

Instituto Superior de Ciências do Trabalho e da Empresa



Afectação de carteiras no âmbito da metodologia Value-at-Risk

Ana Sofia Alves Martins Mateus

Tese submetida como requisito parcial para obtenção do grau de

Mestre em Finanças

Orientadora:

Prof.^a Doutora Sofia Ramos, Prof. Auxiliar, ISCTE Business School, Departamento de Gestão

Setembro 2008

Resumo

O conceito de Value at Risk (VaR) é uma medida de avaliação de risco de mercado utilizada pelas Instituições Financeiras no cálculo do capital regulamentar. O comitê de Basileia estabeleceu que as Instituições Financeiras têm a obrigatoriedade de reportar o seu valor interna e externamente. Dada a importância deste conceito para a gestão diária da actividade, este poderá ser aplicado na gestão de carteiras de investimentos, nomeadamente na escolha e proporção entre diferentes activos. Neste âmbito, o objectivo deste estudo será, não só obter a carteira óptima de modo a minimizar o VaR do portfolio, mas também analisar, à posteriori, a performance de cada modelo usado no cálculo do VaR. Vamos recorrer ao modelo Variâncias-Covariâncias (VaR-Cov), em que a matriz referida é calculada de três formas distintas: *Equally Weighted* (todas as observações têm igual peso), *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA) e GARCH-BEKK e ao modelo de Simulação histórica.

Relativamente aos resultados, se o nosso objectivo for a minimização do nível de capital regulamentar, então o modelo EWMA admitindo a distribuição normal como distribuição de rendimentos, apresenta-se, de entre os modelos analisados, o modelo com performance superior. Se o objectivo for a minimização do VaR, ignorando a minimização do nível de capital regulamentar, a escolha do modelo (modelo com performance superior) depende do nível de confiança analisado, sendo que o modelo EWMA não regista, para nenhum nível de significância, performance superior aos restantes.

Palavras-chave: *Exponentially Weighted Moving Average*, GARCH-BEKK, Modelo Variâncias-Covariâncias, Simulação Histórica, *Value-at-Risk*.

JEL Classification: G11, G21, G23, G28

Abstract

The Value at Risk (VaR) concept is a measure used by Financial Institutions to assess the market risk when calculating the regulatory capital. The Basel Committee established that Financial Institutions are obliged to report the VaR both internally and externally. Given the importance of this concept in the day-to-day management of the activity of Financial Institutions, it can be applied in portfolio management, namely in the choice and proportion between different assets. The aim of this study is therefore to not only to obtain an optimal portfolio so as to minimise the VaR but also to carry out an *ex post* analysis of the performance of each model used to calculate the VaR. For this we will use the Variance-Covariance (VaR-Cov) model, where the matrix is calculated in three different forms: *Equally Weighted* (all of the observations have an equal weight), *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA) and GARCH-BEKK and the Historical Simulation model.

As far as the results are concerned, if our aim is to minimise the regulatory capital level, then EWMA is the model with the best performance among the models analysed, assuming a normal income distribution. If, on the other hand, the aim is to minimise the VaR, ignoring the minimisation of the regulatory capital level, then the choice of the model (best performance model) depends on the analysed confidence level. In this case, the EWMA model does not perform better than the other models for any of the significance levels.

Ky words: Exponentially Weighted Moving Average, GARCH-BEKK, Variance-Covariance Model, Historical Simulation, Value-at-Risk.

JEL Classification: G11, G21, G23, G28

Sumário Executivo

Este trabalho pretende explorar a relação entre duas áreas de finanças: o Value-at-Risk (VaR), uma medida usada na gestão do risco e a Gestão e Construção de Carteiras. Dada a importância do conceito de VaR como medida de risco de mercado na gestão diária da Instituição Financeira, na nossa opinião, é importante que este conceito seja um *input*, em conjunto com outras variáveis, no modelo de cálculo da carteira óptima. No nosso caso, o VaR não será um *input*, uma vez que não temos predefinido qualquer valor, mas um *output* do modelo em que obtemos o portfolio óptimo e o nível de VaR mínimo. Assim, os principais objectivos do nosso estudo são: obter numa base diária, os portfolios óptimos e níveis de VaR mínimos, de acordo com cada metodologia utilizada para o cálculo do VaR e avaliar à posterior a performance de cada metodologia, com base nos seus resultados e na rentabilidade efectivamente registada.

Com este objectivo, escolhemos sete séries de rentabilidade de índices da JP Morgan, os índices *Government Bond Index Broad* (GBI Broad) para 5 *buckets* de maturidade (1-3 anos, 3-5 anos, 5-7 anos, 7-10 anos e 10+ anos) e *Inflation Linked Indices* (IL) para 2 intervalos de maturidades (1-10 anos e 10+). A base dados é constituída por 2025 observações, contendo valores diários desde 4 de Janeiro de 2000 até 22 de Outubro de 2007. Para a estimação do VaR recorreremos ao modelo paramétrico de Variâncias-Covariâncias, em que calculámos a matriz referida por recurso a três metodologias: admitindo o mesmo peso em todas as observações históricas (*Equally Weighted*), recorrendo ao modelo GARCH-BEKK e por fim, ao modelo *Exponentially Weighted Moving Average*, com *decay* factor igual a 0,94. Admitimos em cada um dos modelos anteriores, as distribuições Normal e t-Student. Recorreremos também ao modelo não paramétrico de Simulação Histórica.

Com o objectivo de analisar a performance das metodologias no cálculo do VaR, iremos estimar os vários modelos em *out-of-sample*, considerando que o primeiro dia a estimar será dia 2 de Janeiro de 2002. O objectivo inicial será calcular o número de vezes que num determinado período, a perda estimada excedeu o valor de VaR estimado, de acordo com um determinado nível de significância. Adicionalmente, iremos analisar a performance com base no erro médio absoluto e nos testes propostos por Kupiec (1995) e Christoffersen (1998). Para além da análise de performance, iremos calcular o nível de capital regulamentar obtido em

cada modelo de cálculo do VaR e assim concluir qual o modelo com melhor performance segundo este critério.

De acordo com os nossos resultados, o modelo EWMA admitindo a distribuição Normal regista um menor nível de capital regulamentar. Em relação à análise de performance realizada, para α superiores a hipótese de normalidade é preferível à hipótese alternativa, a distribuição t-Student. Para α inferiores, o modelo GARCH-BEKK admitindo a distribuição t-Student apresenta uma performance superior. O modelo não paramétrico, Simulação Histórica, apresenta uma performance elevada para os três níveis de significância analisados, 5%, 2,5% e 1%. Assim, como era de esperar, não há uma metodologia que se destaque das restantes, dependendo esta do objectivo da análise.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer em primeiro lugar à minha orientadora, a Professora Sofia Ramos pelo seu apoio na orientação, pela paciência e dedicação ao longo destes últimos dois anos.

Gostaria de agradecer também aos Professores Miguel Ferreira e José Dias Curto pelas contribuições dadas ao longo deste último ano.

Por último, não posso também esquecer o meu ex-colega de trabalho, Jorge Guedes, pela preciosa ajuda em Matlab.

Índice

Resumo	II
<i>Abstract</i>	III
Sumário executivo	IV
Agradecimentos	VI
Índice	VII
Índice de tabelas	XIX
Índice de Gráficos	XIX
Introdução	1
1. Revisão da Literatura	4
2. Estimação do VaR	7
3. Descrição dos modelos	11
3.1. Modelos paramétricos	11
3.1.1. <i>Equally Weighted</i>	11
3.1.2. GARCH BEKK	11
3.1.3. <i>Exponentially Weighted Moving Average (EWMA)</i>	13
3.2. Modelos não paramétricos	13
3.2.1. Simulação Histórica	14
3.3. Distribuição de rendimentos: Normal e t-Student	14
4. Avaliação da performance da previsão	16
4.1. Erro Absoluto Médio	17

4.2. <i>Unconditional Coverage Test</i> - Teste proposto por Kupiec (1995)	17
4.3. <i>Conditional Coverage Test</i> - Teste proposto por Christoffersen (1998)	17
4.4. Nível de Capital Regulamentar	18
5. Resultados	20
5.1. Distribuição empírica	20
5.2. Avaliação de performance	20
5.2.1. Estatística de Erro Absoluto Médio	20
5.2.2. VaR médio e número de exceções	21
5.2.3. Teste de Kupiec (1995) e teste de Christoffersen (1998)	22
5.3. Capital Mínimo Regulamentar	23
6. Conclusão	24
Bibliografia	25
Anexos	29

Índice de Tabelas

Tabela 1 – Resumo estatístico das séries de rendibilidade	36
Tabela 2 – Erro Médio Absoluto	37
Tabela 3 – <i>Average VaR</i>	44
Tabela 4 – Percentagem de excepções	44
Tabela 5 – Teste de Kupiec (1995)	45
Tabela 6 – Teste de Christoffersen (1998)	45
Tabela 7 – Percentagem de dias em que o modelo EWMA apresenta níveis de capital requerido inferiores	46

Índice de Gráficos

Gráfico 1

Painéis 1 a 7 – séries de rendibilidade	29
---	----

Gráfico 2

Painéis 1 a 7 A – Histograma das séries de rendibilidades, bem como as distribuições normal estandardizada e t-Student estandardizada ajustadas de acordo com a série de rendibilidades histórica	31
---	----

Painéis 1 a 7 B – Distribuições de probabilidades acumuladas da série empírica, da distribuição normal e da distribuição t-Student	31
--	----

Gráfico 3

Painéis 1 a 3 – Rendibilidade efectiva registada e o VaR estimado, de acordo com o portfolio óptimo obtido para cada dia e com a rendibilidade histórica	37
--	----

Introdução

A incerteza sobre a rendibilidade futura, não só relacionada com factores de mercado, nomeadamente volatilidade, liquidez ou variação de preços, mas também com factores operacionais, de regulação e de crédito, levam a que as Instituições Financeiras estejam expostas a um conjunto de riscos: risco de crédito, risco de mercado, risco operacional e risco de liquidez (Crouhy, Galai e Mark, 2000; Manganelli, Engle e Simone, 2001). Dada a sua importância para a sobrevivência da Instituição Financeira e a repercussão de uma possível insolvência financeira na economia, assistimos ao longo dos últimos anos à introdução de medidas de cálculo de riscos pelas entidades reguladoras e de supervisão do sistema financeiro internacional, com o objectivo de reforçar a credibilidade e segurança do sistema financeiro.

Em 1988 surge o acordo de Basileia que estabelecia níveis de capital mínimos obrigatórios de acordo com a exposição ao risco de crédito da Instituição Financeira. Até aqui, os níveis de capital que cada Instituição Financeira deveria deter eram definidos uniformemente, ignorando não só a situação financeira, como também a carteira de investimentos (Crouhy, Galai e Mark, 2000). Contudo, nesta data, a preocupação prendia-se apenas com o risco de crédito.

Dada a importância crescente do risco de mercado nas carteiras de *trading*, que podem incluir instrumentos financeiros *plain vanilla*, tais como obrigações e acções, bem como, instrumentos mais complexos, como sejam: opções, *swaps*, ou derivados, e na sequência de uma série de perdas incorridas pelas empresas do sector financeiro, resultantes em muitos casos de uma inadequada compreensão dos riscos no mercado de derivados, foi importante alargar o acordo inicial à avaliação do risco de mercado - *Amendment* 1996 ou “BIS 98” (Crouhy, Galai e Mark, 2000; Hull, 2005). Assim, o objectivo é obrigar as Instituições Financeiras a manter determinados níveis de capital prudencial de modo a absorver as perdas e evitar a falência, garantindo assim a estabilidade económica (Manganelli, Engle e Simone, 2001). Em termos práticos, para a avaliação do risco de mercado, o banco poderá recorrer a modelos internos, sendo estes uma mais valia por considerarem o efeito de diversificação da carteira avaliado pela correlação entre os activos. Dado que a metodologia de VaR assenta na estimativa da perda potencial incorrida devido à exposição dos seus investimentos ao risco de mercado, esta é utilizada na definição do nível capital regulamentar necessário. Assim, para a

sua definição, segundo o Comitê de Basileia, deverá considerar-se a estatística *Value at Risk*, baseada no horizonte temporal de 10 dias úteis (*trading days*), nível de confiança de 99% e período de observação mínimo de um ano.

Para além da definição do nível de capital regulamentar, o conceito VaR tem assumido uma posição importante na gestão de risco de mercado das Instituições Financeiras, informando os accionistas e gestores sobre a exposição ao risco de mercado de uma carteira. Deste modo, o VaR poderá ser divulgado internamente, de uma forma desagregada por carteiras de investimentos e por diferentes áreas de investimento ou de uma forma agregada, tendo em consideração todas as áreas de investimento. Poderá também ser divulgado externamente como ferramenta de reporte (para agências de *rating*, por exemplo ou em relatórios de actividade). Vantagens adicionais são a avaliação de performance de cada *trader* e de cada carteira de acordo com o rácio rendibilidade-risco e a optimização de carteiras de investimento, identificando áreas com maior potencial de rendibilidade por unidade de risco. Assim, dada a importância do conceito do VaR na avaliação do risco de mercado, este poderá ser aplicado directamente à afectação de carteiras, obtendo a carteira óptima que irá ao mesmo tempo minimizar o risco de mercado, avaliado pelo VaR, tornando-se para além de uma medida de avaliação de risco, uma ferramenta de gestão diária. O conceito VaR não ajudará a decidir qual o montante de unidade monetária a investir num determinado activo, mas ajudará a decidir, entre activos alternativos, qual a percentagem a investir em cada um. É neste âmbito que este trabalho procura dar contribuições.

O presente trabalho tem como objectivo obter, numa base diária, a carteira óptima de acordo com o critério da minimização do VaR. Para o seu cálculo iremos recorrer a várias metodologias, admitindo como hipóteses em cada uma, a distribuição Normal e a distribuição t-Student. Contudo, não queremos apenas saber qual a carteira óptima, mas avaliar cada uma das metodologias de acordo com uma análise de performance e com o nível de capital regulamentar obtido em cada uma. Numa descrição mais pormenorizada, o VaR será calculado com base em dois grupos de modelos: o paramétrico e o não paramétrico. No primeiro grupo, assume-se que as rendibilidades podem ser aproximadas por uma distribuição de probabilidades específica, em que os parâmetros podem ser estimados a partir das observações históricas. Em relação aos modelos paramétricos, vamos utilizar o modelo de Variâncias-Covariâncias (Var-Cov), em que o *input* necessário é apenas a matriz referida. Esta matriz será calculada de acordo com três metodologias: de forma simples, utilizando apenas os dados históricos, em que todas as observações têm igual peso na amostra, o que

passamos a designar por *Equally Weighted*; utilizando um modelo *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA), definindo o parâmetro de alisamento (*decay factor*), λ , igual a 0.94 e, por fim, recorrer ao modelo GARCH BEKK. Para o cálculo do VaR não paramétrico, considera-se a distribuição empírica, baseada nas observações históricas, como aquela que melhor representa a distribuição de probabilidades. Iremos recorrer ao método da Simulação Histórica para o seu cálculo.

Para encontrarmos a carteira óptima e tendo a curva eficiente, iremos aplicar o rácio de Sharpe a esta curva, em que o risco será medido pelo VaR, sendo a carteira óptima a que maximiza este rácio. Iremos, de acordo com cada metodologia, criar uma série *out-of-sample* em que obtemos o portfolio óptimo em cada dia e o VaR associado. Estas estimativas irão ser sujeitas à análise de performance no ponto seguinte, com base na estatística de erro absoluto médio e nos testes propostos por Kupiec (1995) e Christoffersen (1998). Dada a importância do nível de capital regulamentar na gestão diária, iremos analisar, de acordo com este conceito, qual o modelo mais adequado.

Para a estimação, vamos utilizar sete activos ou por outras palavras, sete séries de rendibilidade de índices da JP Morgan, os índices *Government Bond Index Broad* (GBI Broad) para cinco *buckets* de maturidades (1-3 anos, 3-5 anos, 5-7 anos, 7-10 anos e 10+ anos) e *Inflation Linked Indices* para dois intervalos de maturidades (1-10 anos e 10+ anos). A base dados é constituída por 2025 observações, contendo valores diários desde 4 de Janeiro de 2000 até 22 de Outubro de 2007.

De acordo com os nossos resultados, o modelo EWMA admitindo a distribuição Normal regista um menor nível de capital regulamentar, sendo este resultado consistente com o resultado de Ferreira e Lopez (2005). Em relação à análise de performance realizada, para α superiores, a hipótese de normalidade é preferível à hipótese alternativa, a distribuição t-Student. Para α inferiores, o modelo GARCH-BEKK admitindo a distribuição t-Student apresenta uma performance superior. O modelo não paramétrico, Simulação Histórica, apresenta uma performance elevada para os três níveis de significância analisados, 5%, 2,5% e 1%. Assim, como era de esperar, não há uma metodologia que se destaque das restantes, dependendo esta do objectivo da análise.

O presente estudo está organizado da seguinte forma: na primeira parte, iremos apresentar, de forma sucinta, alguns trabalhos já realizados nesta área. Seguidamente, iremos apresentar o conceito *Value-at-Risk*, descrever o problema de optimização, apresentar os modelos

utilizados no cálculo do VaR e avaliação de performance, assim como o cálculo do capital regulamentar, segundo cada modelo (ponto 2 a 4). No Ponto 5, serão apresentados os resultados da estimação, a avaliação de performance, bem como o cálculo do capital regulamentar de acordo com cada modelo. Por fim, no ponto 6 apresentaremos as principais conclusões.

