que diz respeito à análise desenvolvida.

Neste modelo o valor de mercado do capital próprio da instituição bancária é equivalente ao preço de uma *long down-and-out call* europeia DOC, cujo valor é calculado através da equação (1) em Episcopos (2008)[1]:

$$DOC\ (H, X) = VN(a) - Xe^{-r\tau}N\left(a - \sigma\sqrt{\tau}\right) - V\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta} N(b) + \ Xe^{-r\tau}\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2} N\left(b - \sigma\sqrt{\tau}\right), \tag{3}$$

onde V, r e τ têm o mesmo significado do que na equação (1), X é o capital prometido aos depositantes em τ anos, H representa a barreira definida e $N(.)$ é a distribuição normal acumulada. Uma vez que são consideradas opções de barreira na análise, importa indicar ainda que a, b e η são dados respetivamente por:

[1] A equação em questão difere da apresentada pelo autor, devido a um erro de publicação do artigo.

$$a = \begin{cases} \dfrac{\ln\left(\frac{V}{X}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} & X \geq H \\ \dfrac{\ln\left(\frac{V}{H}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} & X < H \end{cases}, \tag{4}$$

$$b = \begin{cases} \dfrac{\ln\left(\frac{H^2}{VX}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} & X \geq H \\ \dfrac{\ln\left(\frac{H}{V}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} & X < H \end{cases}, \tag{5}$$

e

$$\eta = \frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Com a fórmula de avaliação acima, é possível aplicar a conhecida relação de paridade *in-out*, e obter o valor da *long down-and-in call* europeia DIC, através da seguinte expressão:

$$DOC\ (H, X) = C(X) - DIC\ (H, X), \tag{7}$$

onde $C(X)$ representa o valor de uma *long call* europeia, dado pela equação (1). Através de simples manipulação algébrica, e de forma a facilitar a implementação do modelo, o valor da *down-and-in call* pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} DIC\ (H, X) &= V\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta} N(b) - Xe^{-r\tau}\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2} N\left(b - \sigma\sqrt{\tau}\right) \\ &= \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[V\left(\frac{H}{V}\right)^{2} N(b) - Xe^{-r\tau} N\left(b - \sigma\sqrt{\tau}\right)\right] \\ &= \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[\left(\frac{H^2}{V}\right) N(b) - Xe^{-r\tau} N\left(b - \sigma\sqrt{\tau}\right)\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Através da observação das equações (3), (7) e (8) verifica-se que neste modelo é expectável haver uma partilha de valor, bem como de risco entre os acionistas da instituição (cujo valor é representado pelo valor da *down-and-out call*) e a FDIC, entidade responsável pela regulação e monitorização (e potencial liquidação) da instituição, e pela garantia dos depósitos (cujo valor é representado pelo valor da *down-and-in call*).

Da mesma forma, é importante analisar a sensibilidade do valor para os acionistas e para a FDIC, no que diz respeito a variações dos parâmetros do modelo. Sendo o modelo baseado na teoria de avaliação de opções, tais sensibilidades são equivalentes às letras Gregas dos contratos em análise, calculadas no capítulo seguinte, com base nas fórmulas deduzidas no Anexo I.

4. Resultados numéricos

No presente capítulo são apresentados os principais resultados numéricos obtidos. O modelo descrito na secção anterior – equações (1), (3), e (8), bem como as equações descritas no Anexo I – foi implementado usando o *software* MATLAB. Os códigos de programação desenvolvidos para o efeito são apresentados no Anexo II. A demonstração de todas as fórmulas utilizadas é realizada no Anexo I.

Por conseguinte, a Tabela 1 replica a análise numérica desenvolvida em Episcopos (2008), reportando o valor das opções Europeias *down-and-out*, *down-and-in* (representativas do valor para os acionistas e para a FDIC, respetivamente) e *standard*, no modelo de Black-Scholes-Merton (1973). A Tabela apresenta também as letras Gregas de cada opção, isto é, a sensibilidade do valor de cada contrato, considerando alterações dos parâmetros descritivos do enquadramento económico.

Em todas as simulações, são assumidos os mesmos parâmetros que em Episcopos (2008): $V = 100$, $X = 90$, $H = 90$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.1$ e $\tau = 1$ (exceto quando especificado em contrário). A primeira e segunda colunas da Tabela 1 identificam o parâmetro em análise, bem como o valor a assumir em cada cenário. A terceira e quarta colunas apresentam o valor da *down-and-out* Europeia sobre os ativos da instituição (equivalente ao valor da instituição bancária para os acionistas) e as letras Gregas correspondentes. A quinta e sexta colunas repetem a análise, mas considerando a *call* Europeia *standard* sobre os ativos da instituição, enquanto as últimas duas colunas apresentam os valores relativos à *down-and-in* Europeia (correspondente ao valor para a FDIC).

Os resultados obtidos permitem formular algumas conclusões significativas no âmbito da regulação bancária. Em primeiro lugar, confirma-se que no modelo proposto por Episcopos (2008) o valor da instituição bancária, originalmente representado na *abordagem estrutural* por uma *call* Europeia sobre os ativos da empresa, é agora repartido entre os acionistas e a FDIC. Em termos de sensibilidade do valor, e tendo também presentes os resultados *standard* da teoria de avaliação de *barrier options*, o aumento do valor de mercado dos ativos V conduz a um aumento do valor da *down-and-out* e a uma diminuição do valor da *down-and-in*. Este comportamento do modelo verifica-se uma vez que a probabilidade da barreira ser atingida diminui à medida que o valor dos ativos aumenta.

Tabela 1 – Valor da instituição bancária para os acionistas e para a FDIC, no modelo de Episcopos (2008), e sensibilidade a variações dos parâmetros do modelo

Parâmetros		Valor para os acionistas – *Down-and-out Call*		Valor para os acionistas – *Call standard*		Valor para a FDIC – *Down-and-in call*	
1.	2.	3. Valor	4. Declive	5. Valor	6. Declive	7. Valor	8. Declive
V (Valor de mercado inicial dos ativo)	95	8.76	1.56	15.79	0.81	7.03	-0.75
	100	15.89	1.32	19.99	0.87	4.1	-0.45
	105	22.08	1.18[1]	24.46	0.91	2.37	-0.26
	110	27.75	1.1	29.11	0.95	1.36	-0.15
H (Barreira regulamentar)	80	19.66	-0.1	19.99	0	0.33	0.1
	85	18.64	-0.34	19.99	0	1.35	0.34
	90	15.89	-0.81	19.99	0	4.1	0.81
	95	10.12	-1.54	19.99	0	9.87	1.54
σ (Volatilidade do valor de mercado dos ativos)	0.1	18.22	-17.23	18.63	4.37	0.41	21.59
	0.2	15.89	-21.62	19.99	21.14	4.1	42.76
	0.3	14.19	-12.99	22.51	28.16	8.32	41.16
	0.4	13.16	-8.12	25.48	30.93	12.33	39.05
τ (Horizonte regulamentar)	0.5	13.49	5.45	15.29	10.11	1.8	4.66
	1	15.89	4.3	19.99	8.82	4.1	4.52
	1.5	17.87	3.7	24.18	8.01	6.31	4.31
	2	19.62	3.3	28.04	7.42	8.42	4.13
r (Taxa de juro sem risco)	0.05	12.79	59.07	16.7	64.27	3.91	5.2
	0.1	15.89	64.62	19.99	67.02	4.1	2.4
	0.15	19.22	68.63	23.38	68.2	4.15	-0.43
	0.2	22.72	71.01	26.79	68.03	4.06	-2.99

Nota: (1) Este valor difere do apresentado em Episcopos (2008), uma vez que existe um erro de publicação no artigo em questão.

No que respeita à barreira regulamentar H, quanto menor o valor da barreira, menor será a probabilidade desta ser atingida (uma vez que a distância entre V e H aumenta). Assim, aumentos (diminuições) do valor da barreira regulamentar levam a diminuições (aumentos) do valor para os acionistas, sendo a conclusão contrária no que diz respeito ao valor para a FDIC. Na *call standard*, o valor para os acionistas mantém-se inalterado, pois não existe a figura da barreira.

Relativamente à volatilidade do valor dos ativos σ, à medida que esta aumenta o valor para os acionistas da instituição diminui, uma vez que a probabilidade da *down-and-out* se extinguir aumenta. Da mesma forma, a sensibilidade do valor da opção a alterações da volatilidade é negativa. Como é argumentado em Episcopos (2008), demonstra-se que neste modelo é fortemente reduzido o incentivo dos acionistas à prossecução de alterações no risco dos ativos da instituição, pois tal alteração leva a uma transferência de valor mais acentuada para a FDIC. Esta relação não se verifica no modelo original, uma vez que aumentos da volatilidade do valor dos ativos têm sempre um impacto positivo no valor para os acionistas, mesmo que tal não esteja em linha com o melhor interesse da instituição.

No que concerne ao horizonte regulamentar τ, constata-se que aumentos no valor deste parâmetro conduzem a um aumento do valor para os acionistas e para a FDIC, uma vez que, e recorrendo à teoria de avaliação de opções, quanto maior o tempo para a maturidade do contrato, maior a incerteza e maior o seu valor associado.

Por último, quanto à taxa de juro sem risco r, verifica-se que o aumento do valor deste parâmetro tem sempre um impacto positivo no valor para os acionistas e para a FDIC, sendo a sensibilidade das várias opções também positiva. De certa forma, pode argumentar-se que a taxa de juro é uma das variáveis que menos contribui para a explicação do valor das opções consideradas.