1. Revisão da literatura

Nestes últimos anos, vários modelos já foram propostos para o cálculo do VaR, mas não existe nenhum modelo que se destaque dos restantes, dependendo a sua performance do portfolio utilizado, do fim a que se destina, do horizonte temporal, e entre outros factores, do nível de confiança. Adicionalmente, vários trabalhos referem que por vezes modelos mais sofisticados não registam performance superior a modelos mais simples, o que está relacionado com a complexidade da estimação de alguns parâmetros. De seguida vamos referir alguns trabalhos já realizados na área e as suas principais conclusões.

No âmbito de afectação de carteiras, Rombouts e Verbeek (2004) propuseram um modelo dinâmico de maximização da rendibilidade esperada sujeito à minimização do VaR. O objectivo era determinar quais os pesos de cada activo no portfolio óptimo. Após uma análise *out-of-sample*, os autores concluíram que o modelo APARCH(1,1) regista uma performance superior ao modelo GARCH(1,1). Adicionalmente, em relação à distribuição de probabilidades, concluem que uma distribuição *skewed-t* é preferível a uma distribuição Normal ou t-Student. Por outro lado, Dato, Garcia, Layron e Machuenda (2001) compararam os resultados obtidos com a aplicação das distribuições Normal e t-Student e concluíram que apesar da distribuição t-Student apresentar melhores resultados na estimação do VaR, em resultado da curtose existente nas séries de rendibilidades, estes ficam aquém do esperado. Esta *underperformance* está relacionada com outras características das séries de rendibilidades que a distribuição t-Student não capta, como seja a dependência entre os valores observados.

Hendricks (1996) aplicou várias metodologias de cálculo do VaR, baseadas nos modelos *Equally* e *Exponentially Weighted Moving Average* e na Simulação Histórica, a 100 portfolios

assumindo posições em 8 moedas e analisou a sua performance. Concluiu que, de acordo com os modelos estimados, os resultados não divergem muito em termos médios. Por outro lado, períodos de observação longos são preferíveis, uma vez que tendem a ter um menor grau de variabilidade. Adicionalmente, os eventos extremos ocorrem com maior probabilidade do que é dado pela distribuição Normal (*fat tails*). Por fim, na sua opinião, não há apenas uma metodologia recomendável. Também Coronado (2000) refere que não existe uma metodologia de cálculo do VaR preferida às restantes e que esta depende da constituição do portfolio e do objectivo a que se destina. Assim, neste estudo, são comparados diferentes métodos de estimação do VaR, como medida de avaliação do risco de mercado, aplicados a um portfolio sobre taxas de câmbio de um dos maiores bancos espanhóis, no contexto de supervisão da solvência bancária. São comparados os modelos de Var-Cov, Simulação Histórica e Simulação de Monte-Carlo, apresentando este último modelo uma performance superior. Como principais desvantagens dos modelos comparados, o modelo de Var-Cov sobrestima o verdadeiro valor do VaR para intervalos de confiança baixos e subestima o valor do VaR para intervalos de confiança elevados. O modelo de Simulação Histórica depende dos dados históricos utilizados e ignora qualquer facto que não esteja retratado na base de dados, estimando o VaR com base apenas numa trajectória de preços. Adicionalmente, na sua opinião, a Instituição Financeira poderá escolher os modelos de cálculo do VaR não com base na sua performance, mas com base no nível mínimo de capital regulamentar. O problema está no facto de que nem sempre os modelos que estabelecem níveis de capital regulamentar mínimos são os que têm melhor performance. Adicionalmente, Bams, Lehnert e Wolft (2005) avaliaram a aplicação de várias metodologias de cálculo do VaR em portfolios de taxas de câmbio. Concluíram que o modelo GARCH (1,1) adoptando a distribuição t-Student como distribuição de rendimentos é um modelo adequado para a definição do VaR com este portfolio. Na opinião dos autores, modelos mais sofisticados na definição do percentil da distribuição de rendimentos do portfolio levam a um aumento da incerteza no verdadeiro valor do VaR, devido à necessidade de definição de maior número de parâmetros.

Vlaar (1999) comparou a performance *out-of-sample* de três metodologias de VaR aplicadas a 25 portfolios hipotéticos, formados por obrigações de oito *buckets* de maturidade diferentes. As metodologias utilizadas foram Var-Cov, Simulação histórica e simulação de Monte-Carlo. Para um período de 10 dias, o modelo com performance superior é o modelo combinado de Var-Cov e Monte-Carlo, usando a distribuição Normal e uma especificação GARCH.

Alexander e Leigh (1997) examinaram as matrizes de variâncias-covariâncias normalmente utilizadas no cálculo do VaR. Analisaram a performance de três metodologias de previsão de volatilidade: *Equally* e *Exponentially Weighted Moving Average* e o modelo GARCH aplicadas em termos univariados a cinco índices de acções a nível internacional (Alemanha, França, Reino Unido, Japão e Estados Unidos) e a quatro taxas de câmbio do dólar face a outras moedas (Alemanha, França, Reino Unido e Japão). De acordo com a metodologia de *backtesting*, os modelos GARCH e *Equally Weighted Moving Average* são modelos posicionados na zona verde, e segundo esta estatística, os modelos com melhor performance. Adicionalmente, Lopez e Walter (2001) concluíram que a performance dos modelos VaR depende verdadeiramente da hipótese sobre a distribuição de rendimentos e não tanto da especificação sobre a matriz do modelo Var-Cov. Avaliaram a performance *out-of-sample* da matriz Var-Cov de um portfolio de taxas de câmbio. Concluíram que o modelo Var-Cov em conjunto com o modelo EWMA e admitindo a distribuição Normal gera o menor nível de capital regulamentar. Adicionalmente, referem que os resultados estão em linha com o que Lucas (2000) tinha concluído. Lucas (2000) concluiu que os modelos VaR baseados em cálculos simples da variância do portfolio, bem como a adopção da distribuição Normal, como distribuição de rendimentos, geram menores discrepâncias entre a rendibilidade efectiva e o VaR encontrado. Ferreira e Lopez (2005) também concluíram que a performance relativa das previsões do modelo Var-Cov depende em grande escala da distribuição de rendimentos, e que o modelo EWMA apresenta uma performance elevada face aos restantes. A sua análise demonstrou que a percentagem de excepções nos modelos mais simples de cálculo do VaR é semelhante aos modelos GARCH (modelos mais sofisticados). Adicionalmente, a distribuição Normal apresentou melhor performance quando comparada com a distribuição t-Student. Assim, os resultados vieram privilegiar os modelos mais simples, a nível da definição da matriz de variâncias-covariâncias e da distribuição de rendimentos, esta última sendo a distribuição Normal ou a distribuição não paramétrica. Também, Guermat e Harris (2002) concluíram que o modelo EWMA para a estimação da matriz de Var-Cov apresenta uma performance elevada e muitas vezes superior aos modelos mais sofisticados, como sejam os modelos GARCH. Pritsker (2001) concluiu que o modelo de Var-Cov, em que todas as observações têm o mesmo peso no cálculo da matriz (*Equally Weighted*), apresenta uma performance semelhante ao modelo da Simulação Histórica. Ao invés, se as observações mais recentes tiverem maior peso no cálculo da matriz (*Exponentially Weighted Moving Average*), então o modelo de Var-Cov apresenta melhor performance quando comparado com o modelo de Simulação Histórica. Adicionalmente, introduziu o conceito de *Filtered Historical*

Simulation. A inovação deste modelo é que captura não só o efeito de heteroscedasticidade, como também, pelo facto de ser um modelo não paramétrico, não define à partida a distribuição de rendimentos, permitindo absorver as características da não normalidade presentes nas séries de rendibilidades.

Adicionalmente, Angelidis, Benos e Degiannakis (2003) avaliaram a performance de vários modelos ARCH no cálculo do VaR diário de portfolios compostos por cinco índices de acções, recorrendo à distribuição Normal, à distribuição t-Student e à distribuição *Generalized Error*. Concluem que o modelo EGARCH adoptando a distribuição t-Student apresenta uma performance superior aos restantes modelos. Em termos gerais, os modelos que adoptam distribuições leptocúrticas, e especialmente a distribuição t-Student, obtêm uma performance superior aos restantes que adoptam a distribuição Normal. Ao invés, Wong, Cheng e Wong (2003) a partir da análise de critérios de *backtesting* a um índice Australiano AOI (*Australia's All Ordinary Index*), concluem que os modelos GARCH e ARCH não registam uma boa performance.

Gençay, Selçuke e Ulugulyagci (2003) compararam a performance do modelo com base na teoria dos valores extremos com a performance de outras metodologias utilizadas no cálculo do VaR de um portfolio de acções, tais como os modelos GARCH, os modelos de Var-Cov e a Simulação Histórica. O modelo Var-Cov apresenta a pior performance (embora que apresente uma performance elevada para o intervalo de confiança de 95%). A estimativa do VaR através dos modelos GARCH apresentou-se como muito volátil, sendo o modelo da teoria dos valores extremos, utilizando a GPD (*Generalized Pareto distribution*), o modelo mais robusto na aplicação do VaR. Adicionalmente, Bensalah (2002) analisou o problema de afecção de activos, através da minimização do VaR, calculado a partir da teoria dos valores extremos. Na sua opinião, este é o modelo a utilizar no cálculo do VaR, uma vez que se considera apenas o percentil da distribuição de rendimentos, focando-se apenas nas perdas extremas.

2. Estimação do VaR

O VaR responde à questão de qual é a perda máxima num dado período de tempo, tal que existe uma probabilidade baixa, por exemplo 5%, da perda efectiva ser superior,

correspondendo assim ao quantile da distribuição de rendimentos. Tal como já referido, esta metodologia de cálculo irá ter em consideração as correlações dos vários activos que constituem as carteiras, dando uma estimativa de redução de risco quando os activos têm correlações baixas (pela anulação de riscos).

Iremos de seguida apresentar a metodologia de cálculo.

A taxa de rendibilidade da carteira será obtida através da combinação linear das taxas de rendibilidade dos activos que constituem a carteira, onde os pesos relativos de cada activo, as variáveis que queremos conhecer, foram definidos no início do período. Assim, a rendibilidade da carteira no período t será

$$R_{p,t} = \sum_{i=1}^N w_i R_{i,t}, \quad (1)$$

onde N é o número de activos, no nosso caso sete, $R_{i,t}$ é a taxa de rendibilidade do activo i e w_i é o peso do activo i na carteira. Em linguagem matricial será

$$R_{p,t} = w' R, \quad (2)$$

onde w' representa o vector transposto dos pesos e R é o vector das rendibilidades. A taxa de rendibilidade correspondente ao VaR, R^* , será dada pela seguinte expressão:

$$Prob(R < R^*) = \alpha. \quad (3)$$

O VaR será então obtido pela multiplicação entre o valor actual da carteira de investimentos e a taxa de rendibilidade R^* . Tendo como pressuposto, que as rendibilidades seguem uma distribuição normal, $R_t \approx N(\mu, \sigma^2)$ ¹, obtemos que a taxa de rendibilidade critica do portfolio será igual a

$$R^* = \mu + z_\alpha \sigma_p^2. \quad (4)$$

A variância de um activo, estimada a partir de uma amostra de T observações, é definida como:

¹ A taxa de rendibilidade do portfolio é igual à soma das taxas de rendibilidade cada activo e por isso segue também uma distribuição normal. O cálculo do VaR utilizando outras distribuições de probabilidade, assumindo que as taxas de rendibilidade são independentes e identicamente distribuídas, é idêntico ao que vimos para a normal.

² $Prob[R_t < R^*] = \alpha \Leftrightarrow Prob[(R_t - \mu)/\sigma < (R^* - \mu)/\sigma] = \alpha \Leftrightarrow Prob[Z < (R^* - \mu)/\sigma] = \alpha$.
Dado que $(R^* - \mu)/\sigma = z_\alpha$, então $R^* = \mu + z_\alpha \sigma$

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T (R_i - \bar{R})^2. \quad (5)$$

Para 2 activos, considerando a correlação entre eles, a variância será,

$$\sigma_p^2 = w_i^2 * \sigma_i^2 + w_j^2 * \sigma_j^2 + 2 * w_i * w_j * \sigma_{ij}, \quad (6)$$

em que σ_{ij} é a covariância entre os activos i e j,

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T (R_{t,i} - \bar{R}_i)(R_{t,j} - \bar{R}_j). \quad (7)$$

$$\text{Pela extensão a N activos obtemos: } \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j<i}^N w_i w_j \sigma_{ij}. \quad (8)$$

Em linguagem matricial,

$$\sigma_p^2 = w' \Sigma w, \quad (9)$$

definindo Σ como a matriz N*N de variâncias-covariâncias das taxas de rendibilidade.

Assumindo que as rendibilidades são independentes e identicamente distribuídas e seguem uma distribuição normal, apenas o desvio padrão da carteira multiplicado por um factor relativo ao nível de confiança, é necessário para estimar o VaR (*mean*). Assim, o VaR do portfolio, assumindo uma distribuição normal será:

$$VaR_p(\text{mean}) = -V[R^* - \mu] = -V[\mu + z_\alpha \sigma_p - \mu] = -V z_\alpha \sigma_p, \quad (10)$$

em que z_α será o valor da distribuição normal cumulativa estandardizada, Z , com α de massa de probabilidade à sua esquerda. Os activos têm rendibilidades diárias

$$r_{it} = \ln\left(\frac{x_{it}}{x_{it-1}}\right), \quad (11)$$

sendo x_{it} o valor do índice i para a data t . A rendibilidade média de cada índice será designada por δ_i , sendo o vector de rendibilidades:

$$\delta_p = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7); \quad (12)$$

Definindo o peso de cada activo na carteira como w_i , então o vector de pesos será

$$w_p = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7). \quad (13)$$

Não existe a possibilidade de *short selling*, ou seja, $w_i \geq 0$ e a soma do montante investido na carteira terá de ser 1, ou seja,

$$w^T \mathbf{1} = 1. \quad (14)$$

Deste modo, a rendibilidade do portfolio no final do período será:

$$R_p = w_p^T \delta_p. \quad (15)$$

Definindo o vector $1 = (1,1,1,1,1,1,1)$, o problema de optimização será³:

$$\begin{aligned} \min_w VaR_p(\text{mean}) \\ R_p &\geq \mu \\ w^T 1 &= 1 \\ w &\geq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Em que μ será a rendibilidade mínima a obter. Na sua definição gerámos um vector de rendibilidades com incrementos de 0.000001, em que o valor mínimo é zero e o valor máximo corresponde à rendibilidade máxima do vector de δ_p .

Pela resolução do problema de optimização, obtemos diferentes valores de VaR para diferentes níveis de rendibilidade, μ . Assim, a cada par rendibilidade-risco corresponde um portfolio diferente. Tendo obtido a fronteira eficiente, temos de escolher a carteira óptima, ou seja, o portfolio que maximiza o binómio Risco (VaR) – rendibilidade. Com este objectivo, calculámos o rácio de Sharpe, considerando como medida de risco o VaR e não o desvio padrão da carteira,

$$R_{\text{Sharpe}} = \frac{R_p - r_f}{VaR_p} \quad (17)$$

para cada ponto rendibilidade-risco, em que para a definição de r_f considerámos a Eonia. A carteira óptima será a correspondente ao valor máximo para o rácio de Sharpe.

A escolha do horizonte temporal vai depender da sua aplicação (Hull, 2005). Em portfolios de *trading*, a avaliação deverá ser diária, uma vez que as perdas e ganhos também são calculados diariamente, sendo o seu valor, se necessário, ajustado rapidamente. Adicionalmente, no caso de uma carteira de *trading*, o cálculo do VaR para um horizonte temporal superior a 1 dia, pode não ser muito útil, uma vez o seu cálculo não permite alterações na composição do portfolio. Ao invés, se o portfolio for detido por um fundo de pensões, com características *buy*

³ A optimização foi realizada em Matlab 7.0, usando a função Quadprog.

and hold, o horizonte temporal poderá ser um mês, uma vez que, não só a alteração de portfolio é menos frequente, como também os activos são menos líquidos. Neste trabalho vamos admitir um horizonte temporal diário⁴.

De seguida iremos apresentar as metodologias de cálculo da matriz de variâncias e covariâncias.

3. Descrição dos modelos

3.1. Modelos paramétricos

Nos modelos paramétricos assume-se que as rendibilidades podem ser aproximadas por uma distribuição de probabilidades específica, em que os parâmetros podem ser estimados a partir das observações históricas. Vamos recorrer ao modelo Var-Cov, em que o *input* necessário é apenas a matriz referida, que iremos calcular de acordo com três metodologias. Numa primeira metodologia todas as observações têm a mesma ponderação para o cálculo da matriz (*Equally Weighted*); seguidamente calculamos a matriz com base num modelo GARCH e por fim, recorreremos ao modelo *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA), definindo o parâmetro de alisamento (*decay factor*) λ , igual a 0.94.

3.1.1. *Equally Weighted*

Neste modelo, para o cálculo do VaR, obtém-se a matriz de variâncias-covariâncias com base nas séries de rendibilidades, admitindo que todas as observações têm a mesma ponderação no cálculo da matriz.

3.1.2. *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* (GARCH BEKK)

Uma das características da distribuição de rendimentos é a presença de *clusters* de volatilidade, em que períodos de grande volatilidade tendem a ser seguidos também por

⁴ Para transpor para um horizonte temporal de N dias, deverá multiplicar-se o VaR diário por \sqrt{N} .

períodos de volatilidade elevada. Este tipo de comportamento foi evidenciado por Engle (1982) através do uso de um processo condicional de heterocedasticidade autoregressiva (ARCH). O processo ARCH foi generalizado por Bollerslev (1986), para que a variância condicional não seja apenas uma função dos resíduos passados (rendibilidades), mas também das variâncias condicionais desfasadas.

Num modelo GARCH(1,1), a volatilidade, que é uma medida da intensidade das variações aleatórias das taxas de rendibilidade dos activos financeiros, não é constante ao longo do tempo e é explicada, em grande parte, pela volatilidade de períodos anteriores. Nestes modelos, abandonamos a hipótese da variância dos erros ser constante. A variância condicional pode variar e é função linear do quadrado dos erros dos períodos anteriores e das variâncias condicionais dos períodos anteriores.

Um modelo GARCH (1,1) é definido como:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 \sigma_{t-1}^2, \quad (18)$$

em que u_{t-1}^2 e σ_{t-1}^2 é a variância amostral e condicional no período t-1, respectivamente.

Vários modelos GARCH já foram desenvolvidos para a versão multivariada, mas nesta análise vamos utilizar o modelo BEKK. Este modelo é definido como:

$$H_t = M + A' u_{t-1} u_{t-1}' A + B' H_{t-1} B, \quad (19)$$

onde a M, A e B são matrizes quadradas N*N, no nosso caso 7*7 e M é uma matriz simétrica. A matriz de variâncias e covariâncias H_t será positiva, uma vez que a Matriz M é positiva e os restantes termos são definidos de forma quadrática.

De modo a reduzir o número de parâmetros a estimar, considerámos os vários parâmetros do modelo BEKK como sendo diagonais, e assim, as matrizes A e B são diagonais e o modelo designa-se por Diagonal BEKK⁵.

⁵ A estimação foi realizada em Eviews 6.0

3.1.3. Exponentially Weighted Moving Average (EWMA)

Na metodologia analisada anteriormente no ponto 3.1.1, todas as observações históricas tinham o mesmo contributo para o cálculo da variância. Neste modelo introduzimos o parâmetro de alisamento, ou *decay factor*, λ , que dá diferentes pesos às observações passadas contidas no período histórico. Como os ponderadores diminuem exponencialmente, as observações mais recentes recebem maior ponderação quando comparamos com as observações mais distantes no passado. Deste modo, com esta metodologia de cálculo do VaR, as estimativas reagem mais rapidamente a choques no mercado em termos de volatilidades e correlações, e este efeito tende a desaparecer lentamente, em vez de desaparecer de uma só vez. O objectivo será capturar os movimentos de volatilidade no curto prazo, aproximando-se do conceito dos modelos GARCH. De facto, este modelo é um caso particular do modelo GARCH, o modelo IGARCH, em que $\alpha_0 = 0$ e $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ (Jorion, 2001). Como base neste modelo, a previsão de variância do dia t+1 formulada no dia t é dada por:

$$\sigma_{t+1,t}^2 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{t-1} \lambda^k} \left[\sum_{k=0}^{t-1} \lambda^k \left(R_{t-k} - \bar{R} \right)^2 \right] \cong (1 - \lambda) \left[\sum_{k=0}^{t-1} \lambda^k \left(R_{t-k} - \bar{R} \right)^2 \right]. \quad (20)$$

Quanto menor o valor do *decay factor*, mais importantes são as observações recentes para o cálculo da variância. No limite, apenas as observações mais recentes contribuem para o cálculo da variância, podendo resultar num aumento da volatilidade e na possibilidade de erro. Contudo, dependendo do contexto económico ou do objectivo da análise, utilizar apenas as observações mais recentes pode ser importante para capturar movimentos de curto prazo em contextos de volatilidade. Ao invés, quanto maior o valor do *decay factor*, maior é o alisamento da série de observações históricas no contributo do cálculo da variância.

3.2. Modelos não paramétricos

Enquanto que nos modelos anteriores admitimos um determinado comportamento estatístico da rendibilidade, estimando os parâmetros da média e variância a partir da realidade histórica, nos modelos não paramétricos considera-se que a distribuição empírica, baseada nas observações históricas, é a que melhor representa a distribuição de rendimentos. Iremos recorrer ao método da Simulação Histórica para o seu cálculo.

3.2.1. Simulação Histórica

De acordo com esta metodologia, não interessa saber qual a distribuição da série de rendibilidades de uma carteira, nem, por outro lado, se calcula os parâmetros de volatilidade e correlações, simplificando o cálculo do VaR. Deve-se apenas, aplicar as rendibilidades históricas à composição actual da carteira, durante um horizonte temporal definido e calcular os ganhos e perdas hipotéticos, definindo o VaR como sendo o percentil desta distribuição. Isto é, o VaR será o quantile da distribuição simulada de ganhos e perdas, admitindo que a composição da carteira se mantém constante. A escolha do horizonte temporal e o facto de, através deste método, incorporarmos possíveis desvios da série de rendibilidade à distribuição Normal (muitas vezes utilizada) são consideradas duas mais valias deste método. Contudo, o facto desta metodologia utilizar uma carteira constante ao longo do período em análise, de colocar peso idêntico a todas as observações e de apenas utilizar a informação presente no quantile da distribuição de rendimentos, poderão ser consideradas desvantagens deste modelo. Adicionalmente, ao utilizar uma série de dados históricos com um contexto económico diferente do actual, poderá levar à obtenção de resultados enviesados.

3.3. Distribuição de rendimentos: Normal e t-Student

No modelo paramétrico, a maior dificuldade será conhecer a distribuição de rendimentos de cada activo que compõe a carteira. Pela sua fácil utilização, tem sido comum admitir que as séries de rendibilidade seguem uma distribuição Normal. Contudo, ao longo destes últimos anos, vários autores têm criticado o uso desta distribuição no cálculo do VaR, devido à presença de caudas densas e pelo facto das distribuições serem assimétricas (Bensalah, 2002; Danielsson e Morimoto, 2000; Manganelli, Engle e Simone, 2001; Monteiro e Silva, 2002).

Em períodos de grande instabilidade, a probabilidade de ocorrerem eventos extremos é superior à probabilidade dada pela distribuição Normal, isto é, a distribuição de rendimentos teórica quando comparada com a distribuição Normal, tem caudas mais densas. Assim, o volume de observações existentes nas caudas é superior ao número de observações extremas dado pela distribuição Normal, o que leva a que as perdas sejam mais frequentes e que se subestime o verdadeiro risco envolvido no portfolio analisado, tal como referido por Coronado (2000). Os desvios à normalidade tendem a ser mais significativos em períodos de maior volatilidade e à medida que o intervalo de confiança aumenta. Em resultado, o uso de

uma distribuição que permita caudas mais densas melhora a performance do modelo e reduz o risco da estimação (Angelidis, Benos e Degiannakis, 2004; Danielsson e Morimoto, 2000; Dato, Garcia, Layron e Machuenda, 2001; Hendricks, 1996; Monteiro e Silva, 2002; Pritsker, 2001; Rombouts e Verbeek, 2004).

Como alternativa, surge a distribuição t-Student, que capta a curtose em excesso existente nas distribuições de rendibilidade. Contudo, esta é uma distribuição simétrica. Para definirmos a distribuição t-Student precisamos de conhecer o número de graus de liberdade, ν , associado ao portfolio. Para o seu cálculo, iremos recorrer ao método da máxima verosimilhança, através da maximização do logaritmo da função de verosimilhança univariada e multivariada, admitindo que a variância é constante ao longo do tempo⁶:

No caso univariado:

$$l = n \left[\log \Gamma \left(\frac{\nu+1}{2} \right) - \frac{1}{2} \log(\pi) - \log \Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) - \frac{1}{2} \log(\nu-2) \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left[\log(\sigma_t^2) + (\nu+1) \log \left(1 + \frac{u_t^2}{\sigma_t^2(\nu-2)} \right) \right] \quad (21)$$

No caso multivariado:

$$l_t = \log \Gamma \left(\frac{\nu+N}{2} \right) - \frac{N}{2} \log(\pi) - \log \Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) - \frac{N}{2} \log(\nu-2) - \frac{1}{2} \log |H_t| - \frac{\nu+N}{2} \log \left(1 + \frac{u_t' H_t^{-1} u_t}{\nu-2} \right)$$

$$l_n = \sum_{t=1}^n l_t \quad (22)$$

Com a volatilidade constante, $|H_t| = |H|$ e $u_t' H_t^{-1} u_t = u_t' H^{-1} u_t$. H é a matriz de variâncias-covariâncias $N \times N$, ν representa o número de graus de liberdade da distribuição t-Student e $\Gamma(\cdot)$ representa a função gamma. Considerámos que u_t é a rendibilidade diária observada. De acordo com a nossa amostra, o número de graus de liberdade óptimo para o portfolio é 5. Quanto menor o número de graus de liberdade, maior o número de observações nas abas e maior a diferença face à distribuição normal. De acordo com Jorion (2001), em grande parte das séries de instrumentos financeiros, o número de graus óptimo varia entre 4 e 8.

⁶ Hipótese presente nos modelos paramétricos, excluindo o modelo GARCH, em que o número de graus de liberdade é obtido no *output* da estimação.

Para cada um dos modelos paramétricos apresentados anteriormente, no cálculo do VaR, iremos assumir que as séries de rendibilidades seguem uma distribuição Normal ou t-Student.

4. Avaliação da performance da previsão

Qualquer que seja a metodologia usada para calcular o VaR, o resultado é simplesmente uma estimativa. O verdadeiro valor do VaR não pode ser conhecido com certeza (Crouhy, Galai e Mark, 2000).

São vários os modelos pelos quais podemos calcular o VaR, e por isso, a avaliação de performance de cada um é um factor importante na escolha dos modelos adequados à estimação. Com este objectivo, devemos comparar a taxa de rendibilidade do portfolio para cada dia (de acordo com o portfolio óptimo diário estimado e com os dados históricos de rendibilidade) com a taxa de rendibilidade correspondente ao VaR obtida na optimização. O objectivo será calcular o número de vezes que num determinado período, a perda estimada excedeu o valor de VaR estimado, de acordo com um determinado nível de significância. Para o efeito vamos estimar os vários modelos em *Out-of-Sample*, para o nível de significância de 1%, 2,5% e 5%, considerando que o primeiro dia a estimar será 2 de Janeiro de 2002. A partir deste dia, para a estimação do VaR do dia seguinte ($t+1$), vamos sempre introduzindo mais um dia (o dia anterior, t). Assim, para o cálculo do VaR do dia 22 de Outubro de 2007 (último dia da amostra), toda a amostra até ao dia 21 de Outubro será utilizada. A alternativa seria definir uma janela móvel com um número fixo de observações. Contudo, segundo Hendricks (1996), um aumento na dimensão da amostra tende a gerar estimativas de VaR mais correctas.

De seguida iremos apresentar algumas estatísticas para a avaliação de performance dos vários modelos estimados: a estatística do erro absoluto médio, o teste de Kupiec (1995) (Angelidis, Benos e Degiannakis, 2003; Crouhy, Galai e Mark, 2000) e o teste Christoffersen (1998) (Angelidis, Benos e Degiannakis, 2003).

4.1. Erro Absoluto Médio

Uma primeira estatística para avaliação da performance de cada uma dos modelos é a estatística do erro absoluto médio. Com esta estatística, podemos concluir qual é, em média, o erro absoluto entre a estimativa para o VaR, obtida por recurso aos vários modelos, e o verdadeiro valor registado, calculado com base na série de rendibilidades histórica.

4.2. *Unconditional Coverage Test* - Teste proposto por Kupiec (1995)

Kupiec (1995) propôs um teste baseado no número de vezes em que a rendibilidade registada é inferior ao valor do VaR, ou seja, no número de excepções. Definindo N e T como o número de excepções e o número total de observações, respectivamente, o objectivo será saber se $\frac{N}{T}$ é significativamente diferente do nível de significância. Se o número de excepções for superior ao nível de significância (α), então o modelo subestima o verdadeiro valor do VaR, mas se o contrário acontecer, o modelo é conservador. Se a hipótese nula for aceite, então o modelo é adequado ao cálculo do VaR e a probabilidade de ocorrerem excepções é semelhante ao nível de significância. O teste *likelihood ratio*, sabendo que a hipótese nula é $\frac{N}{T} = \alpha$, é definido como:

$$LR(uc) = 2 \ln \left[\left(1 - \frac{N}{T}\right)^{T-N} \left(\frac{N}{T}\right)^N \right] - 2 \ln \left[(1 - \alpha)^{T-N} \alpha^N \right] \sim \chi^2(1). \quad (23)$$

Este teste permite a rejeição de modelos com reduzido ou elevado número de excepções (quando comparado com o nível de significância). Contudo, segundo a opinião de Kupiec (1995) a sua performance é baixa, mas tende a elevar-se com o aumento do número de observações.

4.3. *Conditional Coverage Test* - teste proposto por Christoffersen (1998)

O teste de Kupiec (1995) não tem em consideração a distribuição temporal das excepções, ou seja o grau de concentração ao longo do período em análise. Assim, devemos também avaliar cada um dos modelos estimados de acordo com o teste proposto por Christoffersen (1998).

Esta estatística para além de avaliar o número de excepções em cada modelo, avalia também se as excepções são independentes entre si. Em resultado, um modelo adequado será então o modelo em que o número de excepções se aproxima do nível de significância e em que estas não devam ser concentradas, mas sim, independentes. Esta estatística é dada por:

$$LR(cc) = LR(uc) + LR(ind) \sim \chi^2(2), \quad (24)$$

onde $LR(uc)$ é a estatística proposta por Kupiec (1995) que avalia apenas o número de excepções, e $LR(ind)$ é o teste de independência temporal e é definido como:

$$LR(ind) = -2 \ln \left[(1 - \pi)^{n_{00} + n_{10}} \pi^{n_{01} + n_{11}} \right] + 2 \ln \left[(1 - \pi_{01})^{n_{00}} \pi_{01}^{n_{01}} (1 - \pi_{11})^{n_{10}} \pi_{11}^{n_{11}} \right] \sim \chi^2(1), \quad (25)$$

onde n_{ij} é o número de observações no estado j depois de ter estado no estado i no período anterior; por exemplo n_{01} é o número de observações em que a rendibilidade registada em t é menor que a rendibilidade associada ao VaR, quando a rendibilidade registada em $t-1$ foi superior à rendibilidade correspondente ao VaR. Adicionalmente,

$$\pi_{i,j} = \frac{n_{i,j}}{\sum_j n_{i,j}} \quad (26)$$

é a probabilidade correspondente às observações e

$$\pi = (n_{01} + n_{11}) / n \quad (27)$$

é a taxa de excepções.

Ao aceitar a hipótese nula, o modelo VaR é adequado.

4.4. Nível de Capital Regulamentar

Como referido anteriormente, a partir de 1998, com a alteração proposta pelo Comitê de Basileia (1996 *Market Risk Amendment*), as Instituições Financeiras foram obrigadas a deter um nível de capital mínimo resultante não só do risco de crédito a que a Instituição está exposta, mas também do risco de mercado. Para avaliação do risco de mercado, o acordo tornou possível o recurso a modelos internos no cálculo do VaR. Esta estimativa será depois utilizada no cálculo do capital regulamentar que o banco tem que deter relativamente à

exposição ao risco de mercado (*Market Risk Charge* - MRC). Para o cálculo do VaR, uma vez que a sua definição terá que ser uniforme para todas as Instituições Financeiras, o Comitê de Basileia obriga a que o nível de confiança seja 99%, o horizonte temporal seja de 10 dias e o período mínimo de dados históricos de 1 ano. Uma vez que é habitual considerar que a estimativa actual para o VaR a 10 dias corresponde simplesmente à estimativa para o VaR diário multiplicado por $\sqrt{10}$ (Ferreira e Lopez, 2005), o nível de capital regulamentar será então definido como:

$$X_t = \sqrt{10} * \max \left[VaR_t; \frac{m}{60} * \sum_{k=0}^{59} VaR_{t-k} \right] + y, \quad (28)$$

em que VaR_t é a estimativa de VaR de acordo com o definido anteriormente e m é o factor multiplicativo, com um mínimo de 3. Este factor poderá ser incrementado até 4 se o procedimento de *backtesting* indiciar que o modelo não está a medir correctamente o risco de mercado. Este procedimento irá calcular o número de vezes, em 260 observações, que a rendibilidade diária observada foi inferior ao valor do VaR diário a 99%. Se o número de excepções for igual ou inferior a 4, estamos na zona verde e o factor multiplicativo mantém-se em 3; se variar entre 5 e 9, estamos na zona amarela e o aumento do factor pode ser de 0,4 a 0,85. Se for igual ou superior 10, estamos na zona vermelha e o aumento do factor será 1. Por fim, a variável y é o incremento no capital resultante do risco de crédito, a qual não será analisada neste estudo.

Dado que o VaR estimado levará à definição de capital mínimo que as Instituições Financeiras têm de deter, estas têm incentivo em apresentar uma estimativa inferior para o VaR e assim, conseguem registar valores de MRC mais baixos (Coronado, 2000; Wong, Cheng e Wong, 2003). Em resultado, o modelo com melhor performance será o que apresentar uma estimativa de capital regulamentar inferior. Considerando esta vantagem, o controlo da performance dos modelos internos será um factor importante na definição do nível de capital regulamentar.

5. Resultados

5.1. Distribuição empírica

Ao analisar os coeficientes de assimetria e achatamento presentes na tabela 1, concluímos que as diferentes séries de rendibilidade não são simétricas e apresentam caudas pesadas quando comparadas com a distribuição normal. Assim, a probabilidade de registarem perdas ou ganhos elevados é maior quando comparamos com a probabilidade associada à distribuição Normal. Este resultado pode também ser visualizado nos diferentes painéis do gráfico 2. De facto, podemos concluir que os *buckets* 1-3 anos, 3-5, 5-7 e 7-10 anos têm caudas direitas mais pesadas, sendo que, o *bucket* nominal 10+anos, bem como os dois *buckets* de *Index Linked Indices* apresentam caudas esquerdas mais pesadas. A rejeição da normalidade também pode ser visualizada através do teste Jarque-Bera.