5. Conclusões

Este trabalho visa demonstrar e replicar os resultados teóricos obtidos do artigo “Bank Capital Regulation in a Barrier Option Framework”, de Episcopos (2008), que aplica a teoria de avaliação de opções europeias com barreira à avaliação do capital próprio de uma instituição bancária, bem como do ativo contingente da FDIC, a entidade governamental responsável pela gestão da falência de bancos e pelo sistema de garantia de depósitos Norte-Americano.

Neste modelo, o valor do capital próprio é equiparado ao valor de uma *long down-and-out call* sobre os ativos da instituição, com nível da barreira e maturidade definidas pelo regulador. Reciprocamente, o valor dos ativos contingentes da FDIC é equiparado ao valor uma *long down-and-in call*, com as mesmas características da opção *down-and-out*, Através da análise dos resultados numéricos obtidos, conclui-se que a existência de uma barreira predeterminada induz a partilha de valor e de risco os acionistas e a FDIC.

Com o desenvolvimento das fórmulas presentes no Anexo I, é possível identificar a abrangência do modelo e a sua coerência no que respeita à aplicação prática à realidade de uma instituição financeira. Por último, e embora não tenha sido alvo de análise nesta dissertação, importa ressalvar que a análise empírica realizada pelo autor no artigo em estudo também confirma as descobertas alcançadas.

Uma possível extensão do modelo analisado poderá concretizar-se na utilização de outros modelos que caracterizem de forma mais realista a evolução do valor de mercado dos ativos, de forma a analisar se as conclusões do estudo se mantêm. Neste grupo, incluem-se o modelo Constant Elasticity of Variance (CEV) de Cox (1996) ou o modelo de Heston (1993).

6. Referências Bibliográficas

Black, F., Scholes, M. 1973. ***The pricing of options and corporate liabilities***. Journal of Political Economy, 81 (3): 637–654.

Black, F., Cox, J. 1976. ***Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provisions***. Journal of Finance, 31: 351–367.

Brockman, P., Turtle, H.J. 2003. ***A barrier option framework for corporate security valuation***. Journal of Financial Economics, 67: 511–529.

Episcopos, A., 2008. ***Bank capital regulation in a barrier option framework***. Journal of Banking and Finance, 32: 1677–1686.

Heston, S. L., 1993. ***A closed-form solution for options with stochastic volatility with appications to bond and currency options***. The Review of Financial Studies vol. 6 (2): 327-343

Hull, J. C. 2008. ***Options, futures, and other derivatives*** (7th ed.), New Jersey: Pearson Education, Inc.

Cox, J. 1996. ***Notes on option pricing I: Constant elasticity of variance discussions***. Working Paper, Stanford University, reprinted in Journal of Portfolio Management, 22: 15-17.

J.P. Morgan, 1997. ***Credit metrics - Technical document.*** J.P. Morgan.

Lando, D. 2004. ***Credit risk modeling: Theory and applications.*** New Jersey: Princeton University Press.

Leland, H. 1994. ***Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure***. Journal of Finance, 49: 1213–1252.

Merton, R., 1973. ***Theory of rational option pricing***. Bell Journal of Economics and Management Science, 4: 141–183.

Merton, R., 1974. ***On the pricing of corporate debt***. The risk structure of interest rates. Journal of Finance, 29: 449–470.

Schonbucher, P. J. 2003. ***Credit derivatives pricing models.*** Chichester: Wiley.

Anexo I – Demonstração das fórmulas consideradas na análise

Neste anexo são apresentadas as demonstrações de todas as fórmulas consideradas na análise.

Resultados – *Call standard*

Combinando as equações (1) e (2) e usando álgebra básica, o cálculo das letras gregas associadas à *call standard*, é obtido através das seguintes expressões:

O valor do *delta* (sensibilidade do valor da opção a variações do valor de mercado do ativo subjacente), da *call standard* é dado por:

$$\Delta\big(C(X)\big) = \frac{\partial C(X)}{\partial V}$$
$$= \frac{\partial\left[VN(a) - Xe^{-r\tau}N\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right)\right]}{\partial V}$$
$$= \frac{\partial[VN(a)]}{\partial V} - \frac{\partial\left[Xe^{-r\tau}N\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right)\right]}{\partial V}$$
$$= N(a) + V\frac{\partial N(a)}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial V} - Xe^{-r\tau}\frac{\partial N\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right)}\frac{\partial\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial V}$$
$$= N(a) + V\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\frac{1}{V\sigma\sqrt{\tau}} - Xe^{-r\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\frac{V}{X}e^{r\tau}\frac{1}{V\sigma\sqrt{\tau}}$$
$$= N(a) + V\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\frac{1}{V\sigma\sqrt{\tau}} - Xe^{-r\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\frac{V}{X}e^{r\tau}\frac{1}{V\sigma\sqrt{\tau}}$$
$$= N(a) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\frac{1}{V\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\frac{1}{V\sigma\sqrt{\tau}}$$
$$= N(a) \tag{9}$$

Na demonstração anterior foram utilizadas as seguintes expressões auxiliares:

$$\frac{\partial N(a)}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}} \tag{9.1}$$

$$\frac{\partial a}{\partial V} = \frac{\partial\left[\frac{\ln\left(\frac{V}{X}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right]}{\partial V} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\frac{\partial\left(\ln\frac{V}{X}\right)}{\partial V} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\frac{\frac{1}{X}}{\frac{V}{X}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\frac{1}{X}\frac{X}{V} = \frac{1}{V\sigma\sqrt{\tau}} \tag{9.2}$$

$$\frac{\partial N\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right)^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}+a\sigma\sqrt{\tau}+\frac{\left(-\sigma^2\left(\sqrt{\tau}\right)^2\right)}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}+\left[\frac{\ln\left(\frac{V}{X}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right]\sigma\sqrt{\tau}-\frac{\sigma^2\tau}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}+\ln\left(\frac{V}{X}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau+\frac{-\sigma^2\tau}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}+\ln\left(\frac{V}{X}\right)+r\tau}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}e^{\ln\left(\frac{V}{X}\right)}e^{r\tau}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\frac{V}{X}e^{r\tau} \tag{9.3}$$

$$\frac{\partial\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial V} = \frac{\partial(a)}{\partial V} - \frac{\partial\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial V} = \frac{1}{V\sigma\sqrt{\tau}} \tag{9.4}$$

O valor do *vega* (sensibilidade do valor da opção a variações da volatilidade do valor ativo), da *call standard* é dado por:

$$\nu\left(C(X)\right) = \frac{\partial C(X)}{\partial\sigma}$$

$$= V\frac{\partial N(a)}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial\sigma} - Xe^{-r\tau}\frac{\partial N\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right)}\frac{\partial\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial\sigma}$$

$$= V\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}$$

$$= \frac{V\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}} \tag{10}$$

Nos cálculos anteriores foram utilizadas, para além das equações (9.1) e (9.3), as seguintes expressões auxiliares:

$$\frac{\partial a}{\partial \sigma} = \frac{\partial\left[\frac{\ln\left(\frac{V}{X}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right]}{\partial\sigma}$$

$$= \frac{\frac{\partial\left[\ln\left(\frac{V}{X}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]}{\partial\sigma}\sigma\sqrt{\tau}-\left[\ln\left(\frac{V}{X}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]\frac{\partial(\sigma\sqrt{\tau})}{\partial\sigma}}{\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{2\tau\sigma}{2}\sigma\sqrt{\tau}-\left[\ln\left(\frac{V}{X}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]\sqrt{\tau}}{\sigma^2\tau}$$

$$= \frac{\tau\sigma\sigma\sqrt{\tau}-\left[\ln\left(\frac{V}{X}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]\sqrt{\tau}}{\sigma^2\tau}$$

$$= \frac{\tau\sigma^2\sqrt{\tau}-\left[\ln\left(\frac{V}{X}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]\sqrt{\tau}}{\sigma^2\tau}$$

$$= \frac{\tau\sigma^2\sqrt{\tau}}{\sigma^2\tau} - \frac{\left[\ln\left(\frac{V}{X}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]}{\sigma^2\tau}\sqrt{\tau}$$

$$= \sqrt{\tau} - \frac{1}{\sigma}a\sqrt{\tau}$$

$$= \sqrt{\tau} - \frac{a\sqrt{\tau}}{\sigma} \qquad (10.1)$$

$$\frac{\partial(a-\sigma\sqrt{\tau})}{\partial\sigma} = \frac{\partial a}{\partial\sigma} - \frac{\partial(\sigma\sqrt{\tau})}{\partial\sigma} = \sqrt{\tau} - \frac{a\sqrt{\tau}}{\sigma} - \sqrt{\tau} = -\frac{a\sqrt{\tau}}{\sigma} \qquad (10.2)$$