Adicionalmente, podemos concluir pelo teste de Kolmogorov-Sirnov⁷, que as séries de rendibilidade não seguem uma distribuição t-Student. Pela representação gráfica (gráfico 2), podemos visualizar que o número de observações presente nas caudas, ou seja, a probabilidade associada a perdas ou ganhos elevados, é superior na distribuição t-Student do que em cada uma das séries de rendibilidade, o que poderá distorcer os resultados, obtendo-se estimativas que tendem a ser mais conservadoras.

No ponto seguinte iremos apresentar os resultados, de acordo com os vários modelos referidos anteriormente, admitindo para o cálculo do VaR paramétrico, a distribuição Normal e a distribuição t-Student.

5.2. Avaliação de performance

5.2.1. Estatística de Erro Absoluto Médio

O gráfico 3 apresenta os diferentes painéis com as séries obtidas para o VaR para o período *out-of-sample*, de acordo com os diferentes níveis de significância ($\alpha = 5\%$, $2,5\%$ e 1%), bem como a rendibilidade efectiva de acordo com os portfolios óptimos obtidos para cada dia. De acordo com a representação gráfica, o modelo EWMA assumindo as distribuições normal ou

⁷ Admitindo 4 graus para cada série, de acordo com a optimização referida anteriormente.

t-Student é o que melhor repercute a evolução da rendibilidade registada. A estatística de erro absoluto médio vem confirmar estes resultados. De facto, na tabela 2 podemos concluir que, para os diferentes níveis de significância analisados, o modelo mais adequado segundo esta estatística é o modelo EWMA-normal. Adicionalmente, ao analisarmos os diferentes modelos, considerando por um lado, os modelos que assumem a distribuição Normal, e por outro os modelos que assumem a distribuição t-Student, concluímos que, segundo esta estatística, o modelo EWMA regista um valor inferior.

5.2.2. VaR médio e número de excepções

A tabela 3 apresenta a média dos valores obtidos para o VaR, bem como o percentil da distribuição de rendimentos, de acordo com cada um dos modelos, para cada intervalo de confiança, 95%, 97,5% e 99%. Como referido por Ferreira e Lopez (2005), a estimação do VaR não varia tanto em função do cálculo da matriz de variâncias-covariâncias, mas sim em função da distribuição de rendimentos adoptada, no nosso caso, da distribuição Normal ou t-Student. De facto, quando comparamos a média do VaR com o percentil de rendibilidade para as várias metodologias e de acordo com os diferentes níveis de significância, concluímos que, enquanto que para $\alpha = 5\%$, em todos os modelos, o VaR estimado é inferior ao percentil 5% da distribuição de rendibilidades, para $\alpha = 2,5\%$ e 1% , o VaR estimado é apenas inferior ao percentil correspondente na distribuição de rendimentos, no caso da distribuição t-Student. Estes resultados são confirmados pelo número de excepções presente na tabela 4. Assim, para $\alpha = 5\%$, todos os modelos apresentam um número de excepções inferiores a 5%, aproximando-se desta percentagem os modelos que assumiram a distribuição normal como distribuição de rendimentos, bem como o modelo de Simulação Histórica. Para α inferiores ($2,5\%$ e 1%), os modelos que utilizam a distribuição t-Student como distribuição de rendimentos apresentam um número de excepções inferior a α . Relativamente ao modelo EWMA apesar de, como vimos anteriormente, graficamente acompanhar a distribuição de rendibilidades, a sua performance avaliada pelo número de excepções, pode não coincidir com esta análise. Dado que, as observações mais recentes têm maior impacto na estimativa do VaR em t, se a rendibilidade de t-1 for muito baixa, o valor obtido para o VaR em t será mais conservador, o que poderá levar à redução do número de excepções ao longo do período analisado. Em suma, a distribuição t-Student apresenta estimativas de VaR conservadoras para os vários percentis analisados. Para níveis de significância mais baixos, a distribuição Normal tende a subestimar o valor do VaR, apresentando valores razoáveis para $\alpha = 5\%$.

O modelo não paramétrico apresenta uma performance parecida com a distribuição normal, subestimando, embora que em menor escala (quando comparado com a normal), o valor do VaR para intervalos de confiança superiores.

5.2.3. Teste de Kupiec (1995) e teste de Christoffersen (1998)

As tabelas 5 e 6 apresentam os resultados para os testes propostos por Kupiec (1995) e Christoffersen (1998), respectivamente, para o nível de rejeição de 5%⁸. Como referido anteriormente, estes testes avaliam não só o número de exceções (Teste Kupiec), como também o número de exceções e a sua independência (teste conjunto de Christoffersen). Para $\alpha = 5\%$, para os modelos que assumem a distribuição t-Student, de acordo com o teste conjunto, rejeitamos a hipótese nula de que os modelos são adequados na definição do VaR. Para $\alpha = 2,5\%$, segundo o mesmo teste, apenas não rejeitamos o modelo não paramétrico (Simulação Histórica) e o modelo *Equally Weighted* admitindo a distribuição Normal⁹. Adicionalmente, segundo o teste de Kupiec (1995), para $\alpha = 1\%$, os modelos adequados são os modelos de Simulação Histórica e o modelo BEKK com a distribuição t-Student. Para o teste conjunto de independência e cobertura, para $\alpha = 1\%$ apenas podemos concluir que os modelos *Equally Weighted* com distribuição Normal e BEKK Normal não são adequados na definição do VaR, não podendo concluir nada sobre a performance dos restantes modelos na definição do VaR¹⁰.

Em suma, o modelo não paramétrico de Simulação Histórica regista uma performance elevada nos três percentis analisados. Adicionalmente, o modelo VaR-Cov assumindo a distribuição normal e o cálculo da matriz de variâncias-covariâncias, admitindo a mesma ponderação para todas as observações (*Equally Weighted*), também apresenta uma boa performance, sendo um modelo adequado para $\alpha = 5\%$ e $2,5\%$. É de realçar este resultado, uma vez que como dissemos anteriormente as rendibilidades não seguem uma distribuição Normal. Relativamente aos resultados obtidos, de acordo com o teste de Kupiec (1995), para os modelos assumindo a distribuição t-Student, apenas o modelo BEKK, admitindo um intervalo de confiança de 99% é um modelo adequado na definição do VaR. Este resultado vem realçar

⁸ Os resultados seriam um pouco diferentes se o nível de significância fosse inferior, nomeadamente, para a estimação do VaR a 97,5% todos os modelos seriam adequados.

⁹ No teste de independência não podemos concluir nada sobre os modelos BEKK t-Student e EWMA t-Student, uma vez que π_{11} é zero.

¹⁰ Esta impossibilidade deriva do facto de π_{11} ser zero

o facto já referido anteriormente por observação gráfica: apesar de, de acordo com as suas características a distribuição t-Student ser, normalmente, mais adequada na definição do VaR, as suas caudas densas são mais pesadas do que cada série de rendimentos empírica utilizada na nossa análise, o que se irá repercutir em estimativas de VaR mais conservadoras.

Tal como referido anteriormente, no cálculo do VaR, a definição da distribuição de rendimentos é o factor decisivo na performance do modelo. Assim, em geral, as inovações introduzidas pelos modelos BEKK ou EWMA não acrescentam uma melhoria significativa na estimação do VaR. Contudo, para $\alpha = 1\%$, o modelo BEKK t-Student é o único modelo paramétrico aceite¹¹.

5.3. Capital Mínimo Regulamentar

Como referido anteriormente o capital mínimo é calculado tendo como *input* o VaR a 99%, num horizonte temporal de 10 dias. Contudo, dado que a nossa análise é diária, vamos considerar também este horizonte temporal para o cálculo do *backtesting* e o correspondente nível de capital regulamentar¹².

Em média, no período *out-of-sample* analisado, o modelo EWMA-Normal regista o menor nível de capital mínimo, sendo este modelo considerado *benchmark* para comparação com os restantes modelos. A tabela 7 apresenta a percentagem de dias em que o modelo EWMA-Normal regista menor nível de capital face aos restantes modelos no período *out-of-sample* analisado. O modelo *Equally Weighted* admitindo a distribuição t-Student é o modelo com pior performance face ao *benchmark*, registando em todo o período níveis de capital superiores face a este modelo. Ao invés, o modelo *Equally Weighted* admitindo a distribuição Normal é o modelo com melhor performance, registando em cerca de 42% dos dias, níveis de capital superiores ao modelo EWMA-Normal.

Adicionalmente, analisámos também as diferenças entre os níveis de capital mínimo obtidos no modelo EWMA-Normal e nos restantes modelos através do teste estatístico Diebold-Mariano. Dado um horizonte temporal h , este teste é definido por:

¹¹ O modelo *Equally Weighted* estimado considerando a distribuição t-Student seria considerado um modelo adequado à estimação se a rejeição do teste fosse realizada com um nível de significância de 2,5%.

¹² Para o cálculo do nível de capital regulamentar com um horizonte temporal diário, deve-se apenas multiplicar a estimativa obtida por $\sqrt{10}$.

$$S = \frac{\bar{d}}{\sqrt{\sigma^2/T}} \sim N(0,1) \quad (29)$$

Em que \bar{d} e σ^2 são a média e a variância da série dos desvios entre os modelos alternativo e *benchmark* e T é o número de observações. Assim, se os dois modelos registarem uma boa performance, então a diferença média terá de ser zero. Esta é a hipótese nula.

Se rejeitarmos a hipótese nula, e a diferença média registada for negativa, então o modelo *benchmark* apresenta uma performance superior, e assim, a estimativa do VaR com recurso a este modelo será preferível, uma vez que as necessidades de capital são, em média, menores. Se pelo contrário, rejeitarmos a hipótese nula, mas a diferença for positiva, então o modelo alternativo regista uma performance superior no cálculo do VaR. Por último, se não rejeitarmos a hipótese nula, então o modelo alternativo tem uma performance semelhante ao modelo *benchmark*, EWMA-Normal.

Na tabela 7 são apresentados os *p-values* para a estatística de Diebold-Mariano. Para todos os modelos analisados, rejeitamos a hipótese nula e as diferenças são negativas, o que indica que o modelo EWMA-Normal regista uma performance superior, sendo o modelo a utilizar no cálculo do VaR, de acordo com o nível de capital regulamentar.

6. Conclusão

Neste estudo estimámos, com uma periodicidade diária, o portfolio óptimo de acordo com a minimização do VaR, com recurso a dois grupos de modelos, o paramétrico e o não paramétrico. No modelo paramétrico, assumindo as distribuições Normal e t-Student como distribuições de probabilidade, calculámos a matriz de variâncias-covariâncias de acordo com três métodos: assumindo que os dados históricos têm igual peso no cálculo da matriz (*Equally Weighted*), recorrendo ao modelo GARCH-BEKK e por fim ao modelo EWMA, definindo o parâmetro de alisamento (*decay factor*), λ , igual a 0.94. No modelo não paramétrico, recorremos ao modelo de Simulação Histórica.

De acordo com as previsões diárias realizadas para cada metodologia, os resultados variam mais em função da distribuição de probabilidades usada no cálculo do modelo, no nosso caso, a distribuição Normal ou t-Student, e não tanto em função do modelo adoptado. Este resultado está em linha com a conclusão também apresentada por Ferreira e Lopez (2005). Adicionalmente, segundo a nossa análise de performance, apesar das séries de rendibilidades não seguirem a distribuição normal, os resultados obtidos favorecem esta distribuição, quando comparada com a distribuição alternativa usada, a distribuição t-Student. Este resultado também já foi obtido anteriormente por Lucas (2000), que concluiu que os modelos VaR baseados apenas em cálculos simples da variância e admitindo a normalidade apresentam menores diferenças face à estimativa de VaR realizada e a estimada, quando comparado com os modelos mais sofisticados. Assim, para α superiores, a hipótese de normalidade é preferível à hipótese alternativa, a distribuição t-Student. Para α inferiores, o modelo GARCH-BEKK admitindo a distribuição t-Student apresenta melhores resultados. Como vimos, o modelo não paramétrico, Simulação Histórica, apresenta uma performance elevada para os intervalos de confiança analisados.

Se considerarmos apenas a minimização do VaR, ignorando o nível de capital mínimo, o modelo EWMA apesar de graficamente se aproximar da série de rendibilidades, a sua performance não é elevada, o que está relacionado com o facto das observações mais recentes terem maior impacto no cálculo do VaR em t. Contudo, ao considerarmos o nível de capital regulamentar como factor de decisão na optimização do portfolio, dado que este modelo minimiza a estatística de erro médio absoluto, torna-se preferível no cálculo do nível de capital regulamentar, apresentando níveis de capital mais baixos. Assim, de acordo com a estatística Diebold-Mariano, o modelo EWMA assumindo a distribuição Normal apresenta, em média, um nível de capital regulamentar inferior quando comparado com os restantes, o que mais uma vez vem favorecer a hipótese de normalidade.

Bibliografia

Alexander, C. O., e C. T. Leigh (1997), *On the Covariance Matrices Used in Value at Risk Models*. Journal of Derivatives 4, 50–62.

Angelidis, T., A. Benos e S. Degiannakis (2003), *The Use of GARCH Model in VAR Estimation*. Statistical Methodology, Vol. 1, No. 2, 105-128.

Bams, D., T. Lehnert, e C. C. P. Wolft, (2005), *An Evaluation for Alternative VaR-Models*. Journal of International Money and Finance, Vol. 24, 944-958.

Bensalah, Y. (2002), Asset Allocation using Extreme Value Theory, *Bank of Canada Working Paper 2002-2*.

Bollerslev (1986), *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*. Journal of Econometrics. V.31 307-327.

Campbell, S. D. (2005), *A Review of Backtesting and Backtesting Procedures*. Financial and Economics Discussion Series Divisions of Research & Statistics and Monetary Affairs. Federal Reserve Board, Washington, DC.

Christoffersen, P. (1998), *Evaluating Interval Forecasts*. International Economic Review, Vol. 39, 841–862.

Coronado, M. (2000), *Comparing different methods for estimating Value-at-Risk (VaR) for actual non-linear portfolios: empirical evidence*. Proceedings for the VII International Conference on Computational and forecasting Financial Markets. London.

Crouhy, M., D. Galai e R. Mark (2000), *Risk Management*. McGraw Hill, New York.

Danielsson, J e Y. Morimoto (2000), *Forecasting extreme financial risk: a critical analysis of practical methods for the Japanese market*. Monetary and Economics Studies, Vol. 18, Bank of Japan.

Dato, J.F.O., G. Garcia, D. Layron e P. G. Machuenda (2001), *Normal versus Student in Measuring Value at Risk. An empirical Bayesian Overview*. Não está publicado, http://www.uclm.es/AB/fcee/D_trabajos/1-2001-4.pdf.

Engle (1982), *Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation*. Econometrica. Vol. 50, 987-1008.

Ferreira, M. A. (2001), *Forecasting the Comovements of Spot Interest Rates*. Journal of International Money and Finance, Vol.24, issue 5, 766-792.

Ferreira, M. A. e Lopez, J. (2005), *Evaluating Interest Rate Covariance Models within a Value-at-Risk Framework*. Journal of Financial Econometrics, Vol. 3, pp.126-168.

Gaivoronski, A. A. e G. Pflug (2000), Value at Risk in Portfolio Optimization: Properties and Computational Approach, *Working Paper 00/2*, Norwegian University of Science and Technology.

Gençay R., F. Selçuke e A. Ulugulyagci (2003), *High volatility, thick tails, and extreme value theory in a Value-at-Risk estimation*. Insurance Mathematics and Economics, vol. 33, 337-356

Guermat C. e R. Harris (2002), *Robust Conditional Variance Estimation and Value-at-Risk*. Journal of Risk, Vol. 4, nº 2

Hendricks, D. (1996), *Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data*. Federal Reserve Bank of New York Economic Policy Review 2, 39–69.

Hull, J. (2005), *Options, Futures, and other derivatives*. Prentice Hall, 6th revision

Inoue A. e Kilian L. (2002), In Sample or Out-of-sample tests of Predictability: which one should we use? *Working Paper n° 195*, Banco Central Europeu.

Jackson, P., D. Maude, e W. Perraudin (1997), *Bank Capital and Value at Risk*. Journal of Derivatives 4, 73–90.

Jorion, P. (2001), *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. McGraw-Hill, New York.

Kupiec, P. (1995), *Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models*. Journal of Derivatives 3, 73–84.

Lopez, J. (1999a), *Methods for Evaluating Value-at-Risk Estimates*. Federal Reserve Bank of San Francisco Economic Review 2, 3–15.

Lopez, J. (1999b), *Regulatory Evaluation of Value-at-Risk Models*. Journal of Risk 1, 37–64.

Lopez, J. (2001), *Evaluating the Predictive Accuracy of Volatility Models*. Journal of Forecasting 20, 87–109.

Lopez, J., and C. Walter (2001), *Evaluating Covariance Matrix Forecasts in a Value-at-Risk Framework*. Journal of Risk 3, 69–98.

Lucas, A. (2000), *A Note on Optimal Estimation from a Risk-Management Perspective Under Possibly Misspecified Tail Behavior*. Journal of Business and Economic Statistics 18, 31–39.

Manganelli, Engle e Simone (2001), Value At Risk Models in Finance, *Working Paper n° 75*, Banco Central Europeu.

Matos, F.A.R. (2005), *Modelling volatility on International Stock Markets*. Tese de Mestrado em Finanças, ISCTE.

Monteiro, J. D. e P. M. Silva, (2002), *Risco de perda adicional, teoria dos valores extremos e gestão do risco: aplicação ao mercado financeiro português*. Universidade da Beira Interior.

Pallotta, M. e Z., Raffaell (2000), *Risk Analysis for Asset Managers: Historical Simulation, the Bootstrap Approach and Value at Risk Calculation*. EFMA 2001 Lugano Meetings.

Pritsker, M. (2001), *The hidden dangers of historical simulation*. FEDS Discussion Paper No. 2001-27.

Puelz, A. (1999), Value-at-Risk Based Portfolio Optimization, *Working paper*, Southern Methodist University.

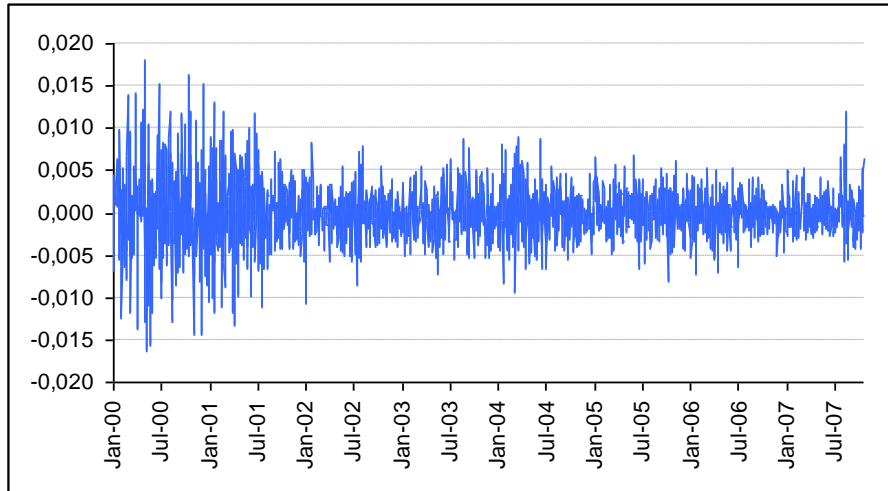
Rombouts, J. V. K. e M. Verbeek (2004), *Evaluating Portfolio Value-at-Risk Using Semi-Parametric GARCH Model*. Erasmus Research Institute of Management (ERIM), RSM Erasmus University.

Vlaar, P. (2000), *Value at Risk Models for Dutch Bond Portfolios*. Journal of Banking and Finance 24, 1131–1154.

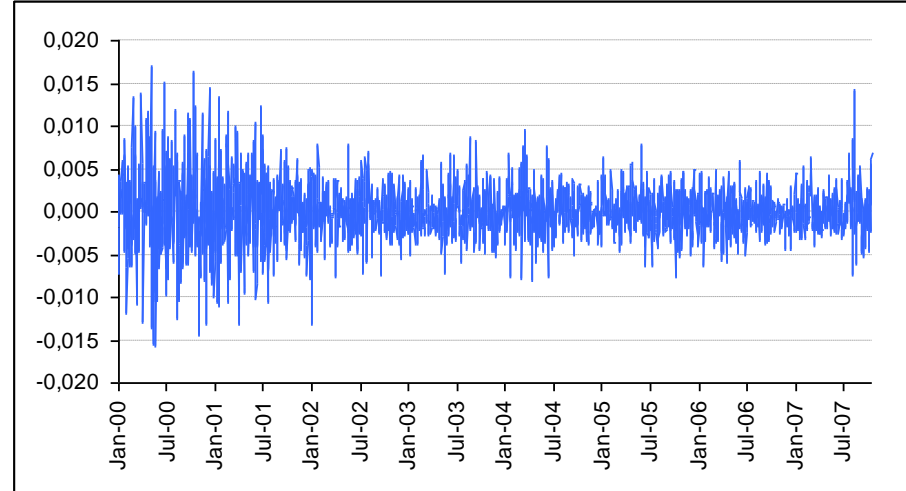
Wong, M., W. Cheng, e C. Wong (2003), *Market Risk Management of Banks: Implications from the Accuracy of Value-at-Risk Forecasts*. Journal of Forecasting 22, 23–33.

Gráfico 1

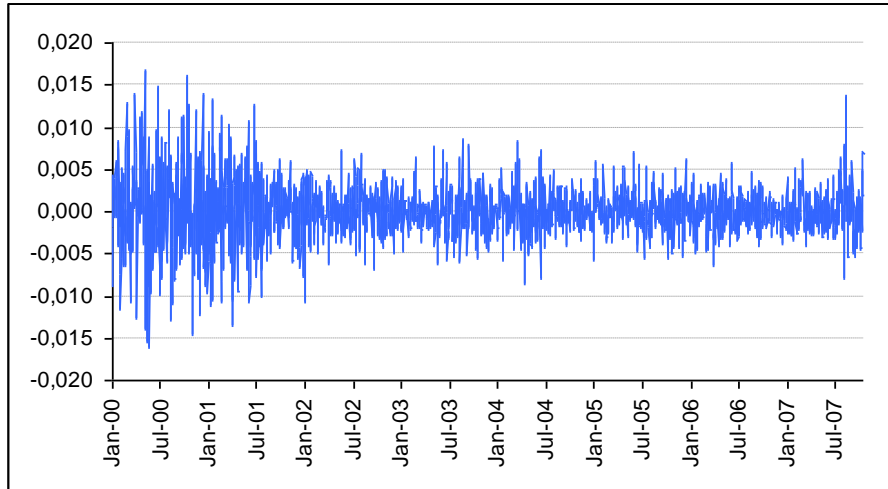
Painel 1 – *bucket* 1-3 anos (nominal)



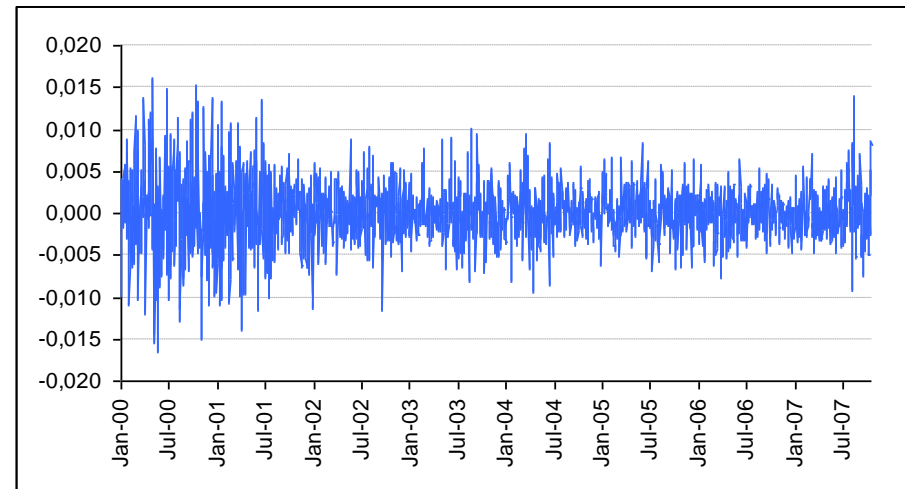
Painel 2 – *bucket* 3-5 anos (nominal)



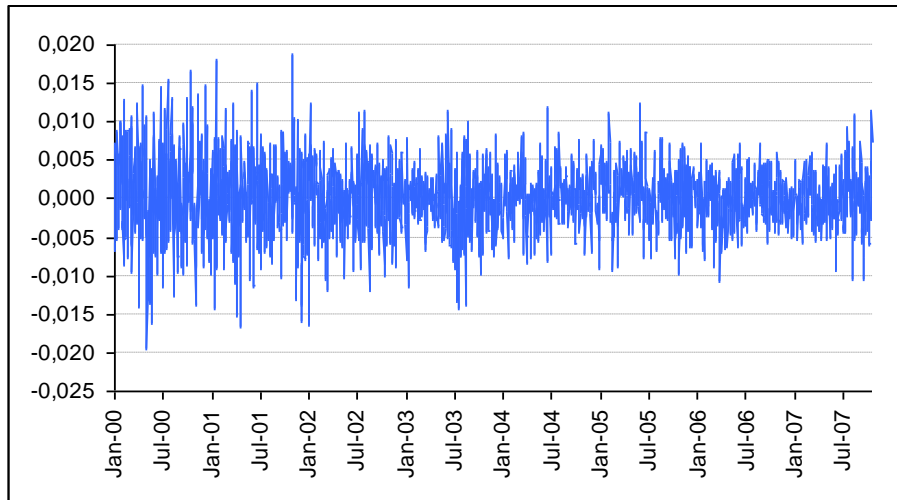
Painel 3 – *bucket* 5-7 anos (nominal)



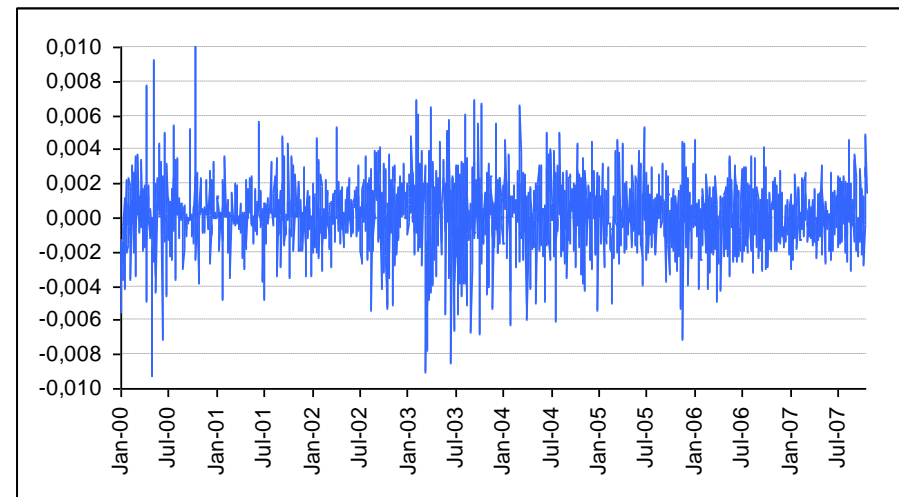
Painel 4 – *bucket* 7-10 anos (nominal)



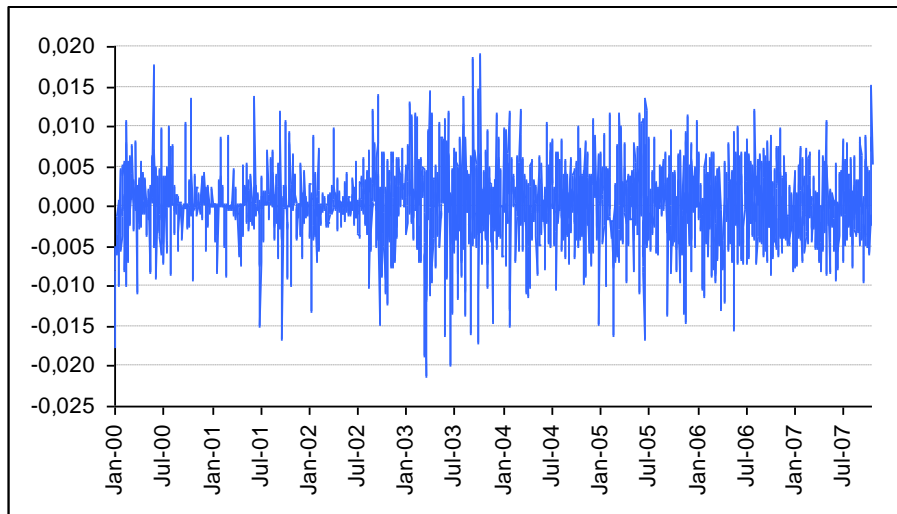
Painel 5 – *bucket* 10+ anos (nominal)



Painel 6 – *bucket* 1-10 anos (Indexado à inflação)



Painel 7 – *bucket* 10+ anos (indexado à inflação)

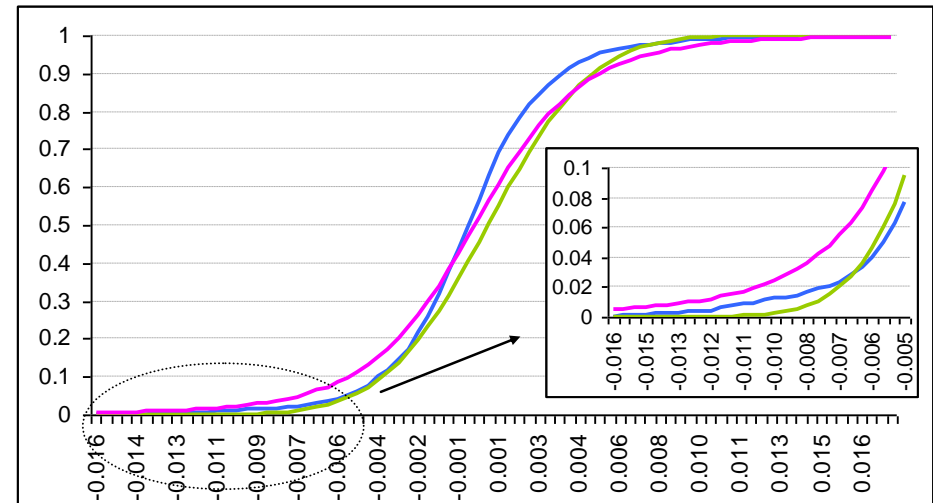
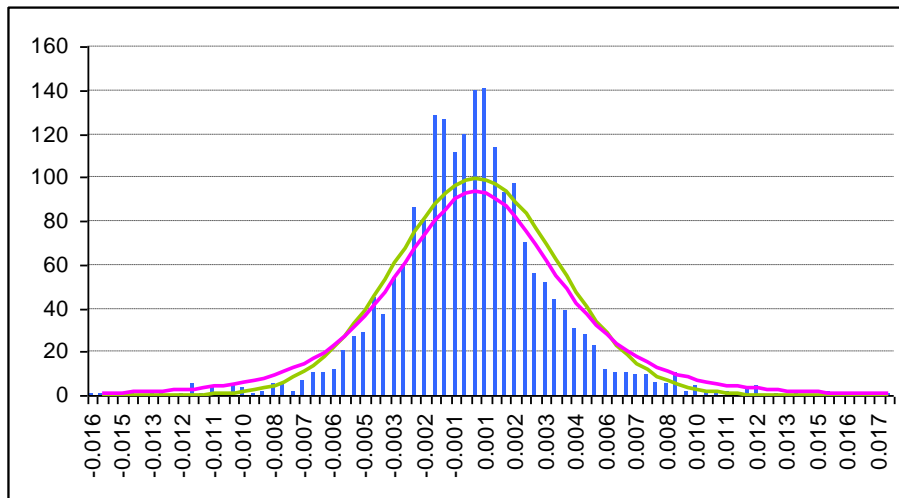


Nos gráficos anteriores podemos visualizar as séries de rendibilidades ($\ln(p_{i,t+1}/p_{i,t})$) para o período de 2 de Janeiro de 2000 a 22 de Outubro de 2007.

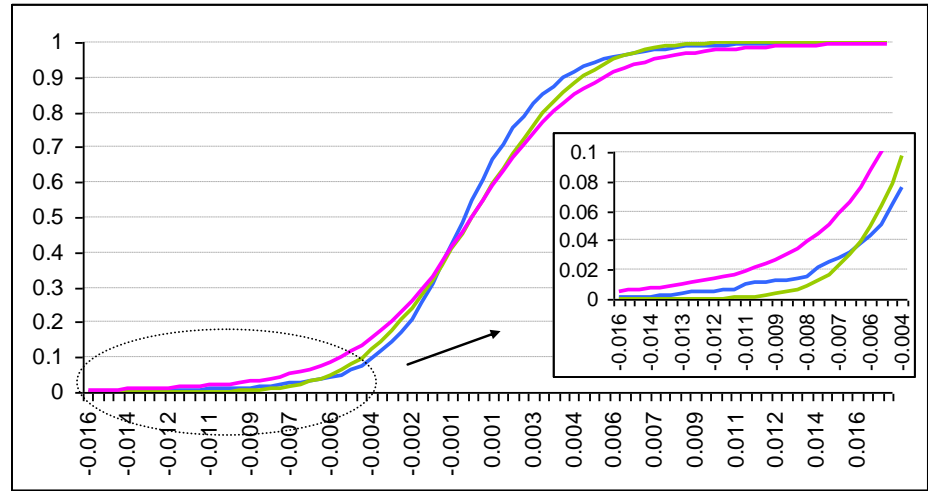
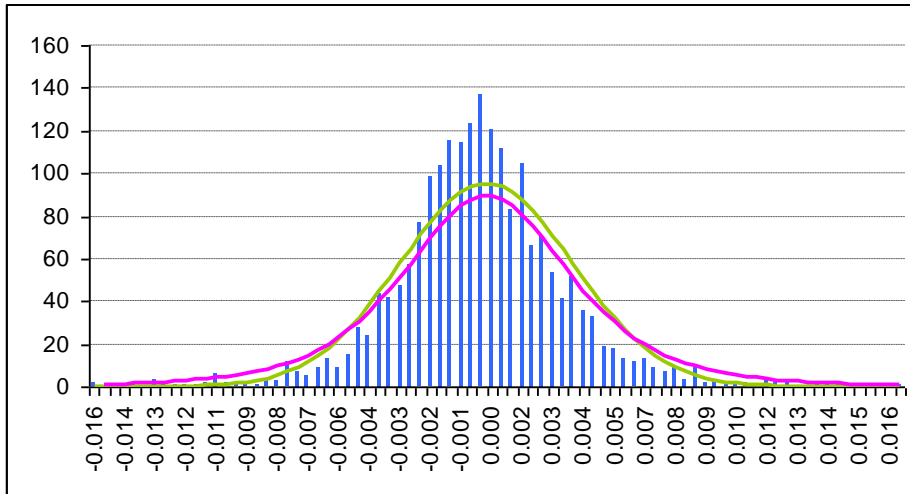
Gráfico 2