O valor do *theta* (sensibilidade do valor da opção a variações do seu tempo para a maturidade), da *call standard* é dado por:

$$\theta\big(C(X)\big) = \frac{\partial C(X)}{\partial\tau}$$

$$= V\frac{\partial N(a)}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial\tau} - \left[\frac{\partial N(Xe^{-r\tau})}{\partial\tau}N\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right) + Xe^{-r\tau}\frac{\partial N\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right)}\frac{\partial\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial\tau}\right]$$

$$= V\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\left(\frac{r}{\sigma\sqrt{\tau}}+\frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}-\frac{a}{2\tau}\right) - \left[-rXe^{-r\tau}N\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right) + Xe^{-r\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\frac{V}{X}e^{r\tau}\left(\frac{r}{\sigma\sqrt{\tau}}-\frac{a}{2\tau}\right)\right]$$

$$= V\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\left(\frac{r}{\sigma\sqrt{\tau}}+\frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}-\frac{a}{2\tau}\right) + rXe^{-r\tau}N\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}V\left(\frac{r}{\sigma\sqrt{\tau}}-\frac{a}{2\tau}\right)$$

$$= V\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} + rXe^{-r\tau}N\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right) - V\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\left(\frac{r}{\sigma\sqrt{\tau}}+\frac{a}{2\tau}\right) - V\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\left(\frac{r}{\sigma\sqrt{\tau}}-\frac{a}{2\tau}\right)$$

$$= V\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}\right) + rXe^{-r\tau}N\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right)$$

$$= \frac{V\sigma}{2\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{a^2}{2}} + (rXe^{-rt})N(a) \qquad (11)$$

Na demonstração anterior foram utilizadas, para além das equações (9.1) e (9.3), as seguintes expressões auxiliares:

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = \frac{\frac{\partial\left[\ln\left(\frac{V}{X}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]}{\partial \tau}\sigma\sqrt{\tau}-\left[\ln\left(\frac{V}{X}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]\frac{\partial(\sigma\sqrt{\tau})}{\partial \tau}}{\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\sigma\sqrt{\tau}-\left[\ln\left(\frac{V}{X}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]\left(\sigma\frac{1}{2}\tau^{-0.5}\right)}{\sigma^2\tau}$$

$$= \frac{\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\sigma\sqrt{\tau}}{\sigma^2\tau} - \frac{\left[\ln\left(\frac{V}{X}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]\frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}}{\sigma^2\tau}$$

$$= \frac{\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\sigma\sqrt{\tau}}{\sigma^2\sqrt{\tau}} - \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}\frac{1}{\sigma^2\tau}\left[\ln\left(\frac{V}{X}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]$$

$$= \frac{r\sigma\sqrt{\tau}}{\sigma^2\tau} + \frac{\sigma^2\sigma\sqrt{\tau}}{2\sigma^2\tau} - \frac{a}{2\tau}$$

$$= \frac{r}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} - \frac{a}{2\tau} \tag{11.1}$$

$$\frac{\partial(a-\sigma\sqrt{\tau})}{\partial \tau} = \frac{\partial a}{\partial \tau} - \frac{\partial \sigma\sqrt{\tau}}{\partial \tau} = \frac{r}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} - \frac{a}{2\tau} - \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} = \frac{r}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{a}{2\tau} \tag{11.2}$$

$$\frac{\partial(Xe^{-r\tau})}{\partial \tau} = X(-re^{-r\tau}) = -rXe^{-r\tau} \tag{11.3}$$

O valor do *rho* (sensibilidade do valor da opção a variações da taxa de juro sem risco), da *call standard* é dado por:

$$\rho\big(C(X)\big) = \frac{\partial C(X)}{\partial r}$$

$$= V\frac{\partial N(a)}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial r} - \left[\frac{\partial N(Xe^{-r\tau})}{\partial r}N\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right) + Xe^{-r\tau}\frac{\partial N\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right)}\frac{\partial\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial r}\right]$$

$$= V\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\frac{\sqrt{\tau}}{\sigma} - \left[-\tau Xe^{-r\tau}N\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right) + Xe^{-r\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\frac{V}{X}e^{r\tau}\frac{\sqrt{\tau}}{\sigma}\right]$$

$$= V\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\frac{\sqrt{\tau}}{\sigma} + \tau Xe^{-r\tau}N\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}V\frac{\sqrt{\tau}}{\sigma}$$

$$= \tau Xe^{-r\tau}N\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right) + V\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\frac{\sqrt{\tau}}{\sigma} - V\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\frac{\sqrt{\tau}}{\sigma}$$

$$= tXe^{-rt}N\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right) \tag{12}$$

Nos cálculos anteriores foram utilizadas, para além das equações (9.1) e (9.3), as seguintes expressões auxiliares:

$$\frac{\partial a}{\partial r}=\frac{\frac{\partial\left[\ln\left(\frac{V}{X}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]}{\partial \mathrm{r}}\sigma\sqrt{\tau}-\left[\ln\left(\frac{V}{X}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]\frac{\partial(\sigma\sqrt{\tau})}{\partial \mathrm{r}}}{\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)^2}=\frac{\tau\sigma\sqrt{\tau}}{\sigma^2\tau}=\frac{\sqrt{\tau}}{\sigma} \tag{12.1}$$

$$\frac{\partial(a-\sigma\sqrt{\tau})}{\partial r}=\frac{\partial a}{\partial r}-\frac{\partial(\sigma\sqrt{\tau})}{\partial r}=\frac{\sqrt{\tau}}{\sigma} \tag{12.2}$$

$$\frac{\partial(Xe^{-r\tau})}{\partial r}=X(-\tau e^{-r\tau})=-\tau X e^{-r\tau} \tag{12.3}$$

Resultados – Opções de barreira

Para o cálculo das letras gregas associadas às opções de barreira, será assumido que $X \geq H$, como é o caso na Tabela 1. Desta forma, combinando as equações (3) e (7) e usando álgebra básica, o *delta* (sensibilidade do valor da opção a variações do valor de mercado do ativo subjacente) da *down-and-out call* europeia é obtido através da seguinte expressão:

$$\Delta\big(DOC(H,X)\big)=\Delta\big(C(X)\big)-\Delta\big(DIC(H,X)\big), \tag{13}$$

onde $\Delta\big(C(X)\big)$ representa o *delta* da *call standard*, dado pela equação (9), e $\Delta\big(DIC(H,X)\big)$ representa o *delta* da *down-and-in* europeia (cujo valor é determinado através da equação (8)), calculado através de

$$\Delta\big(DIC(H,X)\big)=\frac{\partial DIC(H,X)}{\partial V}$$
$$=\frac{\partial\left\{\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[\left(\frac{H^2}{V}\right)N(b)-Xe^{-r\tau}N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)\right]\right\}}{\partial V}$$
$$=\left[H^{2\eta-2}\left(-(2\eta-2)^{-(2\eta-2)-1}\right)\right]\left[\frac{H^2}{V}N(b)-Xe^{-r\tau}N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)\right]$$
$$+\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[-\left(\frac{H}{V}\right)^2N(b)+\frac{H^2}{V}\frac{\partial N(b)}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial V}-Xe^{-r\tau}\frac{\partial N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)}\frac{\partial\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial V}\right]$$
$$=\left[-(2\eta-2)\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}V^{-1}\right]\left[\frac{H^2}{V}N(b)-e^{-r\tau}N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)\right]$$

$$+\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[-\left(\frac{H}{V}\right)^{2}N(b)+\frac{H^2}{V}\frac{\partial N(b)}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial V}-Xe^{-r\tau}\frac{\partial N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)}\frac{\partial(b)}{\partial V}\right]$$

$$=\left[-(2\eta-2)\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\frac{1}{V}\right]\left[\frac{H^2}{V}N(b)-Xe^{-r\tau}N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)\right]+\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}$$

$$\left[-\left(\frac{H}{V}\right)^{2}N(b)+\frac{H^2}{V}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\left(-\frac{1}{V\sigma\sqrt{\tau}}\right)-Xe^{-r\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\left(\frac{H^2}{VX}\right)e^{r\tau}\left(-\frac{1}{V\sigma\sqrt{\tau}}\right)\right]$$

$$=\left[-(2\eta-2)\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\frac{1}{V}\right]\left[\frac{H^2}{V}N(b)-Xe^{-r\tau}N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)\right]$$

$$+\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[-\left(\frac{H}{V}\right)^{2}N(b)+\left(-\frac{H^2}{V^2\sigma\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{b^2}{2}}\right)-\left(-\frac{H^2}{V^2\sigma\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{b^2}{2}}\right)\right]$$

$$=\left[-(2\eta-2)\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\frac{1}{V}\right]\left[\frac{H^2}{V}N(b)-Xe^{-r\tau}N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)\right]+\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[-\left(\frac{H}{V}\right)^{2}N(b)\right]$$

$$=\left[-(2\eta-2)\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\frac{1}{V}\right]\left[\frac{H^2}{V}N(b)-Xe^{-r\tau}N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)\right]-\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta}N(b) \qquad (14)$$

Na demonstração anterior foram utilizadas as seguintes expressões auxiliares:

$$\frac{\partial N(b)}{\partial b}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}} \qquad (14.1)$$

$$\frac{\partial b}{\partial V}=\frac{\frac{\partial\left[\ln\left(\frac{H^2}{VX}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]}{\partial V}}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$=\frac{\frac{\partial\left[\ln\left(\frac{H^2}{VX}\right)\right]}{\partial V}}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\frac{\frac{H^2}{X}-\frac{1}{V^2}}{\frac{H^2}{VX}}$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(\frac{H^2}{X}-\frac{1}{V^2}\right)\left(\frac{VX}{H^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\frac{1}{V}$$

$$=-\frac{1}{V\sigma\sqrt{\tau}} \qquad (14.2)$$

$$\frac{\partial N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)^2}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}-\frac{(-2b\sigma\sqrt{\tau})}{2}+\frac{\left(-\sigma^2(\sqrt{\tau})^2\right)}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{b^2}{2}+\left[\frac{\ln\left(\frac{H^2}{VX}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right]\sigma\sqrt{\tau}+\frac{-\sigma^2\tau}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{b^2}{2}+\ln\left(\frac{H^2}{VX}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau+\frac{-\sigma^2\tau}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{b^2}{2}+\ln\left(\frac{H^2}{VX}\right)+r\tau}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{b^2}{2}} e^{\ln\left(\frac{H^2}{VX}\right)} e^{r\tau}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{b^2}{2}} \frac{H^2}{VX} e^{r\tau} \tag{14.3}$$

$$\frac{\partial(b-\sigma\sqrt{\tau})}{\partial V} = \frac{\partial b}{\partial V} - \frac{\partial(\sigma\sqrt{\tau})}{\partial V} = -\frac{1}{V\sigma\sqrt{\tau}} \tag{14.4}$$