■ Distribuição empírica — Distribuição normal — Distribuição t-student

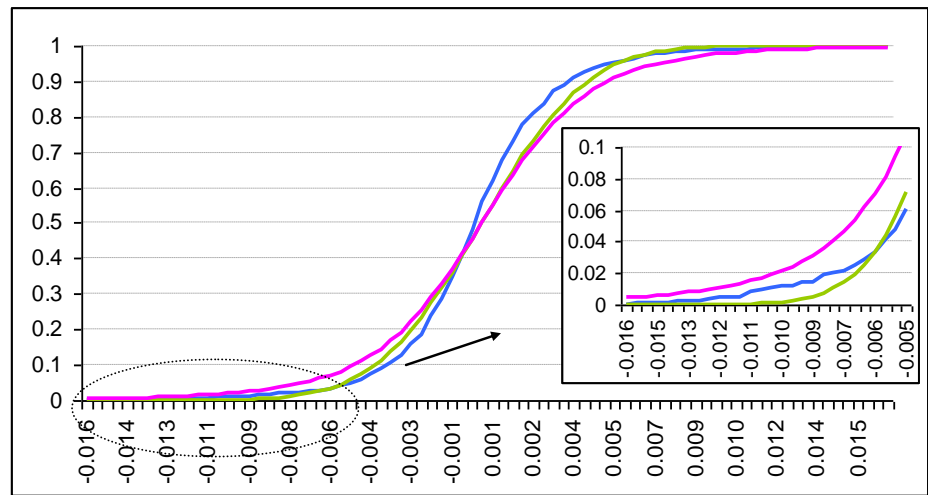
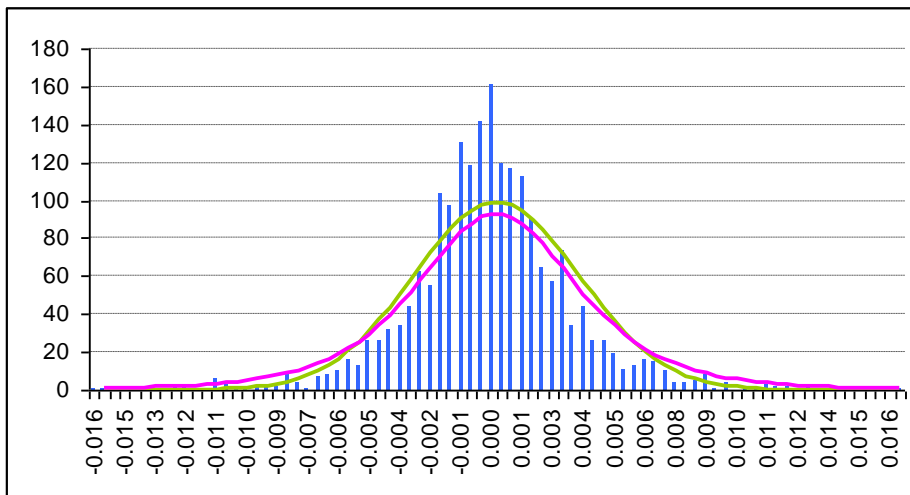
Panel 1 – *bucket* 1-3 anos (nominal)

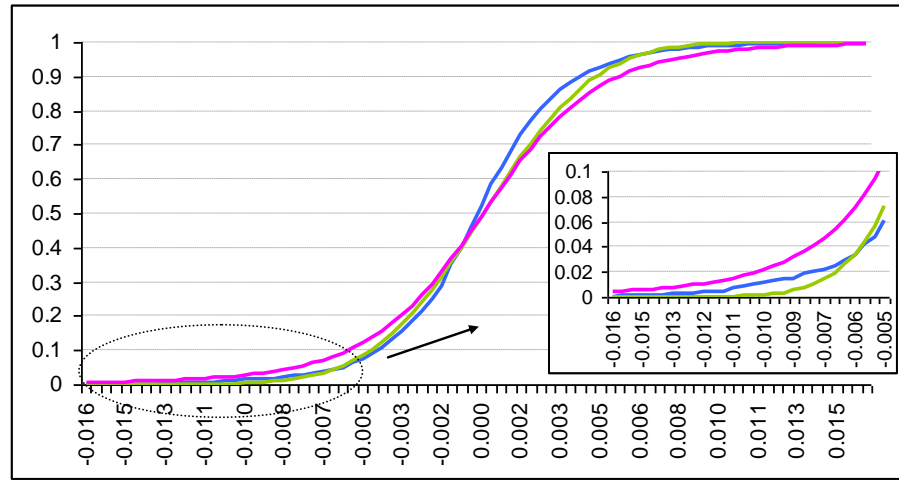
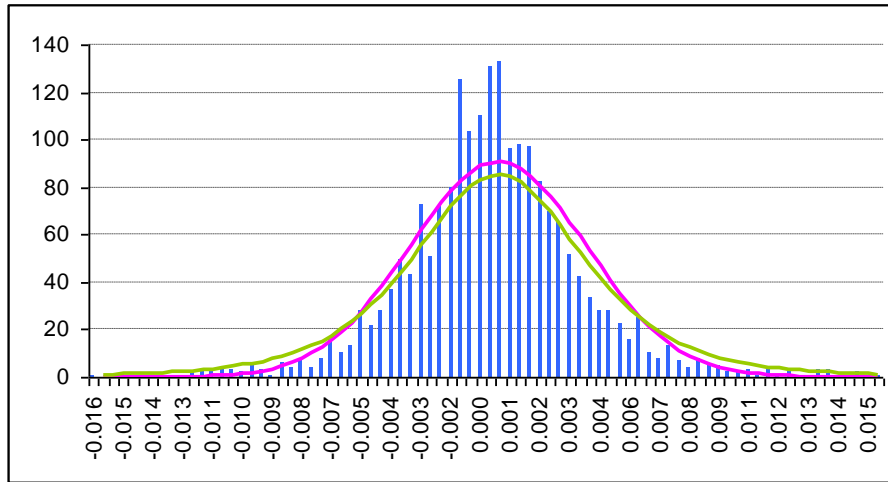


Panel 2 – *bucket 3-5 anos (nominal)*

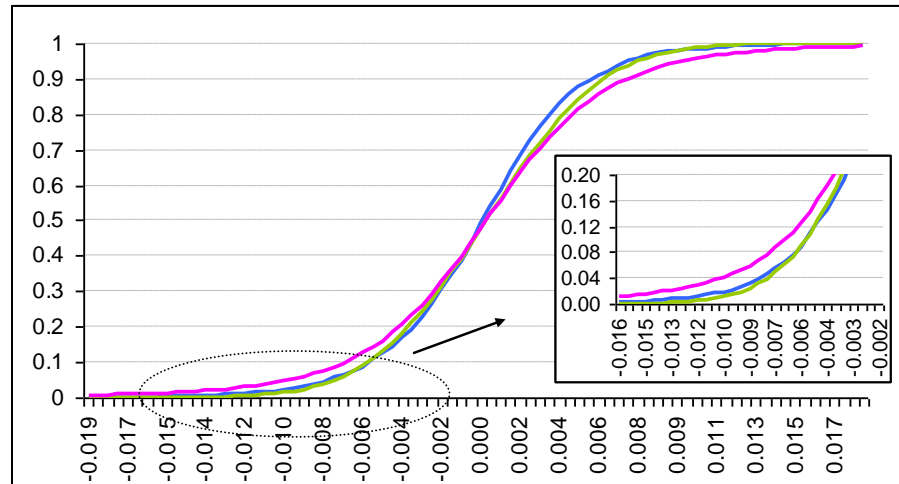
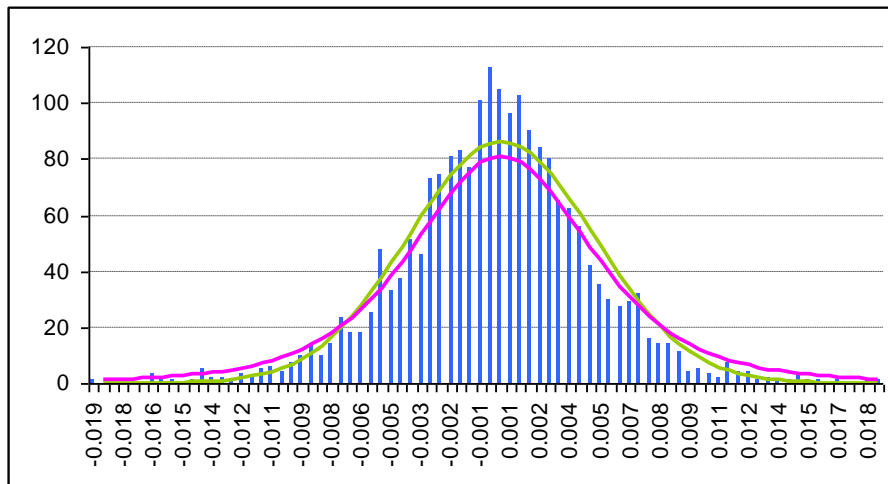


Panel 3 – *bucket 5-7 anos (nominal)*

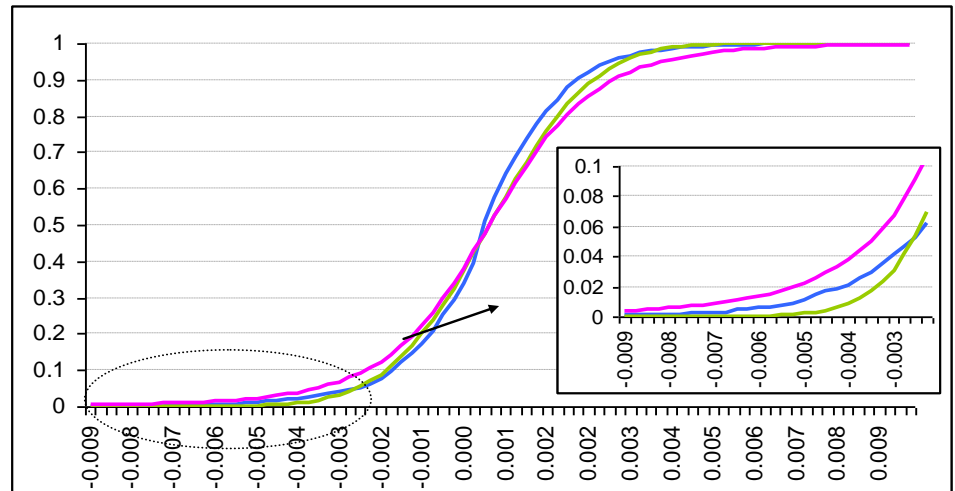
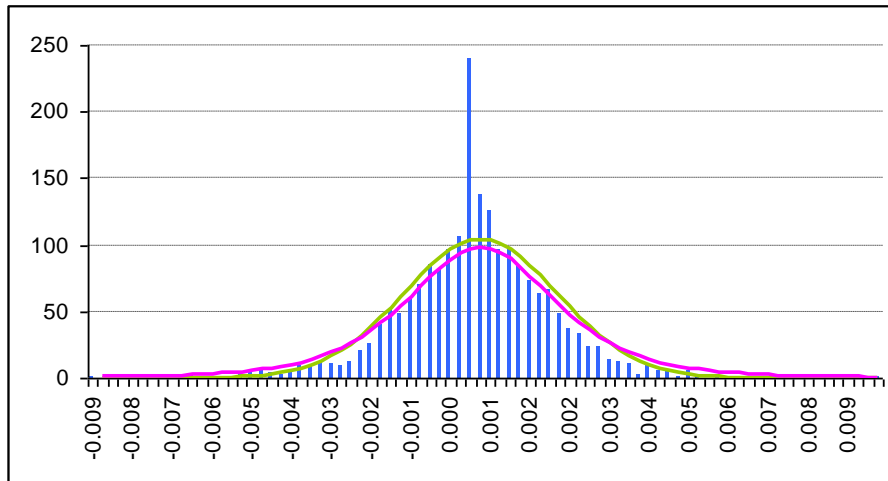




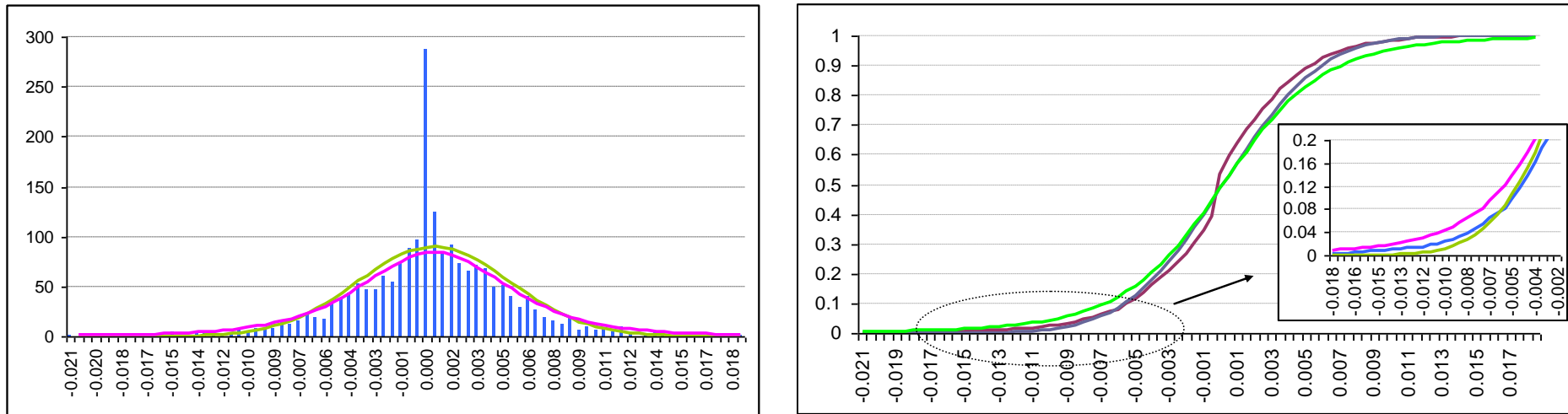
Panel 5 – *bucket* 10+ anos (nominal)



Painel 6 – *bucket* 1-10 anos (indexado à inflação)



Painel 7 – *bucket* 10+ anos (indexado à inflação)



Cada painel tem associado 2 gráficos: um à esquerda, onde se representa o histograma de cada série de rendibilidades, bem com as distribuições normal estandardizada e t-Student estandardizada, ajustadas de acordo com a série de rendibilidades histórica; e um à direita, onde se representam as distribuições de probabilidades acumuladas da série empírica, da distribuição normal e da distribuição t-Student. A função densidade de probabilidades apresentada no gráfico à esquerda é obtida por aproximação da distribuição contínua (distribuição acumulada) à distribuição discreta.

Tabela 1

	1-3 anos	3-5 anos	5-7 anos	7-10 anos	+10 anos	ILB 1-10 anos	ILB +10 anos
Média	0,0000357	0,0000524	0,0000978	0,0000976	0,0001617	0,0002012	0,0002727
Desvio Padrão	0,0034715	0,0034683	0,0033569	0,0036180	0,0044976	0,0018790	0,0045585
Variância	0,0000121	0,0000120	0,0000113	0,0000131	0,0000202	0,0000035	0,0000208
Coefficiente de achatamento	2,9259	2,7574	3,2323	2,1978	1,2034	2,6904	1,8829
Coefficiente de assimetria	0,0955	0,1044	0,0906	0,0390	-0,0957	-0,2221	-0,2844
Mínimo	-0,0163	-0,0157	-0,0161	-0,0165	-0,0196	-0,0092	-0,0213
Máximo	0,0180	0,0171	0,0168	0,0160	0,0189	0,0101	0,0190
Número de observações	2025	2025	2025	2025	2025	2025	2025
Estatística Jarque-Bera	717,5	638,0	875,0	403,1	123,2	620,4	322,4
p-value	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Teste Kolmogorov-Smirnov	0,0771	0,0761	0,0862	0,0675	0,0555	0,0715	0,0837
Limite de aceitação	0,0362	0,0362	0,0362	0,0362	0,0362	0,0362	0,0362

Na tabela anterior pode ser visualizado o resumo estatístico das séries de rendibilidade ($\ln(p_{i,t+1}/p_{i,t})$) utilizadas na optimização.

É apresentada a estatística Jarque Bera e o teste de Kolmogorov-Smirnov que avaliam se a distribuição de rendibilidade segue uma distribuição Normal ou uma distribuição t-Student, respectivamente. No caso da estatística de Jarque-Bera é apresentado o *p-value* e podemos concluir que nenhuma das séries segue uma distribuição Normal. No caso do teste de Kolmogorov-Smirnov é apresentado o limite de aceitação, para o nível de significância de 5%, e concluímos também que as séries de rendibilidade não seguem uma distribuição t-Student.

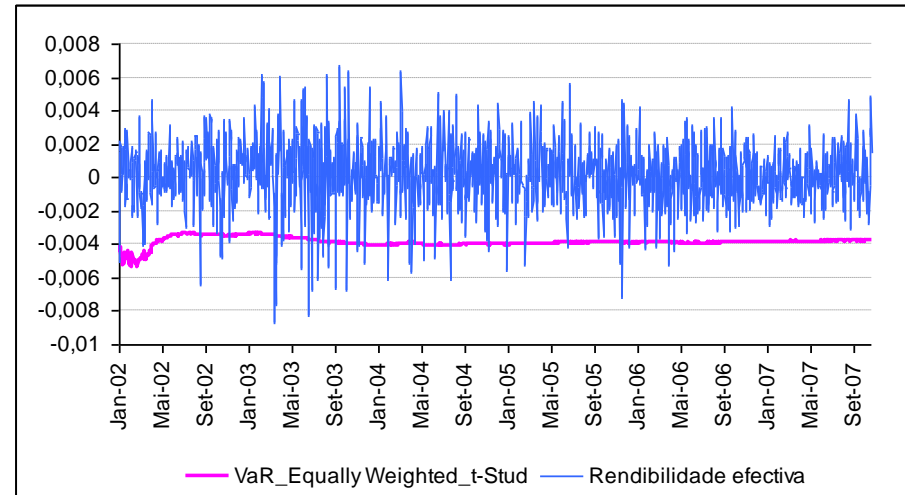
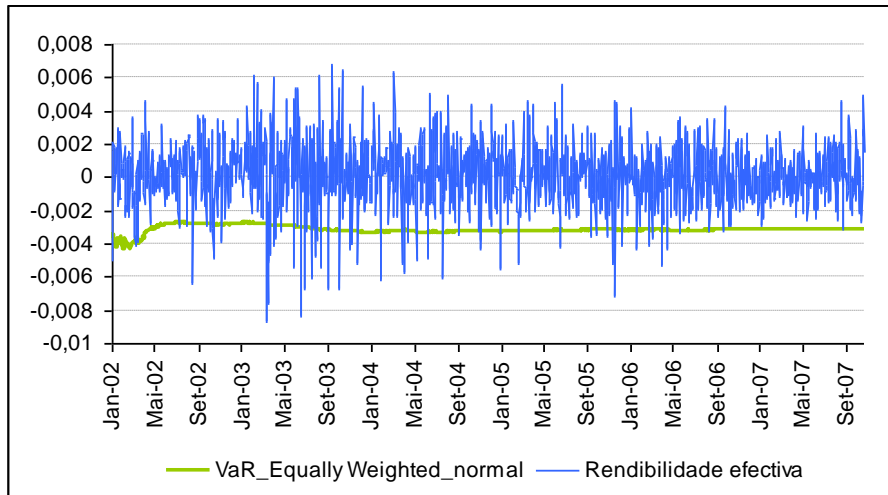
Tabela 2 – Erro Médio Absoluto

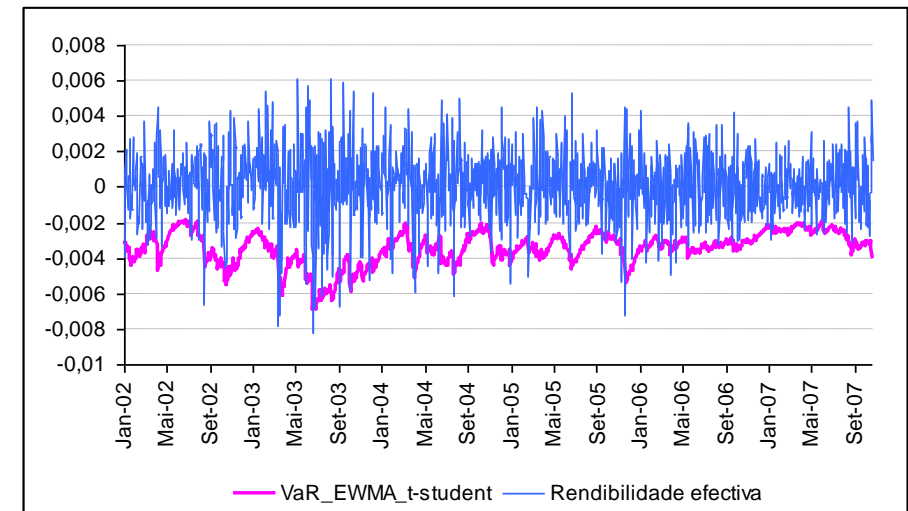
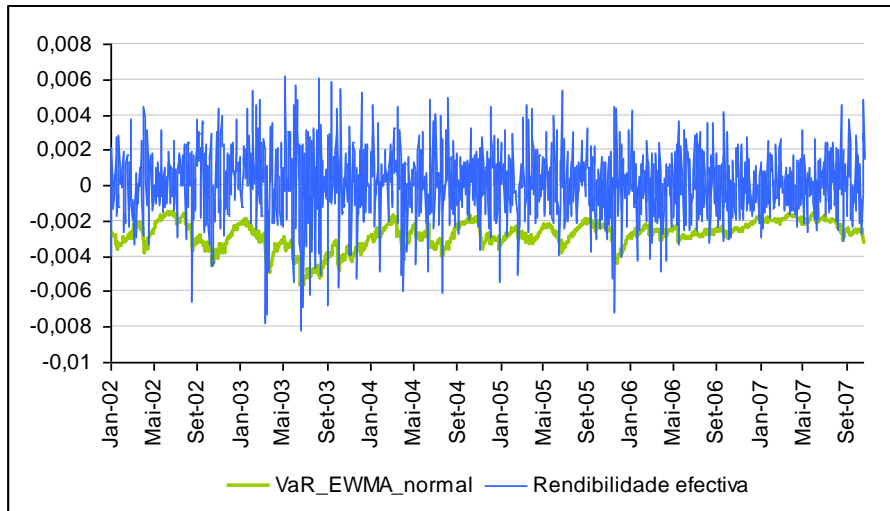
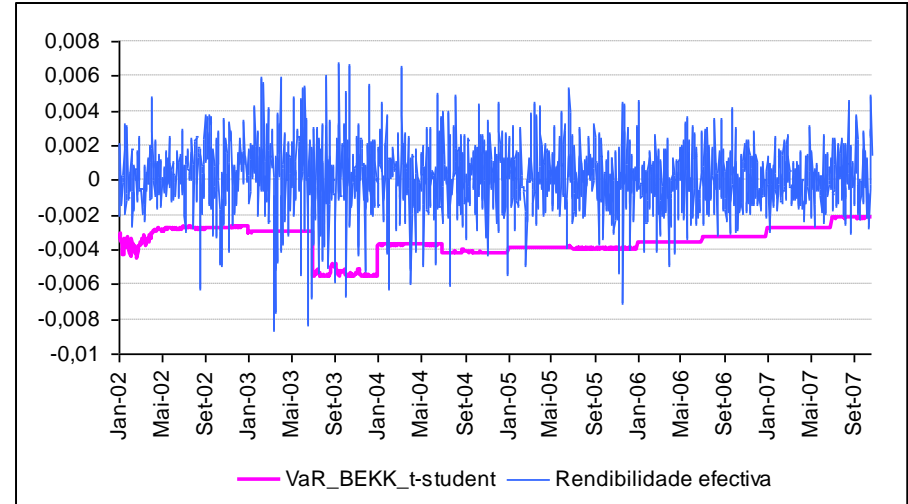
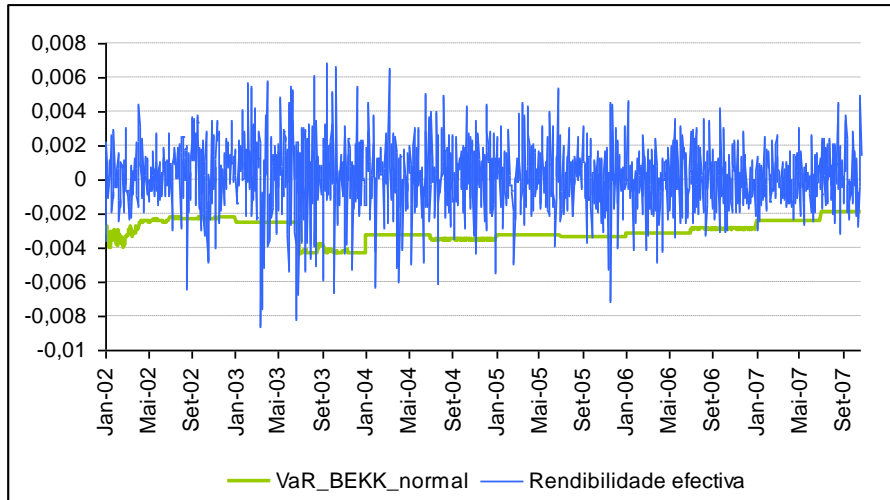
	5,0%	2,5%	1,0%
Equally Weighted Normal	0,00348	0,00404	0,00470
Equally Weighted t-Stud	0,00414	0,00516	0,00665
BEKK Normal	0,00332	0,00385	0,00449
BEKK t-Stud	0,00382	0,00472	0,00600
EWMA Normal	0,00311	0,00361	0,00421
EWMA t-Stud	0,00370	0,00461	0,00595
Simulação Histórica	0,00375	0,00454	0,00546

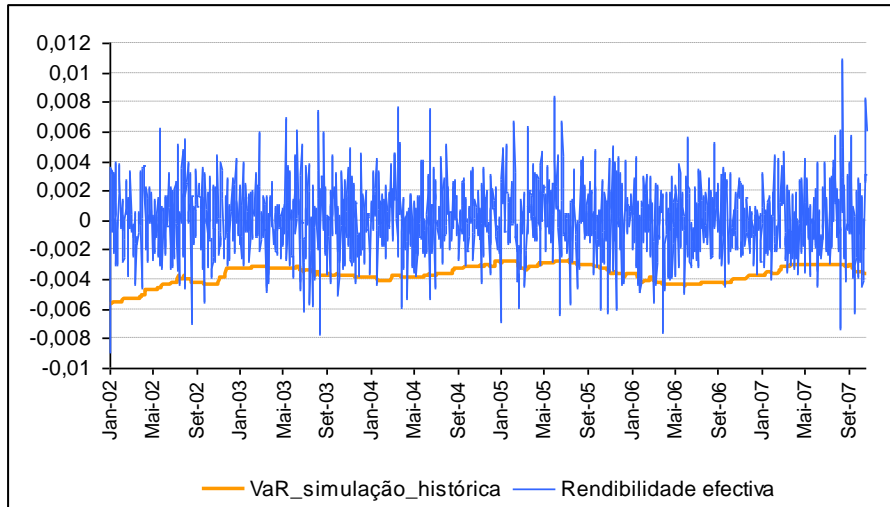
Esta tabela apresenta o erro absoluto médio entre os valores obtidos para a estatística *Value at Risk*, de acordo com cada modelo e nível de significância (1%, 2,5% e 5%), e a rendibilidade estimada para cada dia, de acordo com o portfolio obtido na optimização e com as séries de rendibilidade.

Gráfico 3

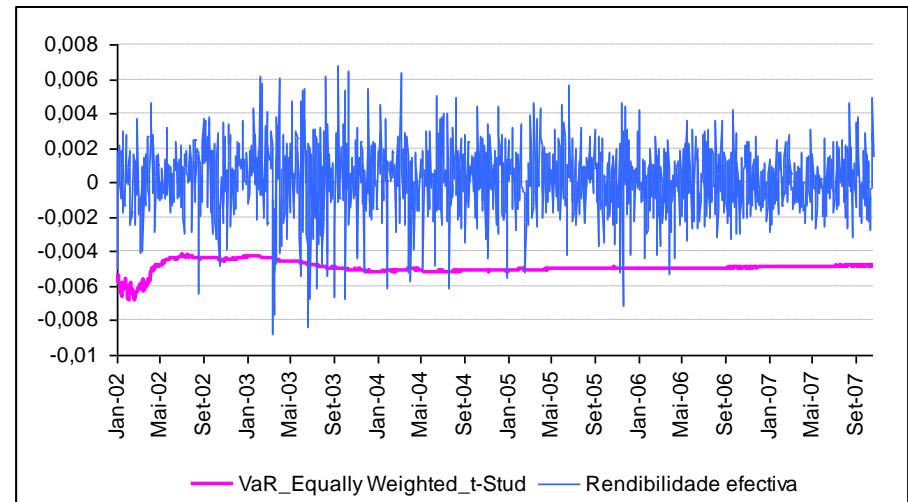
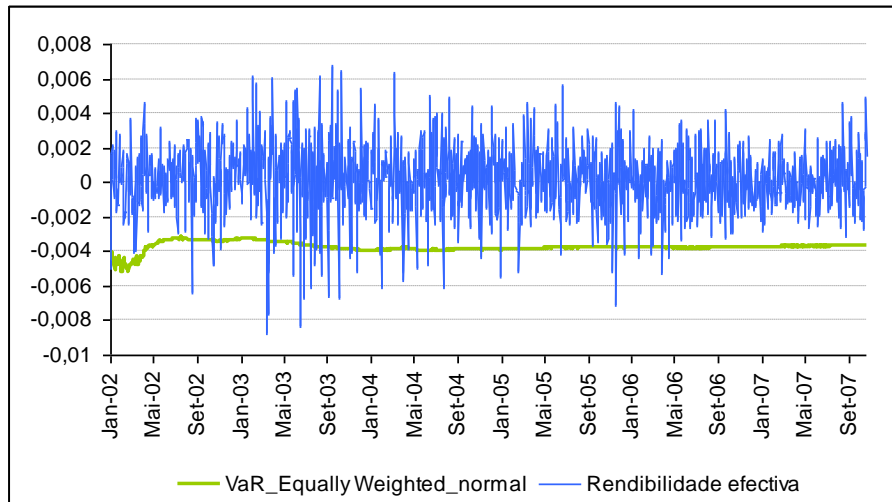
Panel 1 – Nível de significância de 95%

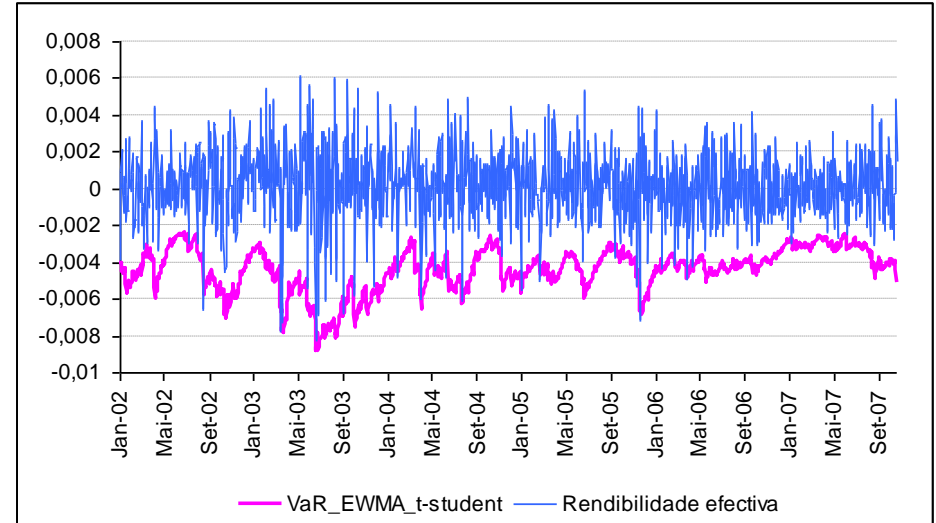
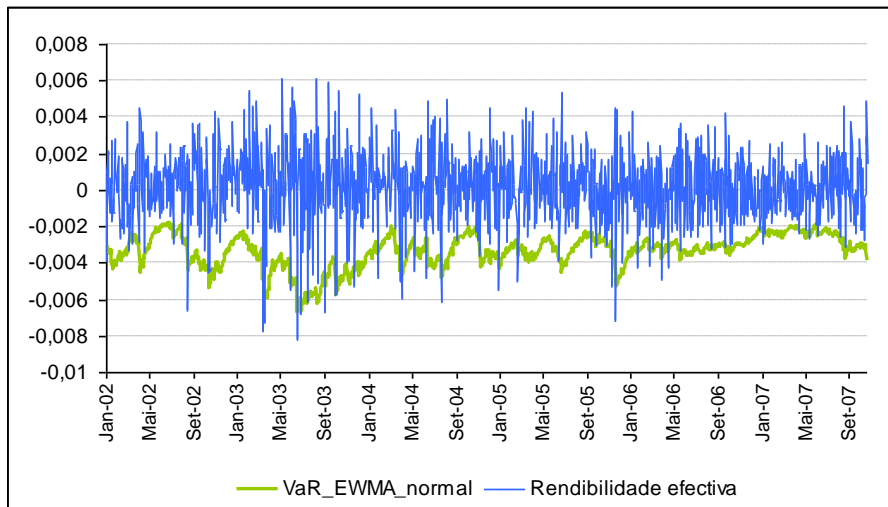
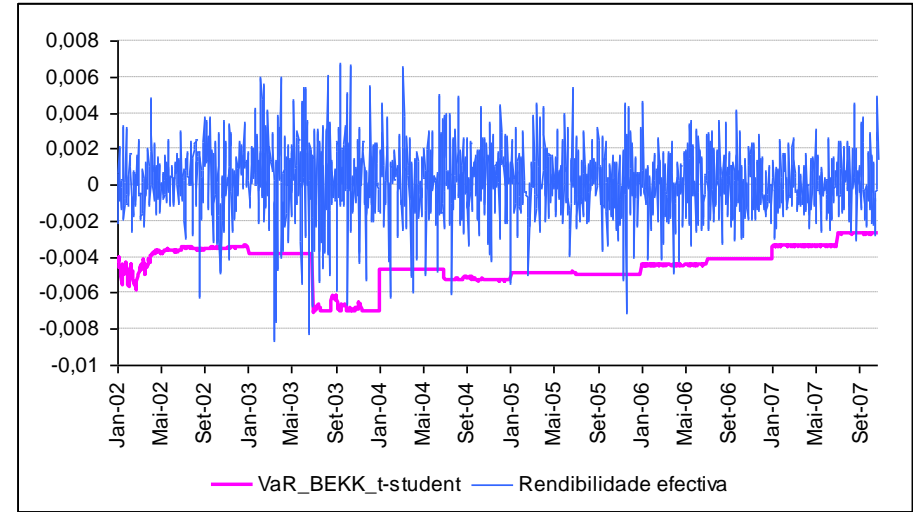
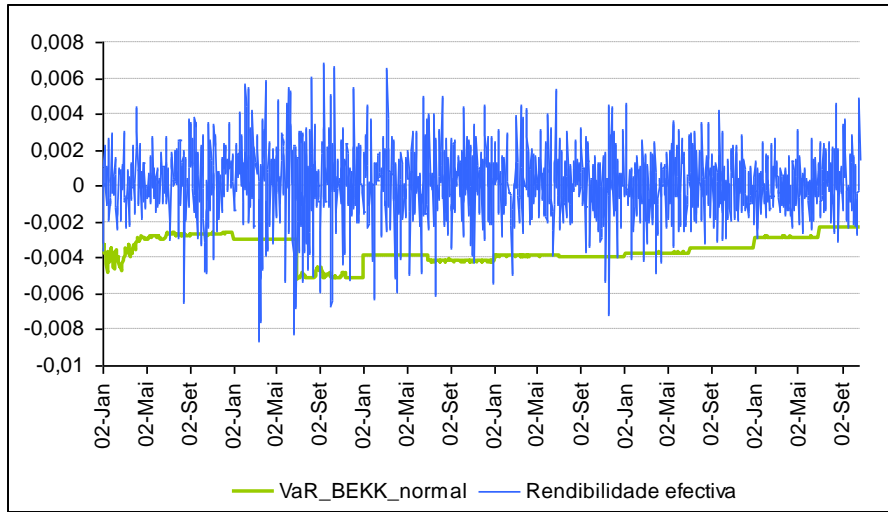