Usando o mesmo raciocínio, o *vega* (sensibilidade do valor da opção a variações da volatilidade do valor do ativo) da *down-and-out call* europeia é dado por:

$$\nu\big(DOC(H,X)\big) = \nu\big(C(X)\big) - \nu\big(DIC(H,X)\big), \tag{15}$$

onde $\nu\big(C(X)\big)$ representa o *vega* da *call standard*, dado pela equação (10), e $\nu\big(DIC(H,X)\big)$ representa o *vega* da *down-and-in* europeia (cujo valor é determinado através da equação (8)), calculado através de

$$\nu\big(DIC(H,X)\big) = \frac{\partial DIC(H,X)}{\partial \sigma}$$

$$\frac{\partial\left\{\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[\left(\frac{H^2}{V}\right)N(b) - Xe^{-r\tau}N\big(b-\sigma\sqrt{\tau}\big)\right]\right\}}{\partial\sigma}$$

$$= \left[\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\ln\left(\frac{H}{V}\right)\left(-\frac{4r}{\sigma^3}\right)\right]\left[\frac{H^2}{V}N(b) - Xe^{-r\tau}N\big(b-\sigma\sqrt{\tau}\big)\right]$$

$$+ \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[\frac{H^2}{V}\frac{\partial N(b)}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial \sigma} - Xe^{-r\tau}\frac{\partial N(b-\sigma\sqrt{\tau})}{\partial(b-\sigma\sqrt{\tau})}\frac{\partial(b-\sigma\sqrt{\tau})}{\partial\sigma}\right]$$

$$= \left[\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\ln\left(\frac{H}{V}\right)\left(-\frac{4r}{\sigma^3}\right)\right]\left[\frac{H^2}{V}N(b) - Xe^{-r\tau}N\big(b-\sigma\sqrt{\tau}\big)\right]$$

$$+ \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[\frac{H^2}{V}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\left(\sqrt{\tau} - \frac{b\sqrt{\tau}}{\sigma}\right) - Xe^{-r\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\frac{H^2}{VX}e^{r\tau}\left(-\frac{b\sqrt{\tau}}{\sigma}\right)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2} \ln\left(\frac{H}{V}\right)\left(-\frac{4r}{\sigma^3}\right)\right]\left[\frac{H^2}{V}N(b) - Xe^{-r\tau}N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)\right]$$

$$+ \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[\frac{H^2}{V}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\left(\sqrt{\tau}-\frac{b\sqrt{\tau}}{\sigma}\right)+\frac{H^2}{V}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\frac{b\sqrt{\tau}}{\sigma}\right]$$

$$= \left[\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2} \ln\left(\frac{H}{V}\right)\left(-\frac{4r}{\sigma^3}\right)\right]\left[\frac{H^2}{V}N(b) - Xe^{-r\tau}N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)\right] + \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[\frac{H^2}{V}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\sqrt{\tau}\right] \quad (16)$$

Nos cálculos anteriores foram utilizadas, para além das equações (14.1) e (14.3), as seguintes expressões auxiliares:

$$\frac{\partial\left[\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\right]}{\partial\sigma} = \frac{\partial\left(\frac{H}{V}\right)^{\left[2\left(\frac{r}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\right)-2\right]}}{\partial\sigma}$$

$$= \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\ln\left(\frac{H}{V}\right)\frac{\partial\left[2\left(\frac{r}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\right)-2\right]}{\partial\sigma}$$

$$= \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\ln\left(\frac{H}{V}\right)\frac{2r}{\sigma^2}$$

$$= \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\ln\left(\frac{H}{V}\right)2r\sigma^{-2}$$

$$= \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\ln\left(\frac{H}{V}\right)2r(-2\sigma^{-3})$$

$$= \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\ln\left(\frac{H}{V}\right)(-4r\sigma^{-3})$$

$$= \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\ln\left(\frac{H}{V}\right)\left(-\frac{4r}{\sigma^3}\right) \quad (16.1)$$

$$\frac{\partial b}{\partial\sigma} = \frac{\frac{\partial\left[\ln\left(\frac{H^2}{VX}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]}{\partial\sigma}\sigma\sqrt{\tau}-\left[\ln\left(\frac{H^2}{VX}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]\frac{\partial(\sigma\sqrt{\tau})}{\partial\sigma}}{\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{2\tau\sigma}{2}\sigma\sqrt{\tau}-\left[\ln\left(\frac{H^2}{VX}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]\sqrt{\tau}}{\sigma^2\tau}$$

$$= \frac{\tau\sigma\sigma\sqrt{\tau}-\left[\ln\left(\frac{H^2}{VX}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]\sqrt{\tau}}{\sigma^2\tau}$$

$$= \frac{\tau\sigma^2\sqrt{\tau}-\left[\ln\left(\frac{H^2}{VX}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]\sqrt{\tau}}{\sigma^2\tau}$$

$$= \frac{\tau\sigma^2\sqrt{\tau}}{\sigma^2\tau} - \frac{\left[\ln\left(\frac{H^2}{VX}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]}{\sigma^2\tau}\sqrt{\tau}$$

$$= \sqrt{\tau} - \frac{1}{\sigma}b\sqrt{\tau}$$

$$= \sqrt{\tau} - \frac{b\sqrt{\tau}}{\sigma} \quad (16.2)$$

$$\frac{\partial(b-\sigma\sqrt{\tau})}{\partial\sigma} = \frac{\partial b}{\partial\sigma} - \frac{\partial(\sigma\sqrt{\tau})}{\partial\sigma} = \sqrt{\tau} - \frac{b\sqrt{\tau}}{\sigma} - \sqrt{\tau} = -\frac{b\sqrt{\tau}}{\sigma} \tag{16.3}$$

Por sua vez, o *theta* (sensibilidade do valor da opção a variações do seu tempo para a maturidade) da *down-and-out call* europeia é dado por:

$$\theta\big(DOC(H,X)\big) = \theta\big(C(X)\big) - \theta\big(DIC(H,X)\big), \tag{17}$$

onde $\theta\big(C(X)\big)$ representa o *theta* da *call standard*, obtido através da equação (11), e $\theta\big(DIC(H,X)\big)$ representa o *theta* da *down-and-in* europeia (cujo valor é determinado através da equação (8)), calculado através de

$$\begin{aligned}
\theta\big(DIC(H,X)\big) &= \frac{\partial DIC(H,X)}{\partial\tau} \\
&= \frac{\partial\left\{\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[\left(\frac{H^2}{V}\right)N(b) - Xe^{-r\tau}N(b-\sigma\sqrt{\tau})\right]\right\}}{\partial\tau} \\
&= \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left\{\frac{H^2}{V}\frac{\partial N(b)}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial\tau} - \left[\frac{\partial Xe^{-r\tau}}{\partial\tau}N\big(b-\sigma\sqrt{\tau}\big) + Xe^{-r\tau}\frac{\partial N(b-\sigma\sqrt{\tau})}{\partial(b-\sigma\sqrt{\tau})}\frac{\partial(b-\sigma\sqrt{\tau})}{\partial\tau}\right]\right\} \\
&= \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left\{\frac{H^2}{V}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\left(\frac{r}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} - \frac{b}{2\tau}\right) - \left[-Xre^{-r\tau}N\big(b-\sigma\sqrt{\tau}\big) + \right.\right. \\
&\left.\left. Xe^{-r\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\frac{H^2}{VX}e^{r\tau}\left(\frac{r}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{b}{2\tau}\right)\right]\right\} \\
&= \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[\frac{H^2}{V}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\left(\frac{r}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} - \frac{b}{2\tau}\right) + Xre^{-r\tau}N\big(b-\sigma\sqrt{\tau}\big) - \frac{H^2}{V}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\left(\frac{r}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{b}{2\tau}\right)\right] \\
&= \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[\frac{H^2}{V}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\left(\frac{r}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} - \frac{b}{2\tau}\right) + Xre^{-r\tau}N\big(b-\sigma\sqrt{\tau}\big) - \frac{H^2}{V}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\left(\frac{r}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{b}{2\tau}\right)\right] \\
&= \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[\frac{H^2}{V}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} + Xre^{-r\tau}N\big(b-\sigma\sqrt{\tau}\big)\right]
\end{aligned} \tag{18}$$

Na demonstração anterior foram utilizadas, para além das equações (14.1) e (14.3), as seguintes expressões auxiliares:

$$\frac{\partial b}{\partial\tau} = \frac{\frac{\partial\left[\ln\left(\frac{H^2}{VX}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]}{\partial\tau}\sigma\sqrt{\tau} - \left[\ln\left(\frac{H^2}{VX}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]\frac{\partial(\sigma\sqrt{\tau})}{\partial\tau}}{\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\sigma\sqrt{\tau}-\left[\ln\left(\frac{H^2}{VX}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]\left(\sigma\frac{1}{2}\tau^{-0.5}\right)}{\sigma^2\tau}$$

$$= \frac{\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\sigma\sqrt{\tau}}{\sigma^2\tau} - \frac{\left[\ln\left(\frac{H^2}{VX}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]\frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}}{\sigma^2\tau}$$

$$= \frac{\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\sigma\sqrt{\tau}}{\sigma^2\sqrt{\tau}} - \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}}\frac{1}{\sigma^2\tau}\left[\ln\left(\frac{H^2}{VX}\right) + \left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]$$

$$= \frac{r\sigma\sqrt{\tau}}{\sigma^2\tau} + \frac{\sigma^2\sigma\sqrt{\tau}}{2\sigma^2\tau} - \frac{b}{2\tau}$$

$$= \frac{r}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} - \frac{b}{2\tau} \tag{18.1}$$

$$\frac{\partial(b-\sigma\sqrt{\tau})}{\partial\tau} = \frac{\partial b}{\partial\tau} - \frac{\partial\sigma\sqrt{\tau}}{\partial\tau} = \frac{r}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} - \frac{b}{2\tau} - \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} = \frac{r}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{b}{2\tau} \tag{18.2}$$

$$\frac{\partial(Xe^{-r\tau})}{\partial\tau} = X(-re^{-r\tau}) = -Xre^{-r\tau} \tag{18.3}$$

Da mesma forma, o *rho* (sensibilidade do valor da opção a variações da taxa de juro sem risco) da *down-and-out call* europeia é dado por:

$$\rho\big(DOC(H,X)\big) = \rho\big(C(X)\big) - \rho\big(DIC(H,X)\big), \tag{19}$$

onde $\rho\big(C(X)\big)$ representa o *rho* da *call standard*, obtido através da equação (12), e $\rho\big(DIC(H,X)\big)$ representa o *rho* da *down-and-in* europeia (cujo valor é determinado através da equação (8)), calculado através de

$$\rho\big(DIC(H,X)\big) = \frac{\partial DIC(H,X)}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial\left\{\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[\left(\frac{H^2}{V}\right)N(b) - Xe^{-r\tau}N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)\right]\right\}}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial\left[\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\right]}{\partial r}\left[\left(\frac{H^2}{V}\right)N(b) - Xe^{-r\tau}N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)\right]$$

$$+ \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left\{\frac{H^2}{V}\frac{\partial N(b)}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial r} - \left[\frac{\partial(Xe^{-r\tau})}{\partial r}N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right) + Xe^{-r\tau}\frac{\partial N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)}\frac{\partial\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial r}\right]\right\}$$

$$= \left[\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\ln\left(\frac{H}{V}\right)\frac{2}{\sigma^2}\right]\left[\left(\frac{H^2}{V}\right)N(b) - Xe^{-r\tau}N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)\right]$$

$$+ \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left\{\frac{H^2}{V}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\frac{\sqrt{\tau}}{\sigma} - \left[(-X\tau e^{-r\tau})N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right) + Xe^{-r\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\frac{H^2}{VX}e^{r\tau}\frac{\sqrt{\tau}}{\sigma}\right]\right\}$$

$$= \left[\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2} \ln\left(\frac{H}{V}\right)\frac{2}{\sigma^2}\right]\left[\left(\frac{H^2}{V}\right)N(b) - Xe^{-r\tau}N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)\right]$$

$$+\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[\frac{H^2}{V}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\frac{\sqrt{\tau}}{\sigma}+X\tau e^{-r\tau}N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)-\frac{H^2}{V}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\frac{\sqrt{\tau}}{\sigma}\right]$$

$$= \left[\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2} \ln\left(\frac{H}{V}\right)\frac{2}{\sigma^2}\right]\left[\left(\frac{H^2}{V}\right)N(b) - Xe^{-r\tau}N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)\right]+\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2} X\tau e^{-r\tau}N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right) \tag{20}$$

Nos cálculos anteriores foram utilizadas, para além das equações (14.1) e (14.3), as seguintes expressões auxiliares:

$$\frac{\partial\left[\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\right]}{\partial r} = \frac{\partial\left(\frac{H}{V}\right)^{\left[2\left(\frac{r}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\right)-2\right]}}{\partial r}$$

$$= \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\ln\left(\frac{H}{V}\right)\frac{\partial\left[2\left(\frac{r}{\sigma^2}+\frac{1}{2}\right)-2\right]}{\partial r}$$

$$= \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\ln\left(\frac{H}{V}\right)\frac{2}{\sigma^2} \tag{20.1}$$

$$\frac{\partial b}{\partial r} = \frac{\frac{\partial\left[\ln\left(\frac{H^2}{VX}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]}{\partial \mathrm{r}}\sigma\sqrt{\tau}-\left[\ln\left(\frac{H^2}{VX}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]\frac{\partial(\sigma\sqrt{\tau})}{\partial r}}{\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)^2} = \frac{\tau\sigma\sqrt{\tau}}{\sigma^2\tau} = \frac{\sqrt{\tau}}{\sigma} \tag{20.2}$$

$$\frac{\partial\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial r} = \frac{\partial b}{\partial r} - \frac{\partial\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial r} = \frac{\sqrt{\tau}}{\sigma} \tag{20.3}$$

$$\frac{\partial\left(Xe^{-r\tau}\right)}{\partial r} = X\left(-\tau e^{-r\tau}\right) = -X\tau e^{-r\tau} \tag{20.4}$$

Finalmente, a sensibilidade (denotada por *gamma*) do valor da *down-and-call* a variações do nível da barreira é dada por:

$$\gamma\left(DOC(H,X)\right) = \gamma(C) - \gamma\left(DIC(H,X)\right), \tag{21}$$

onde $\gamma\left(C(X)\right)$ representa o *gamma* da *call standard*, e $\gamma\left(DIC(H,X)\right)$ representa o *gamma* da *down-and-in* europeia. Para $X \geq H$, temos que $\gamma\left(C(X)\right) = 0$, uma vez que o preço da *call standard* não é influenciado pelo valor da barriera. Por sua vez, $\gamma\left(DIC(H,X)\right)$ é dado por:

$$\gamma\big(DIC(H,X)\big) = \frac{\partial DIC(H,X)}{\partial \mathrm{H}}$$

$$= \frac{\partial\left\{\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[\left(\frac{H^2}{V}\right)N(b) - Xe^{-r\tau}N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)\right]\right\}}{\partial H}$$

$$= \frac{\partial\left[\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\right]}{\partial H}\left[\left(\frac{H^2}{V}\right)N(b) - \; Xe^{-r\tau}N\big(b-\sigma\sqrt{\tau}\big)\right]$$

$$+\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[\frac{\partial\left(\frac{H^2}{V}\right)}{\partial H}N(b) + \frac{H^2}{V}\frac{\partial N(b)}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial \mathrm{H}} - Xe^{-r\tau}\frac{\partial N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)}\frac{\partial\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial \mathrm{H}}\right]$$

$$= \left[(2\eta-2)\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\frac{1}{H}\right]\left[\left(\frac{H^2}{V}\right)N(b) - \; Xe^{-r\tau}N\big(b-\sigma\sqrt{\tau}\big)\right]$$

$$+\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[\frac{2H}{V}N(b) + \frac{H^2}{V}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\frac{2}{H\sigma\sqrt{\tau}} \; - Xe^{-r\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\frac{H^2}{VX}e^{r\tau}\frac{2}{H\sigma\sqrt{\tau}}\;\right]$$

$$= \left[(2\eta-2)\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\frac{1}{H}\right]\left[\left(\frac{H^2}{V}\right)N(b) - \; Xe^{-r\tau}N\big(b-\sigma\sqrt{\tau}\big)\right]$$

$$+\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[\frac{H^2}{V}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\frac{2}{H\sigma\sqrt{\tau}} \; - \frac{H^2}{V}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\frac{2}{H\sigma\sqrt{\tau}}\;\right]$$

$$= \left[(2\eta-2)\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\frac{1}{H}\right]\left[\left(\frac{H^2}{V}\right)N(b) - \; Xe^{-r\tau}N\big(b-\sigma\sqrt{\tau}\big)\right] + \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[\frac{2H}{V}N(b)\right] \tag{22}$$

Na demonstração anterior foram utilizadas, para além das equações (14.1) e (14.3), as seguintes expressões auxiliares:

$$\frac{\partial\left[\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\right]}{\partial H} = \frac{\frac{\partial\left(H^{2\eta-2}\right)}{\partial H}V^{2\eta-2} - H^{2\eta-2}\frac{\partial\left(V^{2\eta-2}\right)}{\partial H}}{\left(V^{2\eta-2}\right)^2}$$

$$= \frac{(2\eta-2)H^{2\eta-2-1}V^{2\eta-2}}{\left(V^{2\eta-2}\right)^2}$$

$$= \frac{(2\eta-2)H^{2\eta-2-1}}{V^{2\eta-2}}$$

$$= \frac{(2\eta-2)H^{2\eta-2}H^{-1}}{V^{2\eta-2}}$$

$$= (2\eta-2)\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\frac{1}{H} \tag{22.1}$$

$$\frac{\partial b}{\partial H} = \frac{\frac{\partial\left[\ln\left(\frac{H^2}{VX}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]}{\partial \mathrm{H}}\sigma\sqrt{\tau} - \left[\ln\left(\frac{H^2}{VX}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]\frac{\partial\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial \mathrm{H}}}{\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)^2} = \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{\sigma^2\tau}\frac{\frac{2H}{VX}}{\frac{H^2}{VX}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\frac{2H}{VX}\frac{VX}{H^2} = \frac{2}{H\sigma\sqrt{\tau}} \tag{22.2}$$

$$\frac{\partial(b-\sigma\sqrt{\tau})}{\partial r} = \frac{\partial b}{\partial r} - \frac{\partial(\sigma\sqrt{\tau})}{\partial r} = \frac{2}{H\sigma\sqrt{\tau}} \tag{22.3}$$