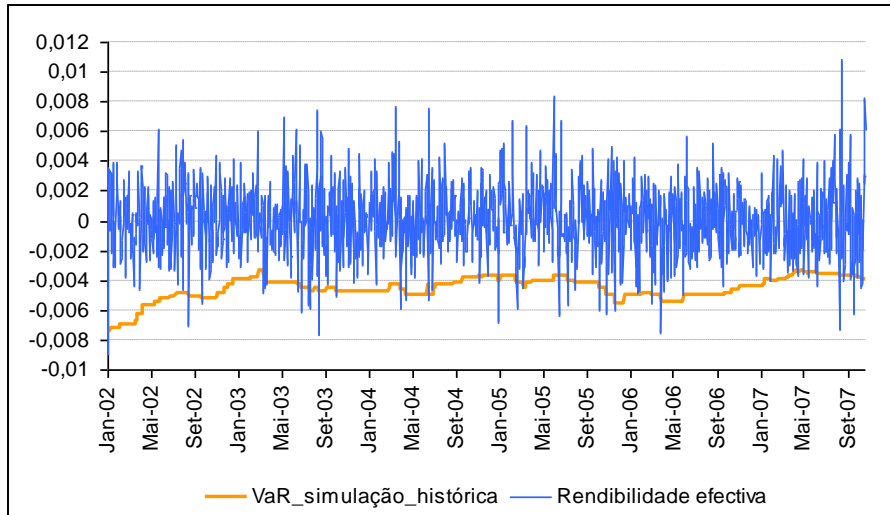




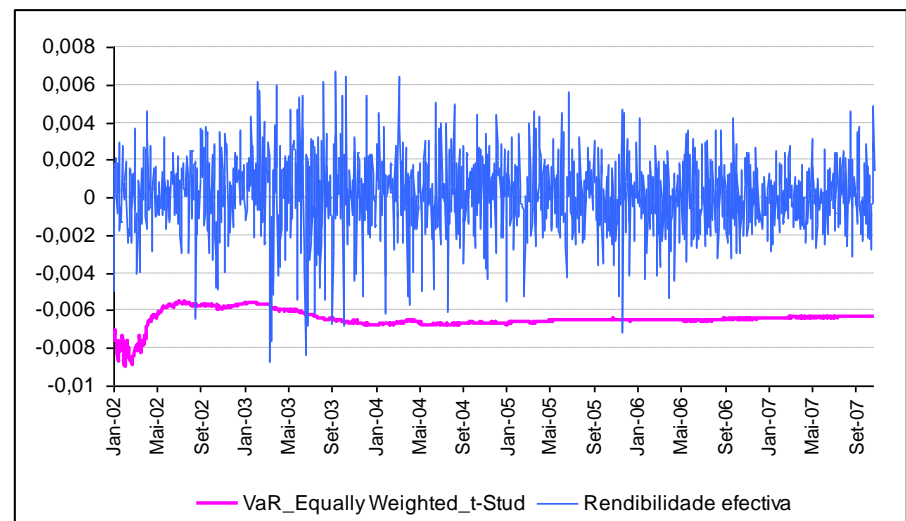
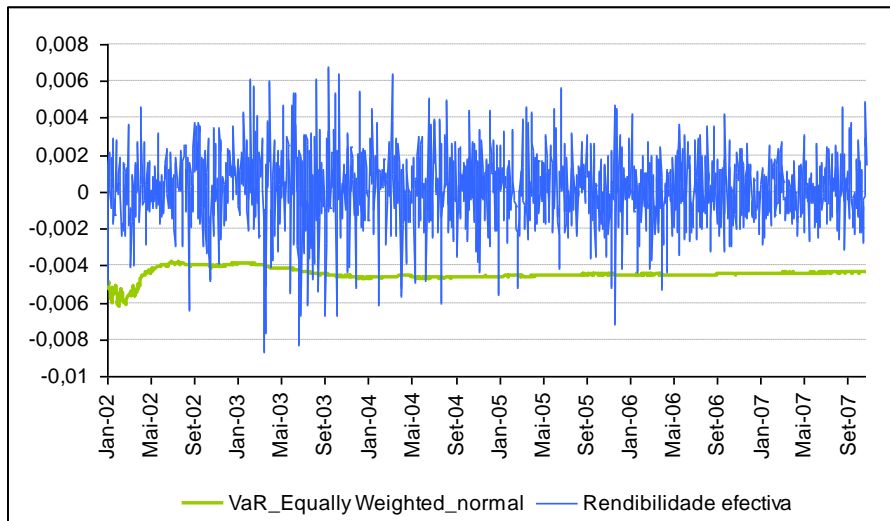
Painel 2 - Nível de significância de 2,5%

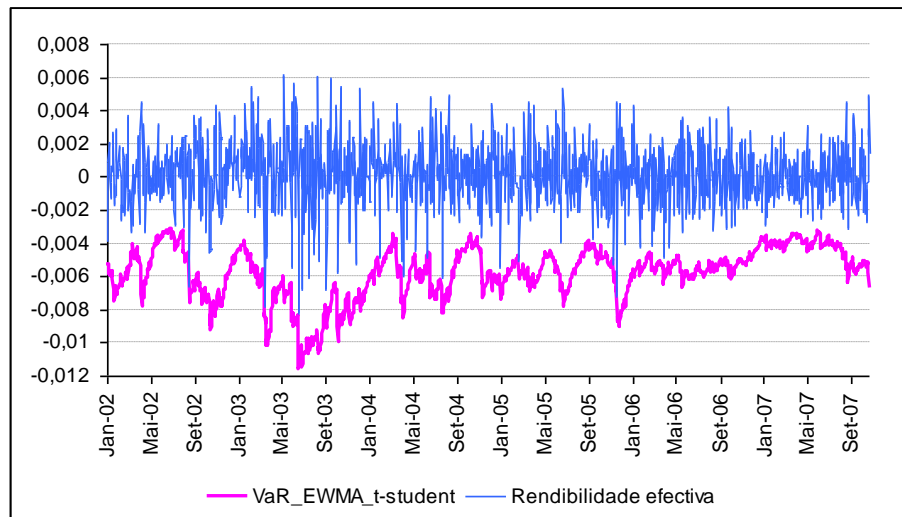
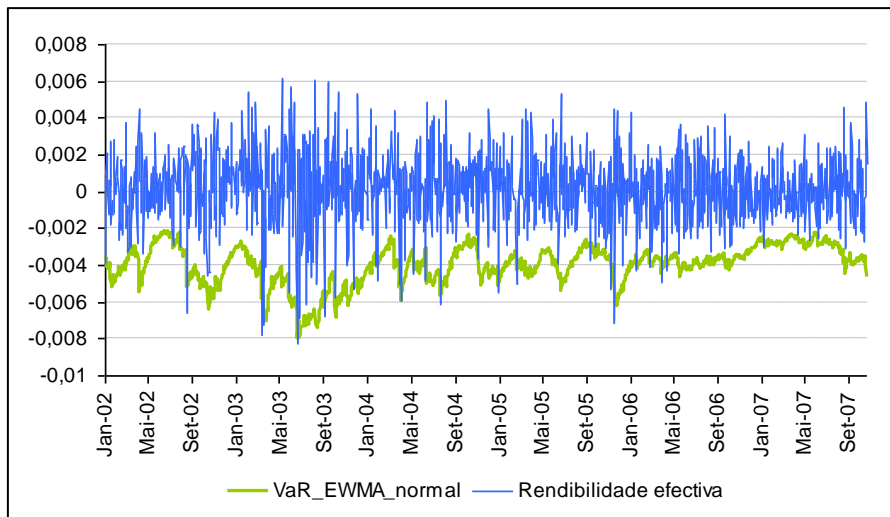
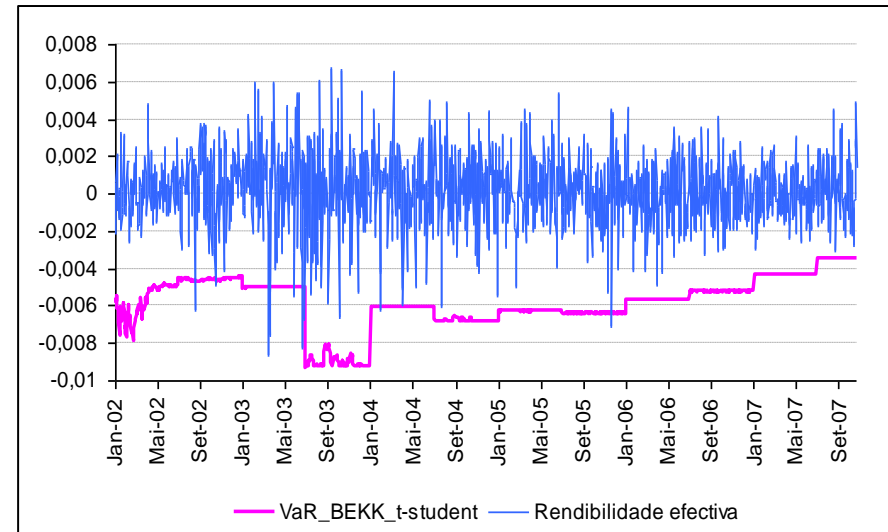
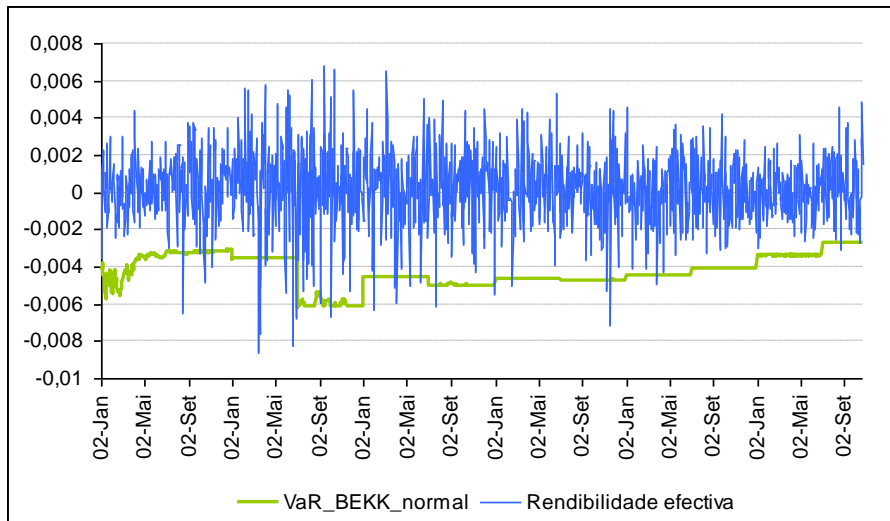


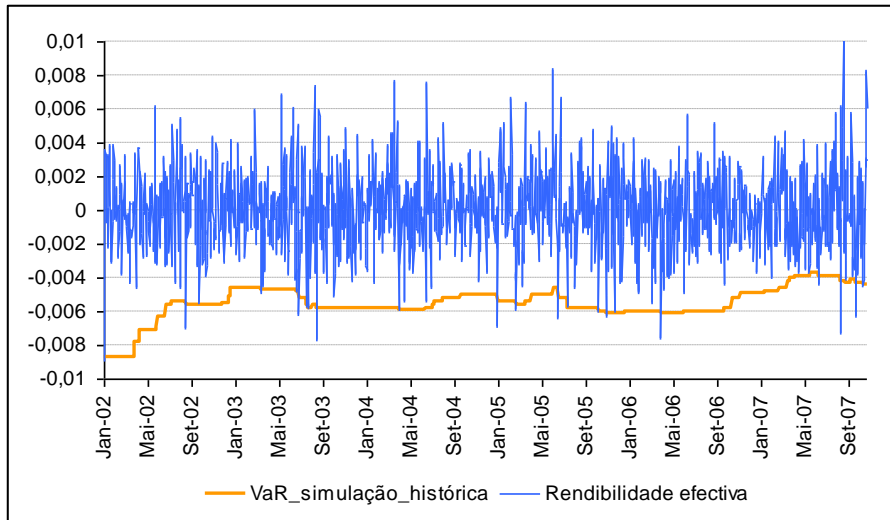




Panel 3 - Nível de significância de 1%







Nos gráficos anteriores podemos visualizar, para cada modelo estimado (assumindo em cada modelo paramétrico a distribuição Normal e a distribuição t-Student), e de acordo com cada nível de significância, a rendibilidade efectiva registada e o VaR estimado, de acordo com o portfolio óptimo obtido para cada dia e com a rendibilidade histórica. O período de análise é o período *out-of-sample* (2 de Janeiro de 2002 a 22 de Outubro de 2007).

Tabela 3 – Average VaR

	5%		2,5%		1%	
	percentil rendibilidade	VaR	percentil rendibilidade	VaR	percentil rendibilidade	VaR
Equally Weighted Normal	-0,002891	-0,003157	-0,004067	-0,003761	-0,005383	-0,004463
Equally Weighted t-Stud	-0,002891	-0,003866	-0,004067	-0,004933	-0,005383	-0,006457
BEKK Normal	-0,002831	-0,003003	-0,003914	-0,003578	-0,005294	-0,004247
BEKK t-Stud	-0,002816	-0,003543	-0,003933	-0,004479	-0,005294	-0,005788
EWMA Normal	-0,002723	-0,002828	-0,003902	-0,003370	-0,005250	-0,003999
EWMA t-Stud	-0,002723	-0,003464	-0,003902	-0,004420	-0,005250	-0,005786
Simulação Histórica	-0,003660	-0,003681	-0,004931	-0,004540	-0,005692	-0,005506

Nesta tabela podemos visualizar a média dos valores obtidos para a estatística Value at Risk (VaR) de acordo com cada modelo e para os níveis de significância de 1%, 2,5% e 5%, bem com os percentis de rendibilidade correspondentes.

Tabela 4 – Percentagem de exceções

	5%	2,50%	1%
Equally Weighted Normal	4,5033	2,9821	1,8555
Equally Weighted t-Stud	3,0464	1,6567	0,5302
BEKK Normal	4,8344	3,3797	2,0543
BEKK t-Stud	3,3797	1,6567	0,7290
EWMA Normal	4,9702	3,3797	1,7893
EWMA t-Stud	3,0484	1,6556	0,2651
Simulação Histórica	4,9039	2,6508	1,2591

Esta tabela apresenta a frequência observada de exceções, em percentagem, para cada um dos modelos para os níveis de significância de 1%, 2,5% e 5%. A exceção é definida como $R_t < VaR_t$, sendo o VaR_t calculado de acordo com cada modelo apresentado e para cada nível de significância (1%, 2,5% e 5%), com base nas rendibilidades registadas até t-1.

Tabela 5 – Teste de Kupiec (1995)

	5%	2,50%	1%
Equally Weighted Normal	0,368	0,244	0,003
Equally Weighted t-Stud	0,000	0,026	0,044
BEKK Normal	0,767	0,038	0,000
BEKK t-Stud	0,002	0,026	0,266
EWMA Normal	0,958	0,038	0,006
EWMA t-Stud	0,000	0,025	0,001
Simulação Histórica	0,864	0,710	0,331

Nesta tabela podemos visualizar os *p-values* para a estatística de Kupiec (1995) para os vários modelos e de acordo com os níveis de significância 1%, 2,5% e 5%. Os valores a negrito indicam a rejeição da hipótese nula de um modelo adequado à estimação do VaR para um nível de significância de 5%.

Tabela 6 – Teste de Christoffersen (1998)

	5,0%	2,5%	1,0%
Equally Weighted Normal	0,129	0,118	0,000
Equally Weighted t-Stud	0,000	0,005	n.d.
BEKK Normal	0,427	0,000	0,000
BEKK t-Stud	0,000	n.d.	n.d.
EWMA Normal	0,534	0,013	n.d.
EWMA t-Stud	0,000	n.d.	n.d.
Simulação Histórica	0,111	0,627	n.d.

Nesta tabela podemos visualizar os *p-values* para o teste conjunto proposto por Christoffersen (1998) para os vários modelos e de acordo com os níveis de significância 1%, 2,5% e 5%. Os valores a negrito indicam a rejeição da hipótese nula de um modelo adequado à estimação do VaR para um nível de significância de 5%.

Tabela 7 – Percentagem de dias em que o modelo EWMA apresenta níveis de capital requerido inferiores

	Percentagem de dias	p-value
Equally Weighted Normal	42,48	0,000
Equally Weighted t-Stud	100,00	0,000
BEKK Normal	59,12	0,000
BEKK t-Stud	86,00	0,000
EWMA Normal	-	-
EWMA t-Stud	85,52	0,000
Simulação Histórica	87,60	0,000

Nesta tabela podemos visualizar o número de dias em que o modelo *benchmark* (EWMA-Normal) regista menores níveis de capital requerido comparando com os restantes modelos. Os valores a negrito indicam a rejeição da hipótese nula de igual nível de capital requerido para um nível de significância de 5%, usando a estatística *Diebold- Mariano*.