Para $X < H$, o valor da *call standard* é influenciado pelo nível da barreira, nomeadamente através de a e b, definidos pelas equações (23.2) e (24.2), respetivamente. Assim, temos que:

$$\gamma\big(C(X)\big) = \frac{\partial C(X)}{\partial \mathrm{H}}$$
$$= \frac{\partial\left[VN(a) - Xe^{-r\tau}N\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right)\right]}{\partial H}$$
$$= V\frac{\partial N(a)}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \mathrm{H}} - Xe^{-r\tau}\frac{\partial N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)}\frac{\partial\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial \mathrm{H}}$$
$$= V\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\left(-\frac{1}{H\sigma\sqrt{\tau}}\right) - Xe^{-r\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\frac{V}{H}e^{r\tau}\left(-\frac{1}{H\sigma\sqrt{\tau}}\right)$$
$$= X\frac{V}{H}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\frac{1}{H\sigma\sqrt{\tau}} - V\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\frac{1}{H\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{1}{H\sigma\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{a^2}{2}}\left(\frac{XV}{H} - V\right)$$
$$= \frac{V}{H\sigma\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{a^2}{2}}\left(\frac{X}{H} - 1\right) \tag{23}$$

Nos cálculos anteriores foram utilizadas as seguintes expressões auxiliares:

$$\frac{\partial N(a)}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}} \tag{23.1}$$

$$\frac{\partial a}{\partial H} = \frac{\frac{\partial\left[\ln\left(\frac{V}{H}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]}{\partial H}}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\frac{V\left(-H^{-1-1}\right)}{\frac{V}{H}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}V\left(-\frac{1}{H^2}\right)\frac{H}{V} = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left(-\frac{V}{H^2}\right)\frac{H}{V} = -\frac{1}{H\sigma\sqrt{\tau}} \tag{23.2}$$

$$\frac{\partial N\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(a-\sigma\sqrt{\tau}\right)^2}{2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}-\frac{\left(-2a\sigma\sqrt{\tau}\right)}{2}+\frac{\left(-\sigma^2\left(\sqrt{\tau}\right)^2\right)}{2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}+\left[\frac{\ln\left(\frac{V}{H}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right]\sigma\sqrt{\tau}+\frac{-\sigma^2\tau}{2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}+\ln\left(\frac{V}{H}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau+\frac{-\sigma^2\tau}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a}{2}+\ln\left(\frac{V}{H}\right)+r\tau}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}} e^{\ln\left(\frac{V}{H}\right)} e^{r\tau}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}} \frac{V}{H} e^{r\tau} \tag{23.3}$$

$$\frac{\partial(a-\sigma\sqrt{\tau})}{\partial H} = \frac{\partial a}{\partial H} - \frac{\partial(\sigma\sqrt{\tau})}{\partial H} = -\frac{1}{H\sigma\sqrt{\tau}} \tag{23.4}$$

Do que diz respeito à sensibilidade do valor da *down-and-in call*, temos:

$$\gamma\big(DIC(H,X)\big) = \frac{\partial DIC(H,X)}{\partial \mathrm{H}}$$

$$= \frac{\partial\left\{\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[\left(\frac{H^2}{V}\right)N(b) - Xe^{-r\tau}N\big(b-\sigma\sqrt{\tau}\big)\right]\right\}}{\partial H}$$

$$= \frac{\partial\left[\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\right]}{\partial H}\left[\left(\frac{H^2}{V}\right)N(b) - Xe^{-r\tau}N\big(b-\sigma\sqrt{\tau}\big)\right]$$

$$+ \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[\frac{\partial\left(\frac{H^2}{V}\right)}{\partial H}N(b) + \frac{H^2}{V}\frac{\partial N(b)}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial \mathrm{H}} - Xe^{-r\tau}\frac{\partial N\big(b-\sigma\sqrt{\tau}\big)}{\partial\big(b-\sigma\sqrt{\tau}\big)}\frac{\partial\big(b-\sigma\sqrt{\tau}\big)}{\partial \mathrm{H}}\right]$$

$$= \left[(2\eta-2)\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\frac{1}{H}\right]\left[\left(\frac{H^2}{V}\right)N(b) - Xe^{-r\tau}N\big(b-\sigma\sqrt{\tau}\big)\right]$$

$$+ \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[\frac{2H}{V}N(b) + \frac{H^2}{V}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\frac{1}{H\sigma\sqrt{\tau}} - Xe^{-r\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\frac{H}{V}e^{r\tau}\frac{1}{H\sigma\sqrt{\tau}}\right]$$

$$= \left[(2\eta-2)\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\frac{1}{H}\right]\left[\left(\frac{H^2}{V}\right)N(b) - Xe^{-r\tau}N\big(b-\sigma\sqrt{\tau}\big)\right]$$

$$+ \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[\frac{2H}{V}N(b) + \frac{H^2}{V}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\frac{1}{H\sigma\sqrt{\tau}} - X\frac{H}{V}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\frac{1}{H\sigma\sqrt{\tau}}\right]$$

$$= \left[(2\eta-2)\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\frac{1}{H}\right]\left[\left(\frac{H^2}{V}\right)N(b) - Xe^{-r\tau}N\big(b-\sigma\sqrt{\tau}\big)\right]$$

$$+ \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[\frac{2H}{V}N(b) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\frac{1}{H\sigma\sqrt{\tau}}\left(\frac{H^2}{V} - X\frac{H}{V}\right)\right]$$

$$= \left[(2\eta-2)\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\frac{1}{H}\right]\left[\left(\frac{H^2}{V}\right)N(b) - Xe^{-r\tau}N\big(b-\sigma\sqrt{\tau}\big)\right]$$

$$+ \left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[\frac{2H}{V}N(b) + \frac{H}{HV\sigma\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{b^2}{2}}(H-X)\right]$$

$$= \left[(2\eta-2)\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\frac{1}{H}\right]\left[\left(\frac{H^2}{V}\right)N(b) - Xe^{-r\tau}N\big(b-\sigma\sqrt{\tau}\big)\right]$$

$$+\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\left[\frac{2H}{V}N(b)+\frac{1}{V\sigma\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{b^2}{2}}(H-X)\right] \qquad (24)$$

Nos cálculos anteriores foram utilizadas as seguintes expressões auxiliares:

$$\frac{\partial N(b)}{\partial b}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}} \qquad (24.1)$$

$$\frac{\partial b}{\partial H}=\frac{\frac{\partial\left[\ln\left(\frac{H}{V}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right]}{\partial H}}{\sigma\sqrt{\tau}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\frac{V^{-1}}{\frac{H}{V}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\frac{1}{V}\frac{V}{H}=\frac{1}{H\sigma\sqrt{\tau}} \qquad (24.2)$$

$$\frac{\partial N\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)^2}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}-\frac{\left(-2b\sigma\sqrt{\tau}\right)}{2}+\frac{\left(-\sigma^2\left(\sqrt{\tau}\right)^2\right)}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}+\left[\frac{\ln\left(\frac{H}{V}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right]\sigma\sqrt{\tau}+\frac{-\sigma^2\tau}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}+\ln\left(\frac{H}{V}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau+\frac{-\sigma^2\tau}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}+\ln\left(\frac{H}{V}\right)+r\tau}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}e^{\ln\left(\frac{H}{V}\right)}e^{r\tau}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{b^2}{2}}\frac{H}{V}e^{r\tau} \qquad (24.3)$$

$$\frac{\partial\left(b-\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial \mathrm{H}}=\frac{\partial b}{\partial \mathrm{H}}-\frac{\partial\left(\sigma\sqrt{\tau}\right)}{\partial \mathrm{H}}=\frac{1}{H\sigma\sqrt{\tau}} \qquad (24.4)$$

$$\frac{\partial\left[\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\right]}{\partial H}=\frac{\frac{\partial\left(H^{2\eta-2}\right)}{\partial H}V^{2\eta-2}-H^{2\eta-2}\frac{\partial\left(V^{2\eta-2}\right)}{\partial H}}{\left(V^{2\eta-2}\right)^2}$$

$$=\frac{(2\eta-2)H^{2\eta-2-1}V^{2\eta-2}}{\left(V^{2\eta-2}\right)^2}$$

$$=\frac{(2\eta-2)H^{2\eta-2-1}}{V^{2\eta-2}}$$

$$=\frac{(2\eta-2)H^{2\eta-2}H^{-1}}{V^{2\eta-2}}$$

$$= (2\eta - 2)\left(\frac{H}{V}\right)^{2\eta-2}\frac{1}{H} \tag{24.5}$$

Anexo II – Descrição do código MATLAB utilizado na implementação

Neste anexo encontra-se descrito o código do *software* MATLAB utilizado para a implementação dos cálculos necessários à obtenção da Tabela 1.

```
%Implementação do artigo de Episcopos (2008)

function Episcopos_2008()

    clear; clc;
    format bank;

    %Parâmetros de entrada:
        %Primeira coluna - Valor de mercado inicial do ativo
        %Segunda coluna - Strike da opção
        %Terceira coluna - Barreira regulamentar
        %Quarta coluna - Volatilidade do valor de mercado dos ativos
        %Quita coluna - Taxa de juro sem risco
        %Quinta coluna - Horizonte regulamentar
    conts = [95 90 90 0.20 0.10 1;
            100     90 90 0.20 0.10         1;
            105     90 90 0.20 0.10         1;
            110     90 90 0.20 0.10         1;
            100     90 80 0.20 0.10         1;
            100     90 85 0.20 0.10         1;
            100     90 90 0.20 0.10         1;
            100     90 95 0.20 0.10         1;
            100     90 90 0.10 0.10         1;
            100     90 90 0.20 0.10         1;
            100     90 90 0.30 0.10         1;
            100     90 90 0.40 0.10         1;
            100     90 90 0.20 0.10         0.5;
```

```
        100     90 90 0.20 0.10         1;
        100     90 90 0.20 0.10         1.5;
        100     90 90 0.20 0.10         2;
        100     90 90 0.20 0.05         1;
        100     90 90 0.20 0.10         1;
        100     90 90 0.20 0.15         1;
        100     90 90 0.20 0.20         1];

    V = conts(:,1);         %Valor de mercado inicial do ativo
    X = conts(:,2);         %Strike da opção
    H = conts(:,3);         %Barreira regulamentar
    sig = conts(:,4);       %Volatilidade do valor de mercado dos ativos
    r = conts(:,5);         %Taxa de juro sem risco
    tau = conts(:,6);       %Horizonte regulamentar

    nconts = size(conts,1); %variável para especificar o tamanho da tabela = 20

    results = zeros(nconts,7); %definição do número de colunas dado que as variáveis não
mudam = 7

    %Para preencher a tabela, será dividido o código em
    %sub-blocos de 4 linhas (um sub-bloco para cada parâmetro)
    for i = 1:1:nconts

                %Auxiliar para cálculo das Gregas
      d1 = (log(V(i,1)/X(i,1))+r(i,1)*tau(i,1)+(sig(i,1)^2)*tau(i,1)/2)/(sig(i,1)*(tau(i,1)^0.5));
      d2 = d1-sig(i,1)*(tau(i,1)^0.5);
      d3 = (log(V(i,1)/X(i,1))+r(i,1)*tau(i,1)+(sig(i,1)^2)*tau(i,1)/2)/(sig(i,1)*(tau(i,1)^0.5));

      %Bloco que preenche as 4 primeiras linhas (onde "V" varia)
      if i >= 1 && i <= 4

        results(i,1) = V(i,1);
```

```
        results(i,2) = PriceEuropeanDOCallOption(V(i, 1), X(i, 1), H (i, 1), sig(i, 1), r(i, 1),
tau(i, 1));
        results(i,3) = Delta_GreekEDOCallPrice(...
        Delta_GreekECallPrice(V(i,1), X(i,1), sig(i,1), r(i,1), tau(i,1)),...
        Delta_GreekEDICallPrice(V(i, 1), X(i, 1), H(i, 1), sig(i, 1), r(i, 1), tau(i, 1)));
        results(i,4) = PriceEuropeanCallOption(V(i,1), X(i,1), sig(i,1), r(i,1), tau(i,1));
        results(i,5) = Delta_GreekECallPrice(V(i,1), X(i,1), sig(i,1), r(i,1), tau(i,1));
        results(i,6) = PriceEuropeanDICallOption(...
        PriceEuropeanCallOption(V(i,1), X(i,1), sig(i,1), r(i,1), tau(i,1)),...
        PriceEuropeanDOCallOption(V(i, 1), X(i, 1), H (i, 1), sig(i, 1), r(i, 1), tau(i, 1)));
        results(i,7) = Delta_GreekEDICallPrice(V(i, 1), X(i, 1), H(i, 1), sig(i, 1), r(i, 1), tau(i,
1));

    %Bloco que preenche as 4 segundas linhas (onde "H" varia)
    elseif i > 4 && i <= 8

        results(i,1) = H(i,1);
        results(i,2) = PriceEuropeanDOCallOption(V(i, 1), X(i, 1), H (i, 1), sig(i, 1), r(i, 1),
tau(i, 1));
        results(i,3) = H_GreekEDOCallPrice(V(i, 1), X(i, 1), H(i, 1), sig(i, 1), r(i, 1), tau(i, 1));
        results(i,4) = PriceEuropeanCallOption( V(i,1), X(i,1), sig(i,1), r(i,1), tau(i,1));
        results(i,5) = 0;
        results(i,6) = PriceEuropeanDICallOption(...
        PriceEuropeanCallOption(V(i,1), X(i,1), sig(i,1), r(i,1), tau(i,1)),...
        PriceEuropeanDOCallOption(V(i, 1), X(i, 1), H (i, 1), sig(i, 1), r(i, 1), tau(i, 1)));
        results(i,7) = -H_GreekEDOCallPrice(V(i, 1), X(i, 1), H(i, 1), sig(i, 1), r(i, 1), tau(i, 1));

    %Bloco que preenche as 4 terceiras linhas (onde "sig")
    elseif i > 8 && i <= 12

        results(i,1) = sig(i,1);
        results(i,2) = PriceEuropeanDOCallOption(V(i, 1), X(i, 1), H (i, 1), sig(i, 1), r(i, 1),
tau(i, 1));
        results(i,3) = Vega_GreekEDOCallPrice(...
```

```
        Vega_GreekECallPrice(V(i,1), X(i,1), sig(i,1), r(i,1), tau(i,1)),...
        Vega_GreekEDICallPrice(V(i, 1), X(i, 1), H(i, 1), sig(i, 1), r(i, 1), tau(i, 1)));
        results(i,4) = PriceEuropeanCallOption( V(i,1), X(i,1), sig(i,1), r(i,1), tau(i,1));
        results(i,5) = ((exp(-(d1^2)/2)/(sqrt(2*pi())))*(V(i,1)*sqrt(tau(i,1))));
        results(i,6) = PriceEuropeanDICallOption(...
        PriceEuropeanCallOption(V(i,1), X(i,1), sig(i,1), r(i,1), tau(i,1)),...
        PriceEuropeanDOCallOption(V(i, 1), X(i, 1), H (i, 1), sig(i, 1), r(i, 1), tau(i, 1)));
        results(i,7) = Vega_GreekEDICallPrice(V(i, 1), X(i, 1), H(i, 1), sig(i, 1), r(i, 1), tau(i,
1));

    %Bloco que preenche as 4 quartas linhas (onde "tau" varia)
    elseif i > 12 && i <= 16

        results(i,1) = tau(i,1);
        results(i,2) = PriceEuropeanDOCallOption(V(i, 1), X(i, 1), H (i, 1), sig(i, 1), r(i, 1),
tau(i, 1));
        results(i,3) = Theta_GreekEDOCallPrice(...
        Theta_GreekECallPrice(V(i,1), X(i,1), sig(i,1), r(i,1), tau(i,1)),...
        Theta_GreekEDICallPrice(V(i, 1), X(i, 1), H(i, 1), sig(i, 1), r(i, 1), tau(i, 1)));
        results(i,4) = PriceEuropeanCallOption( V(i,1), X(i,1), sig(i,1), r(i,1), tau(i,1));
        results(i,5)                    =                    ((exp(-
(d1^2)/2)/sqrt(2*pi())*(V(i,1))*sig(i,1))/(2*sqrt(tau(i,1)))+r(i,1)*X(i,1)*exp(-
r(i,1)*tau(i,1))*normcdf(d2));
        results(i,6) = PriceEuropeanDICallOption(...
        PriceEuropeanCallOption(V(i,1), X(i,1), sig(i,1), r(i,1), tau(i,1)),...
        PriceEuropeanDOCallOption(V(i, 1), X(i, 1), H (i, 1), sig(i, 1), r(i, 1), tau(i, 1)));
        results(i,7) = Theta_GreekEDICallPrice(V(i, 1), X(i, 1), H(i, 1), sig(i, 1), r(i, 1), tau(i,
1));

    %Bloco que preenche as 4 quintas linhas (onde "r" varia)
    elseif i > 16 && i <= 20

        results(i,1) = r(i,1);
```

```
            results(i,2) = PriceEuropeanDOCallOption(V(i, 1), X(i, 1), H (i, 1), sig(i, 1), r(i, 1),
tau(i, 1));
            results(i,3) = Rho_GreekEDOCallPrice(...
            Rho_GreekECallPrice(V(i,1), X(i,1), sig(i,1), r(i,1), tau(i,1)),...
            Rho_GreekEDICallPrice(V(i, 1), X(i, 1), H(i, 1), sig(i, 1), r(i, 1), tau(i, 1)));
            results(i,4) = PriceEuropeanCallOption( V(i,1), X(i,1), sig(i,1), r(i,1), tau(i,1));
            results(i,5) = (tau(i,1)*X(i,1)*exp(-r(i,1)*tau(i,1))*normcdf(d2));
            results(i,6) = PriceEuropeanDICallOption(...
            PriceEuropeanCallOption(V(i,1), X(i,1), sig(i,1), r(i,1), tau(i,1)),...
            PriceEuropeanDOCallOption(V(i, 1), X(i, 1), H (i, 1), sig(i, 1), r(i, 1), tau(i, 1)));
            results(i,7) = Rho_GreekEDICallPrice(V(i, 1), X(i, 1), H(i, 1), sig(i, 1), r(i, 1), tau(i,
1));
        end
    end
    results
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Sub-funções

%Preço da european standard call option

function ECallPrice = PriceEuropeanCallOption(V, X, sig, r, tau)
    d1 = (log(V/X)+r*tau+(sig^2)*tau/2)/(sig*(tau^0.5));
    d2 = d1-sig*(tau^0.5);

    ECallPrice = V*normcdf(d1)-X*exp(-r*tau)*normcdf(d2);
end

%Preço da european down-and-out barrier call option

function EDOCallPrice = PriceEuropeanDOCallOption(V, X, H, sig, r, tau)
```

```
    lam = (r+((sig^2)/2))/(sig^2);

    if (X >= H)
        dM1=(log(V/X)+r*tau+(sig^2)*tau/2)/(sig*(tau^0.5));
        dM2=(log((H^2)/(V*X))+r*tau+(sig^2)*tau/2)/(sig*(tau^0.5));
    else
        dM1=(log((V)/H)+r*tau+(sig^2)*tau/2)/(sig*(tau^0.5));
        dM2=(log((H)/V)+r*tau+(sig^2)*tau/2)/(sig*(tau^0.5));
    end
    EDOCallPrice = -V *((H/V)^(2*lam)) * normcdf(dM2) + ...
            X*(exp(-r*tau))*((H/V)^(2*lam-2))* ...
            normcdf(dM2-sig*(tau^0.5))+V*normcdf(dM1)-X* ...
            exp(-r*tau)*normcdf(dM1-sig*(tau^0.5));
end

%Preço da european down-and-in barrier call option

function EDICallPrice = PriceEuropeanDICallOption(ECallPrice, EDOCallPrice)
    EDICallPrice = ECallPrice - EDOCallPrice;
end

%##########################

%Gregas da european down-and-in barrier call option

function Delta_EDICallPrice = Delta_GreekEDICallPrice(V, X, H, sig, r, tau)
        eta = (r/(sig^2))+(1/2);
        d3 = (log(V/X)+r*tau+(sig^2)*tau/2)/(sig*(tau^0.5));
        d4 = (log((H^2)/(V*X))+r*tau+(sig^2)*tau/2)/(sig*(tau^0.5));

        Delta_EDICallPrice = (-(2*eta-2)*((H/V)^(2*eta-2))*(1/V))* ...
                (((H^2)/V)*normcdf(d4)-(X*exp(-r*tau))*normcdf(d4-sig*(tau^0.5)))+ ...
                (-((H/V)^(2*eta))*normcdf(d4));
end
```

```
function Vega_EDICallPrice = Vega_GreekEDICallPrice(V, X, H, sig, r, tau)
        eta = (r/(sig^2))+(1/2);
        d3 = (log(V/X)+r*tau+(sig^2)*tau/2)/(sig*(tau^0.5));
        d4 = (log((H^2)/(V*X))+r*tau+(sig^2)*tau/2)/(sig*(tau^0.5));

        Vega_EDICallPrice = (((H/V)^(2*eta-2))*log(H/V)*-((4*r)/(sig^3)))* ...
      (((H^2)/V)*normcdf(d4)-(X*(exp(-r*tau)))*normcdf(d4-sig*(tau^0.5)))+ ...
      ((H/V)^(2*eta-2))*(((H^2)/V)*(1/((2*pi())^0.5))*exp(-(d4^2)/2)* ...
      (tau^0.5));
end

function Theta_EDICallPrice = Theta_GreekEDICallPrice(V, X, H, sig, r, tau)
        eta = (r/(sig^2))+(1/2);
        d3 = (log(V/X)+r*tau+(sig^2)*tau/2)/(sig*(tau^0.5));
        d4 = (log((H^2)/(V*X))+r*tau+(sig^2)*tau/2)/(sig*(tau^0.5));

        Theta_EDICallPrice = ((H/V)^(2*eta-2))* ...
      (((H^2)/V)*(1/((2*pi())^0.5))*exp(-(d4^2)/2)* ...
      (sig/(2*(tau^0.5)))+ ...
      (X*r*exp(-r*tau))*normcdf(d4-(sig*(tau^0.5))));
end

function Rho_EDICallPrice = Rho_GreekEDICallPrice(V, X, H, sig, r, tau)
        eta = (r/(sig^2))+(1/2);
        d3 = (log(V/X)+r*tau+(sig^2)*tau/2)/(sig*(tau^0.5));
        d4 = (log((H^2)/(V*X))+r*tau+(sig^2)*tau/2)/(sig*(tau^0.5));

        Rho_EDICallPrice = (((H/V)^(2*eta-2))*log(H/V)*(2/(sig^2)))* ...
                (((H^2)/V)*normcdf(d4)-(X*(exp(-r*tau)))*normcdf(d4-sig*(tau^0.5)))+ ...
                ((H/V)^(2*eta-2))*(((H^2)/V)*(1/((2*pi())^0.5))*exp(-(d4^2)/2)* ...
                ((tau^0.5)/sig)-((-tau*X*exp(-r*tau))*normcdf(d4-(sig*(tau^0.5)))+ ...
                ((1/((2*pi())^0.5))* ...
                exp(-(d4^2)/2)*((H^2)/V))*((tau^0.5)/sig)));
```

```
end

%########################

%Derivadas da european standard call option
function Delta_ECallPrice = Delta_GreekECallPrice(V, X, sig, r, tau)
   d3 = (log(V/X)+r*tau+(sig^2)*tau/2)/(sig*(tau^0.5));
   Delta_ECallPrice = normcdf(d3);
end

function Vega_ECallPrice = Vega_GreekECallPrice(V, X, sig, r, tau)
   d3 = (log(V/X)+r*tau+(sig^2)*tau/2)/(sig*(tau^0.5));
   Vega_ECallPrice = ((V*(tau^0.5))/((2*pi())^0.5)) * exp(-(d3^2)/2);
end

function Theta_ECallPrice = Theta_GreekECallPrice(V, X, sig, r, tau)
   d3 = (log(V/X)+r*tau+(sig^2)*tau/2)/(sig*(tau^0.5));
   Theta_ECallPrice = ((V*sig)/(2*(2*pi()*tau)^0.5))*exp(-(d3^2)/2)+ ...
      (r*X*exp(-r*tau)*normcdf(d3-sig*(tau^0.5)));
end

function Rho_ECallPrice = Rho_GreekECallPrice(V, X, sig, r, tau)
   d3 = (log(V/X)+r*tau+(sig^2)*tau/2)/(sig*(tau^0.5));
   Rho_ECallPrice = (tau*X*exp(-r*tau)*normcdf(d3-sig*(tau^0.5)));
end

%########################

%Derivadas da european down-and-out barrier call option
function Delta_EDOCallPrice = Delta_GreekEDOCallPrice(Delta_ECallPrice,
Delta_EDICallPrice)
   Delta_EDOCallPrice = Delta_ECallPrice - Delta_EDICallPrice;
end
```

```
function Vega_EDOCallPrice = Vega_GreekEDOCallPrice(Vega_ECallPrice, Vega_EDICallPrice)
   Vega_EDOCallPrice = Vega_ECallPrice - Vega_EDICallPrice;
end

function Theta_EDOCallPrice = Theta_GreekEDOCallPrice(Theta_ECallPrice, Theta_EDICallPrice)
   Theta_EDOCallPrice = Theta_ECallPrice - Theta_EDICallPrice;
end

function Rho_EDOCallPrice = Rho_GreekEDOCallPrice(Rho_ECallPrice, Rho_EDICallPrice)
   Rho_EDOCallPrice = Rho_ECallPrice - Rho_EDICallPrice;
end

%##########################

%Derivada em ordem ao valor da barreira

function H_EDOCallPrice = H_GreekEDOCallPrice(V, X, H, sig, r, tau)
	eta = (r/(sig^2))+(1/2);

	if (X >= H)
		d3 = (log(V/X)+r*tau+(sig^2)*tau/2)/(sig*(tau^0.5));
		d4 = (log((H^2)/(V*X))+r*tau+(sig^2)*tau/2)/(sig*(tau^0.5));

	H_EDOCallPrice = -((2*eta-2)*((H/V)^(2*eta-2))*(1/H))* ...
      (((H^2)/V)*normcdf(d4)-(X*(exp(-r*tau)))*normcdf(d4-sig*(tau^0.5)))- ...
      ((H/V)^(2*eta-2))*(((2*H)/V)*normcdf(d4));
	else
		d5 = (log(V/H)+r*tau+(sig^2)*tau/2)/(sig*(tau^0.5));
		d6 = (log(H/V)+r*tau+(sig^2)*tau/2)/(sig*(tau^0.5));

	H_EDOCallPrice = (V/(H*sig*((2*pi()*tau)^0.5)))*exp(-(d5^2)/2)*((X/H)-1)- ...
```

```
        ((2*eta-2)*((H/V)^(2*eta-2))*(1/H))* ...
        (((H^2)/V)*normcdf(d6)-(X*(exp(-r*tau)))*normcdf(d6-sig*(tau^0.5)))- ...
        ((H/V)^(2*eta-2))*((((2*H)/V)*normcdf(d6))+ ...
        ((1/(V*sig*((2*pi()*tau)^0.5)))*exp(-(d6^2)/2)*(H-X)));
    end
end
```